Bài tập chương 1

Phần 2

Bài 1. Xác định giá trị trả về của các hàm sau (dưới dạng 1 hàm của n), và phân tích thời gian thực hiện trong trường hợp tồi nhất sử dụng ký hiệu O-lớn.

a) Hàm `mystery`

```
int mystery(int n)
{
	int r = 0;
	for (int i = 1; i<n; i++)
		for (int j = i + 1; j<=n; j++)
			for (int k = 1; k<=j; k++)
				r = r + 1;
	return r;
}
```

b) Hàm `pesky`

```
int pesky(int n)
{
	int r = 0;
	for (int i = 1; i<= n; i++)
		for (int j = 1; j<= i; j++)
			for (int k = j; k<= i + j; k++)
				r = r + 1;
	return r;
}
```

c) Hàm `prestiferous`

```
int prestiferous(int n)
{
	int r = 0;
	for (int i = 1; i<= n; i++)
		for (int j = 1; j<= i; j++)
			for (int k = j; k<= i + j; k++)
				for (int l = 1; l<= i + j - k; l++)
					r = r + 1;
	return r;
}
```

d) Hàm `conundrum`

```
int conundrum(int n)
{
	int r = 0;
	for (int i = 1; i<= n; i++)
		for (int j = i + 1; j<= n; j++)
			for (int k = i + j - 1; k<= n; k++)
				r = r + 1;
```

```
        return r;
    }
```

Bài 2. Xác định mối quan hệ giữa các cặp hàm $f(n), g(n)$. Các mối quan hệ có thể có là $f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)), f(n) = \Theta(g(n))$.

a) $f(n) = \log n^2, g(n) = \log n + 5$.
b) $f(n) = \sqrt{n}, g(n) = \log n^2$.
c) $f(n) = \log^2 n, g(n) = \log n$.
d) $f(n) = n, g(n) = \log^2 n$.
e) $f(n) = n \log n + n, g(n) = \log n$.
f) $f(n) = 2^n, g(n) = 10n^2$
g) $f(n) = 10, g(n) = \log 10$
h) $f(n) = 2^n, g(n) = 3^n$

Bài 3. Với mỗi cặp hàm $f(n), g(n)$ sau thì quan hệ nào là đúng trong các quan hệ sau $f(n) = O(g(n))$, $g(n) = O(f(n))$, hoặc cả hai.

a) $f(n) = n(n-1)/2, g(n) = 6n$
b) $f(n) = n + 2\sqrt{n}, g(n) = 3n$
c) $f(n) = n + \sqrt{n}, g(n) = n^2$
d) $f(n) = n\log n, g(n) = n\sqrt{n}/3$
e) $f(n) = n + \log n, g(n) = 3\sqrt{n} + 10$
f) $f(n) = (\log n)^2, g(n) = n\log\sqrt{n}$
g) $f(n) = 4n + 3\log n, g(n) = n^2 + \sqrt{n}$

Bài 4. Chứng minh

a) $2n^2 + 3n - 6 = \Theta(n^2)$
b) $n^2 + 2\sqrt{n} = O(2^n)$
c) $n^3 - 3n + 3n^2 - 1 = \Omega(n^2)$

Bài 5. Xác định mối quan hệ giữa các cặp hàm $f(n)$ và $g(n)$ sau đây

a) $f(n) = n^{2.5} + 3(n-1), g(n) = 6n$
b) $f(n) = n^2 + 3\sqrt{n} - 1), g(n) = n^3$
c) $f(n) = 2n^{2.5} + n, g(n) = \sqrt{n^5}$

Bài 6. Chứng minh

a) Nếu $f_1(n) = O(g_1(n))$, và $f_2(n) = O(g_2(n))$ thì $f_1(n) + f_1(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$
b) Nếu $f_1(n) = \Omega(g_1(n))$, và $f_2(n) = \Omega(g_2(n))$ thì $f_1(n) + f_1(n) = \Omega(g_1(n) + g_2(n))$
c) Nếu $f_1(n) = O(g_1(n))$, và $f_2(n) = O(g_2(n))$ thì $f_1(n) \cdot f_1(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

Bài 7. Chứng minh

a) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n = O(x^n)$ với $n > 1$, và các hằng số $a_{0,}a_{1,}.., a_n$ là các hằng số bất kỳ
b) $(n+a)^k = \Theta(n^k)$ với $k \geq 1$, và a là hằng số bất kỳ

