

Bài Thu Hoạch Môn Phương Pháp Tính

Trần Nam Hưng, Lý Thạch Hào, Lê Phát Tài, Mai Nhật Hảo

Ngày 22 tháng 6 năm 2021

Mục lục

1	Nội suy hàm số	1
1.1	Nội suy hàm số	1
1.2	Đa thức nội suy Newton	3
1.3	Hàm nội suy Spline(3, 1) cho dữ liệu I	4
2	Ngoại suy hàm số	6
2.1	Hồi quy tuyến tính	7
2.2	Hồi quy đa thức	8
2.3	Hồi quy phi tuyến tính	9
2.3.1	Hồi quy dạng $y = \frac{1}{ax+b}$	9
2.3.2	Hồi quy dạng $y = axe^{bx}$	10
2.3.3	Hồi quy dạng $y = a \cos x + b \sin x + c$	11
2.4	Kết luận	12
3	Phụ lục	13
3.1	Trình lệnh ngoại suy hàm số	13

Tóm tắt nội dung

Bộ tứ Anscombe bao gồm bốn tập dữ liệu, mỗi bộ gồm 11 cặp (x,y) , có những mô tả thống kê cơ bản gần như giống hệt nhau, nhưng lại có phân bố và hình dạng rất khác nhau khi được vẽ đồ thị. Chúng được xây dựng vào năm 1973 bởi nhà thống kê Francis Anscombe để cho thấy tầm quan trọng của việc vẽ đồ thị trước khi phân tích dữ liệu cũng như tác động của giá trị ngoại lai và những yếu tố khác lên các tính chất thống kê.

Bảng 1: Tập dữ liệu bộ tứ Anscombe.

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

Sau đây là một số thống kê mô tả cho bốn biến I, II, III, IV của dữ liệu

Bảng 2: Một số thống kê mô tả cho bốn biến I, II, III, IV của dữ liệu.

Tính chất	Giá trị
Đường thẳng hồi quy tuyến tính	$y = 3.00 + 0.500x$
Trung bình của biến x	9
Trung bình của biến y	7.50
Phương sai mẫu của biến x	11
Phương sai mẫu của biến y	4.125
Hệ số tương qua giữa x và y	0.816

Chương 1

Nội suy hàm số

1.1 Nội suy hàm số

Dữ liệu I

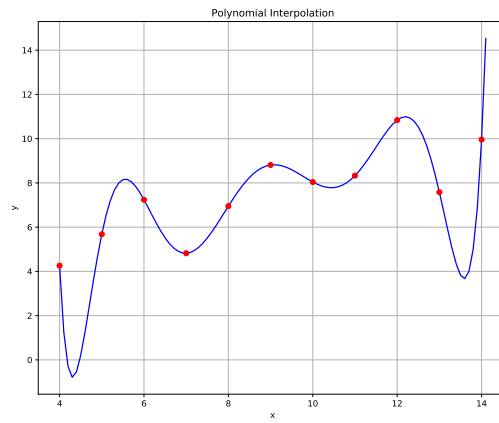
$$y_1 = 1.24 \times 10^{-5}x^{10} - 0.001164x^9 + 0.04908x^8 - 1.221x^7 + 19.79x^6 \\ - 217.7x^5 + 1640x^4 - 8327x^3 + 27180x^2 - 51370x + 42570$$

Dữ liệu II

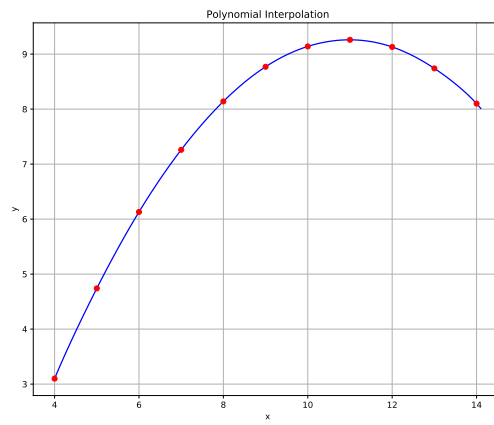
$$y_2 = -1.488 \times 10^{-7}x^{10} + 1.339 \times 10^{-5}x^9 - 0.0005335x^8 + 0.01237x^7 - 0.185x^6 \\ + 1.86x^5 - 12.73x^4 + 58.55x^3 - 173.1x^2 + 299.2x - 229.5$$

Dữ liệu III

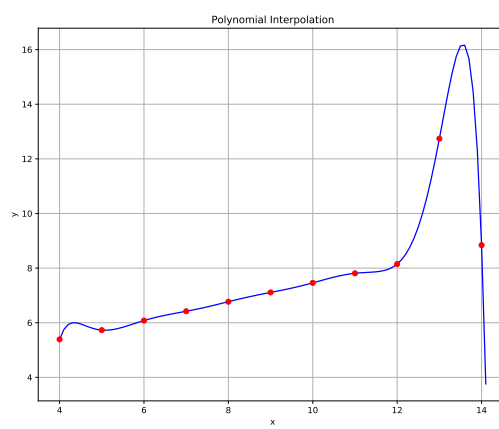
$$y_3 = -1.134 \times 10^{-5}x^{10} + 0.0009728x^9 - 0.03704x^8 + 0.8237x^7 - 11.84x^6 + 115x^5 \\ - 763.1x^4 + 3417x^3 - 9871x^2 + 1.661 \times 10^4x - 1.235 \times 10^4$$



(a) Đồ thị của I



(b) Đồ thị của II



(c) Đồ thị của III

1.2 Đa thức nội suy Newton

Ta có hàm nội suy Newton

$$N = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \quad (\text{Newton})$$

Thiết lập hàm nội suy Newton cho bảng dữ liệu (1) ta được

$$N = A$$

$$+ B(x - 10)$$

$$+ C(x - 10)(x - 8)$$

$$+ D(x - 10)(x - 8)(x - 13)$$

$$+ E(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)$$

$$+ F(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)$$

$$+ G(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)(x - 14)$$

$$+ H(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)(x - 14)(x - 6)$$

$$+ I(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)(x - 14)(x - 6)(x - 4)$$

$$+ J(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)(x - 14)(x - 6)(x - 4)(x - 12)$$

$$+ K(x - 10)(x - 8)(x - 13)(x - 9)(x - 11)(x - 14)(x - 6)(x - 4)(x - 12)(x - 7)$$

