ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TOÁN RỜI RẠC VÀ THUẬT TOÁN

Bài 6
Đồ thị và ứng dụng – phần 2
(*Graph theory and its applications*)

Nguyễn Thị Hồng Minh
minhnth@gmail.com

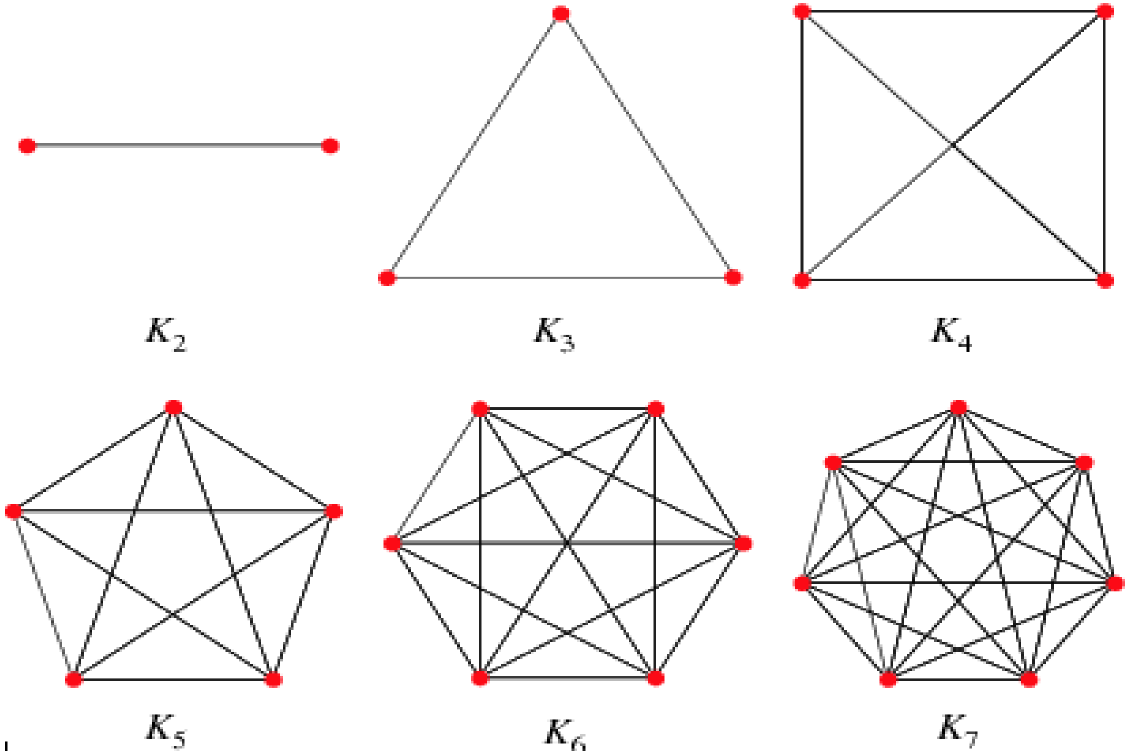
Nội dung

1. **Chu trình Hamilton và bài toán người đưa hàng**
2. **Chu trình Euler và bài toán giải trình tự DNA**
3. **Tô màu đồ thị**
4. **Bài tập**

Chú ý: Hầu hết các hình vẽ trong các bài giảng được sưu tầm từ internet và được trình bày theo quan điểm của giảng viên.

Nhắc lại: Một số loại đồ thị

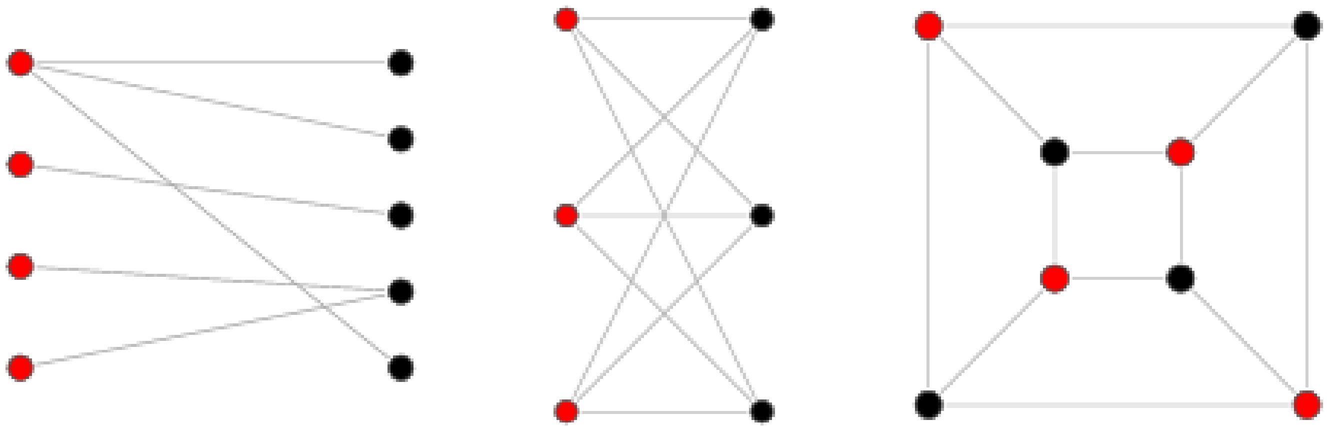
- Đồ thị đầy đủ (Complete graph)



https://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html

Một số loại đồ thị

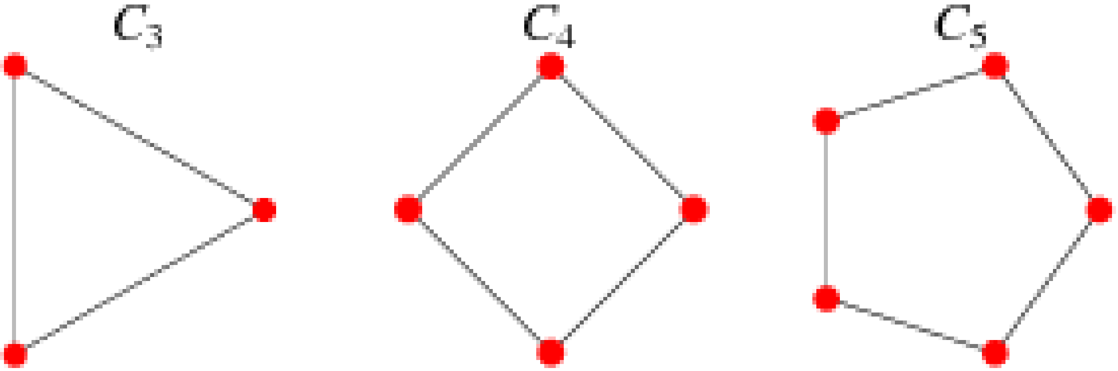
- Đồ thị hai phía (Bipartite graph)



