2001年 6月 北京航空航天大学学报(社会科学版) June 2001
第14卷 第2期 Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics(Social Science Edition) Vol.14 No.2

均值－方差模型有效组合投资的一个简单算法

刘善存[1]，邱菀华[2]
(1. 北京航空航天大学 理学院，北京 100083；2. 北京航空航天大学 经济管理学院，北京 100083)

摘　要：本文讨论了均值－方差有效组合投资问题，给出了基于不同模型的有效组合投资的解析表达式；利用这些解析表达式，进一步讨论了基于一般均值－方差效用函数的优化模型，给出了一个简单的算法。

关 键 词：证券组合投资；均值－方差模型；效用函数；有效组合投资
中图分类号：F 830.9；F224 **文献标识码**：A **文章编号**：1008－2204(2001)02-0014-05

1 引　言

马克威茨1952年给出的均值－方差基本模型奠定了现代金融的基础，[1]在一个无摩擦的市场上，按一定的投资比例将资金投入到各种风险证券上，以较小的风险获得较高的收益。投资组合的收益和风险分别以均值和方差来度量。为比较两个随机收益的优劣，Rothschild 和 Stiglize (1970年，1971年)给出了二阶随机占优的概念并证明了当两个组合投资的均值相等时，[2,3]随机占优的组合投资具有较小的方差。由均值－方差模型得到的有效前沿理论、二资金分离理论及著名的资本资产定价理论得到了广泛的应用。[4]近40年来，许多学者在理论和应用上作了大量的工作，[5-7]马克威茨的基本理论得到了推广和补充。

本文进一步讨论了均值－方差基本模型，给出了有效组合的另一种解析表达方式，给出了基于一般均值－方差效用理论的最优组合投资的一种简单有效的算法；给出了算例。本文的结果是传统的马克威茨均值－方差模型的一个解释和补充。

2 模　型

设投资者将资金投入到具有 n 个风险证券的证券市场，不妨设投资者的最初财富为1，投资期限为一个周期(可以为一天、一星期、或一个月等)。投资者的最终财富是一个随机变量。投资者的目标就是选择一个投资策略(投资组合)使得最终的收益最高而风险最少，风险和收益用最终财富的方差和均值来刻画。记：

$x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为投资组合，其中 x_i 表示投资到证券 $i(i=1,\cdots,n)$上的比例；

$r'=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$为随机收益向量，其中 r_i 是风险证券 $i(i=1\cdots,n)$的随机收益；

$R'=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$为期望收益向量，$\sigma_{ij}:=\operatorname{cov}(r_i,r_j)$，为 r_i 和 r_j，$i,j=1,\cdots,n$ 的协方差，$A=(\sigma_{ij})_{n\times n}$为协方差矩阵。

本文中，我们假定矩阵 A 正定，并设 $R\neq re$，任意 $r\in R$，其中，$e'=(1,1,\cdots,1)\in R^n$，即各风险证券的期望收益不完全相等。这样投资组合 $x=(x_1,\cdots,x_n)'$所获得的最终随机财富为：

$$r(x)=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i=r'x$$

其期望收益和方差为：

$$R(x)=\sum_{i=1}^{n}R_ix_i=R'x$$

和 $$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j=x'Ax$$

投资者追求收益最大化和风险最小化，即其投资策略可以描述为一个双目标规划问题

$$(BP)\begin{cases}\text{Maximize } R(x)\\ \text{Minimize } V(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n}x_i=1\end{cases}$$

定义1 一个投资组合 x^* 称为有效的(即有效投资组合)，如果不存在其它的可行的组合投资 x，使得 $R(x)\geqslant R(x^*)$，$V(x)\leqslant V(x^*)$，并且至少其中一个为严格不等式。

据多目标规划理论，[8]每个有效组合均可以

收稿日期：2000-10-20
基金项目：国家自然科学基金(79930900)
作者简介：刘善存(1964－)，男，河北人，博士研究生。

通过如下三种模型的任何一个求解得到：

$$(PE)\begin{cases}\text{Minimize } V(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = e'x = 1,\\ R(x) = E\end{cases}$$

$$(QV)\begin{cases}\text{Maximize } R(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = e'x = 1,\\ V(x) = V\end{cases}$$

$$(OW)\begin{cases}\text{Maximize } R(x) - WV(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = e'x = 1,\end{cases}$$

