Leibniz Universität Hannover

# Labor Matlab für die industrielle und medizinische Bildverarbeitung

**Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn**

Institut für Informationsverarbeitung

# Einleitung

- 20.10. Introduction (1h VL, 3 L), Accountvergabe (Präsenz)
- 27.10. Local operators (Harris, etc.) (1h VL, 3L)
- 03.11. Global Operators (Hough Transform) (1h VL, 3L)
- 10.11. Region Growing / Watershed Segmentation (1h VL, 3L)
- 17.11. Bayes Classifier (1h VL, 3L)
- 24.11. K-Means / Mean shift (1h VL, 3L)
- 01.12. Shape Context (1h VL, 3L)
- 08.12. Morphological Operators (1h VL, 3L)
- 15.12. Disparity estimation (DTW) (1h VL, 3L)
- 22.12. Restarbeiten vor Weihnachten (4L)
- 12.01. Calibration and Triangulation (1h VL, 3L)
- 19.01. PCA (1h VL, 3L)
- 26.01. Tracking (1h VL, 3L)

# Statistics ...

... Emotions

# Bayes Classifier

Ein **Bayes-Klassifikator** (Aussprache: [bɛi:z], benannt nach dem englischen Mathematiker Thomas Bayes), ist ein aus dem Bayestheorem hergeleiteter Klassifikator.

Ein Bayes-Klassifikator *b* ist eine Funktion, die Vektoren aus einem *f*-dimensionalen reellwertigen Merkmalsraum auf eine Menge von Klassen *C* abbildet:

$$b : \mathbb{R}^f \to C$$

Die Funktion wird realisiert durch die Maximierung der A-Posteriori-WK gegeben die Merkmale. D.h. Eine (mögliche) Entscheidungsregel lautet *„Wähle die Klasse die am wahrscheinlichsten ist.“*

$$p\left(C \middle| F_1, \ldots, F_n\right)$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Probabilistische Erkennung

Modelliere Wahrscheinlichkeitsdichten und wende Sätze aus der Statistik an, um eine möglichst sichere Aussage über die Erkennung machen zu können.

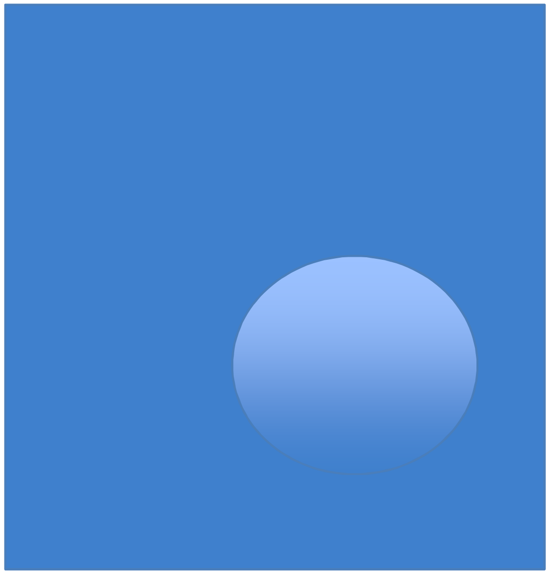
**Definition (Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsmaß):**

Die Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j)$ ist eine reelle Zahl $0 \leq P(\psi_j) \leq 1$, die jedem Element $\psi_j$ des Ereignisfeldes $\mathrm{A}$ eindeutig zugeordnet werden kann.