https://mathworld.wolfram.com/BipartiteGraph.html

Một số loại đồ thị

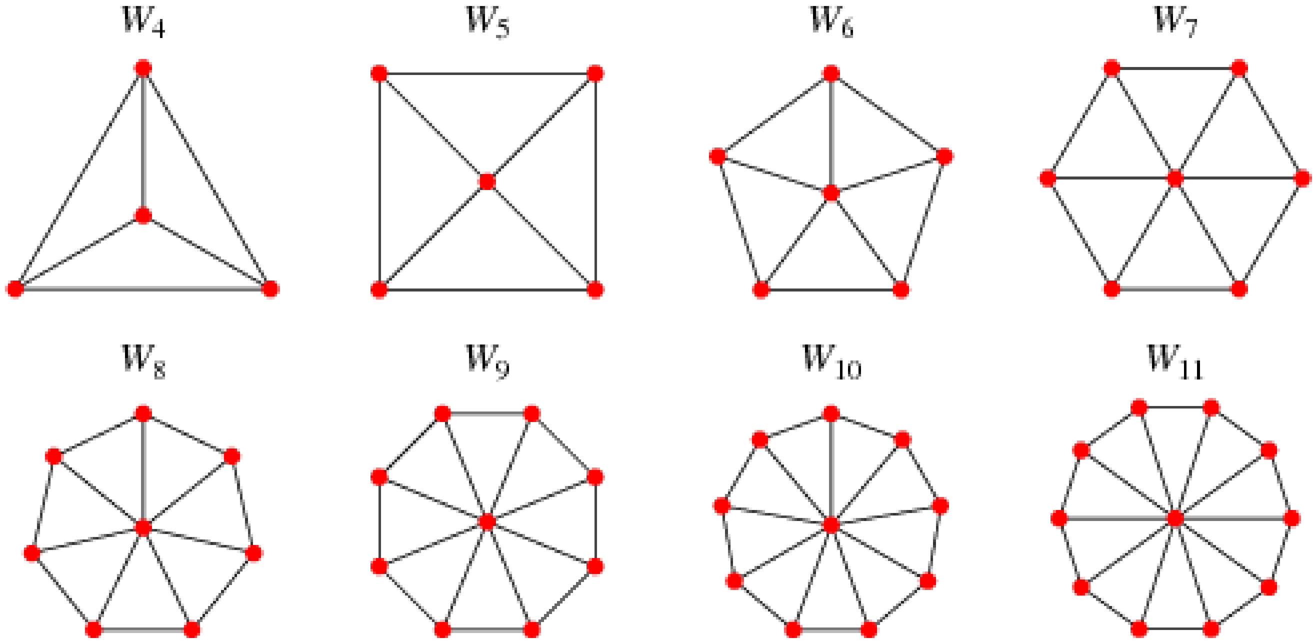
❖ Đồ thị tròn (Cycle graph)



https://mathworld.wolfram.com/CycleGraph.html

Một số loại đồ thị

- Đồ thị bánh xe (Wheel graph)

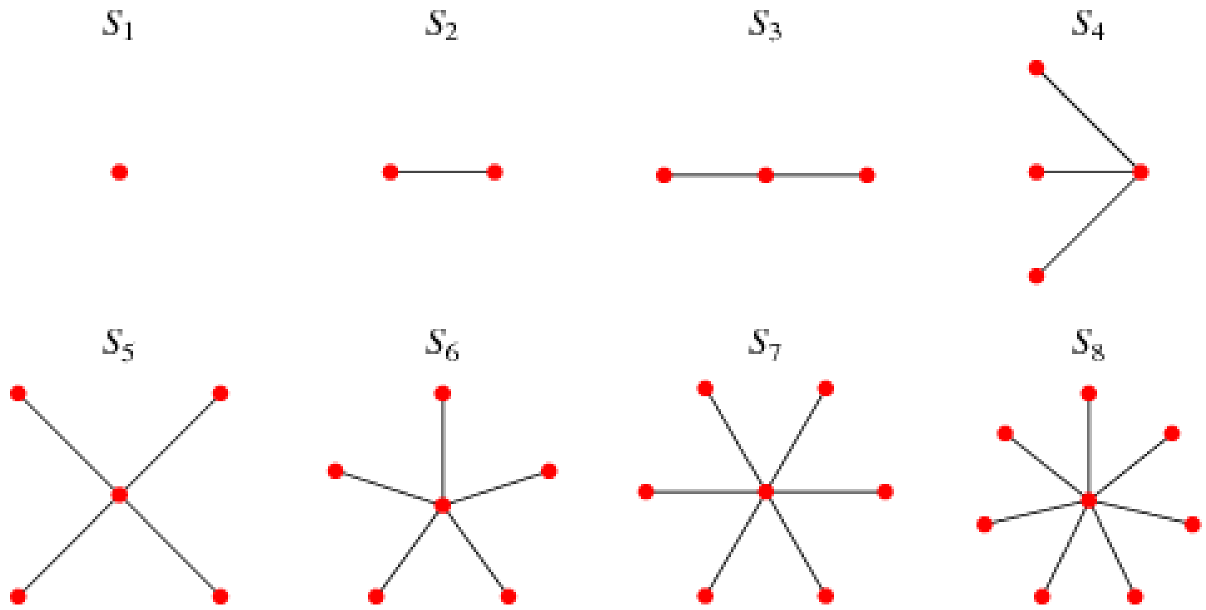


https://mathworld.wolfram.com/WheelGraph.html

Một số loại đồ thị

❖ Một số loại đồ thị

- Đồ thị hình sao (Star graph)



https://mathworld.wolfram.com/StarGraph.html

CHU TRÌNH HAMILTON

HAMILTONIAN CYCLE

Chu trình Hamilton

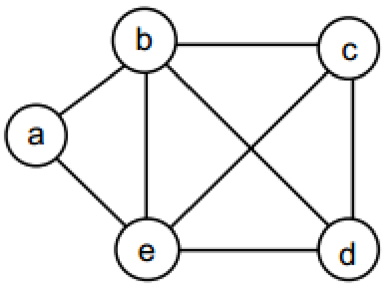
❖ Khái niệm

- Đường đi Hamilton (Hamiltonian path) là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng 1 lần.
- Chu trình Hamilton (Hamiltonian cycle) là chu trình đi qua những đỉnh còn lại đúng 1 lần và quay lại đỉnh xuất phát

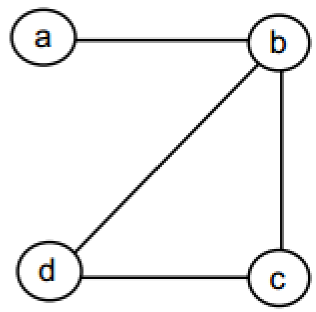
- **Hình thức**: Đồ thị G = (V, E) có n đỉnh
  - Đường đi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là đường đi Hamilton nếu x_i # x_j với $1 \leq i < j \leq n$
  - Chu trình $(x_1, x_2, ..., x_n, x_1)$ được gọi là chu trình Hamilton nếu x_i # x_j với $1 \leq i < j \leq n$