其中 $E, V, W(>0)$是适当的参数。

每个问题的求解都可以得到有效组合投资策略，但三种模型分别具有不同的含义，代表不同的投资者的行为。模型(PE)表示投资者追求的目标是在一定的期望收益水平上，寻求风险最小的策略；模型(QV)表示投资者的目标是在给定的风险水平上，寻求期望收益最大的策略；模型(OW)表示投资者在给定风险和期望收益的均衡系数时，寻求效用最大的投资组合策略，其中的参数 W 表示风险厌恶度。

下面我们分别对各种模型进行讨论。

3 求解有效解

3.1 不含期望收益约束的风险极小问题

考虑规划问题

$$(P)\begin{cases}\text{Minimize } V(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\end{cases}$$

问题(P)代表的是风险极端厌恶型。因为 A 是正定矩阵，目标函数 $V(x)$是严格凸函数，该问题有唯一解。[9]应用 Kuhn-Tucker 最优性条件得到：

$$Ax - \gamma e = 0, \quad x'e = 1$$

求解该方程，易得问题(P)的最优解

$$x_{\min} = \frac{A^{-1}e}{e'A^{-1}e} \tag{1}$$

其相应的均值和方差分别为：

$$R(x_{\min}) = R'x_{\min} = \frac{R'A^{-1}e}{e'A^{-1}e} \tag{2}$$

和
$$V(x_{\min}) = x'Ax_{\min} = \frac{1}{e'A^{-1}e} \tag{3}$$

3.2 问题(PE)的最优解

考虑如下带有期望收益约束的风险极小化问题

$$(PE)\begin{cases}\text{Mionimize } V(x)\\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = e'x = 1\\ R(x) = E\end{cases}$$

因为 A 是正定矩阵，目标函数严格凸，两个约束为线性函数，因此问题(PE)有唯一解，且 Kuhn-Tucker 条件为必要充分条件。问题(PE)的 Lagrangian 函数为：

$$L(x,\beta,\lambda) = L =$$
$$x'Ax - 2\beta(x'e-1) - 2\lambda(x'R-E)$$
$$x'e = 1,\ x'R = E$$

微分得到如下方程

$$Ax - \beta e - \lambda R = 0,\ x'e = 1,\ x'R = E$$

不妨设其 Lagarangian 乘子不为零(否则，期望收益约束将不起作用，就退化为 3.1 的情形)。设 x_{opt} 是问题(PE)的最优解，并记：

$$x_0 := \frac{1}{\lambda}(x_{opt} - x_{\min})$$

为了得到与传统形式不同的解，我们不直接求解以上方程，而求解如下的最优形式：

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0 \tag{4}$$

将它代入如上的三个方程得到：

$$A(x_{\min} + \lambda x_0) - \beta e - \lambda R = 0 \tag{5}$$

$$e'(x_{\min} + \lambda x_0) = 1 \tag{6}$$

$$R'(x_{\min} + \lambda x_0) = E \tag{7}$$

求解 (5)、(6)和(7)，得到：

$$e'x_0 = 0 \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{E - R(x_{\min})}{R(x_0)} \tag{9}$$

$$x_0 = \frac{1}{\lambda}(\beta A^{-1}e + \lambda A^{-1}R - x_{\min}) \tag{10}$$

由式(8)、(9)和(10)，有

$$0 = e'x_0 = \frac{1}{\lambda}(\beta e'A^{-1}e + \lambda e'A^{-1}R - e'x_{\min})$$

进一步，又有

$$\lambda e'A^{-1}R + \beta e'A^{-1}e = 1 \tag{11}$$

综合(1)、(10)和(11)三式，得到：

$$x_0 = \frac{1}{\lambda}(\beta A^{-1}e + \lambda A^{-1}R - A^{-1}e(e'A^{-1}e)^{-1}) =$$
$$\frac{1}{\lambda}((\beta e'A^{-1}e - 1)A^{-1}e(e'A^{-1}e)^{-1} + \lambda A^{-1}R) =$$
$$\frac{1}{\lambda}(-(\lambda e'A^{-1}R)A^{-1}e(e'A^{-1}e)^{-1} + \lambda A^{-1}R) =$$
$$A^{-1}\left(R - \frac{e'A^{-1}R}{e'A^{-1}e}e\right) = A^{-1}(R - R(x_{\min})e) \tag{12}$$