Vì $y_i = N(x_i)$ nên ta cho qua các mốc nội suy y_1 ta được kết quả

$$A = 8.04, B = 0.545, C = -0.1397, D = 0.2938, E = -0.1605,$$

$$F = 0.0425, G = 0.0121, H = 0.0230, I = 0.009, J = 0.026, K = 0.0109$$

1.3 Hàm nội suy Spline(3, 1) cho dữ liệu I

Ta gọi đa thức bậc ba $A(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua bốn mốc nội suy lần lượt là $(4, 4.26)$, $(5, 5.68)$, $(6, 7.24)$, $(7, 4.82)$ ta tìm được

$$y = \frac{-71}{100}x^3 + \frac{639}{150}x^2 + \frac{-7597}{100}x + \frac{1491}{10}$$

Gọi đa thức bậc ba $B(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua ba mốc nội suy $(7, 4.82)$, $(8, 6.95)$, $(9, 8.81)$ và thỏa $B'(7) = A'(7)$ ta tìm được

$$y = \frac{-24593}{400}x^3 + \frac{295089}{200}x^2 + \frac{-4695601}{400}x + \frac{3096953}{100}$$

Gọi đa thức bậc ba $C(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua ba mốc nội suy $(9, 8.81)$, $(10, 8.04)$, $(11, 8.33)$ và thỏa $C'(9) = B'(9)$ ta tìm được

$$y = \frac{-18740627}{312500}x^3 + \frac{112476887}{62500}x^2 + \frac{-5606834973}{312500}x + \frac{1857304573}{31250}$$

Gọi đa thức bậc ba $D(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua ba mốc nội suy $(11, 8.33)$, $(12, 10.84)$, $(13, 7.58)$ và thỏa $D'(11) = C'(11)$ ta tìm được

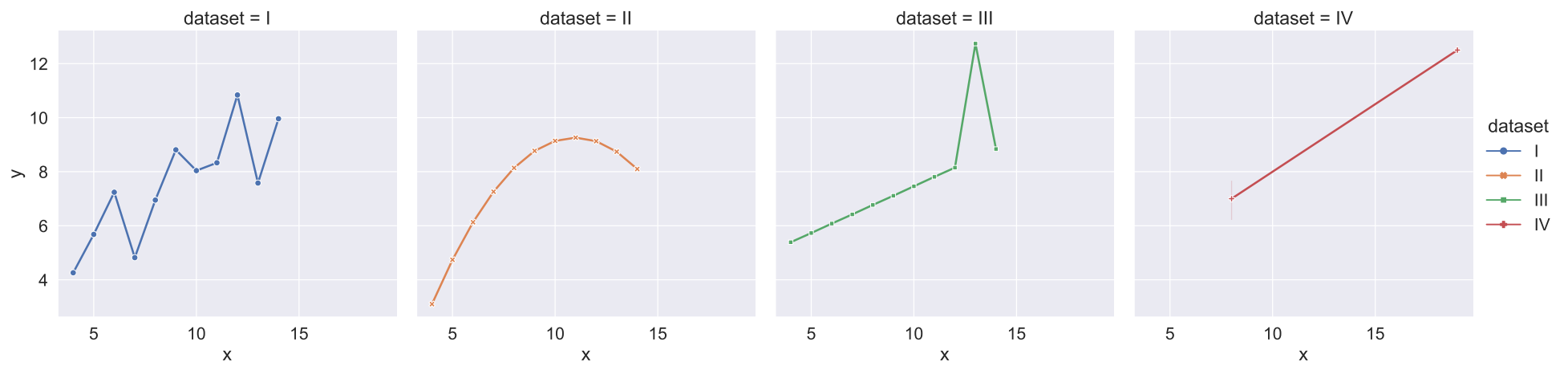
$$y = \frac{-17006877}{3250000}x^3 + \frac{301435661}{1625000}x^2 + \frac{-7106152737}{3250000}x + \frac{536220691}{62500}$$

Gọi đa thức bậc hai $E(x)$ có dạng $y = ax^2 + bx + c$ đi qua hai mốc nội suy $(13, 7.58)$, $(14, 9.96)$ và thỏa $E'(11) = D'(11)$ ta tìm được

$$y = \frac{372538523}{250000000}x^2 + \frac{-9463540121}{250000000}x + \frac{30981005593}{125000000}$$

Vậy ta có

$$f(x) = \begin{cases} A(x) & \text{kh } x \in [4, 7] \\ B(x) & \text{kh } x \in [7, 9] \\ C(x) & \text{kh } x \in [9, 11] \\ D(x) & \text{kh } x \in [11, 13], \\ E(x) & \text{kh } x \in [13, 14] \end{cases}$$



Hình 1.1: Đồ thị biểu diễn Spline(1,0) cho bộ tứ Anscombe.

(a) Đồ thị của *I*

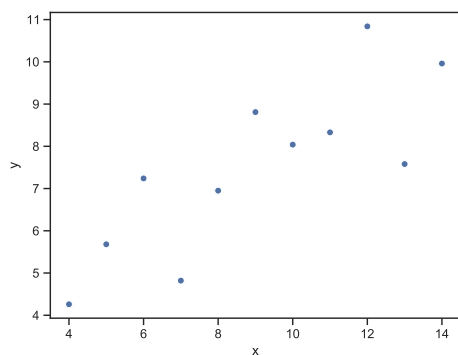
(b) Đồ thị của *II*

(c) Đồ thị của *III*

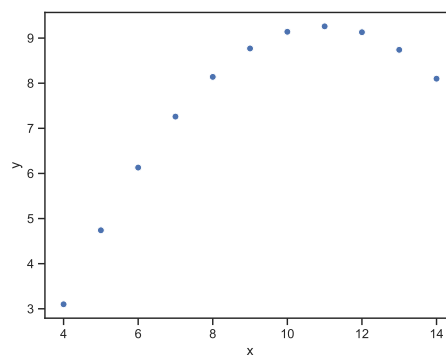
Hình 1.2: Đồ thị biểu diễn Spline(3,0) cho bộ tứ Anscombe.