Chu trình Hamilton

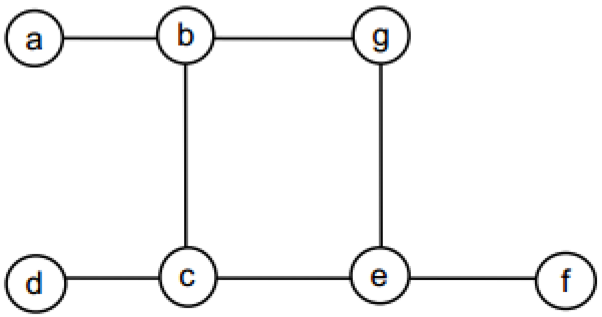
- **Ví dụ**



G_1



G_2

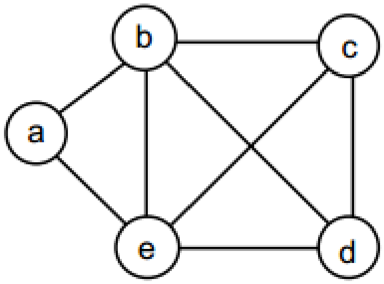


G_3

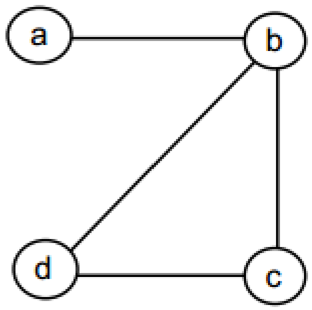
Tìm đường đi, chu trình Hamilton của các đồ thị trên?

Chu trình Hamilton

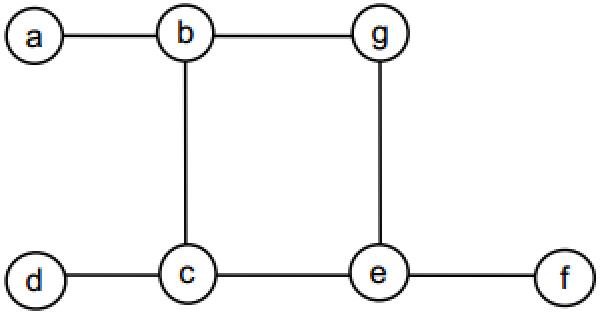
❖ **Ví dụ**



G_1



G_2



G_3

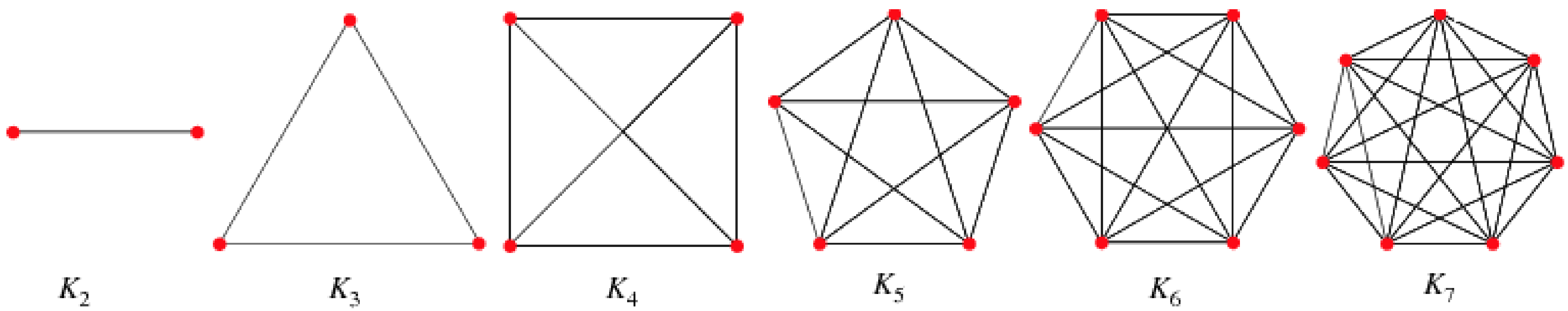
G_1 có chu trình Hamilton (a,b,c,d,e,a)

G_2 không có chu trình Hamilton, có đường đi Hamilton (a,b,c,d) (d,c,b,a)

G_3 không có chu trình và đường đi Hamilton

Chu trình Hamilton

❖ **Đồ thị có chu trình Hamilton**

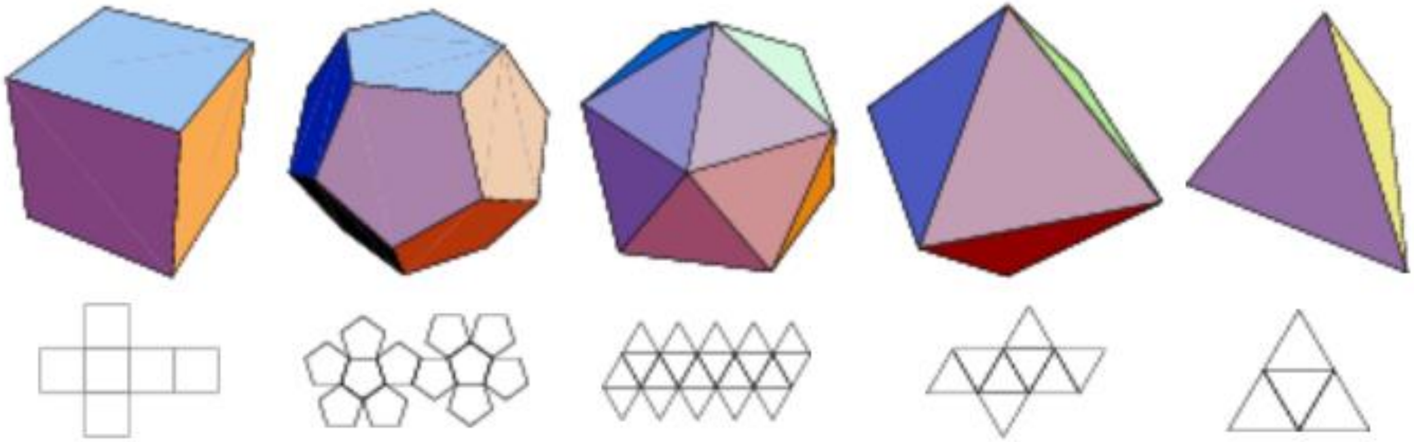


Đồ thị đầy đủ K_n (Complete Graphs)

http://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html

Chu trình Hamilton

❖ **Đồ thị có chu trình Hamilton**

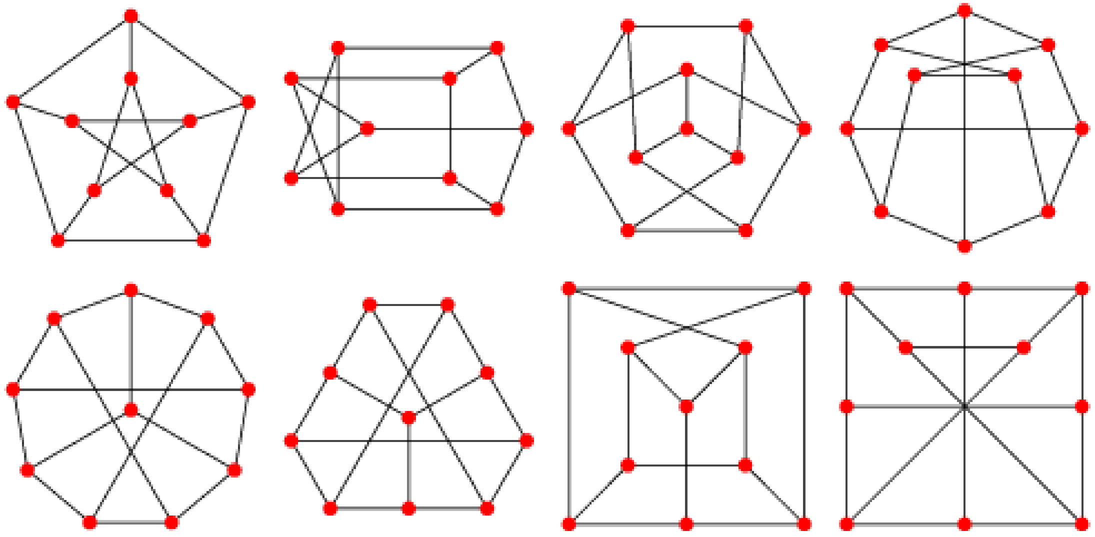


Đồ thị khối đa diện đều (Platonic Solid Graphs)

