Tối ưu hóa

Trường Công nghệ thông tin Phenikaa

Đại học Phenikaa

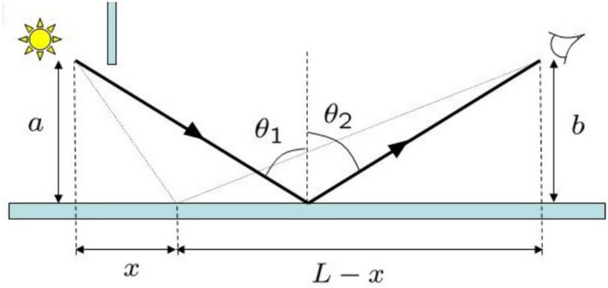
Tự nhiên "luôn" tối ưu

Namely, because the shape of the whole universe is most perfect and, in fact, designed by the wisest creator, nothing in all of the world will occur in which no maximum or minimum rule is somehow shining forth.

Cụ thể, bởi vì hình dạng của toàn bộ vũ trụ là hoàn hảo nhất và thực sự được thiết kế bởi một Đấng sáng tạo thông thái nhất, nên không có điều gì trong thế giới này xảy ra mà lại không thể hiện một quy luật cực đại hoặc cực tiểu theo một cách nào đó.

— Leonhard Euler (1744)

Ánh sáng - kẻ tiết kiệm thời gian



Hiện tượng phản xạ: Theo nguyên lý thời gian tối thiểu của Fermat ta có

$$\theta_1 = \theta_2.$$

Ong - kiến trúc sư đại tài

[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycombstructure

Ong - kiến trúc sư đại tài

Cấu trúc tổ ong cho phép sử dụng ít nguyên liệu nhất, nhẹ nhất, đồng thời có tỉ lệ *sức bền vật liệu/trọng lượng* cao.[1]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycombstructure

Tại sao bong bóng xà phòng có hình cầu?

Tại sao bong bóng xà phòng có hình cầu?

Lực căng sẽ khiến bong bóng chuyển dần sang hình dạng có chu vi nhỏ nhất (để cùng chứa một lượng không khí bị giữ bên trong) và đó chính là hình cầu.

Bài toán tối ưu

Từ rất xa xưa trong lịch sử toán học người ta đã quan tâm đến những bài toán tìm các giá trị nhỏ nhất (cực tiểu) hay lớn nhất (cực đại), gọi là các *bài toán tối ưu*.

Ví dụ 1. (Fermat-Toricelli) Cho ba điểm trên một mặt phẳng. Hãy tìm điểm trên mặt phẳng đó sao cho tổng khoảng cách tới ba điểm đã cho là nhỏ nhất.

Ví dụ 2. (Heron) Tìm điểm C trên đường thẳng cho trước sao cho tổng khoảng cách từ C đến hai điểm A, B là nhỏ nhất.

Ví dụ 3. (Kepler) Tìm hình trụ nội tiếp trong một hình cầu cho trước có thể tích lớn nhất.

Ví dụ 4. (Fermat) Tìm tam giác vuông có tổng hai cạnh góc vuông bằng một số cho trước sao cho diện tích của nó lớn nhất.

Ví dụ 5. (Knapsack) Có một tập hợp gồm n đồ vật khác nhau, kí hiệu là $1, \dots, n$. Biết rằng đồ vật k có khối lượng là m_k và có giá trị sử dụng là c_k, $k = 1, \dots, n$. Hãy lựa chọn một tập con các đồ vật để cho vào một cái ba lô sao cho tổng giá trị sử dụng của chúng là lớn nhất và tổng khối lượng của chúng không vượt quá khối lượng m cho trước của ba lô.

Ví dụ 6. (Lập kế hoạch sản xuất) Một xí nghiệp dự định sản xuất 2 loại sản phẩm là P_1 và P_2. Để sản xuất được một đơn vị sản phẩm loại P_1 cần 3 đơn vị vật liệu M_1, 5 đơn vị vật liệu M_2. Để sản xuất được một đơn vị sản phẩm loại P_2 cần 2 đơn vị vật liệu M_1, 3 đơn vị vật liệu M_2. Giá bán một đơn vị loại P_1 là 30 ngàn đồng, một đơn vị loại P_2 là 20 ngàn đồng. Hỏi xí nghiệp đó nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để tổng thu nhập là lớn nhất, biết rằng xí nghiệp đó chỉ có 2012 đơn vị vật liệu M_1, 2030 đơn vị vật liệu M_2, và có thể bán hết số sản phẩm sản xuất được.