Es gilt also:

1. P ist nicht negativ: $P(\psi) \geq 0 \forall \psi \in \Omega$
2. P ist normiert: $P(\Omega) = 1$
3. P ist additiv: $P(\psi_j \cup \psi_k) = P(\psi_j) + P(\psi_k)$

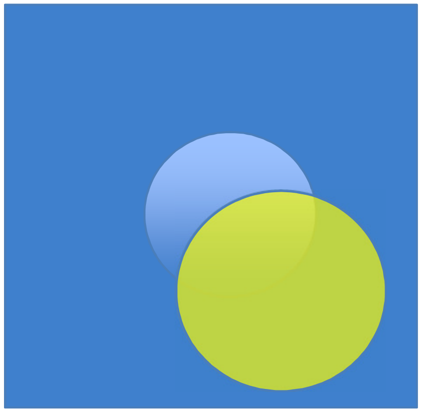
falls $\psi_j \cup \psi_k = 0$



Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Grundlagen

| Event | Probability |
| --- | --- |
| A | $P(A) \in [0,1]$ |
| not A | $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$ |
| A or B | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$<br>$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{if A and B are mutually exclusive}$ |
| A and B | $P(A \cap B) = P(A\|B)P(B) = P(B\|A)P(A)$<br>$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{if A and B are independent}$ |
| A given B | $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\|A)P(A)}{P(B)}$ |



https://en.wikipedia.org/wiki/Probability

**Definition (bedingte Wahrscheinlichkeit):**
Die Wahrscheinlichkeit von $\Phi_j$ unter der Bedingung, dass $\Phi_k$ bereits eingetreten ist, heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\Phi_j$ unter der Bedingung $\Phi_k$:

$$P\left(\Phi_j \middle| \Phi_k\right) = \frac{P\left(\Phi_j, \Phi_k\right)}{P\left(\Phi_k\right)} \quad f\ddot{u}r \quad P\left(\Omega_k\right) > 0$$

Hieraus folgt die *Multiplikationsregel:*

$$P\left(\Phi_j \cap \Phi_k\right) = P\left(\Phi_j \middle| \Phi_k\right) P\left(\Phi_k\right) = P\left(\Phi_k \mid \Phi_j\right) P\left(\Phi_j\right)$$

**Definition (totale Wahrscheinlichkeit):**

Bilden die Ereignisse $\Phi_k, k = 1,2,\ldots,n$ im Ereignisfeld $\mathrm{A}$ ein vollständiges System von Ereignissen, dann erhält man für ein Ereignis $\Phi_j \in \mathrm{A}$ die totale Wahrscheinlichkeit $P(\Phi_j)$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\Phi_j \mid \Phi_k), k = 1,\ldots,n$ zu

$$P(\Phi_j) = \sum_{k=1}^{n} P(\Phi_j \mid \Phi_k) P(\Phi_k)$$

Formel von Bayes:

$$P(\Phi_i \mid \Phi_0) = \frac{P(\Phi_0 \mid \Phi_i) P(\Phi_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(\Phi_0 \mid \Phi_k) P(\Phi_k)}$$

# Der Satz von Bayes

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)}$$

posterior probability

likelihood

prior probability

Eine der wichtigsten Regeln aus dem Bereich Machine Learning: Sie erlaubt die Ausgabe der Wahrscheinlichkeit von *Y* gegeben die Messungen *X*.

Im Training hat man die umgekehrte Information: Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von *Y* (prior) und die Auswertung einer Messung (likelihood), *X.*

(Die likelihood evaluiert eine mögliche Messung.)
Maximierung der likelihood nennt man:
**Maximum likelihood Schätzung** (ML)

# Probabilistische Erkennung

Wahrscheinlichkeit eines Objektes *o* gegeben einen Feature Vektor *m*

$$p(o_n \mid m_k) = \frac{p(m_k \mid o_n)\, p(o_n)}{p(m_k)} = \frac{p(m_k \mid o_n)\, p(o_n)}{\sum_i p(m_k \mid o_i)\, p(o_i)}$$

*p(o)* : Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Objekt o (z.B. Gleichverteilung)

*p(m)* : Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Feature-Vektor *m*

*p(m|o)* : Wahrscheinlichkeit von *m* gegeben *o*

# Bayes Classifier

Bei einem „Naiven Bayes Classifier“ wird die Grundannahme gemacht, dass jedes Attribut nur vom Klassenattribut abhängt.