http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html

Chu trình Hamilton

- **Đồ thị không có chu trình Hamilton**



Đồ thị Petersen (Petersen Graph)

http://mathworld.wolfram.com/PetersenGraph.html

Chu trình Hamilton

- **Một số kết quả**
  - Chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton và tìm chu trình là bài toán khó (hard problem).
  - Chưa có định lí về điều kiện cần và đủ để đồ thị có chu trình Hamilton
  - Định lý Dirac (1951): Đồ thị vô hướng liên thông G có $n \geq 3$ đỉnh và $\deg(v) \geq n/2$, $\forall v \in V$ thì có chu trình Hamilton.
  - Đồ thị có hướng G liên thông có n đỉnh và $\deg^+(v) \geq n/2$ và $\deg^-(v) \geq n/2$ $\forall v \in V$ thì có chu trình Hamilton

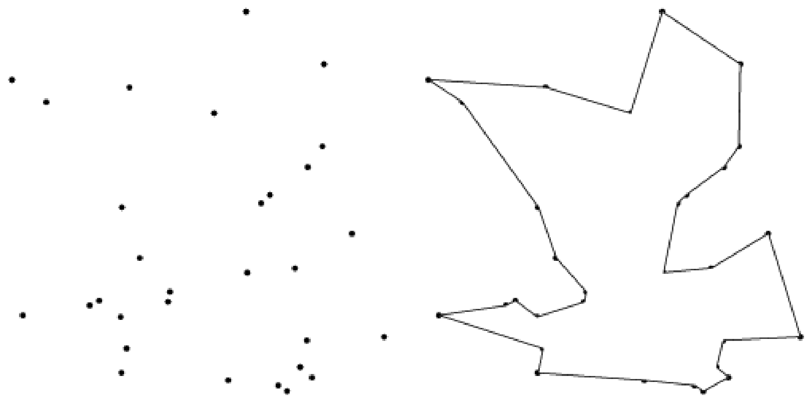
Chu trình Hamilton

- **Thuật toán tìm chu trình Hamilton**
  - ***Vét cạn***
    - Sinh hoán vị các đỉnh và xác định đường đi
  - ***Quay lui***
    - Sinh đường đi với dãy các đỉnh kề nhau đến khi kết thúc (hết đỉnh hoặc quay lại đỉnh cũ)
  - ***Nhánh cận***
    - Áp dụng đối với chu trình Hamilton trên đồ thị có trọng số

Chu trình Hamilton

❖ **Chu trình Hamilton và bài toán người đưa hàng**

- Bài toán người đưa hàng (*traveling salesman problem*): người đưa hàng cần đi tới tất cả các thành phố, mỗi thành phố một lần với tổng chi phí thấp nhất.
- Kết quả = Chu trình Hamilton với tổng trọng số nhỏ nhất



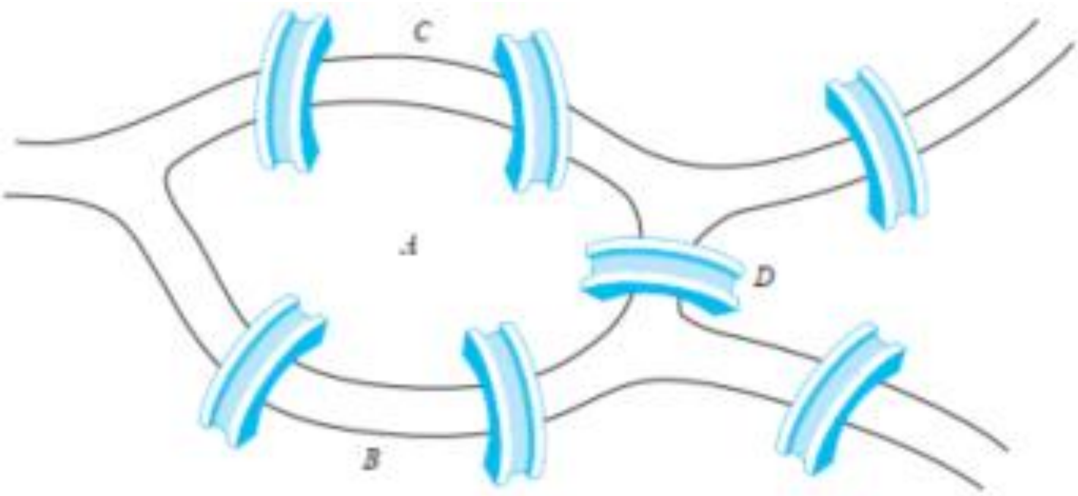
- Thuật toán: Nhánh cận

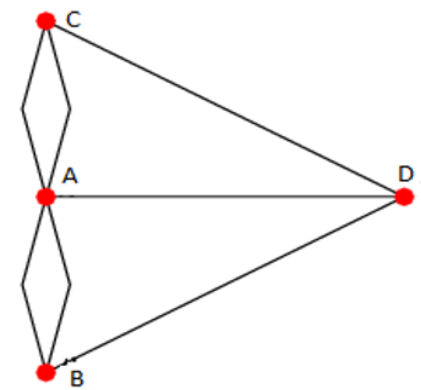
CHU TRÌNH EULER

EULER CYCLE

Chu trình Euler

- **The Königsberg bridge problem:** Euler (1736)





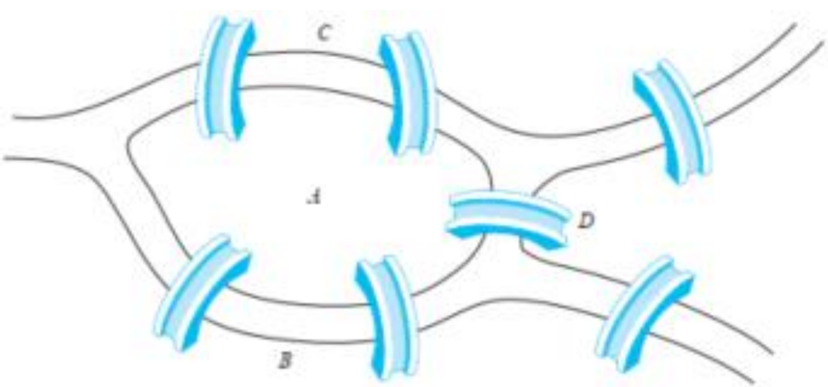
[Rosen-Ed7, section 10.5]

