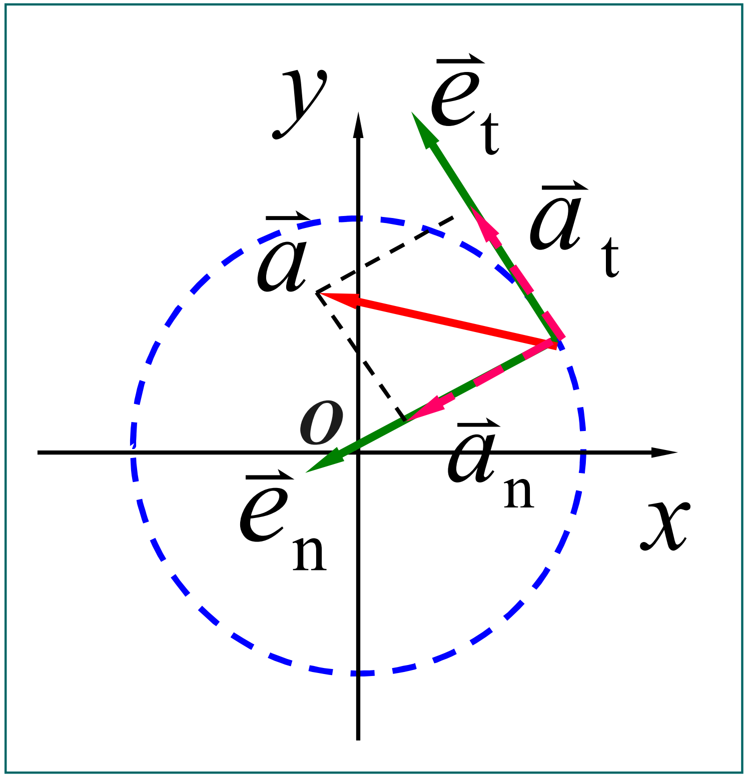
例1：质点在做半径 $r = 0.1\text{m}$ 的圆周运动，其角位置为$\theta = 2 + 4t^3$，求 $t = 2\text{s}$ 时的 a_n，a_t.

例2：无风的下雨天，一火车以**20m/s**的速度前进，车内旅客看见玻璃窗上的雨滴和铅垂线成**75°**角下降，求雨滴下落的速度（设下降的雨滴作匀速运动）。

例1：质点在做半径 $r=0.1\mathrm{m}$ 的圆周运动，其角位置为 $\theta=2+4t^3$ 求 $t=2\mathrm{s}$ 时的 a_n，a_t.



解： $\theta=2+4t^3$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=12t^2$$

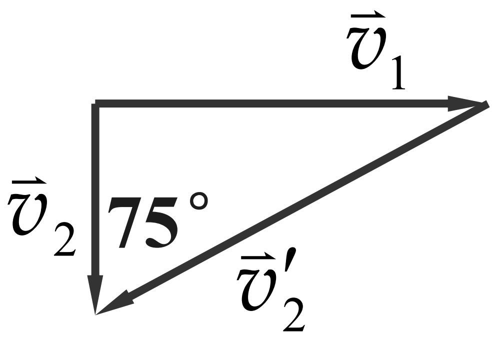
$$t=2\mathrm{s}, \omega=48\mathrm{rad/s}$$

$$a_\mathrm{n}=\omega^2 r=2.3\times10^2\mathrm{m/s^2}$$

$$a_\mathrm{t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=24rt=4.8\mathrm{m/s^2}$$

例2 无风的下雨天，一火车以**20m/s**的速度前进，车内旅客看见玻璃窗上的雨滴和铅垂线成**75°**角下降，求雨滴下落的速度（设下降的雨滴作匀速运动）。

解 以地面为参照系，火车相对地面运动的速度为 $\vec{v}_1$，雨滴相对于地面的运动速度为 $\vec{v}_2$，旅客看到雨滴下落的速度为雨滴相对于火车的运动速度 $\vec{v}_2'$.