Die Bayes-Regel ergibt dann:

$$p(C \mid F_1, \ldots, F_n) = \frac{1}{Z} p(C) \prod_{i=1}^{n} p(F_i \mid C)$$

*Z* ist ein Skalierungsfaktor (Evidenz)

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Bayes Classifier

Wie *lernt* man die WK aus Beispielen ?

- Nehme kontinuierliches Modell an
- Nehme z.B. Gaussverteilung an
- Bestimme mean und variance aus Trainingsdaten

$\mu_c$ $\sigma_c^2$

$$\longrightarrow \quad P(x = v \mid c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} e^{-\frac{(v-\mu_c)^2}{2\sigma_c^2}}$$

Prior:

*P( c)* = 1 / (# Klassen) oder
*P( c)* = (# Beispiele aus der Klasse) / (# Beispiele)

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator


Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Bayes Classifier

Die Maximum A-posteriori-WK-Regel (MAP) lautet:

$$classify(f_1, \ldots, f_n) = \arg\max_c \, p(C = c) \prod_{i=1}^{n} p(F_i = f_i \mid C = c).$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Beispiel: Gender-Klassifikation

| sex | height (feet) | weight (lbs) | foot size(inches) |
|---|---|---|---|
| male | 6 | 180 | 12 |
| male | 5.92 (5'11") | 190 | 11 |
| male | 5.58 (5'7") | 170 | 12 |
| male | 5.92 (5'11") | 165 | 10 |
| female | 5 | 100 | 6 |
| female | 5.5 (5'6") | 150 | 8 |
| female | 5.42 (5'5") | 130 | 7 |
| female | 5.75 (5'9") | 150 | 9 |

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator


Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Beispiel: Gender-Klassifikation

| sex | mean (height) | variance (height) | mean (weight) | variance (weight) | mean (foot size) | variance (foot size) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| male | 5.855 | 3.5033e-02 | 176.25 | 1.2292e+02 | 11.25 | 9.1667e-01 |
| female | 5.4175 | 9.7225e-02 | 132.5 | 5.5833e+02 | 7.5 | 1.6667e+00 |

Prior:

$$P(\text{male}) = P(\text{female}) = 0.5$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Probabilistische Erkennung

Wahrscheinlichkeit eines Objektes *o* gegeben einen Feature Vektor *m*

$$p(o_n \mid m_k) = \frac{p(m_k \mid o_n)\, p(o_n)}{p(m_k)} = \frac{p(m_k \mid o_n)\, p(o_n)}{\sum_i p(m_k \mid o_i)\, p(o_i)}$$

*p(o)* : Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Objekt o (z.B. Gleichverteilung)

*p(m)* : Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Feature-Vektor *m*

*p(m|o)* : Wahrscheinlichkeit von *m* gegeben *o*

tnt
Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Beispiel: Gender-Klassifikation

Welches Geschlecht hat wohl eine Person mit den folgenden Daten ?

| sex | height (feet) | weight (lbs) | foot size(inches) |
|---|---|---|---|
| sample | 6 | 130 | 8 |

In Worten:

posterior (male) = P(male)*P(height | male)*P(weight | male)*P(foot size | male) / evidence

posterior (female) = P(female)*P(height | female)*P(weight |female)*P(foot size |female) / evidence

evidence = P(male)*P(height | male)*P(weight | male)*P(foot size | male) + P(female)*P(height | female)*P(weight | female)*P(foot size | female)

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Beispiel: Gender- Klassifikation

P(male) = 0.5
P(height | male) = 1.5789
P(weight | male) = 5.9881e-06
P(foot size | male) = 1.3112e-3
posterior numerator (male) = Produkt = 6.1984e-09

P(female) = 0.5
P(height | female) = 2.2346e-1
P(weight | female) = 1.6789e-2
P(foot size | female) = 2.8669e-1
posterior numerator (female) = Produkt = 5.3778e-04

Entscheidung: Female

$$p(C \mid F_1,\dots,F_n) = \frac{1}{Z} p(C) \prod_{i=1}^{n} p(F_i \mid C)$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Bayes-Klassifikator