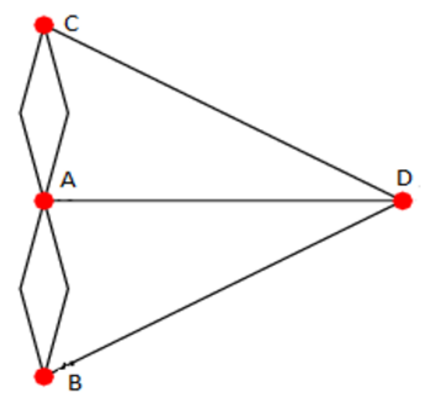
Chu trình Euler

❖ **Khái niệm**

- Đường đi Euler (Eulerian path) là đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng 1 lần.
- Chu trình Euler (Eulerian cycle) là chu trình đi xuất phát từ 1 đỉnh, đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng 1 lần và quay lại đỉnh xuất phát

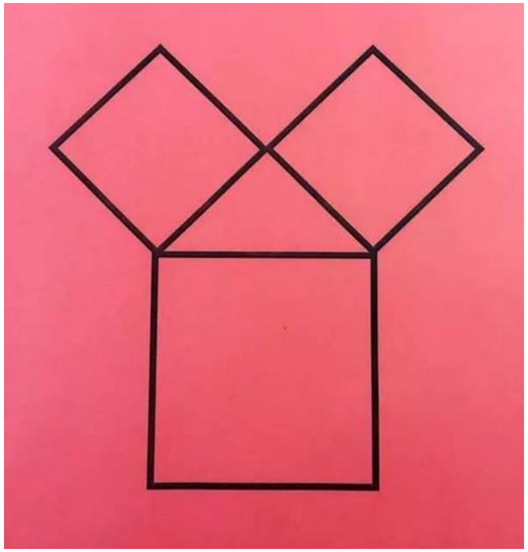
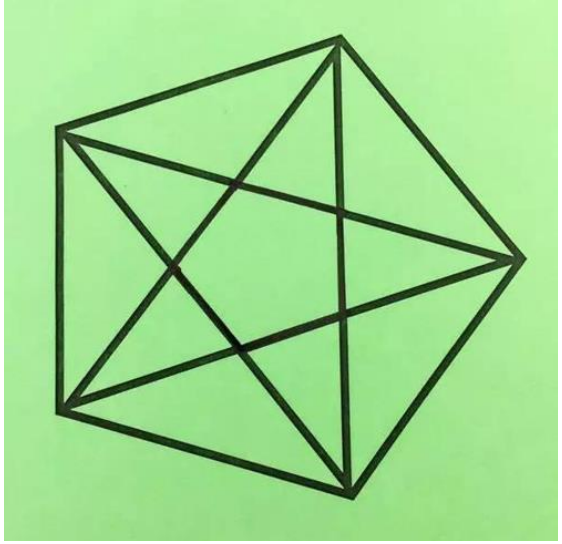
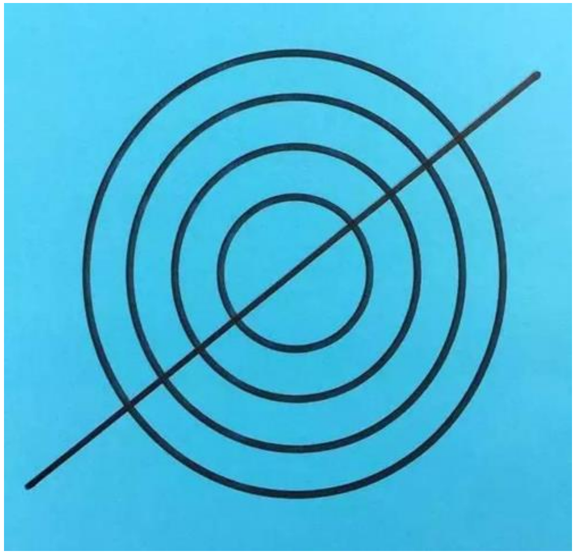
❖ **The Königsberg bridge problem:** Euler (1736)