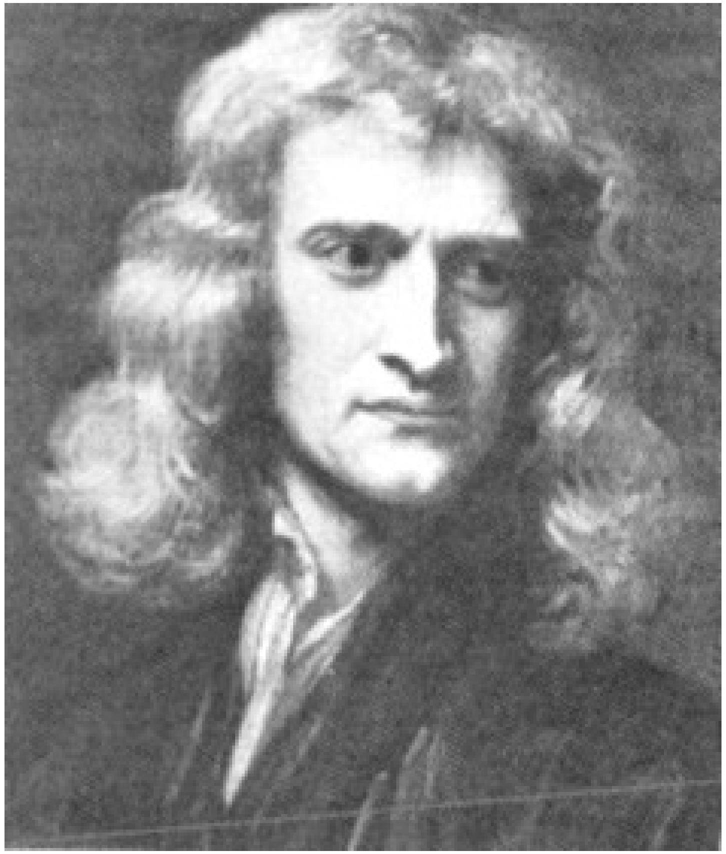
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2'$$

$$\tan 75^\circ = v_1 / v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{\tan 75^\circ} = \frac{20}{\tan 75^\circ} = 5.36\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

第二章 牛顿定律

2-1 牛顿定律



牛顿 Issac Newton （1643－1727）杰出的英国物理学家，经典物理学的奠基人. 他的不朽巨著《自然哲学的数学原理》总结了前人和自己关于力学以及微积分学方面的研究成果. 他在光学、热学和天文学等学科都有重大发现.

一　牛顿第一定律

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止.

数学形式：$\vec{F}=0$ 时，$\vec{v}=$ 恒矢量

- 定义了物体的**惯性**　任何物体都有保持其运动状态不变的性质，这一性质叫惯性.
- 定义了**力**　力是物体运动状态发生变化的原因.
- 定义了**惯性参照系**　物体在某参考系中，不受其他物体作用而保持静止或匀速直线运动状态，这个参考系称为惯性系．相对惯性系静止或匀速直线运动的参考系也是惯性系．

二　牛顿第二定律

物体动量随时间的变化率 $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 等于作用于物体的合外力 $\vec{F}=\sum\vec{F}_i$，即

★ $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\quad \vec{p}=m\vec{v}$

★ 当 $v<<c$ 时，m 为常量 $\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$

★ 牛顿第二定律只适用于质点的运动.

★ 质点所受合外力与获得的加速度为瞬时对应关系

★ 力的叠加原理

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots}{m}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\cdots$$