Chương 2

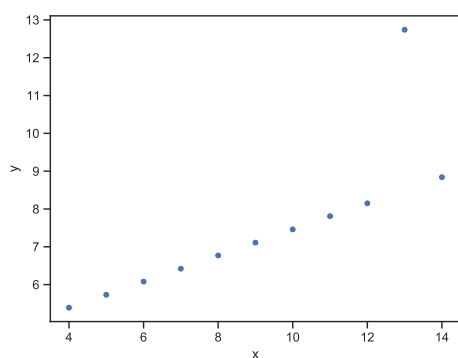
Ngoại suy hàm số



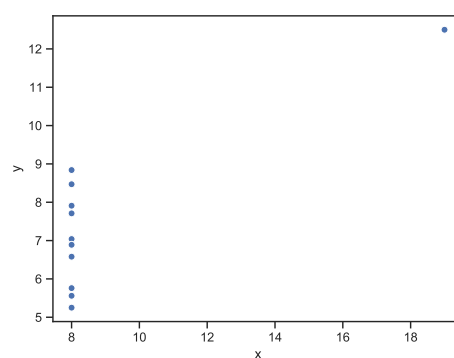
(a) Đồ thị của *I*



(b) Đồ thị của *II*



(c) Đồ thị của *III*



(d) Đồ thị của *IV*

Hình 2.1: Đồ thị của bộ tứ Anscombe.

2.1 Hồi quy tuyến tính

Ta có bảng kết quả sau đây khi tính toán các hệ số hồi quy tuyến tính đối với bộ dữ liệu Anscombe

$$y_1 = 0.5001x_1 + 3.0001$$

$$y_2 = 0.500x_2 + 3.0009$$

$$y_3 = 0.4997x_3 + 3.0025$$

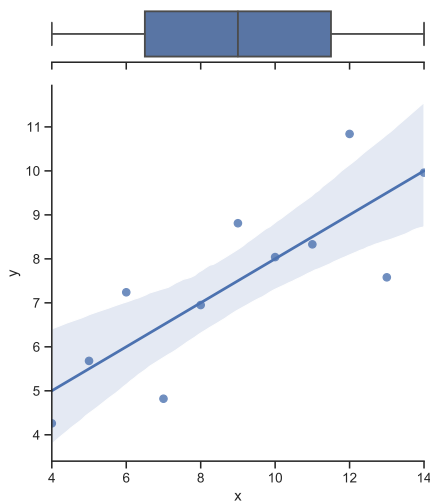
$$y_4 = 0.4999x_4 + 3.0017$$

sai số 3.7098,

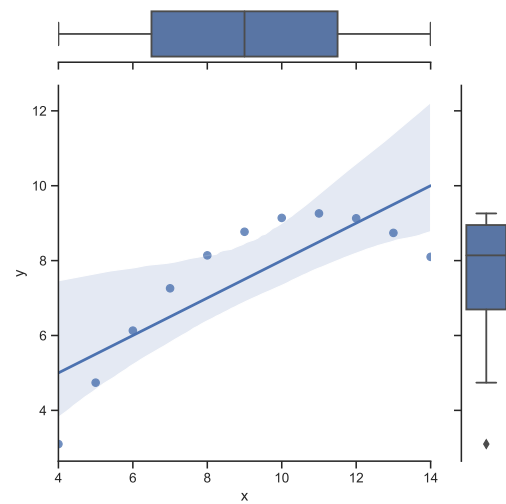
sai số 3.7116,

sai số 3.7089,

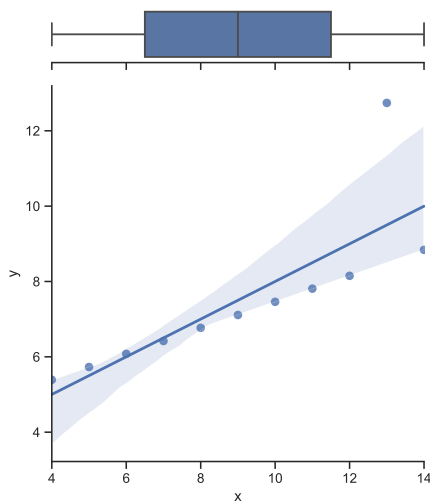
sai số 3.7071.



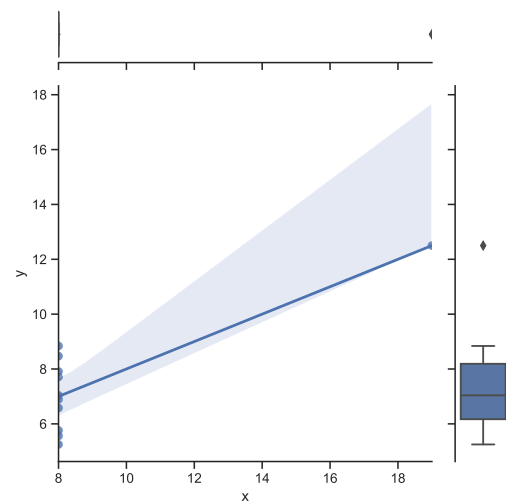
(a) Đồ thị của y_1



(b) Đồ thị của y_2



(c) Đồ thị của y_3



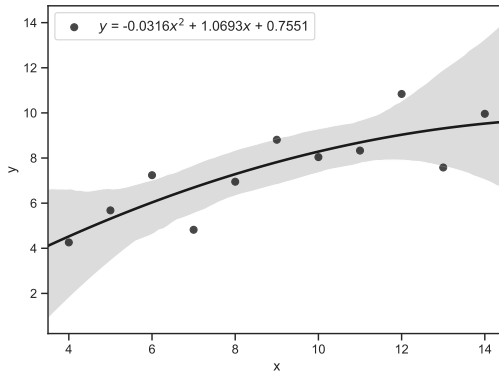
(d) Đồ thị của y_4

Hình 2.2: Đồ thị của mô hình hồi quy tuyến tính $y = ax + b$.