# Confusion Matrix

$\widehat{Y} = 0$

NEGATIVE

$\widehat{Y} = 1$

POSITIVE

$Y = 0$

NOT PREGNANT

$Y = 1$

PREGNANT


Prof.-Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Confusion Matrix

| | | CONDITION<br>determined by "Gold Standard" | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | TOTAL POPULATION | CONDITION POS | CONDITION NEG | PREVALENCE<br>$\frac{\text{CONDITION POS}}{\text{TOTAL POPULATION}}$ | |
| TEST OUT-COME | TEST POS | True Pos<br>TP | *Type I Error*<br>False Pos<br>FP | *Precision*<br>Pos Predictive Value<br>$PPV = \frac{TP}{\text{TEST P}}$ | False Discovery Rate<br>$FDR = \frac{FP}{\text{TEST P}}$ |
| | TEST NEG | *Type II Error*<br>False Neg<br>FN | True Neg<br>TN | False Omission Rate<br>$FOR = \frac{FN}{\text{TEST N}}$ | Neg Predictive Value<br>$NPV = \frac{TN}{\text{TEST N}}$ |
| | ACCURACY<br>ACC<br>$ACC = \frac{TP + TN}{\text{TOT POP}}$ | *Sensitivity (SN), Recall*<br>Total Pos Rate<br>TPR<br>$TPR = \frac{TP}{\text{CONDITION POS}}$ | *Fall-Out*<br>False Pos Rate<br>FPR<br>$FPR = \frac{FP}{\text{CONDITION NEG}}$ | Pos Likelihood Ratio<br>LR +<br>$LR+ = \frac{TPR}{FPR}$ | Diagnostic Odds Ratio<br>DOR<br>$DOR = \frac{LR+}{LR-}$ |
| | | *Miss Rate*<br>False Neg Rate<br>FNR<br>$FNR = \frac{FN}{\text{CONDITION POS}}$ | *Specificity (SPC)*<br>True Neg Rate<br>TNR<br>$TNR = \frac{TN}{\text{CONDITION NEG}}$ | Neg Likelihood Ratio<br>LR -<br>$LR- = \frac{TNR}{FNR}$ | |

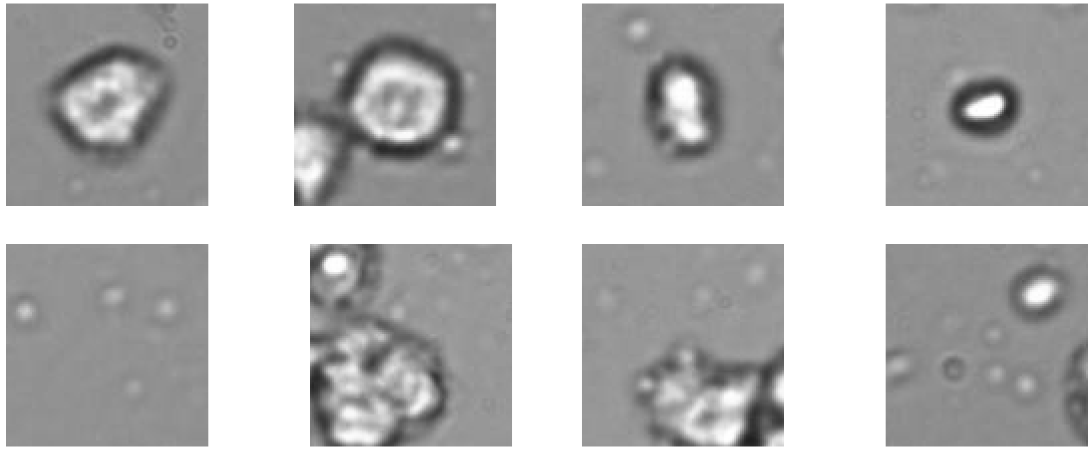
Prof.-Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Image Bayes Classifier