Mô hình hóa bài toán lập kế hoạch sản xuất

Gọi:

x_1 : là số đơn vị sản phẩm P_1, x_2 : là số đơn vị sản phẩm P_2.

Bài toán:

$$\max \quad f(x) = 30x_1 + 20x_2$$

Điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 2012 & (\text{vật liệu } M_1) \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 2030 & (\text{vật liệu } M_2) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & (\text{không âm}) \end{cases}$$

Ví dụ 7. (Bài toán vận tải) Người ta cần vận chuyển một loại hàng hóa từ m kho chứa hàng (gọi là *điểm phát*) đến n điểm tiêu thụ (gọi là *điểm thu*). Biết rằng: Điểm phát thứ i chứa a_i đơn vị hàng, $i = 1, \ldots, m$; Điểm thu thứ j cần b_j đơn vị hàng, $j = 1, \ldots, n$. Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i đến điểm thu j là c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Vấn đề đặt ra là cần xác định lượng hàng cần chuyển từ mỗi điểm phát đến từng điểm tiêu thụ như thế nào để chi phí vận chuyển là cực tiểu.

Mô hình hóa bài toán vận tải

Ký hiệu x_{ij} là số lượng hàng cần vận chuyển từ điểm phát thứ i đến điểm thu thứ j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Các đại lượng x_{ij} tạo thành *ma trận phân phối hàng hóa*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Và ma trận

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận chi phí*.

Mô hình hóa bài toán vận tải

Để đơn giản, người ta thường xét bài toán vận tải với giả thiết:

i) $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$.
Điều đó có nghĩa là hàng hóa được chuyển theo một hướng từ các điểm phát đến các điểm thu, tức là các điểm thu không được trả lại hàng. Dễ thấy rằng $x_{i_0 j_0} = 0$ có nghĩa là hàng không được chuyển từ điểm phát i_0 đến điểm thu j_0.

ii) Hàng có thể chuyển từ một điểm phát đến một điểm thu bất kỳ và ngược lại, một điểm thu cũng có thể nhận hàng từ một điểm phát tùy ý sao cho các điểm phát phải phát hết hàng và các điểm thu thỏa mãn nhu cầu cần có, tức là:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Mô hình hóa bài toán vận tải

iii) Tổng lượng hàng ở m điểm phát đúng bằng tổng lượng hàng cần có ở n điểm thu (tổng cung bằng tổng cầu), tức

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Người ta thường gọi đây là *điều kiện cân bằng thu phát*.

Vì chi phí vận chuyển hàng từ điểm phát i đến điểm thu j là $c_{ij}x_{ij}$ nên tổng chi phí vận chuyển hàng từ tất cả các điểm phát đến tất cả các điểm thu là:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Mô hình hóa bài toán vận tải

Vậy, mô hình toán học của bài toán vận tải như sau:

$$
\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{v.đ.k.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 8. (Bài toán người bán hàng -Traveling Salesman Problem TSP)

Cho một tập hợp n thành phố và khoảng cách (hoặc chi phí) giữa từng cặp thành phố, bài toán yêu cầu tìm một hành trình ngắn nhất (hoặc chi phí thấp nhất) mà người bán hàng xuất phát từ một thành phố, đi qua mỗi thành phố đúng một lần và quay về điểm xuất phát, tạo thành một chu trình khép kín.

- Đầu vào: Một đồ thị hoàn chỉnh có trọng số, với n đỉnh (thành phố) và các cạnh có trọng số (khoảng cách/chi phí).
- Đầu ra: Một chu trình Hamilton (đi qua tất cả các đỉnh đúng một lần) có tổng trọng số nhỏ nhất.
- Ràng buộc: Mỗi thành phố chỉ được thăm một lần, trừ điểm xuất phát (cũng là điểm kết thúc).

Ví dụ 9. (Bài toán tìm tâm cụm)

Cho tập hợp k điểm $\{a^1, a^2, ..., a^k\} \subset \mathbb{R}^n$. Tìm điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ sao cho tổng khoảng cách từ mỗi điểm a^i, $i = 1, 2, ..., k$ đến x^* là nhỏ nhất.
Mô hình toán học của bài toán này như sau:

$$f(x) = \|x - a^1\| + ... + \|x - a^k\| \to \min .$$

Nếu ta coi mỗi a^i là một trung tâm dân cư còn x^* là địa điểm cần xây dựng một cơ sở dịch vụ (trường học, siêu thị, bệnh viện,...) thì đây là bài toán lựa chọn địa điểm xây dựng một cơ sở dịch vụ sao cho tổng độ dài các đường đi từ mỗi khu dân cư đến cơ sở dịch vụ đó là ngắn nhất có thể.