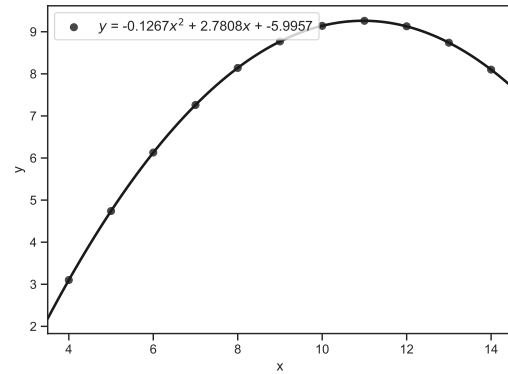
2.2 Hồi quy đa thức

Ta có bảng kết quả sau đây khi tính toán các hệ số hồi quy tuyến tính đối với bộ dữ liệu Anscombe

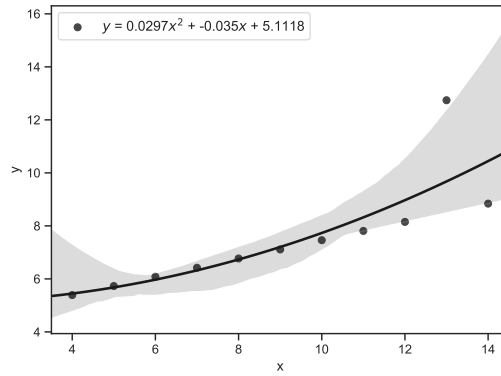
$$\begin{array}{ll} y_1 = -0.0316x_1^2 + 1.0693x_1 + 0.7551 & \text{sai số 3.5923,} \\ y_2 = -0.1267x_2^2 + 2.7808x_2 - 5.9957 & \text{sai số 0.0047,} \\ y_3 = 0.0297x_3^2 - 0.0350x_3 + 5.1118 & \text{sai số 3.6054.} \end{array}$$



(a) Đồ thị của y_1



(b) Đồ thị của y_2



(c) Đồ thị của y_3

Hình 2.3: Đồ thị của mô hình hồi quy đa thức $y = ax^2 + bx + c$.

2.3 Hồi quy phi tuyến tính

2.3.1 Hồi quy dạng $y = \frac{1}{ax+b}$

Ta có bảng kết quả sau đây khi tính toán các hệ số hồi quy tuyến tính đối với bộ dữ liệu Anscombe

$$y_1 = \frac{1}{-0.0107x_1 + 0.2404}$$

sai số 4.3490,

$$y_2 = \frac{1}{-0.0147x_2 + 0.2809}$$

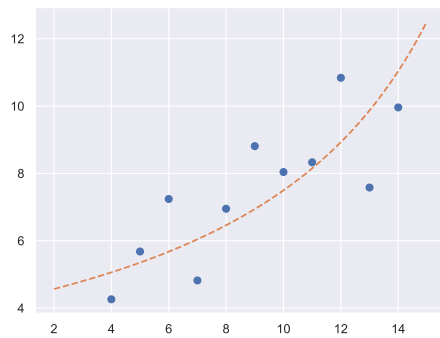
sai số 7.0769,

$$y_3 = \frac{1}{-0.0086x_3 + 0.2174}$$

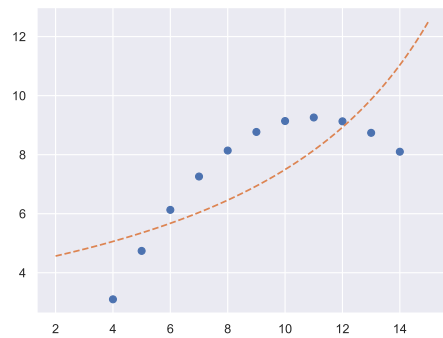
sai số 3.6688,

$$y_4 = \frac{1}{-0.0061x_4 + 0.1958}$$

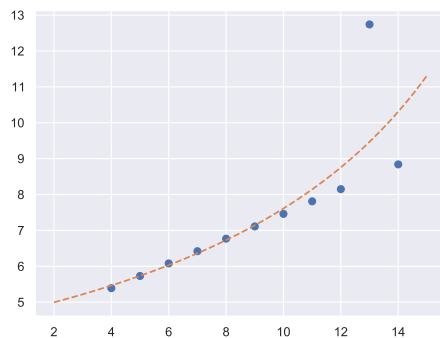
sai số 3.7607.



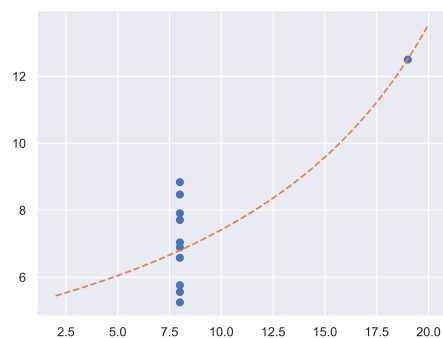
(a) Đồ thị của y_1



(b) Đồ thị của y_2



(c) Đồ thị của y_3



(d) Đồ thị của y_4

Hình 2.4: Đồ thị của mô hình hồi quy phi tuyến tính $y = \frac{1}{ax+b}$.

2.3.2 Hồi quy dạng $y = axe^{bx}$

Ta đặt $Y = e^y$. Khi đó, ta được phương trình mới $Y = ax + b$ có dạng tuyến tính. Ta có bảng kết quả sau đây khi tính toán các hệ số hồi quy tuyến tính đối với bộ dữ liệu Anscombe