Bài 8. Sắp xếp các hàm dưới đây theo thứ tự tăng dần độ phức tạp

a) n, $\sqrt{n}$, $n + 3n^{1/2}$, $\lg n$, $n\log n$, $n + 3\ln n$, $n^2 + 3n^{1.5}$, $\log\log n$, $2n^3 + \log\log n$, n^3, $n - 2n^2 + 3n^{2.5}$, $n!$, $(\ln n)^2$, $n + 2n\log n^5$, 2^n
b) $6n$, $(2+a)^{10}$, $(n+3)^2$, $\frac{n+2^n}{n}$, $n!$, $n\log\log n$, $\frac{n+5n^3}{\lg n}$, $(1/3)^n$ với a là hằng số bất kỳ

Bài 9. Những khẳng định sau đây là đúng hay sai, tại sao?

a) $3^n = O(2^n)$
b) $\log(5^n) = O(\ln 2^n)$
c) $3^n = \Omega(2^n)$
d) $\log(5^n) = \Omega(\ln 2^n)$

Bài 10. Tìm dạng hàm $g(n)$ đơn giản mà $f(n) = \Theta(g(n))$ cho các hàm $f(n)$ sau đây

a) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
b) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$
c) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \log i$
d) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{1}{i} \right\rceil$
e) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \log(n!)$
f) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$
g) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^i$
h) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} 3^i + 2^{2i}$

Bài 11. Tìm các hàm $g(n)$ đơn giản mà $f(n) = \Theta(g(n))$ cho các hàm $f(n)$ sau đây

a) $f(n) = 2^n + n^2$
b) $f(n) = n^2 + n\sqrt{n} + \log n$
c) $f(n) = \log 20^n + n^2$
d) $f(n) = (\frac{2}{3})^n + n^3$

Bài 12. Chứng minh rằng

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n-1)/2$$

Bài 13. Xem xét đoạn chương trình in ra xâu “Hello” sau

```
for (i=1; i<=n; i++)
   for (j=i; j<=2*i; j++)
      printf("Hello");
```

Gọi $T(n)$ là số lần thực hiện lệnh in ra màn hình. Hãy

a) Xác định hàm $T(n)$ theo n.
b) Biểu diễn dạng rút gọn của $T(n)$ theo ký hiệu O lớn.

Bài 14. Xem xét đoạn chương trình in ra xâu “Hello” sau

```
for (i=1; i<= n/2; i++)
   for (j=i; j<= n-i; j++)
      for (k=1; k<= j; k++)
         printf("Hello");
```

Gọi $T(n)$ là số lần thực hiện lệnh in ra màn hình. Hãy

a) Xác định hàm $T(n)$ theo n.
b) Biểu diễn dạng rút gọn của $T(n)$ theo ký hiệu O lớn.

Bài 15. Bài toán khớp xâu:

Đầu vào: Một xâu t và một mẫu (xâu con) p
Đầu ra: p có xuất hiện trong t hay không, nếu có thì tại vị trí nào.

Ví dụ. $t = ABBAABCDBBA$ và $p = ABCD$

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
0|A B C
1|  A
2|    A
3|      A B
4|        A B C D
 ----------------------
  A B B A A B C D B B A
```

```
int findmatch(char *p, char *t)
{
   int i,j; /* counters */
   int m, n; /* string lengths */
   m = strlen(p);
   n = strlen(t);
   for (i=0; i<=(n-m); i=i+1) {
      j=0;
      while ((j<m) && (t[i+j]==p[j]))
           j = j+1;
        if (j == m) return(i);
   }
   return(-1);
}
```

Hãy phân tích thời gian chạy trong trường hợp tồi nhất của thuật toán trên sử dụng ký hiệu O-lớn. ở đây m, n lần lượt là độ dài của xâu p và t.

Bài 16. Nhân hai ma trận

Đầu vào: Ma trận A (kích thước $x \times y$) và ma trận B (kích thước $y \times z$)
Đầu ra: Ma trân $C = A \times B$ (kích thước $x \times z$)

```
for (i=1; i<=x; i++)
   for (j=1; j<=y; j++) {
      C[i][j] = 0;
      for (k=1; k<=z; k++)
         C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
}
```

Hãy phân thuật toán nhân hai ma trận trên theo O-lớn.

Bài 17. Nhân hai số nguyên: Để nhân 2 số nguyên a, b ta thực hiện theo cách nhân lần lượt a với các chữ số trong b (có tính trọng số) sau đó tính tổng. VD, $a = 120, b = 142$ thì $a \times b = 120 \times 100 + 120 \times 40 + 120 \times 2 = 17{,}040$. Phân tích độ phức tạp của thuật toán trên khi áp dụng để nhân hai số có n, m chữ số. Ở đây ta giả sử phép cộng hoặc nhân từng chữ số có thời gian thực hiện là hằng số(tức là $O(1)$)