Ví dụ 10. (Bài toán xác định khẩu phần thức ăn)

Một nông trường chăn nuôi cần mua n loại thức ăn cho gia súc. Người ta cần xác định khẩu phần rẻ nhất cho gia súc mà vẫn đảm bảo được yêu cầu về m loại chất dinh dưỡng cho bữa ăn của chúng. Biết rằng: khẩu phần thức ăn của gia súc phải có ít nhất b_i đơn vị dưỡng chất, $i = 1, 2, ..., m$. Lượng chất dinh dưỡng loại i có trong một đơn vị khối lượng thức ăn loại j là $a_{ij}, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$. Giá một đơn vị thức ăn loại j là $p_j, j = 1, 2, ..., n$. Gọi x_j là khẩu phần thức ăn loại j của gia súc, $x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$. Mô hình của bài toán này là

$$f(x) = x_1p_1 + ... + x_np_n \to \min$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i, i = 1, 2, ..., m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Bài toán tối ưu

$$\begin{aligned} &\text{maximize/minimize} && f(x) \\ &\text{với điều kiện (s.t.)} && x \in C. \end{aligned}$$

- *Biến* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Hàm mục tiêu* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- *Điều kiện ràng buộc* $x \in C$ (*tập hợp chấp nhận được* C).

Bài toán tối ưu

$$\begin{array}{ll} \text{maximize/minimize} & f(x) \\ \text{với điều kiện (s.t.)} & x \in C. \end{array}$$

- *Biến* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- *Hàm mục tiêu* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- *Điều kiện ràng buộc* $x \in C$ (*tập hợp chấp nhận được* C).

- Do $\min\{f(x) \mid x \in C\} = -\max\{-f(x) \mid x \in C\}$ nên bài toán tìm cực tiểu đưa được về bài toán tìm cực đại và ngược lại.

  x, f, C của các bài toán thực tế đến từ quá trình mô hình hóa.

- Trường hợp $C = \mathbb{R}^n$ ta có bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

• Trường hợp $C = \mathbb{R}^n$ ta có bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

• Trái lại, (P) là bài toán tối ưu có ràng buộc. Khi ấy tập C thường được cho bởi:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, m, h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p\}.$$

với $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm số cho trước.

Môn học Tối ưu hóa

- Số tín chỉ: 03 (45 tiết lý thuyết)
- Yêu cầu: tham dự $\geq 80\%$ các buổi học

Phương thức đánh giá:

- Chuyên cần (10%): Điểm danh + Bài tập
- 01 bài kiểm tra giữa kỳ (40%): trắc nghiệm+tự luận
- 01 bài thi cuối kỳ (50%): trắc nghiệm

Các nội dung học

- Quy hoạch tuyến tính: Khi $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_k$ là các hàm tuyến tính hoặc affine.
  Ứng dụng: bài toán lập kế hoạch sản xuất, bài toán vận tải,...

- Quy hoạch phi tuyến: Khi $f(x)$ không tuyến tính hoặc có ít nhất một trong các hàm $g_i(x), h_j(x)$ là hàm phi tuyến.
  Ứng dụng: học máy và trí tuệ nhân tạo, quản lý danh mục đầu tư, điều khiển tối ưu,...

- Quy hoạch toàn phương: Khi f là hàm toàn phương, và g_i, h_j là các hàm affine.
  Ứng dụng: tương tự quy hoạch phi tuyến tổng quát.

Một số khái niệm khác:

- Quy hoạch nguyên: bài toán tối ưu trong đó một số hoặc tất cả các biến quyết định phải nhận giá trị nguyên (số nguyên).
  Ứng dụng: bài toán knapsack, phân công công việc,...
- Quy hoạch động: phương pháp chia bài toán lớn thành các bài toán con nhỏ hơn, giải từng bài toán con và lưu kết quả để sử dụng lại, nhằm tối ưu hóa hiệu quả tính toán.
  Ứng dụng: tìm đường đi ngắn nhất, phân bổ tài nguyên, huấn luyện mô hình học máy,...

Tài liệu tham khảo

Download sách: http://libgen.is/

1. Steven Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press (2004). ISBN: 0521833787 (link download https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/)
2. Rhinehart, R. Russell, *Engineering Optimization : Applications, Methods and Analysis*. WiLey (2018).
3. Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer New York, NY (2006).

Tài liệu tiếng Việt

- Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Thị Thu Thủy, *Giáo trình Tối ưu phi tuyến*, NXB ĐGQGHN, 2011.
- Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương, *Quy hoạch tuyến tính*, NXB. Giáo dục, 2003.