$$y_1 = 1.3452x_1e^{-0.0495x_1}$$

sai số 3.6077,

$$y_2 = 1.2084x_2e^{-0.3860x_2}$$

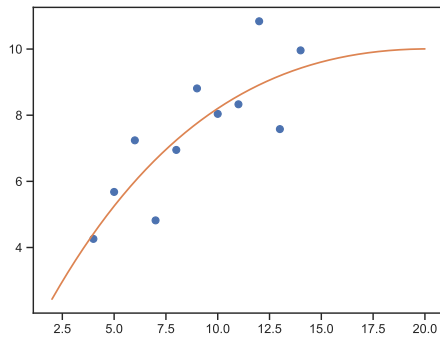
sai số 3.0083,

$$y_3 = 1.4497x_3e^{-0.0569x_3}$$

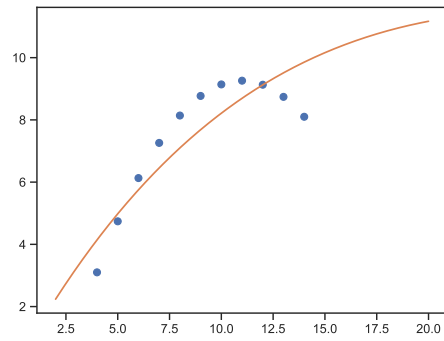
sai số 4.1569,

$$y_4 = 1.0506x_4e^{-0.2463x_4}$$

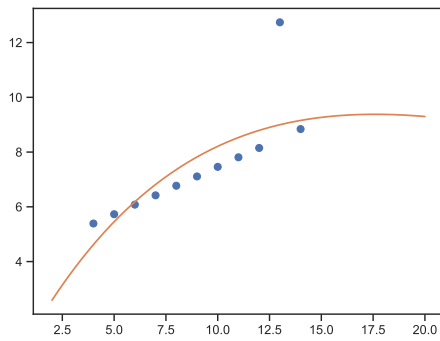
sai số 3.7205.



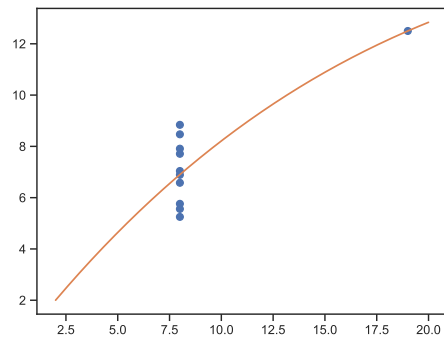
(a) Đồ thị của y_1 .



(b) Đồ thị của y_2



(c) Đồ thị của y_3



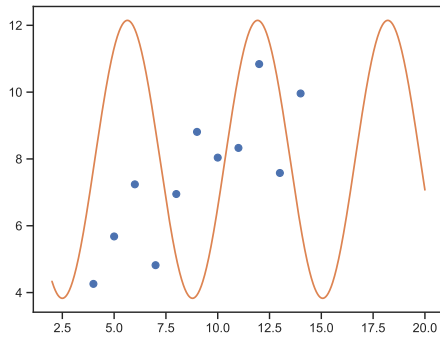
(d) Đồ thị của y_4

Hình 2.5: Đồ thị của hồi quy phi tuyến tính $y = axe^{bx}$.

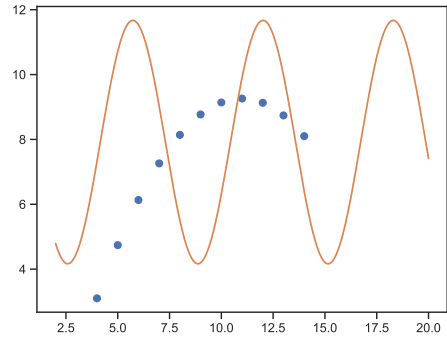
2.3.3 Hồi quy dạng $y = a\cos x + b\sin x + c$

Ta có bảng kết quả sau đây khi tính toán các hệ số hồi quy tuyến tính đối với bộ dữ liệu Anscombe

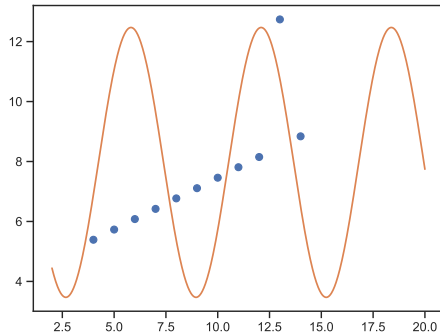
$y_1 = 3.3302\cos x_1 - 2.4924\sin x_1 + 7.9883$	sai số 11.7982,
$y_2 = 3.1915\cos x_2 - 1.9759\sin x_2 + 7.9177$	sai số 11.5383,
$y_3 = 4.0105\cos x_3 - 2.0424\sin x_3 + 7.9701$	sai số 11.4945,
$y_4 = 8.2613\cos x_4 + 8.3533\sin x_4 + 0.3121$	sai số 4.7748.



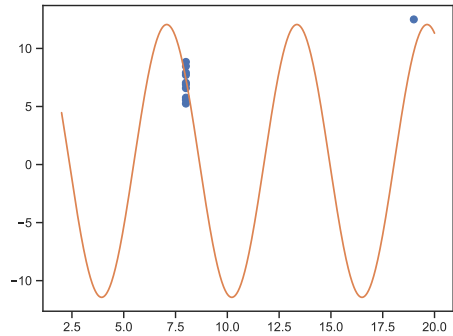
(a) Đồ thị của y_1



(b) Đồ thị của y_2



(c) Đồ thị của y_3



(d) Đồ thị của y_4

Hình 2.6: Đồ thị của hồi quy phi tuyến tính $y = a\cos x + b\sin x + c$.

2.4 Kết luận

Ta có bảng các sai số khi sử dụng các mô hình hồi quy tuyến tính và phi tuyến với dữ liệu.