★ 牛顿第二定律的数学表达式

一般的表示 $$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

直角坐标表示
$$\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

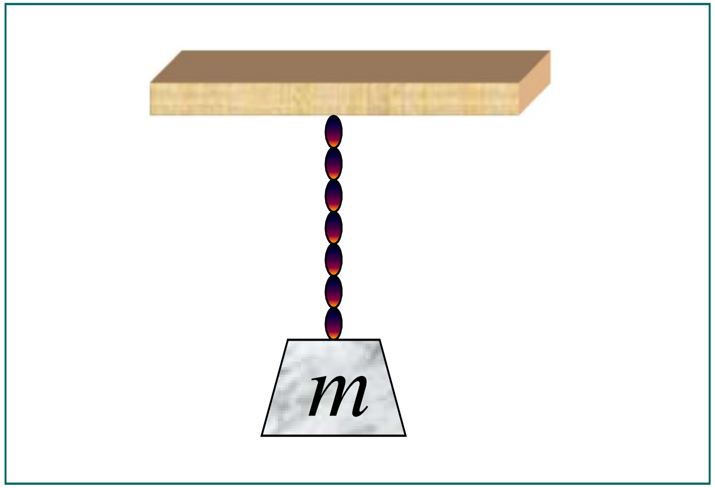
自然坐标表示
$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mr\alpha \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2 \end{cases}$$

三　牛顿第三定律

两个物体之间作用力 $\vec{F}$ 和反作用力 $\vec{F}'$，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用 在两个物体上 .

★ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

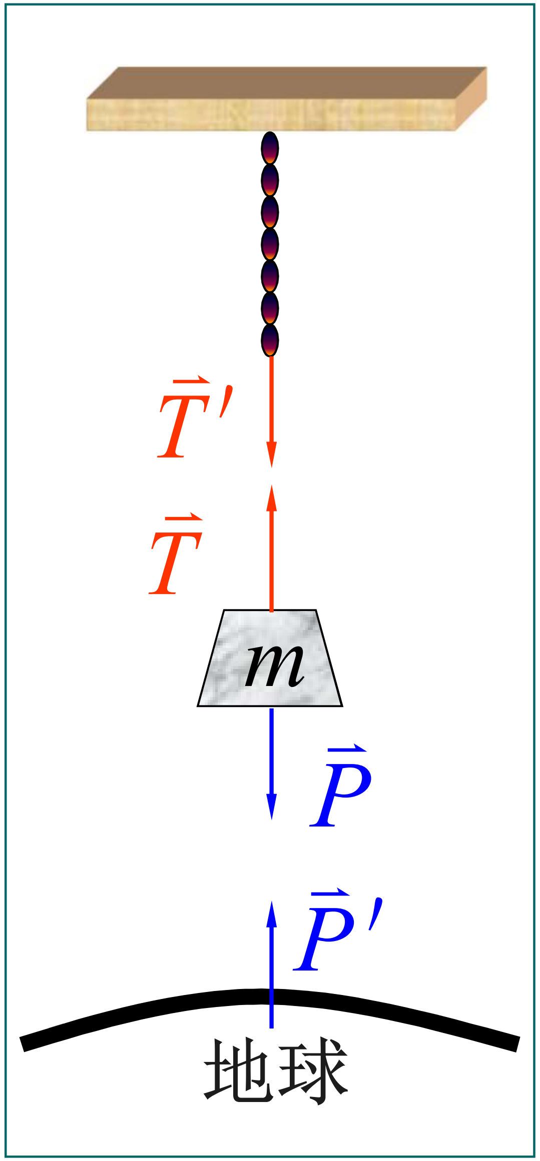
（物体间相互作用规律）



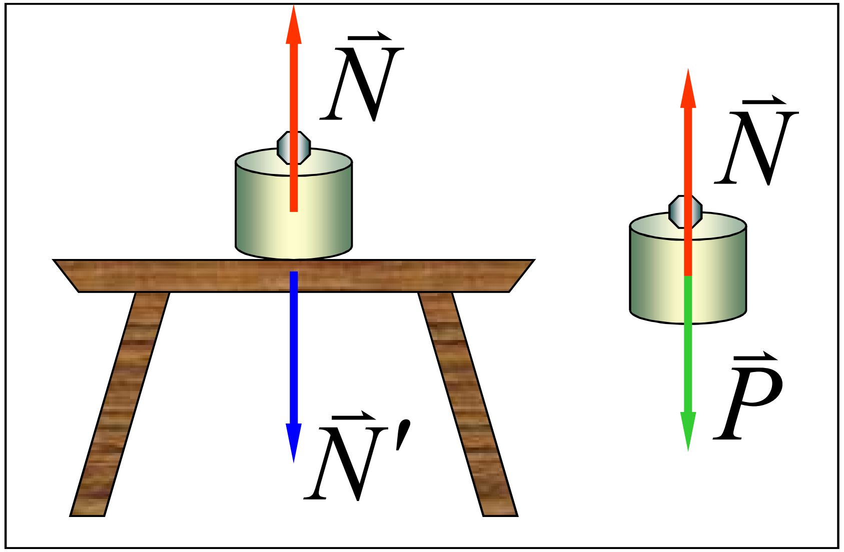
成对性

同时性

一致性



讨论



理想光滑桌面上的约束力.

1. $\vec{N}$ 的反作用力是什么?

2. 能否说 $\vec{N}'$ 就是砝码的重力传下来的，它们是一回事吗?

3. 砝码所受重力的反作用力是什么?

注意

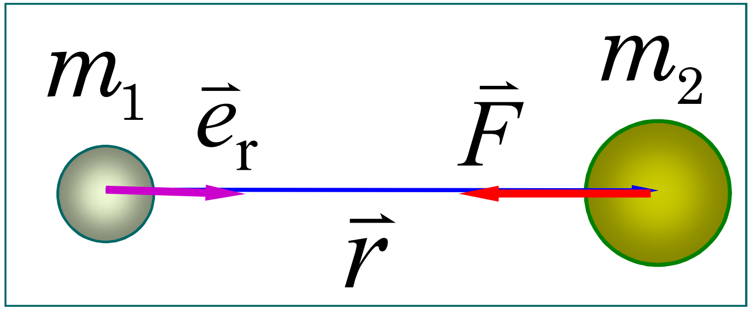
- 作用力和反作用力应是同一种力.
- 牛顿三定律只在惯性参考系中成立.
- 牛顿三定律的研究对象是单个物体(质点) . 若研究对象较复杂，必须将它各部分隔离开来，分别进行研究.

2-2 几种常见的力

"从运动的现象去研究自然界中的力，然后从这些力去说明其他现象"． 牛顿定律是以力的概念为核心的.

一 万有引力

➤ 物体间的万有引力：



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_\mathrm{r}$$

万有引力常数：$G = 6.67\times 10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

➤ 万有引力定律适用于两个质点.

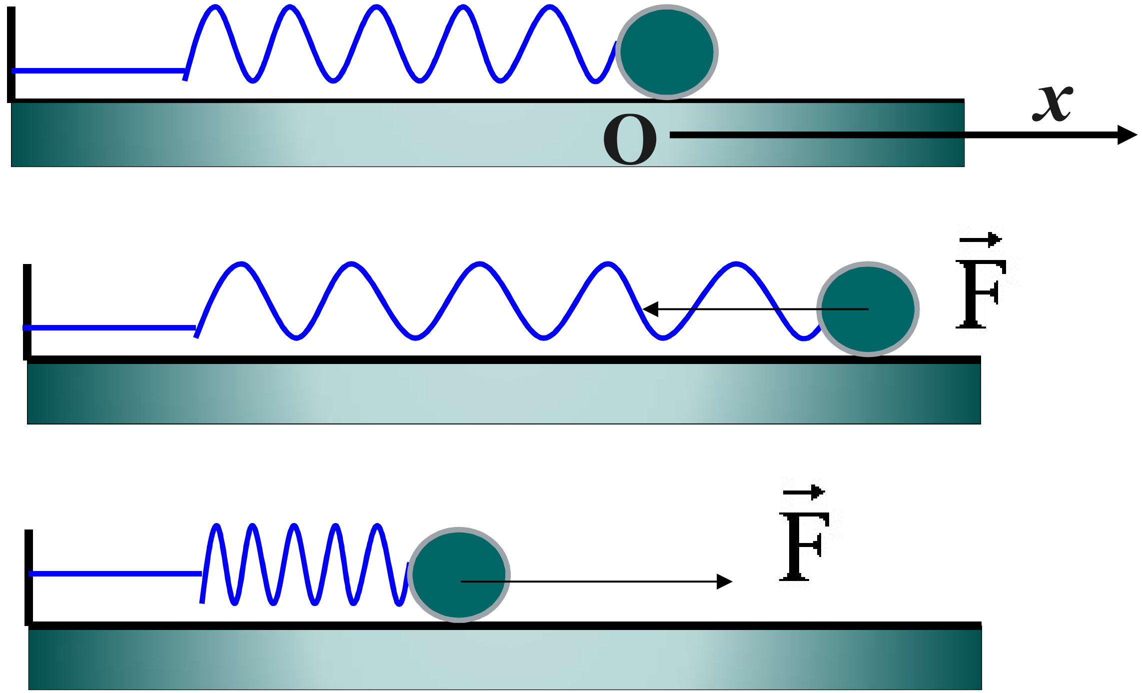
➤ 重力：地球对地面附近物体的万有引力.