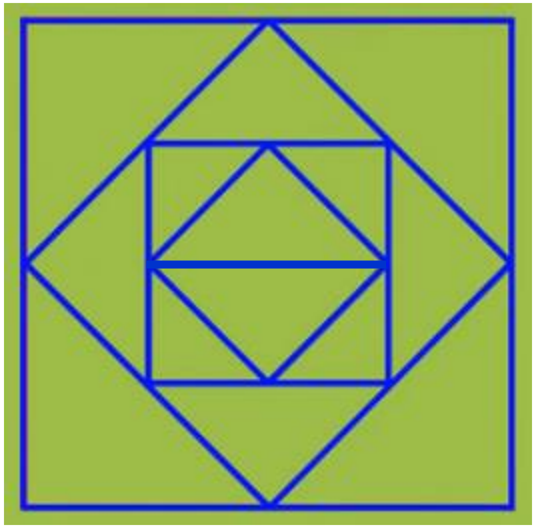
Chu trình Euler

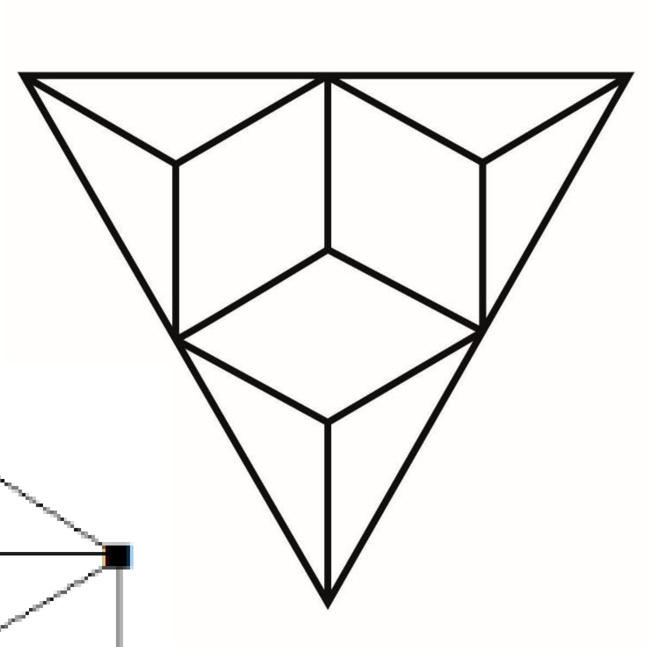
❖ **Ví dụ**

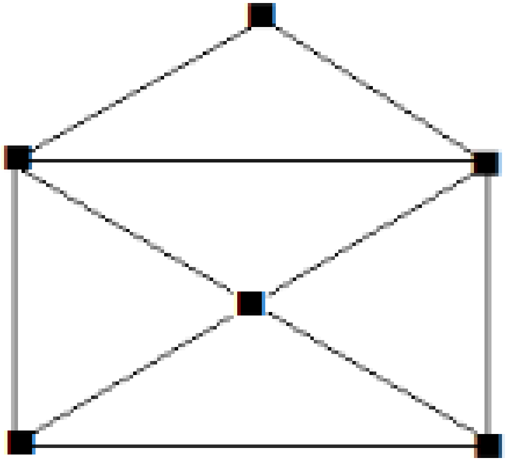
  

Chu trình Euler

❖ **Ví dụ**





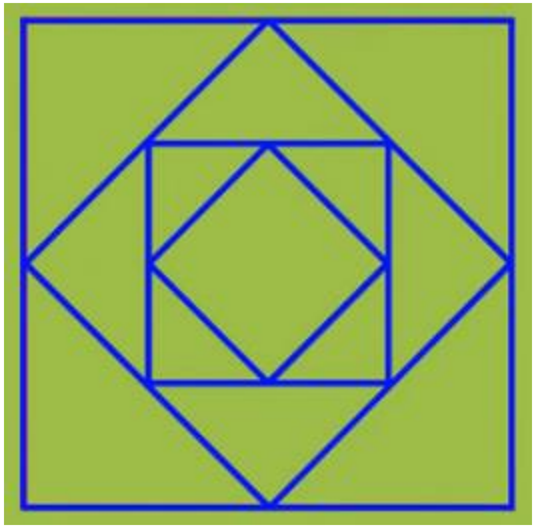


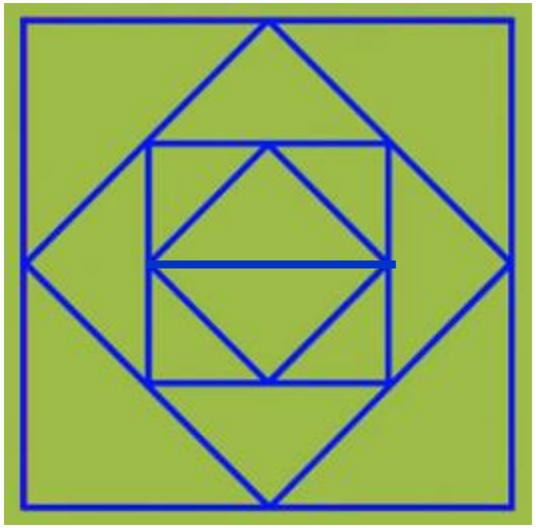
Chu trình Euler

- **Điều kiện cần và đủ để đồ thị có chu trình Euler**
  - Đồ thị vô hướng liên thông G = (V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn: deg(v) %2 = 0
  - Đồ thị vô hướng liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng 2 đỉnh bậc lẻ
  - Đồ thi có hướng liên thông G = (V, E) có chu trình Euler khi mọi đỉnh của nó có bán bậc ra bằng bán bậc vào: deg+(v) = deg-(v) ($\forall v \in V$).
  - Đồ thị có hướng liên thông G = (V, E) có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu tồn tại đúng hai đỉnh u, v $\in$ V sao cho $deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$, còn tất cả những đỉnh khác u và v đều có bán bậc ra bằng bán bậc vào.

Chu trình Euler

- **Ví dụ**

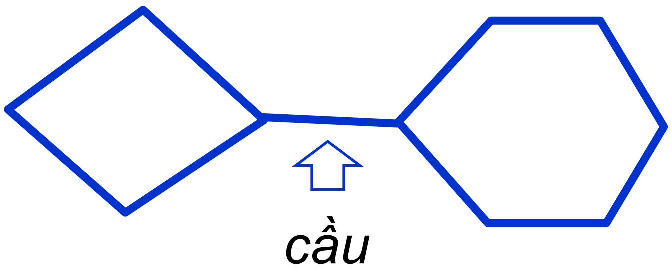




Chu trình Euler

❖ Thuật toán Fleury tìm chu trình Euler

- ***Khái niệm "cạnh cầu":*** là cạnh nếu như bỏ đi sẽ chia đồ thị thành 2 thành phần liên thông.



- ***Thuật toán Fleury***
  - Xuất phát từ một đỉnh, chọn một cạnh kề để đi tiếp theo nguyên tắc:
    - Xoá bỏ cạnh đã đi qua
    - Chỉ đi qua cầu khi không còn cạnh nào khác để chọn.
  - Và ta cứ chọn cạnh đi một cách thoải mái như vậy cho tới khi không đi tiếp được nữa, đường đi tìm được là chu trình Euler.

Chu trình Euler

- **Ứng dụng giải trình tự DNA (DNA sequencing)**
  - DNA sequencing

    https://www.youtube.com/watch?v=ONGdehkB8jU

  - Hamilton, Euler and Genome Sequencing

    https://www.youtube.com/watch?v=0JlUy_l-RTk

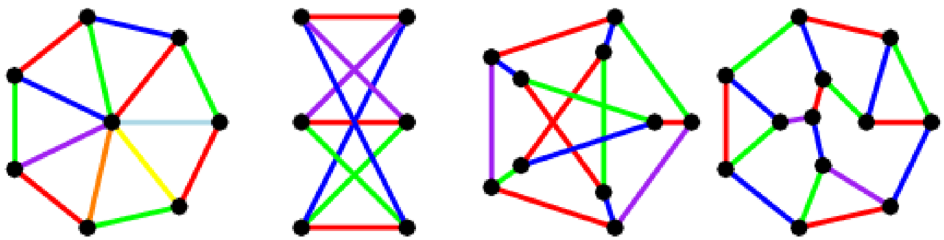
TÔ MÀU ĐỒ THỊ

GRAPH COLOURING

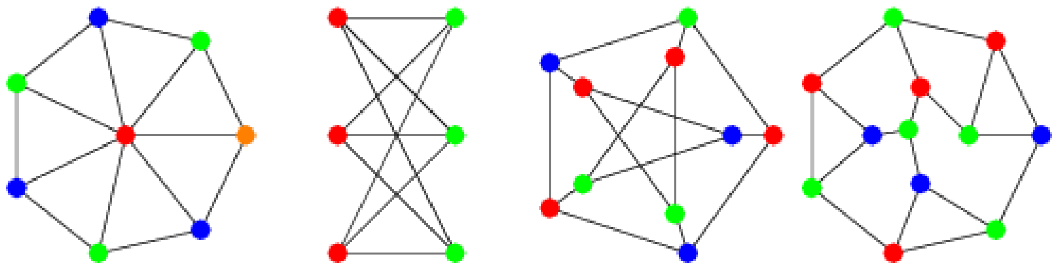
Tô màu đồ thị

❖ **Khái niệm Tô màu đồ thị (Graph coloring)**

- Là việc sử dụng các màu gán cho các đỉnh (cạnh) của một đồ thị sao cho hai đỉnh kề (hoặc hai cạnh kề) bất kì không cùng màu