Mô hình	Sai số e_1	Sai số e_2	Sai số e_3	Sai số e_4
Hồi quy dạng $y = ax + b$	3.7098	3.7116	3.7089	3.7071
Hồi quy dạng $y = ax^2 + bx + c$	3.5923	0.0047	3.6054	-
Hồi quy dạng $y = \frac{1}{ax+b}$	4.3490	7.0769	3.6688	3.7607
Hồi quy dạng $y = axe^{bx}$	3.6077	3.0083	4.1569	3.7205
Hồi quy dạng $y = a \cos x + b \sin x + c$	11.7982	11.5383	11.4945	4.7748

Ta có kết luận

Mô hình phù hợp nhất đối với y_1 là mô hình hồi quy đa thức dạng

$$y = -0.0316x^2 + 1.0693x + 0.7551.$$

Mô hình phù hợp nhất đối với y_2 là mô hình hồi quy đa thức dạng

$$y = -0.1267x^2 + 2.7808x - 5.9957.$$

Mô hình phù hợp nhất đối với y_3 là mô hình hồi quy phi tuyến dạng

$$y = 0.0297x^2 - 0.0350x + 5.1118.$$

Mô hình phù hợp nhất đối với y_4 là mô hình hồi quy tuyến tính dạng

$$y = 0.4999x + 3.0017.$$

Chương 3

Phụ lục

```
1 import numpy as np
2 import seaborn as sns
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import matplotlib.gridspec as plt_gs
5 sns.set_theme(context = 'notebook', color_codes = True)
6
7 ans = sns.load_dataset("anscombe")
8 data = ans.loc[ans.dataset == "I"]
```

Listing 3.1: Trình lệnh tải các gói lệnh tính toán và truy cập vào dữ liệu Anscombe

3.1 Trình lệnh ngoại suy hàm số

```
1 def estimate_coef(x, y):
2     # mean of x and y vector
3     m_x = np.nanmean(x)
4     m_x2 = np.nanmean(x*x)
5     m_y = np.nanmean(y)
6     m_xy = np.nanmean(x*y)
7     # calculating regression coefficients
8     M = np.matrix([[m_x, 1], [m_x2, m_x]])
9     b = np.array([m_y, m_xy])
10    X = np.linalg.solve(M,b)
11    return X
12 def estimate_poly_coef(x, y):
13     # mean of x and y vector
14     m_x = np.nanmean(x)
15     m_y = np.nanmean(y)
16     m_x2 = np.nanmean(x*x)
17     m_x3 = np.nanmean(x*x*x)
```



```

18     m_x4 = np.nanmean(x*x*x*x)
19     m_xy = np.nanmean(x*y)
20     m_x2y = np.nanmean(x*x*y)
21     # calculating regression coefficients
22     M = np.matrix([[m_x2, m_x, 1], [m_x3, m_x2, m_x], [m_x4, m_x3,
m_x2]])
23     b = np.array([m_y, m_xy, m_x2y])
24     X = np.linalg.solve(M,b)
25     return X
26 def estimate_sincos(x, y):
27     # mean of x and y vector
28     m_sx = np.nanmean(np.cos(x))
29     m_cx = np.nanmean(np.sin(x))
30     m_sx2 = np.nanmean(np.sin(x)*np.sin(x))
31     m_cx2 = np.nanmean(np.cos(x)*np.cos(x))
32     m_scx = np.nanmean(np.sin(x)*np.cos(x))
33     m_y = np.nanmean(y)
34     m_ys = np.nanmean(y*np.sin(x))
35     m_yc = np.nanmean(y*np.cos(x))
36     # calculating regression coefficients
37     M = np.matrix([[m_cx2, m_scx, m_cx], [m_scx, m_sx2, m_sx],
38         [m_cx, m_sx, 1]])
39     b = np.array([m_yc, m_ys, m_y])
40     X = np.linalg.solve(M,b)
41     return X

```

Listing 3.2: Trình lệnh tính toán hệ số hồi quy theo mô hình hồi quy tuyến tính.

```

1 def error(x,y,b):
2     # estimating error for linear regression
3     e2 = np.power((b[0]*x + b[1]) - y, 2)
4     E = np.sum(e2)
5     return (E)
6 def error2(x,y,b):
7     # estimating error for polynomial regression
8     e2 = np.power(b[0]*x*x + b[1]*x + b[2] - y, 2)
9     E = np.sum(e2)
10    return (E)
11 def error(x,y,b):
12    # estimating error for nonlinear regression  $e^{bx}$ 
13    e2 = np.power(np.exp(b[1])*x*np.exp(b[0]*x) - y, 2)
14    E = np.sqrt(np.sum(e2))
15    return (E)
16 def error(x,y,b):

```

```

17     # estimating error for nonlinear regression  $\text{acos}x + \text{bsinx} + c$ 
18     e2 = np.power((b[0]*np.cos(x) + b[1]*np.sin(x) + b[2]) - y, 2)
19     E = np.sqrt(np.sum(e2))
20     return (E)

```

Listing 3.3: Trình lệnh tính toán sai số trong mô hình.

```

1 def main():
2     # estimating coefficients
3     c = estimate_coef(data.x, data.y)
4     err = error(data.x, data.y, c)
5     print("coefficients:\na = {} \nb = {}".format(c[0], c[1]))
6     print("Error: {}".format(err))
7     # plotting regression line
8     plot_regression_line(data.x, data.y, c)
9 if __name__ == "__main__":
10     main()

```

Listing 3.4: Trình lệnh chính nhập vào dữ liệu và xuất ra kết quả.

Bảng 3.1: Bảng số liệu mô hình hồi quy tuyến tính $y = ax + b$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	
10	8,04	100	80,4	10	9,14	100	91,4	10	7,46	100	74,6	8	6,58	64	52,64	
8	6,95	64	55,6	8	8,14	64	65,12	8	6,77	64	54,16	8	5,76	64	46,08	
13	7,58	169	98,54	13	8,74	169	113,62	13	12,74	169	165,62	8	7,71	64	61,68	
9	8,81	81	79,29	9	8,77	81	78,93	9	7,11	81	63,99	8	8,84	64	70,72	
11	8,33	121	91,63	11	9,26	121	101,86	11	7,81	121	85,91	8	8,47	64	67,76	
14	9,96	196	139,44	14	8,1	196	113,4	14	8,84	196	123,76	8	7,04	64	56,32	
6	7,24	36	43,44	6	6,13	36	36,78	6	6,08	36	36,48	8	5,25	64	42	
4	4,26	16	17,04	4	3,1	16	12,4	4	5,39	16	21,56	19	12,5	361	237,5	
12	10,84	144	130,08	12	9,13	144	109,56	12	8,15	144	97,8	8	5,56	64	44,48	
7	4,82	49	33,74	7	7,26	49	50,82	7	6,42	49	44,94	8	7,91	64	63,28	
5	5,68	25	28,4	5	4,74	25	23,7	5	5,73	25	28,65	8	6,89	64	55,12	
Σ	99	82,51	1001	797,6	99	82,51	1001	797,59	99	82,5	1001	797,47	99	82,51	1001	797,58