$$g = Gm_\mathrm{E}/r^2 \approx Gm_\mathrm{E}/R^2 = 9.8\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

二　弹性力:（压力、支持力、张力、弹簧弹性力等）

物体在受力形变时,有恢复原状的趋势, 这种抵抗外力, 力图恢复原状的力就是弹性力.

- 在弹性限度内弹性力遵从胡克定律 $F=-kx$



三　摩擦力

当相互接触的物体作相对运动或有相对运动的趋势时，它们中间所产生的阻碍相对运动的力称为摩擦力.

- 湿摩擦：液体内部或液体和固体表面的摩擦.
- 干摩擦：　固体表面之间的摩擦.（滑动摩擦、静摩擦、滚动摩擦）

接触面间正压力

◆ 滑动摩擦力　　$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}}$

◆ 静摩擦力　　$0 < F_{\mathrm{f0}} \leq F_{\mathrm{f0m}}$

最大静摩擦　　$F_{\mathrm{f0m}} = \mu_0 F_{\mathrm{N}}$

一般情况滑动摩擦系数 $\mu \approx \mu_0$ 静摩擦系数

四种基本相互作用

力的种类	相互作用的粒子	力的强度	力程
万有引力	一切质点	10^{-38}	无限远
弱力	大多数粒子	10^{-13}	小于 10^{-17} m
电磁力	电荷	10^{-2}	无限远
强力	核子、介子等	1 *	10^{-15} m

* 以距源 10^{-15} m 处强相互作用的力强度为 1

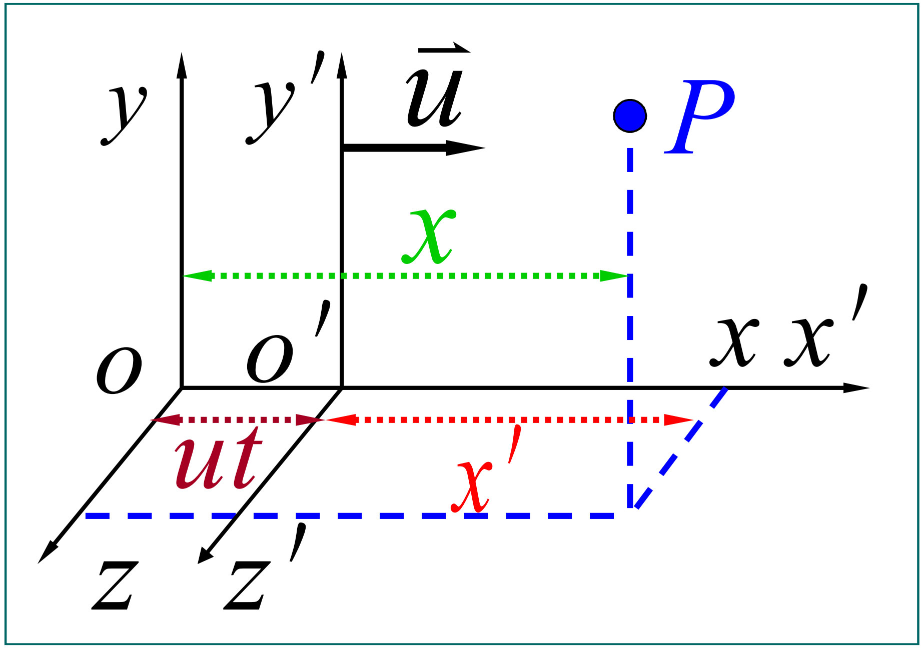
2-3 平动非惯性参考系 非惯性系与惯性力

一 力学相对性原理

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

$\vec{u}$ 为常量 $\therefore \vec{a} = \vec{a}\,'$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F}' = m\vec{a}'$$



