

Bài tập chương 1

Phần 1

Bài 1. Chứng minh rằng

- $a + b$ có thể nhỏ hơn $\min(a, b)$.
- $a \times b$ có thể nhỏ hơn $\min(a, b)$.

Bài 2. Bài toán hành trình người du lịch: Cho vị trí n thành phố trong không gian. Từ một thành phố ban đầu, một người du lịch muốn đi thăm tất cả n thành phố đó, sau đó quay trở lại thành phố ban đầu. Hãy xây dựng hành trình của người du lịch sao cho quãng đường người đó phải đi là ngắn nhất.

Tìm các phản ví dụ cho các thuật toán sau:

Gọi L là danh sách các thành phố

(a) Thuật toán 1. NearestNeighbor(L)

Chọn và thăm thành phố khởi đầu p_0 từ L

$p = p_0$

$i = 0$

Trong khi vẫn tồn tại thành phố chưa thăm

$i = i + 1$

Chọn p_i là thành phố chưa thăm mà gần nhất với thành phố vừa thăm p_{i-1}

Thăm p_i

Trở về p_0 từ thành phố p_{n-1}

(b) Thuật toán 2. ClosestPair(P)

Gọi n là số lượng thành phố trong L .

For $i = 1$ to $n - 1$ do

$d = \infty$

Với mỗi cặp (s, t) trong tập các cặp thành phố có thể

Nếu $\text{dist}(s, t) \leq d$ thì $sm = s$, $tm = t$, và $d = \text{dist}(s, t)$

Kết nối (sm, tm) bởi 1 cạnh

Kết nối hai điểm cuối cùng bằng 1 cạnh

Trong đó $\text{dist}(s, t)$ là khoảng cách giữa 2 thành phố s và t .

Bài 3. Cho một tập các số nguyên $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, và một giá trị đích T , Tìm một tập con của S sao cho tổng các số trong tập con đó đúng bằng T . Ví dụ, Tồn tại một tập con trong $S = \{1, 2, 5, 9, 10\}$ mà tổng là $T = 22$ nhưng lại không tồn tại với $T = 23$.

Tìm các phản ví dụ cho các thuật toán sau

(a) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ trái qua phải nếu chúng phù hợp (thuật toán first-fit).

(b) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ nhỏ đến lớn (thuật toán best-fit).

(c) Lần lượt chọn các phần tử trong S theo thứ tự từ lớn nhất đến nhỏ nhất.

Bài 4. Bài toán tập bao trùm (*set cover problem*) được định nghĩa như sau:

Cho một tập S gồm các tập con S_1, \dots, S_m của tập vũ trụ $U = \{1, \dots, n\}$. Tìm số lượng tập con nhỏ nhất $T \subset S$ sao cho $\bigcup_{T_i \in T} T_i = U$. Ví dụ, có các tập con, $S_1 = \{1, 3, 5\}$, $S_2 = \{2, 4\}$, $S_3 = \{1, 4\}$, và $S_4 = \{2, 5\}$ Tập con bao trùm sẽ là S_1 và S_2 .

Tìm một phản ví dụ của thuật toán tìm các tập bao trùm sau: Lựa chọn tập con có số lượng phần tử lớn nhất (có độ bao phủ lớn nhất), và sau đó loại bỏ các phần tử của tập đó trong tập vũ trụ U . Lặp lại việc thêm các tập con chứa số lượng các phần tử chưa bị bao phủ phần tử lớn nhất cho tới khi tất cả các phần tử của tập vũ trụ được bao phủ.

Bài 5. Chứng minh các khẳng định sau bằng phương pháp quy nạp

a) $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$ với mọi $n \geq 0$

b) $\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4$ với mọi $n \geq 0$

c) $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ với mọi $n \geq 1$

e) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \geq 0$

Bài 6. Tốc độ truy cập ổ đĩa cứng thường được tính theo milliseconds (phần nghìn của giây) hay microseconds (Phần triệu của giây)? Tốc độ truy cập trên RAM là khoảng bao nhiêu? Số lượng chỉ lệnh - instructions mà một CPU có thể thực hiện trong 1 năm là bao nhiêu nếu máy đó được chạy liên tục trong suốt thời gian.

Bài 7. Một thuật toán sắp xếp cần 1 giây để sắp xếp 1,000 phần tử trên một máy tính, thời gian nó cần để sắp xếp 10,000 Phần tử sẽ là bao nhiêu nếu:

(a) thuật toán sắp xếp có thời gian thực hiện tỉ lệ bình phương với kích thước dữ liệu, và

(b) thuật toán sắp xếp có thời gian thực hiện tỉ lệ cỡ $n \log n$ với kích thước dữ liệu? (n là kích thước dữ liệu – số phần tử cần sắp xếp)

Bài 8. Cài đặt 2 thuật toán người du lịch ở trong bài 2. Trong thực tế thì thuật toán nào là tốt hơn? Bạn có thể đề xuất một thuật toán tốt hơn không ?

Bài 9. Cài đặt thuật toán tối ưu để chọn ra số lượng bộ phim xem được nhiều nhất đã được mô tả trong slide

Bài 10. Viết hàm thực hiện phép chia số nguyên mà không dùng các toán tử / hoặc *. Hãy tìm các thực hiện nhanh nhất.

Bài 11. Bạn có 25 con ngựa. Tại mỗi lần đua thì chỉ có thể cho tối đa 5 con ngựa tham gia. Bạn phải xác định 3 con ngựa là nhanh nhất, nhì và ba trong 25 con ngựa. Hãy tìm số lượng vòng đua tối thiểu để có thể thực hiện việc này.