Bảng 3.2: Bảng số liệu mô hình hồi quy đa thức $y = ax^2 + bx + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
10	8,04	100	1000	10000	80,4	804	10	9,14	100	1000	10000	91,4	914
8	6,95	64	512	4096	55,6	444,8	8	8,14	64	512	4096	65,12	520,96
13	7,58	169	2197	28561	98,54	1281,02	13	8,74	169	2197	28561	113,62	1477,06
9	8,81	81	729	6561	79,29	713,61	9	8,77	81	729	6561	78,93	710,37
11	8,33	121	1331	14641	91,63	1007,93	11	9,26	121	1331	14641	101,86	1120,46
14	9,96	196	2744	38416	139,44	1952,16	14	8,1	196	2744	38416	113,4	1587,6
6	7,24	36	216	1296	43,44	260,64	6	6,13	36	216	1296	36,78	220,68
4	4,26	16	64	256	17,04	68,16	4	3,1	16	64	256	12,4	49,6
12	10,84	144	1728	20736	130,08	1560,96	12	9,13	144	1728	20736	109,56	1314,72
7	4,82	49	343	2401	33,74	236,18	7	7,26	49	343	2401	50,82	355,74
5	5,68	25	125	625	28,4	142	5	4,74	25	125	625	23,7	118,5
Σ 99	82,51	1001	10989	127589	797,6	8471,46	99	82,51	1001	10989	127589	797,59	8389,69

Bảng 3.3: Bảng số liệu mô hình hồi quy đa thức $y = ax^2 + bx + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
10	7,46	100	1000	10000	74,6	746	8	6,58	64	512	4096	52,64	421,12
8	6,77	64	512	4096	54,16	433,28	8	5,76	64	512	4096	46,08	368,64
13	12,74	169	2197	28561	165,62	2153,06	8	7,71	64	512	4096	61,68	493,44
9	7,11	81	729	6561	63,99	575,91	8	8,84	64	512	4096	70,72	565,76
11	7,81	121	1331	14641	85,91	945,01	8	8,47	64	512	4096	67,76	542,08
14	8,84	196	2744	38416	123,76	1732,64	8	7,04	64	512	4096	56,32	450,56
6	6,08	36	216	1296	36,48	218,88	8	5,25	64	512	4096	42	336
4	5,39	16	64	256	21,56	86,24	19	12,5	361	6859	130321	237,5	4512,5
12	8,15	144	1728	20736	97,8	1173,6	8	5,56	64	512	4096	44,48	355,84
7	6,42	49	343	2401	44,94	314,58	8	7,91	64	512	4096	63,28	506,24
5	5,73	25	125	625	28,65	143,25	8	6,89	64	512	4096	55,12	440,96
Σ 99	82,5	1001	10989	127589	797,47	8522,45	99	82,51	1001	11979	171281	797,58	8993,14

Bảng 3.4: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = \frac{1}{ax+b}$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	$Y = 1/y$	x^2	xY	x	$Y = 1/y$	x^2	xY
10	0,124378109	100	12,43781095	10	0,124378109	100	12,43781095
8	0,143884892	64	9,208633094	8	0,143884892	64	9,208633094
13	0,131926121	169	22,29551451	13	0,131926121	169	22,29551451
9	0,113507378	81	9,194097616	9	0,113507378	81	9,194097616
11	0,120048019	121	14,52581032	11	0,120048019	121	14,52581032
14	0,100401606	196	19,67871486	14	0,100401606	196	19,67871486
6	0,138121547	36	4,972375691	6	0,138121547	36	4,972375691
4	0,234741784	16	3,755868545	4	0,234741784	16	3,755868545
12	0,092250923	144	13,28413284	12	0,092250923	144	13,28413284
7	0,20746888	49	10,1659751	7	0,20746888	49	10,1659751
5	0,176056338	25	4,401408451	5	0,176056338	25	4,401408451
Σ 99	1,58	1001	123,92	99	0,14	91	11,27

Bảng 3.5: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = \frac{1}{ax+b}$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	$Y = 1/y$	x^2	xY	x	$Y = 1/y$	x^2	xY
10	0,134048257	100	13,40482574	8	0,151975684	64	9,726443769
8	0,147710487	64	9,453471196	8	0,173611111	64	11,11111111
13	0,078492936	169	13,26530612	8	0,129701686	64	8,300907912
9	0,140646976	81	11,39240506	8	0,113122172	64	7,239819005
11	0,128040973	121	15,49295775	8	0,118063754	64	7,556080283
14	0,113122172	196	22,1719457	8	0,142045455	64	9,090909091
6	0,164473684	36	5,921052632	8	0,19047619	64	12,19047619
4	0,185528757	16	2,968460111	19	0,08	361	28,88
12	0,122699387	144	17,66871166	8	0,179856115	64	11,51079137
7	0,15576324	49	7,632398754	8	0,12642225	64	8,09102402
5	0,17452007	25	4,363001745	8	0,145137881	64	9,288824383
Σ 99	1,55	1001	123,73	99	1,55	1001	122,99