结论

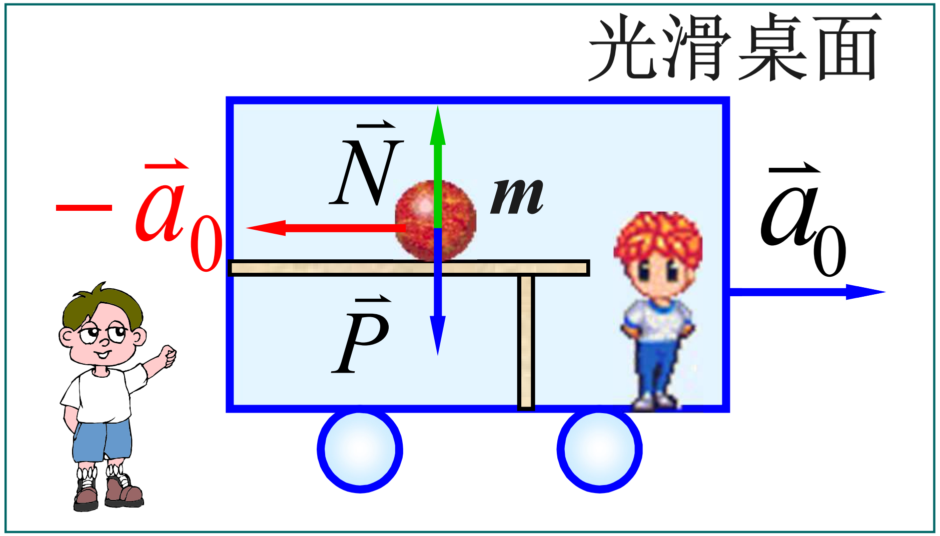
1）凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系 .

2）对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关 .

—— 伽利略相对性原理

二　非惯性系和惯性力

1 非惯性系



地面参考系：小球保持匀速直线运动.

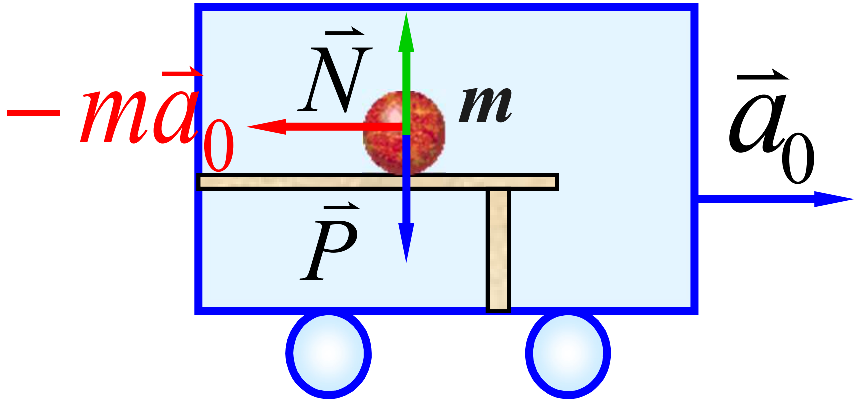
$$\vec{F}=\vec{P}+\vec{N}=0$$

车厢参考系：小球加速度为 $-\vec{a}_0$.

$$\vec{F}=\vec{P}+\vec{N}=0\neq m(-\vec{a}_0)$$

➢ 定义：对某一特定物体惯性定律成立的参考系叫做惯性参考系. 相对惯性系作加速运动的参考系为非惯性参考系 .

2 惯性力— 惯性在非惯性系中的表现.