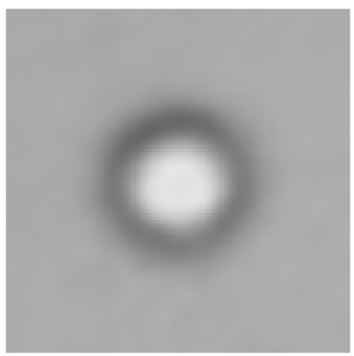
Input:

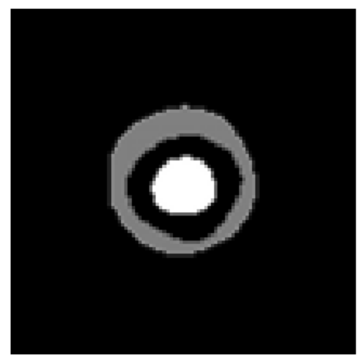
Good

Bad



Average





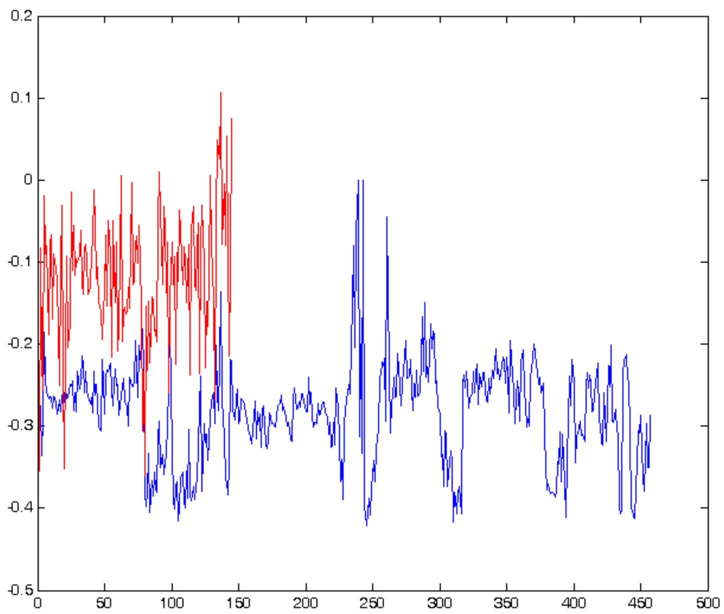
Mask

s. Matlab Beispiel

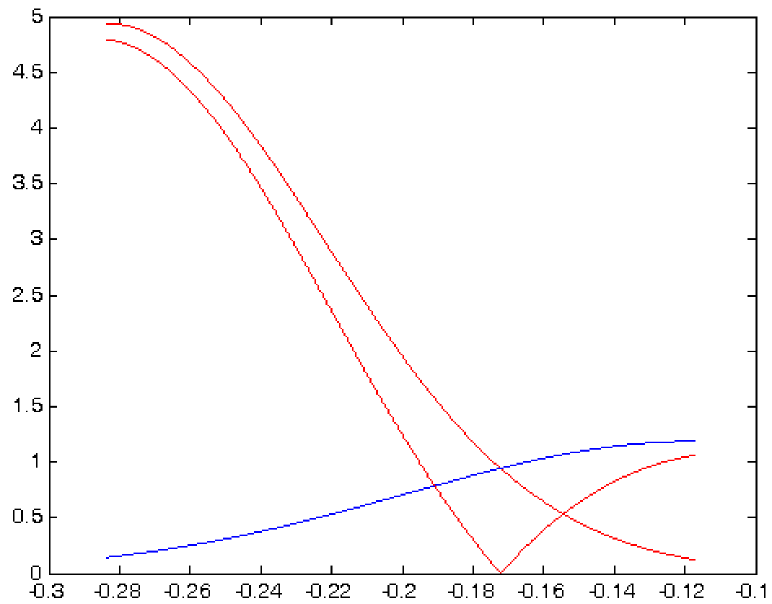
Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