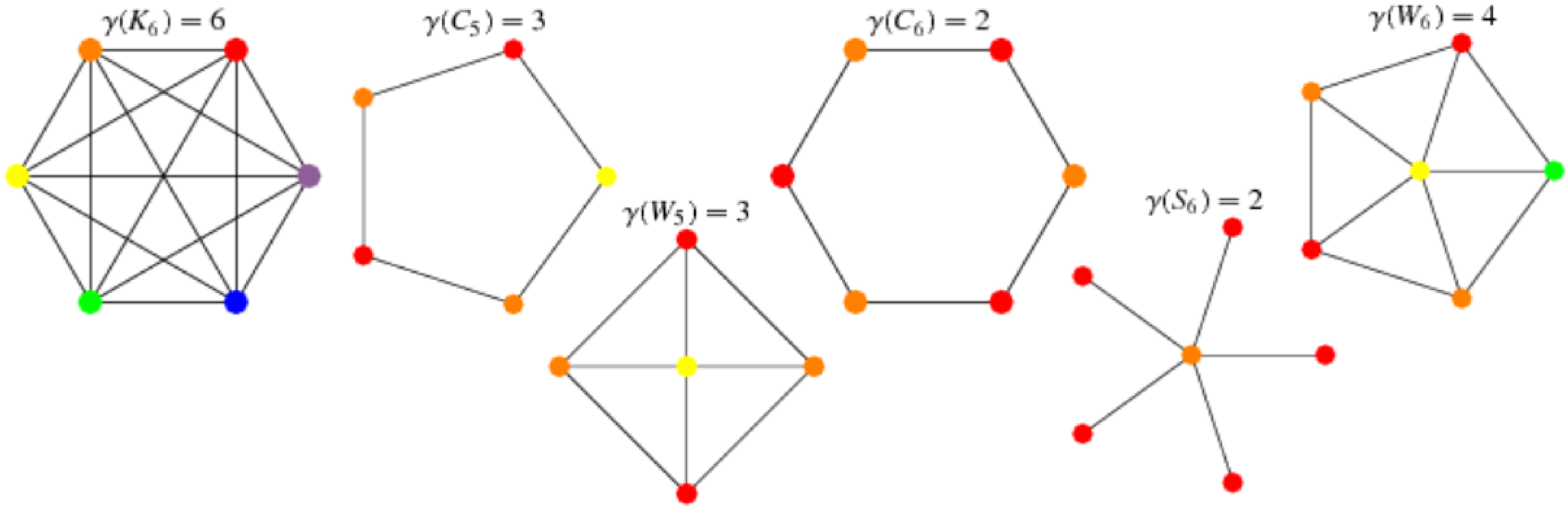
https://mathworld.wolfram.com/EdgeColoring.html



https://mathworld.wolfram.com/VertexColoring.html

Tô màu đồ thị

- **Khái niệm Sắc số của đồ thị (chromatic number)**
  - Sắc số của đồ thị: số màu tối thiểu để tô màu cho đồ thị (tô màu đỉnh hoặc tô màu cạnh) – kí hiệu γ(G)



https://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html

Tô màu đồ thị

❖ **Thuật toán**

- Tham lam

Algorithm GreedyColor(G)
$L := sort(V); c := sort(colors)$
for $v \in V$ **do**
    choose smallest c_i not used by colored neigbors
end for

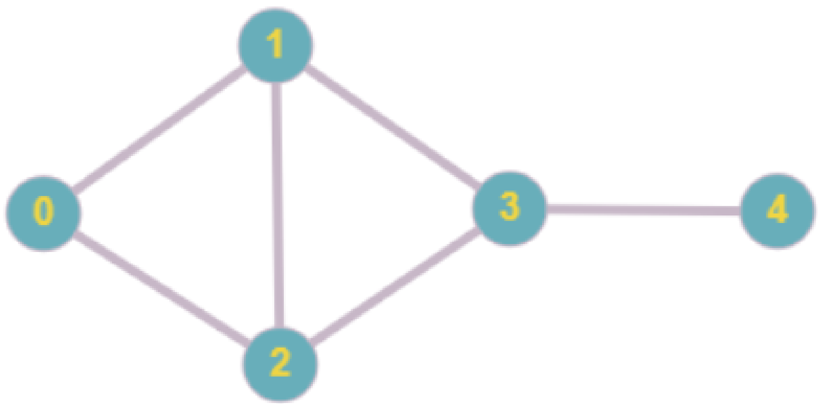
- Chiến lược tham lam
  - Duyệt các đỉnh chưa tô màu
  - Sử dụng màu nhỏ nhất, khác với màu của các đỉnh kề để tô cho đỉnh đó.

Tô màu đồ thị

❖ **Thuật toán**

- Ví dụ tô màu đồ thị:

http://graphonline.ru/en/?graph=uRJXZGKKwgbzODjx



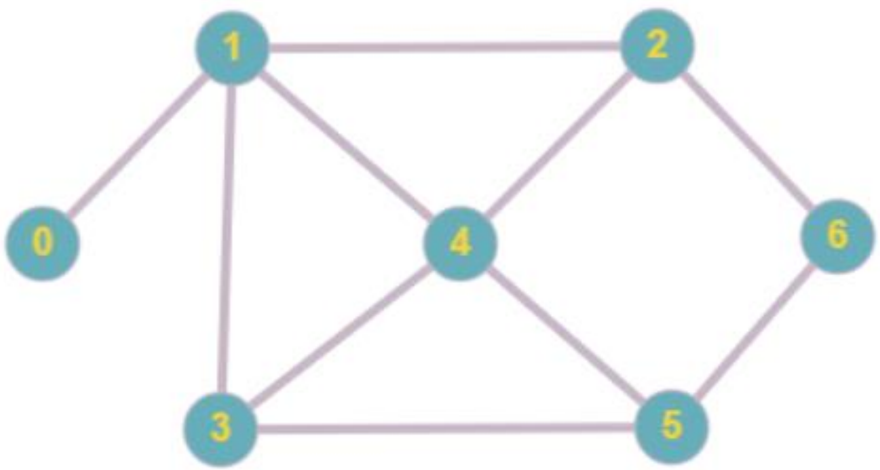
- Sử dụng bao nhiêu màu để tô cho đồ thị trên?

Tô màu đồ thị

❖ **Thuật toán**

- Ví dụ tô màu đồ thị:

http://graphonline.ru/en/?graph=DunvxOSWbFmYftqt



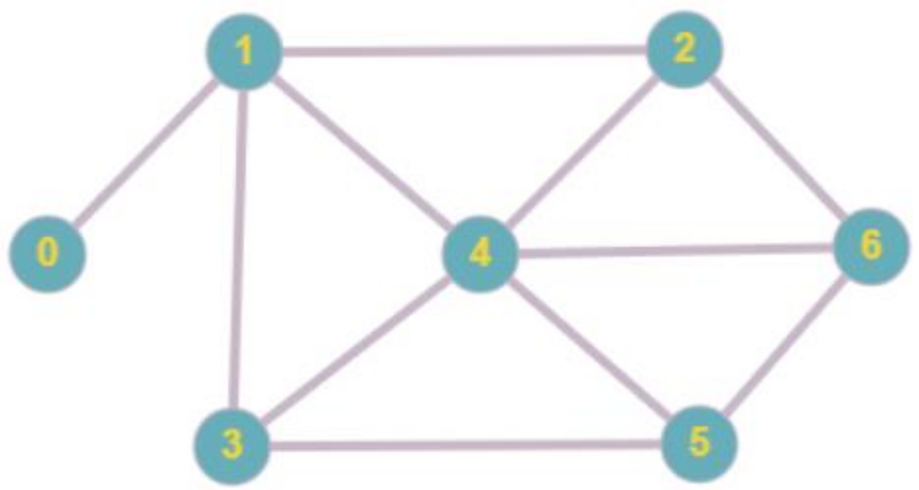
- Sử dụng bao nhiêu màu để tô cho đồ thị trên?

