Institut für Informationsverarbeitung (TNT)
Appelstraße 9a, 30167 Hannover
www.tnt.uni-hannover.de

Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
Felix Winkler, M.Sc.

WiSe 2022/23 **18.01.2023**

Praktische Übung: Matlab für die medizinische und industrielle Bildinterpretation

Versuch 10: Principal Component Analysis

Aufgabe 1 - Grundlagen der PCA

Im Folgenden sollen die grundlegenden Eigenschaften der PCA an einem einfachen dreidimensionalen Beispiel illustriert werden. Folgen Sie den Bemerkungen im Skript `pca_test.m` und setzen Sie folgende Punkte um:

a) Generieren Sie eine dreidimensionale Punktmenge. Welche Auswirkungen haben die einzelnen Parameter?

b) Bestimmen Sie die Hauptkomponenten der Punkte, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren (MATLAB: `eig`) der Kovarianzmatrix

$$C = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^{\mathsf{T}}, \quad x_i \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

bestimmen.

c) Plotten Sie die Hauptachsen in die Punktmenge.

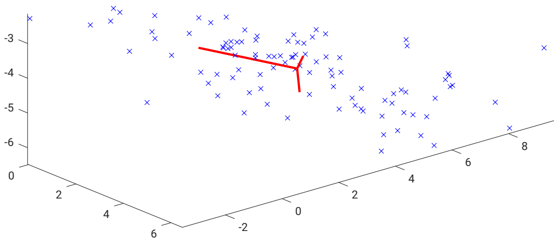

Abbildung 1: Visualisierung der Hauptachsen

d) Projizieren Sie die Punkte auf eine der Hauptachsen, d.h. den 1D-Unterraum, der durch einen der Eigenvektoren v_i gegeben ist. Verwenden Sie das Skalarprodukt

$$\alpha_i(x) = \frac{\langle x - \bar{x}, v_i \rangle}{\|v_i\|} \in \mathbb{R},$$

um die Projektion α_i des Punktes x zu bestimmen. Bestimmen Sie die Varianz der projizierten Punkte.

e) Rekonstruieren Sie die 3D-Punkte anschließend wieder aus dem jeweiligen Unterraum:

$$p_i(x) = \alpha_i(x) \frac{v_i}{\|v_i\|} + \bar{x} = \frac{\langle x - \bar{x}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i + \bar{x}.$$

Plotten Sie die rekonstruierten Punkte zusammen mit den Originalpunkten und den Hauptachsen.

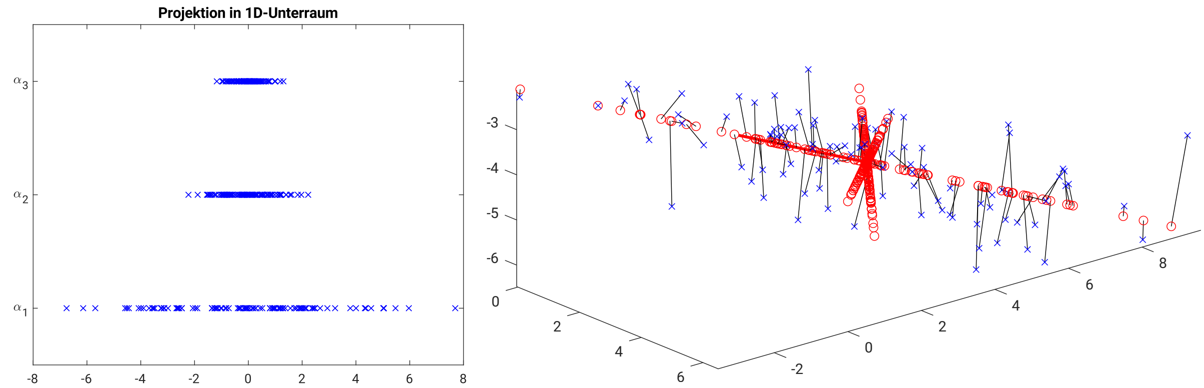

Abbildung 2: Projektion der Punkte in die 1D-Unterräume und anschließende Rekonstruktion

f) Projizieren Sie die Punkte in den 2D-Unterraum, der von den ersten beiden Hauptkomponenten (Eigenvektoren zu den beiden größten Eigenwerten) aufgespannt wird und rekonstruieren Sie anschließend wiederum die 3D-Punkte:

$$p_{1,2}(x) = \frac{\langle x - \bar{x}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle x - \bar{x}, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \bar{x}$$

Plotten Sie die rekonstruierten Punkte und bestimmen Sie den mittleren quadratischen Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|p_{1,2}(x_i) - x_i\|^2$$