- 平动非惯性系中惯性力

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

- 非惯性系中牛顿第二定律 $\vec{F}\boxed{-m\vec{a}_0} = m\vec{a}$

注意 **1**. 惯性力是引入的虚拟的力.

2. 惯性力不是物体间的相互作用，不存在惯性力的反作用力, 找不出它的施力物体.

3. 在研究地面上物体的运动时，地球可近似地看成是惯性参考系 .

2-4 牛顿定律应用举例

解题的基本思路

1）确定研究对象进行受力分析；

（隔离物体，画受力图，不要画力的分解图.）

2）取坐标系；

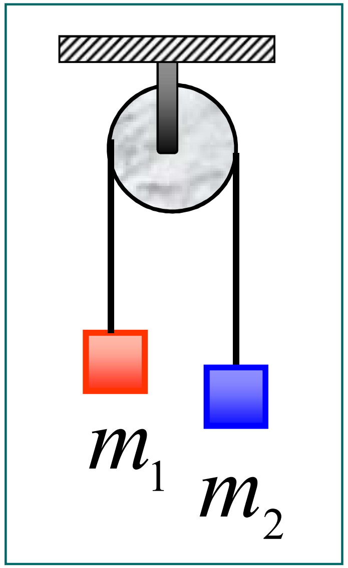
3）列方程（一般用分量式，用文字符号列方程式）；

4）利用其它的约束条件列补充方程；

5）先用文字符号求解，后代入数据计算结果.

例1　阿特伍德机

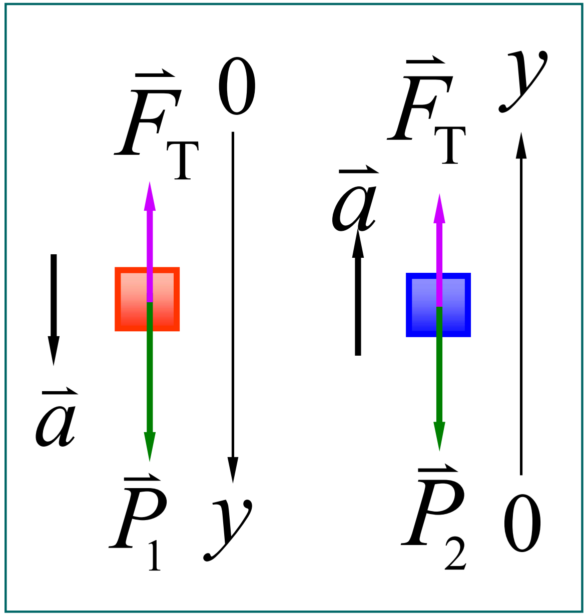
（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与绳间的摩擦力以及滑轮与轴间的摩擦力均不计. 且 $m_1 > m_2$ 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力.



解　以地面为参考系

画受力图、选取坐标如图

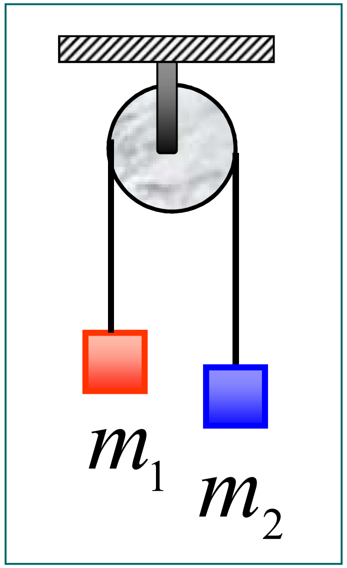
$$\begin{cases} m_1 g - F_{\mathrm{T}} = m_1 a \\ -m_2 g + F_{\mathrm{T}} = m_2 a \end{cases}$$



$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_{\mathrm{T}} = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

（2）求物体的运动方程.