Tô màu đồ thị

❖ **Thuật toán**

- Ví dụ tô màu đồ thị:

  http://graphonline.ru/en/?graph=DunvxOSWbFmYftqt



- Sử dụng bao nhiêu màu để tô cho đồ thị trên?

Tô màu đồ thị

❖ **Một số kết quả**

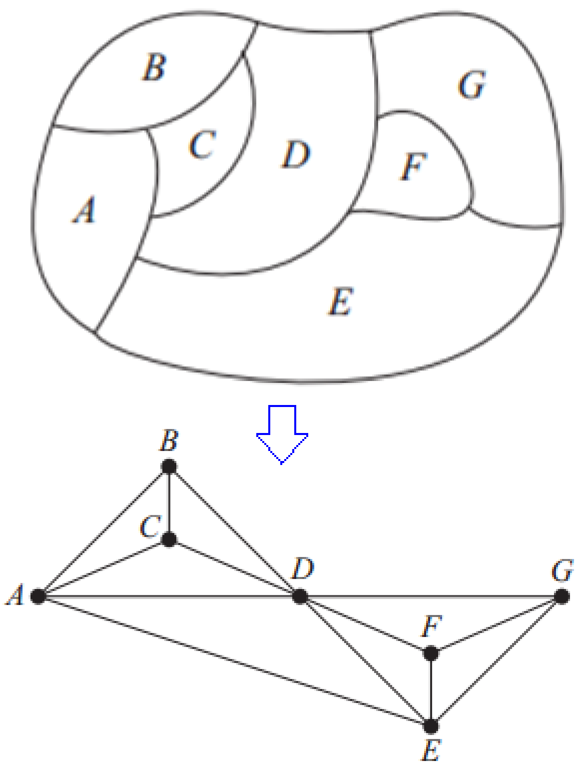
- Định lí 4 màu (the four color theorem): Sắc số của một đồ thị phẳng là 4 (cần dùng tối đa 4 màu để tô màu cho 1 đồ thị phẳng).
- Sắc số của một số đồ thị đặc biệt:

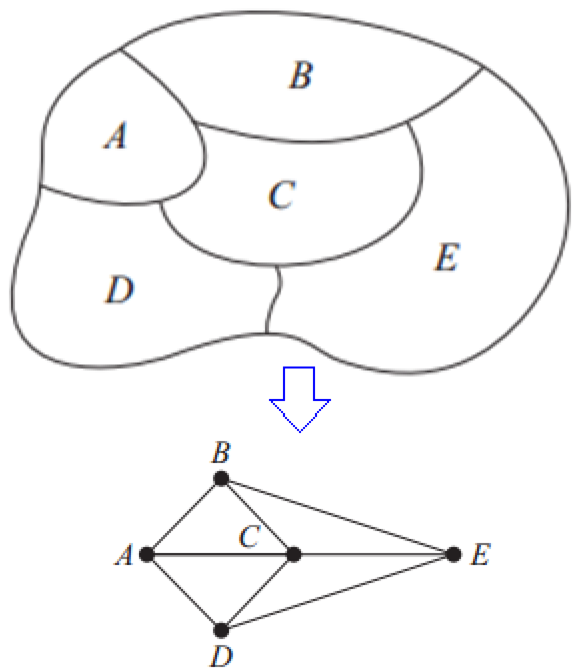
graph G	$\gamma(G)$
complete graph K_n	n
cycle graph C_n, $n > 1$	$\begin{cases} 3 & \text{for n odd} \\ 2 & \text{for n even} \end{cases}$
star graph S_n, $n > 1$	2
wheel graph W_n, $n > 2$	$\begin{cases} 3 & \text{for n odd} \\ 4 & \text{for n even} \end{cases}$

Tô màu đồ thị

❖ **Ứng dụng**

- Tô màu bản đồ: Tô màu cho các vùng (quốc gia)

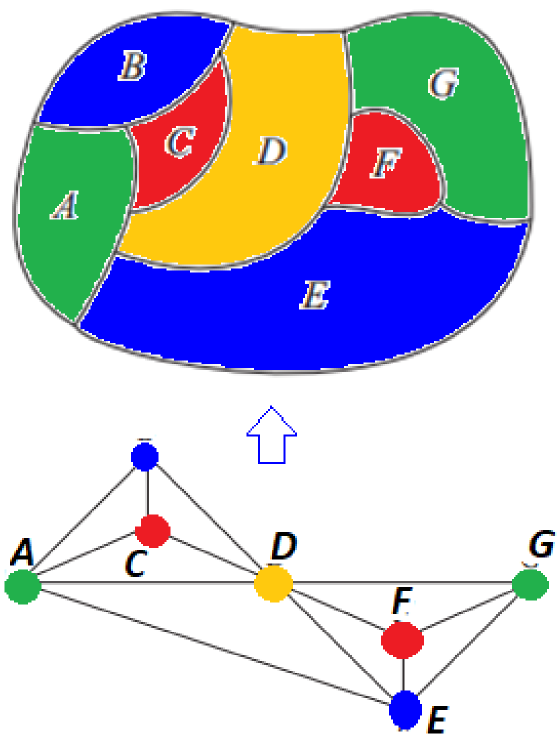


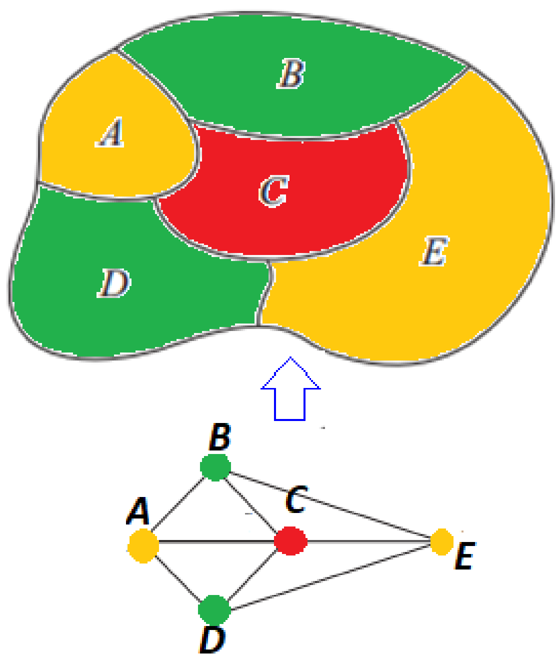


Tô màu đồ thị

❖ **Ứng dụng**

- Tô màu bản đồ: Tô màu cho các vùng (quốc gia)





Tô màu đồ thị

❖ **Một số ứng dụng**

- Making scheduling final exam
- Mobile radio frequency assignment
- Sudoku
- Register Allocation
- Bipartite Graphs

https://www.geeksforgeeks.org/graph-coloring-applications/

Bài tập thực hành

- **Phát triển ý tưởng ứng dụng cho các thuật toán**
  - Tìm đường đi và chu trình Hamilton của đồ thị
  - Tìm đường đi và chu trình Euler của đồ thị
  - Tô màu đồ thị và tìm sắc số của đồ thị

→ Bài thực hành số 3