# Image Bayes Classifier

Feature-Antwort




Likelihood

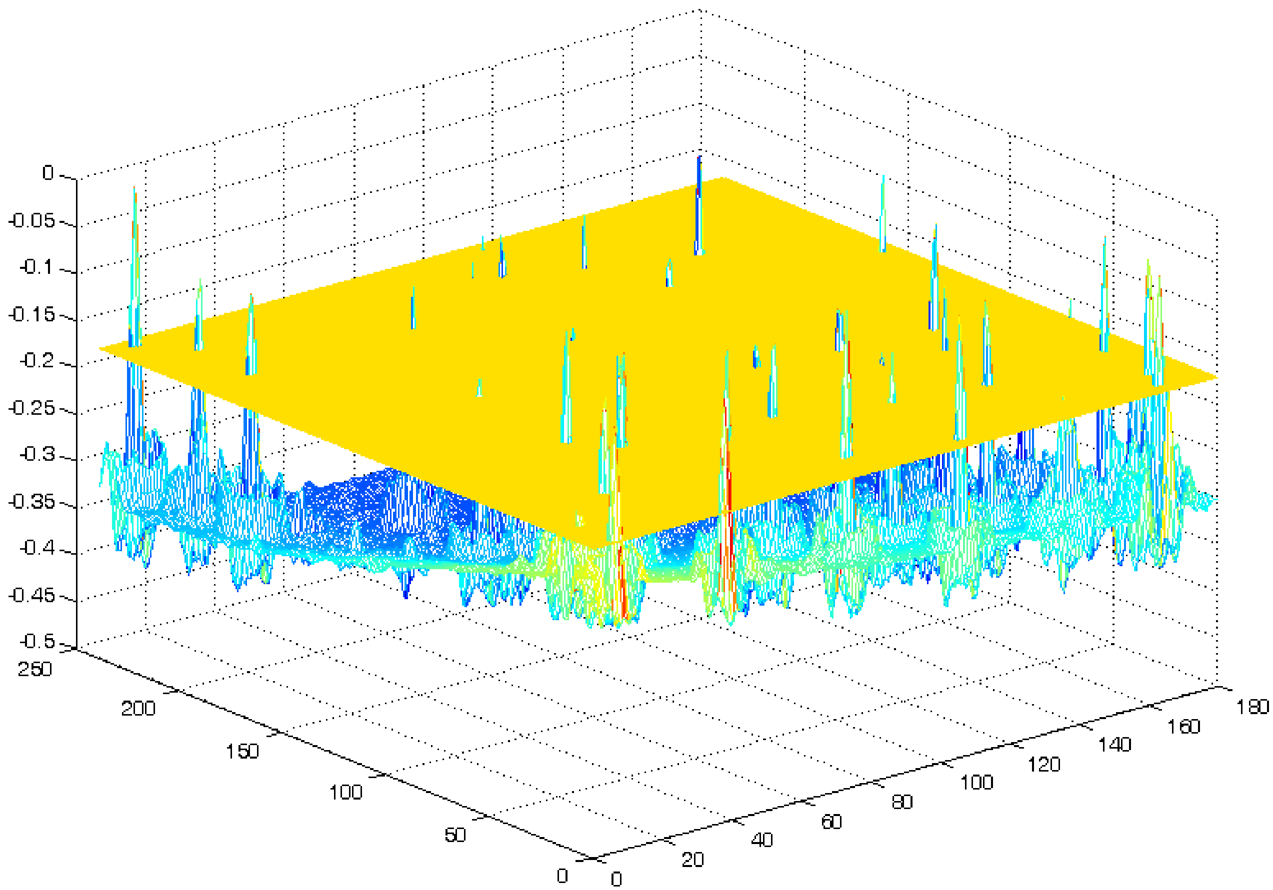



→ Mean / Variance

Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de