通过以上的计算，总结为如下几个结论：

定理 1 问题(PE)的最优解的解析表达形式为:

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0 = \frac{A^{-1}e}{e'A^{-1}e} + \frac{E - \frac{R'A^{-1}e}{e'A^{-1}e}}{R(x_0)} x_0 = \frac{A^{-1}}{e'A^{-1}e}\left[e + \frac{(e'A^{-1}e)E - R'A^{-1}e}{(R'A^{-1}R)(e'A^{-1}e) - (e'A^{-1}R)^2} \times ((e'A^{-1}e)R - (e'A^{-1}R)e)\right] \qquad (13)$$

其中 x_0 称之为资产的再调整向量。它与从不含期望约束的最优投资组合向量与带有期望约束的最优组合向量之差成比例。

定理 2 对应的期望收益和方差相等,即

$$R'x_0 = R(x_0) = V(x_0) = x_0'Ax_0$$

证明:由于

$$V(x_0) = x_0'Ax_0 = x_0'(R - R(x_{\min})e) = x_0'R = R(x_0)$$

所以结论即得。

定理 3 资产的再调整向量 x_0 与期望约束的水平参数 E 无关。

证明:由式(12),显然。

定理 4 再调整向量 x_0 对应的随机收益与不含期望约束的最优组合 $x_{\min}$ 对应的随机收益不相关。

证明 再调整向量 x_0 对应的随机收益与不含期望约束的最优组合 $x_{\min}$ 对应的随机收益 之间的协方差为:

$$\mathrm{cov}(r(x_0), r(x_{\min})) = x_0'Ax_{\min} = x_0'A\frac{A^{-1}e}{e'A^{-1}e} = x_0'e\frac{1}{e'A^{-1}e} = 0$$

因此,定理得证。

由定理 4,易得最优组合对应的随机收益的方差为:

$$V(x_{opt}) = V(x_{\min}) + \lambda^2 V(x_0) = v(x_{\min}) + \lambda^2 R(x_0) \qquad (14)$$

3.3 问题(QV)的最优解

考虑如下风险约束下的期望收益最大问题

$$(QV)\begin{cases}\text{Maximize } R(x) \\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} = e'x = 1 \\ V(x) = V\end{cases}$$

由于该问题的每个解,如果是有效组合,那么必然存在某参数也必然是问题 E,使得它必是问题(PE)的最优解,因此,问题(QV)的最优解同时又是一个有效的投资组合,那么它必然可以表示为如下形式

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0$$

其中

$$x_{\min} = \frac{A^{-1}e}{e'A^{-1}e},\ x_0 = A^{-1}\left(R - \frac{e'A^{-1}R}{e'A^{-1}e}e\right)$$

而参数 λ 可以由问题中风险约束水平参数 V 来确定,即

$$V = V(x_{opt}) = V(x_{\min}) + \lambda^2 V(x_0)$$

得

$$\lambda = \sqrt{\frac{V - V(x_{\min})}{V(x_0)}}$$

3.4 问题(OW)的最优解

考虑如下约束问题

$$(OW)\begin{cases}\text{Maximize } R(x) - WV(x) \\ \text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i = e'x = 1\end{cases}$$

引理 1 设 $\bar{x}$ 是问题(OW)的最优解,那么存在参数 E,使得 $\bar{x}$ 是(PE)的最优解。

证明 令 $R(\bar{x}) = E$。反证法,假设 $\bar{x}$ 不是问题(PE)的最优解,那么一定存在一个投资组合 x,使得 x 是问题(PE)的可行解,即满足 $x^te = 1$,$R(x) = E = R(\bar{x})$,且 $V(x) < V(\bar{x})$。因此 x 也是问题(OW)的可行解,并且 $R(x) - WV(x) > R(\bar{x}) - WV(\bar{x})$。这与 $\bar{x}$ 是问题(OW)的最优解矛盾。

由引理 1,问题(OW)可以嵌入问题(PE),而 3.2 的讨论得到,其最优解为:

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0$$

其中的参数 λ 取决于问题(OW)中的风险厌恶参数 W,由于它是问题(OW)的最优解,因此,参数 λ 也是如下问题的解

$$\underset{\lambda}{\text{Maximize}}[R(x_{opt}) - WV(x_{opt})] = -WV(x_0)\lambda^2 + \lambda R(x_0) + R(x_{\min}) - WV(x_{\min}) := f(\lambda)$$

对函数 $f(\lambda)$ 微分并令其为零,得到方程

$$0 = \frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -2WV(x_0)\lambda + R(x_0)$$

利用定理 2,$V(x_0) = R(x_0)$,这样,我们可以确定参数 λ,并得到最优解

$$\lambda = \frac{1}{2W},\ x_{opt} \doteq x_{\min} + \frac{1}{2W}x_0$$

3.5 一般均值-方差效用函数的最优组合投资

考虑一般效用函数的最优组合投资选择问题

$$(G)\begin{cases}\text{Maximize } U(R(x), V(x)) \\ \text{Subject to } x'e = 1\end{cases}$$

其中函数 U 关于 $R(x)$ 严格单调递增,而关于

$V(x)$严格单调递减。并设 U 是可微函数。

引理 2　如果 x^* 是问题(G)的最优解，那么一定存在某参数 W^* 使得 x^* 是问题(OW^*)的最优解。

证明　如果 x^* 是问题(G)的最优解。因为函数 U 关于 $R(x)$严格单调递增,而关于 $V(x)$严格单调递减,因此 x^* 必然是(BP)一个有效组合投资(否则,由有效组合的定义得知,存在某组合投资 x',使得

$$R(x^*) < R(x'), V(x^*) \geqslant V(x') \text{ 或 }$$
$$R(x^*) \leqslant R(x'), V(x^*) > V(x')$$

而因为函数 U 关于 $R(x)$严格单调递增,而关于 $V(x)$严格单调递减,因此 $U(R(x), V(x)) < U(R(x'), V(x'))$，这与 x^* 是问题(G)的最优解矛盾)。而每个有效解都可以通过求解问题(OW)得到。因此,存在参数 W^* 使得 x^* 是问题(OW^*)的最优解。

由以上引理得知,问题(G)可以嵌入到问题(OW)(进一步可以嵌入到问题(PE))。下面我们来确定参数 w^* 并进一步得到问题(G)的最优解。

定理 5　若 x^* 是问题(OW^*)的最优解，那么 x^* 是问题(G)的最优解的必要条件是

$$W^* = -\frac{U_V(x^*)}{U_R(x^*)}$$

证明　由引理 2，问题(G)可以嵌入到问题(OW)中，因此问题(G)可以改写为：

$$\max_{W \geqslant 0} U(R(x(W)), V(x(W)))$$

其最优解的一阶必要性条件为：

$$U_{R(x^*)} \frac{\partial R(x(W^*))}{\partial W} + U_{V(x^*)} \frac{\partial V(x(W^*))}{\partial W} = 0$$

另一方面,若 x^* 是问题(OW^*)的最优解,则(Reid 和 Citron(1971))[10]

$$\frac{\partial R(x(W^*))}{\partial W} - W^* \frac{\partial V(x(W^*))}{\partial W} = 0$$

比较以上两式,显然,向量($U_E(x^*), U_V(x^*)$) 和向量($1, -W^*$)成比例,因此

$$W^* = -\frac{U_V(x^*)}{U_R(x^*)}$$

由定理 5 和并利用前面讨论的结果,我们得到基于一般均值－方差效用理论的优化问题(G)的最优解满足

$$x_{opt} = x_{\min} + \frac{1}{2W}x_0, \quad W = -\frac{U_V(x_{opt})}{U_v(x_{opt})}$$