Bảng 3.6: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = ae^{bx}$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	$Y = \ln(y/x)$	x^2	xY	x	y	Y	x^2	xY	x	y	Y	x^2	xY	x	y	Y	x^2	xY
10	8,04	-0,21	100	-2,181	10	9,14	-0,089	100	-8,992	10	7,46	-0,293	100	-29,30296	8	6,58	-0,195	64	-1,285
8	6,95	-0,140	64	-1,125	8	8,14	0,017	64	1,110	8	6,77	-0,166	64	-10,6841	8	5,76	-0,328	64	-1,892
13	7,58	-0,539	169	-7,012	13	8,74	-0,397	169	-67,099	13	12,74	-0,020	169	-3,414	8	7,71	-0,036	64	-0,284
9	8,81	-0,021	81	-0,192	9	8,77	-0,025	81	-2,096	9	7,11	-0,235	81	-19,093	8	8,84	0,099845	64	0,882
11	8,33	-0,278	121	-3,058	11	9,26	-0,172	121	-20,835	11	7,81	-0,342	121	-41,441	8	8,47	0,057	64	0,483
14	9,96	-0,340	196	-4,766	14	8,1	-0,547	196	-107,249	14	8,84	-0,459	196	-90,115	8	7,04	-0,127	64	-0,899
6	7,24	0,187	36	1,127	6	6,13	0,021	36	0,771	6	6,08	0,013	36	0,476	8	5,25	-0,421	64	-2,211
4	4,26	0,062	16	0,251	4	3,1	-0,25	16	-4,078	4	5,39	0,298	16	4,772	19	12,5	-0,418	361	-5,233
12	10,84	-0,101	144	-1,219	12	9,13	-0,273	144	-39,361	12	8,15	-0,386	144	-55,711	8	5,56	-0,363	64	-2,022
7	4,82	-0,373	49	-2,611	7	7,26	0,036	49	1,787	7	6,42	-0,086	49	-4,238	8	7,91	-0,011	64	-0,089
5	5,68	0,127	25	0,637	5	4,74	-0,053	25	-1,335	5	5,73	0,136	25	3,406	8	6,89	-0,149	64	-1,029
99	82,51	-1,63	1001	-20,152	99	82,51	-1,738	1001	-247,379	99	82,5	-1,543	1001	-245,3455	99	82,51	-1,896	1001	-13,583

Bảng 3.7: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = a \cos x + b \sin x + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	$\cos x$	$\sin x$	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\cos x \sin x$	$y \cos x$	$y \sin x$	
10	8,04	-0,83907	-0,54402	0,70404	0,29595	0,45647	-6,74613	-4,37392	
8	6,95	-0,14550	0,989358	0,02117	0,97882	-0,1439	-1,01122	6,876039	
13	7,58	0,907446	0,420167	0,82345	0,17654	0,38127	6,878446	3,184866	
9	8,81	-0,91113	0,412118	0,83015	0,16984	-0,3754	-8,02705	3,630763	
11	8,33	0,004425	-0,99999	1,95868E-05	0,99998	-0,0044	0,036866	-8,32991	
14	9,96	0,136737	0,990607	0,01869	0,98130	0,13545	1,361902	9,866449	
6	7,24	0,960170	-0,27941	0,92192	0,07807	-0,2682	6,951632	-2,02296	
4	4,26	-0,65364	-0,75680	0,42724	0,57275	0,49467	-2,78452	-3,22397	
12	10,84	0,843853	-0,53657	0,71208	0,28791	-0,4527	9,147376	-5,81645	
7	4,82	0,753902	0,656986	0,56836	0,43163	0,49530	3,633808	3,16667	
Σ	5	5,68	0,283662	-0,95892	0,08046	0,91953	-0,2720	1,611201	-5,44668

Bảng 3.8: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = a \cos x + b \sin x + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	$\cos x$	$\sin x$	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\cos x \sin x$	$y \cos x$	$y \sin x$
10	9,14	-0,8391	-0,5440	0,7040	0,2960	0,4565	-7,6691	-4,9724
8	8,14	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,1844	8,0534
13	8,74	0,9074	0,4202	0,8235	0,1765	0,3813	7,9311	3,6723
9	8,77	-0,9111	0,4121	0,8302	0,1698	-0,3755	-7,9906	3,6143
11	9,26	0,0044	-1,0000	0,0000	1,0000	-0,0044	0,0410	-9,2599
14	8,10	0,1367	0,9906	0,0187	0,9813	0,1355	1,1076	8,0239
6	6,13	0,9602	-0,2794	0,9219	0,0781	-0,2683	5,8858	-1,7128
4	3,10	-0,6536	-0,7568	0,4272	0,5728	0,4947	-2,0263	-2,3461
12	9,13	0,8439	-0,5366	0,7121	0,2879	-0,4528	7,7044	-4,8989
7	7,26	0,7539	0,6570	0,5684	0,4316	0,4953	5,4733	4,7697
5	4,74	0,2837	-0,9589	0,0805	0,9195	-0,2720	1,3446	-4,5453

Bảng 3.9: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = a \cos x + b \sin x + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	$\cos x$	$\sin x$	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\cos x \sin x$	$y \cos x$	$y \sin x$
10	7,46	-0,8391	-0,5440	0,7040	0,2960	0,4565	-6,2595	-4,0584
8	6,77	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-0,9850	6,6980
13	12,74	0,9074	0,4202	0,8235	0,1765	0,3813	11,5609	5,3529
9	7,11	-0,9111	0,4121	0,8302	0,1698	-0,3755	-6,4781	2,9302
11	7,81	0,0044	-1,0000	0,0000	1,0000	-0,0044	0,0346	-7,8099
14	8,84	0,1367	0,9906	0,0187	0,9813	0,1355	1,2088	8,7570
6	6,08	0,9602	-0,2794	0,9219	0,0781	-0,2683	5,8378	-1,6988
4	5,39	-0,6536	-0,7568	0,4272	0,5728	0,4947	-3,5231	-4,0792
12	8,15	0,8439	-0,5366	0,7121	0,2879	-0,4528	6,8774	-4,3731
7	6,42	0,7539	0,6570	0,5684	0,4316	0,4953	4,8401	4,2179
5	5,73	0,2837	-0,9589	0,0805	0,9195	-0,2720	1,6254	-5,4946

Bảng 3.10: Bảng số liệu mô hình hồi quy phi tuyến $y = a \cos x + b \sin x + c$ đối với bốn biến trong bộ dữ liệu đã cho.

x	y	$\cos x$	$\sin x$	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\cos x \sin x$	$y \cos x$	$y \sin x$
8	6,58	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-0,9574	6,5100
8	5,76	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-0,8381	5,6987
8	7,71	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,1218	7,6280
8	8,84	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,2862	8,7459
8	8,47	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,2324	8,3799
8	7,04	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,0243	6,9651
8	5,25	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-0,7639	5,1941
19	12,50	0,9887	0,1499	0,9775	0,0225	0,1482	12,3588	1,8735
8	5,56	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-0,8090	5,5008
8	7,91	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,1509	7,8258
8	6,89	-0,1455	0,9894	0,0212	0,9788	-0,1440	-1,0025	6,8167