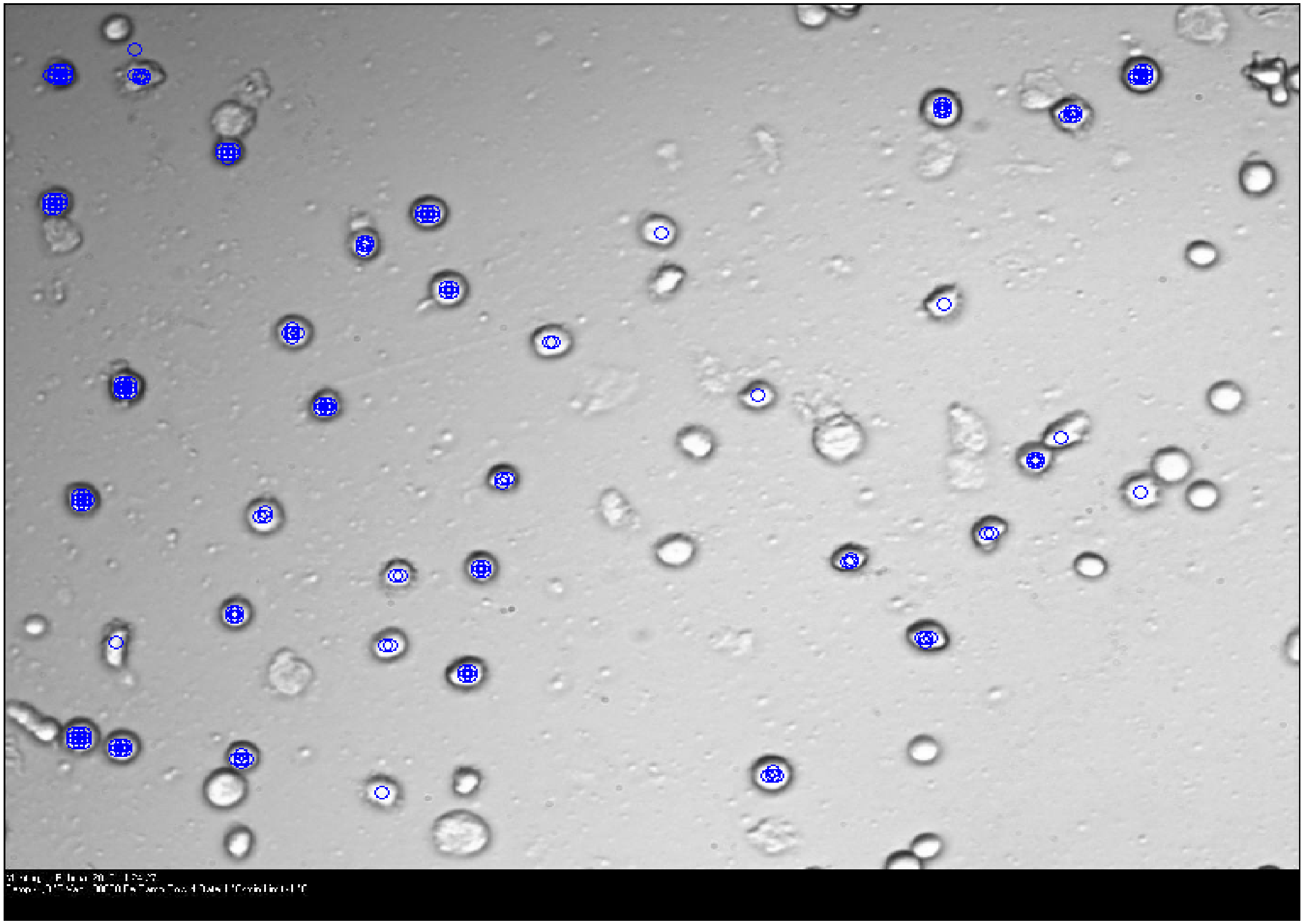
# Image Bayes Classifier

Entscheidungsebene + Feature-Antwort



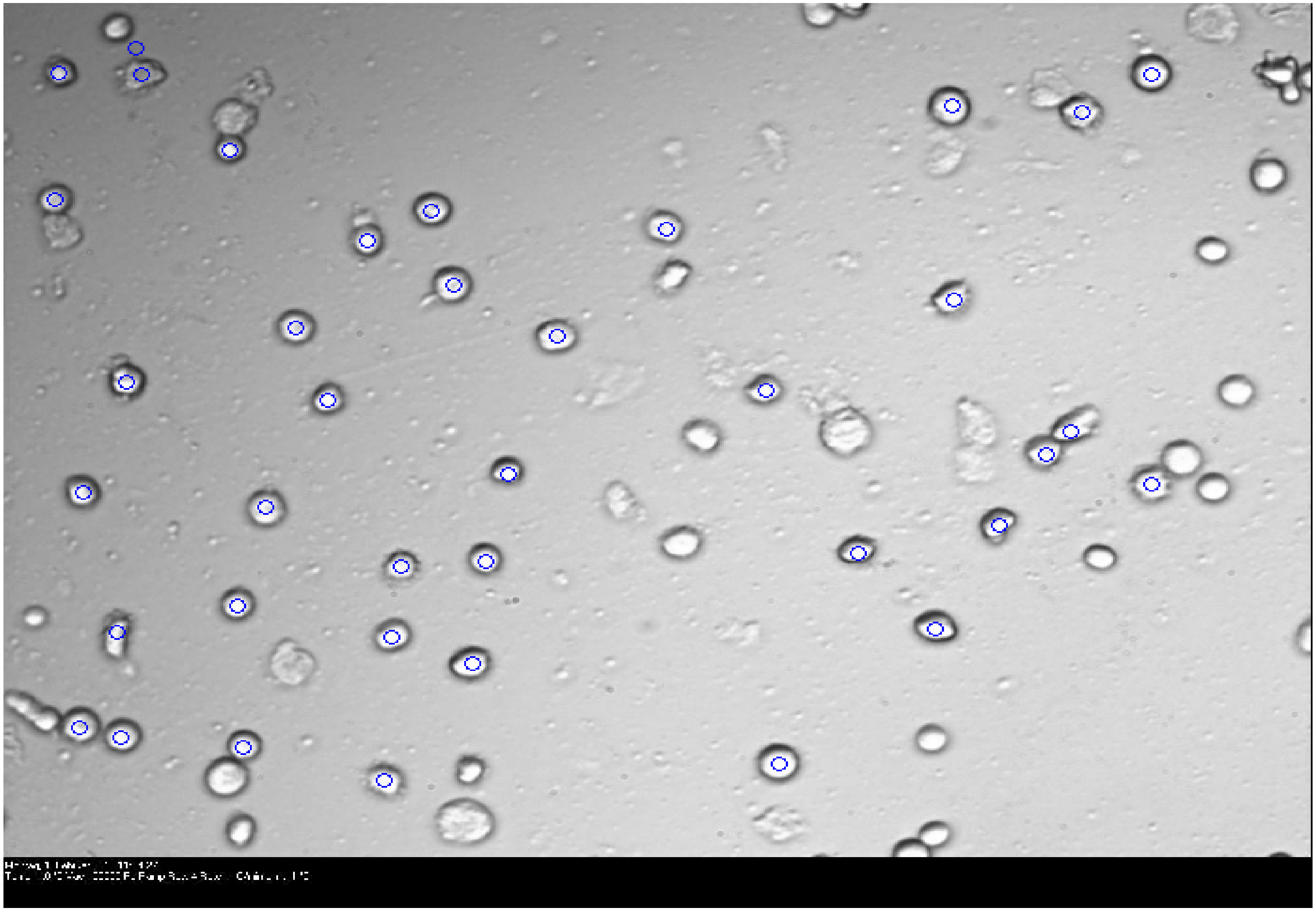
# Image Bayes Classifier

Detektionen



# Image Bayes Classifier

Detektionen nach Mean-shift



Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
rosenhahn@tnt.uni-hannover.de