求解以上方程,我们可以得到最优策略。

下面我们通过一个算例来说明以上的理论结果。

4 算　例

我们给出一个简单算例如下。考虑只有两个风险证券的证券市场,其期望收益向量和协方差矩阵设为：

$$R = (2,5)', \; A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)不含期望约束的风险极小化最优组合投资策略、及其期望收益和方差分别为

$$x_{\min} = \frac{A^{-1}e}{e'A^{-1}e} = (3/7, 4/7)',$$

$$R(x_{\min}) = R'x_{\min} = (2,5)\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \frac{26}{7},$$

$$V(x_{\min}) = (e'A^{-1}e)^{-1} = \frac{5}{7},$$

$$x_0 = A^{-1}\left(R - \frac{26}{7}e\right) = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$R(x_0) = R'x_0 = V(x_0) = \frac{9}{7}$$

(2)考虑问题

$$\begin{cases} \text{Minimize } x'Ax \\ \text{Subject to } x'e = 1, x'R = E \end{cases}$$

若 $E = 4$，得到最优组合投资策略

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0, \; \lambda = \frac{E - R(x_{\min})}{R(x_0)} = \frac{2}{9},$$

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

若 $E = 4.5$，其最优投资策略为：

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0, \lambda = \frac{E - R(x_{\min})}{R(x_0)} = \frac{11}{18},$$

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

(3) 考虑问题

$$\begin{cases} \text{Maximize } R(x) \\ \text{Subject to } x'Ax = V, \; x'e = 1 \end{cases}$$

若 $V = 1$，有

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0, V = V(x_{opt}) =$$

$$V(x_{\min}) + \lambda^2 V(x_0), \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$x_{opt} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 4+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

若 $V=2$，有

$$x_{opt} = x_{\min} + \lambda x_0, V = V(x_{opt}) = V(x_{\min}) + \lambda^2 V(x_0), \lambda = 1$$

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)考虑问题

$$\begin{cases} \text{Maximize } R(x) - WV(x) \\ \text{Subject to } x'e = 1 \end{cases}$$

若 $W=1$,得到:

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix}$$

若 $W=2$,得到:

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5)考虑问题

$$(G)\begin{cases} \text{Maximize } U(R(x), V(x)) \\ \text{Subject to } x'e = 1 \end{cases}$$

其中的效用函数我们采用如下形式:

$$U(R(x), V(x)) = R^2(x) - V(x)$$

由定理 5，问题(G)的最优解满足

$$x_{opt} = x_{\min} + \frac{1}{2W}x_0,$$

其中

$$W = -\frac{U_V(x_{opt})}{U_R(x_{opt})} = \frac{1}{2R(x_{opt})}$$

因此

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}(2,5)x_{opt}$$

解得最优组合策略为:

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

5 结 论

本文我们讨论了均值 - 方差模型,给出了基于不同模型的有效组合投资的解析表达式;利用这些解析表达式,进一步讨论了基于一般均值 - 方差效用函数的优化模型,给出了一个简单的算法。通过一个算例对该方法进行了解释。

参考文献:

[1] H Markowitz. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, (7):77-91.

[2] M Rothschild, J Stiglitz. Increasing risk I: a definition[J]. Journal of Economic Theory, 1970,(2):225-243.

[3] M Rothschild, J Stiglitz. Increasing risk II: its economic consequences [J]. Journal of Economic Theory, 1971,(3):66-84.

[4] C F Huang, R H Litzenberger. Foundations for Financial Economics [M]. Academic Press, New York, 1988.

[5] Z F Li, S Y Wang. Portfolio Optimization and Non - arbitrage[M]. Science Press, Beijing, 2000.

[6] Y S Xia, S Y Wang, X T Deng. Mathematical models in Finance [J]. Chinese Journal of Management Science, 1998,(6):1-9.

[7] R C Merton. Theory of option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, (4):141-183.

[8] Vira chankong, Yacov Y Haimes. Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology Series Volume 8[M]. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[9] R W Reid, S J Citron. On non-inferior performance index vector [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1970,(7):11-28.

[10] Olvi L Mangasarian, Nonlinear Programming[M]. McGraw-Hill, New York, 1969.

A Simple Algorithm to the General Mean-Variance Model

LIU Shan-cun[1], QIU Wan-hua[2]

(1. School of Science, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083;

2. School of Economic & Management, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083)

Abstract: The traditional mean-variance model is discussed in this paper. A different analytical expression of efficient portfolio is given based on several different models. The general mean-variance utility maximization problem is also studied and a simple algorithm is given in this paper.

Key words: Portfolio selection; Mean-variance model; Utility function; Efficient portfolio