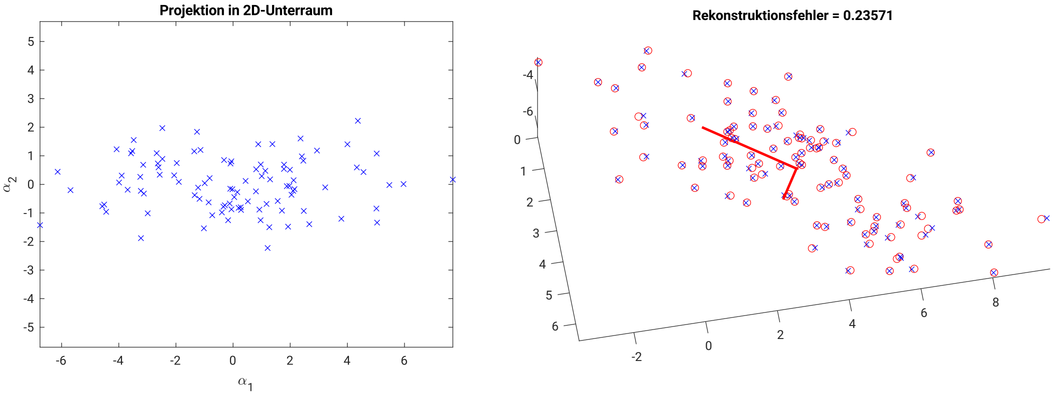

Abbildung 3: Projektion der Punkte in den 2D-Unterraum und anschließende Rekonstruktion

Aufgabe 2 - PCA zur Gesichtsrekonstruktion

Nutzen Sie die PCA zur Erstellung eines (PCA-)Gesichtraums, aus dem Sie z.B. fehlende Bildteile rekonstruieren können. Folgen Sie dem Skript `faceRecon.m`, in dem die folgenden Punkte umgesetzt werden:

a) Erstellung des PCA-Raums mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung oder dem "algebraischen Trick"

b) Illustration der Eigenvektoren (Eigenfaces)

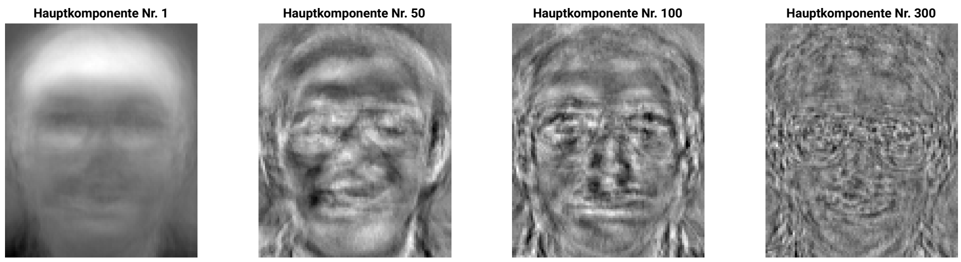

Abbildung 4: Visualisierungen verschiedener Eigenfaces

c) Projektion und Rekonstruktion bekannter Gesichter (bekannte Datenpunkte im PCA-Raum)

d) Ergänzung fehlender Bildinformationen (Iteration von Projektion und Rekonstru ktion, um den fehlenden Inhalt in jedem Schritt besser approximieren zu können)

e) Wiederholen Sie Ihre Versuche, indem Sie den PCA-Raum ohne die zu rekonstruierende Person (s8) aufbauen, d.h. laden Sie die Bilder dieser Person nicht in den Datenraum.

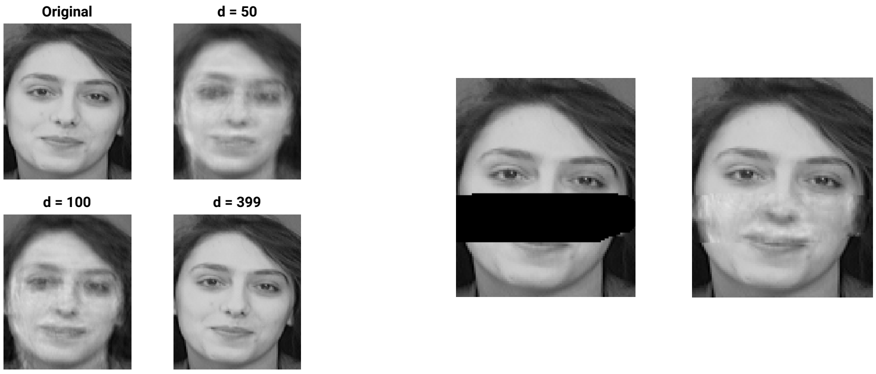

Abbildung 5: Rekonstruktion eines bekannten Gesichts aus verschiedenen Unterräumen (links) und Rekonstruktion fehlender Daten (rechts)

Kontrollfragen

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Parametern zur Erstellung der Punktwolke, den Eigenwerten der Kovarianzmatrix, der Varianz der projizierten Punkte (1 d)) und dem Rekonstruktionsfehler (1 f))?

b) Wie beeinflusst die Anzahl der verwendeten Eigenfaces das Ergebnis in Aufgabe 2?

c) Erklären Sie die Unterschiede in der Gesichtsrekonstruktion, abhängig davon, ob Bilder von der Person in den PCA-Raum einfließen oder nicht.