解　绳不可伸长, 则两物体的加速度的值保持相等, 对$\boldsymbol{m}_1$

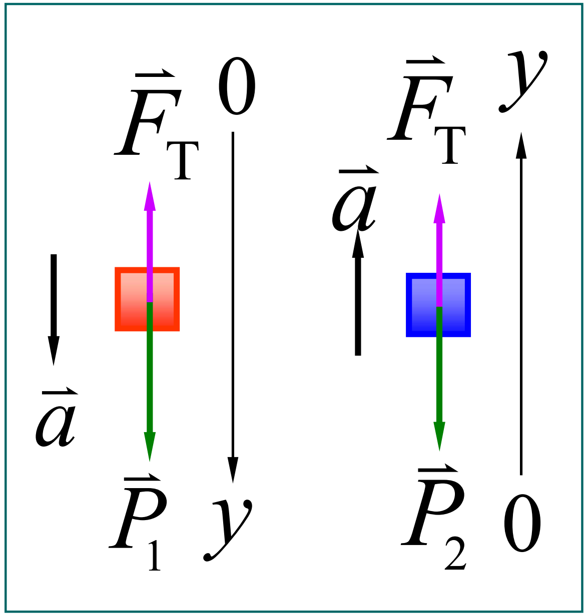


$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad \int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\,\mathrm{d}t$$

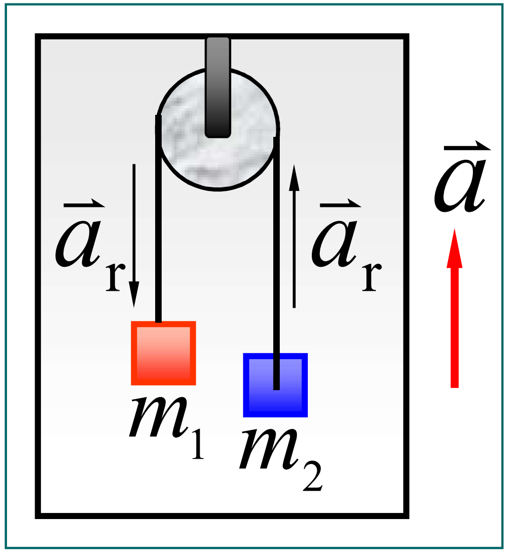
$$v=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\qquad \int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gt\,\mathrm{d}t$$

$$y=\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}gt^2$$



（3）若将此装置置于电梯顶部，当电梯以加速度 $\vec{a}$ 相对地面向上运动时，求两物体相对电梯的加速度和绳的张力.

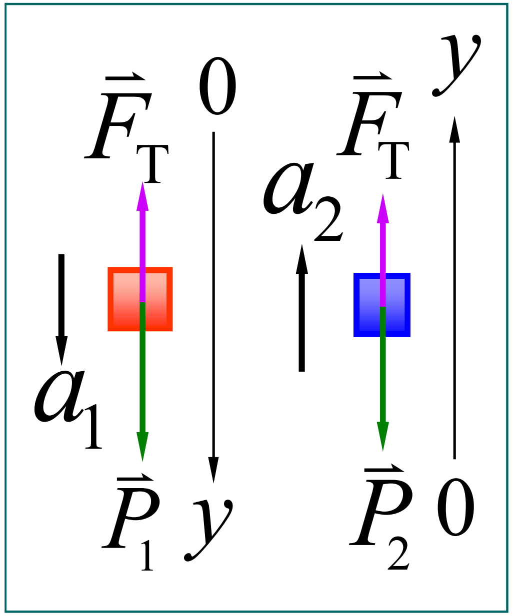


解　以地面为参考系

设两物体相对于地面的加速度分别为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，且相对电梯的加速度为 $\vec{a}_r$

$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a_1 \\ a_1 = a_r - a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a_2 \\ a_2 = a_r + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \\ F_T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \end{cases}$$



例2 设有一质量为$\boldsymbol{m}$ = **2500kg** 的汽车，在平直的高速公里上以每小时 **120km** 的速度行驶. 若欲使汽车平稳地停下来，驾驶员启动刹车装置，刹车阻力是随时间线性增加的，即 $F_{\mathrm{f}} = -bt$，其中 $\boldsymbol{b}$ = **3500N·s**．试问此车经过多长时间停下来.

解 汽车的加速度

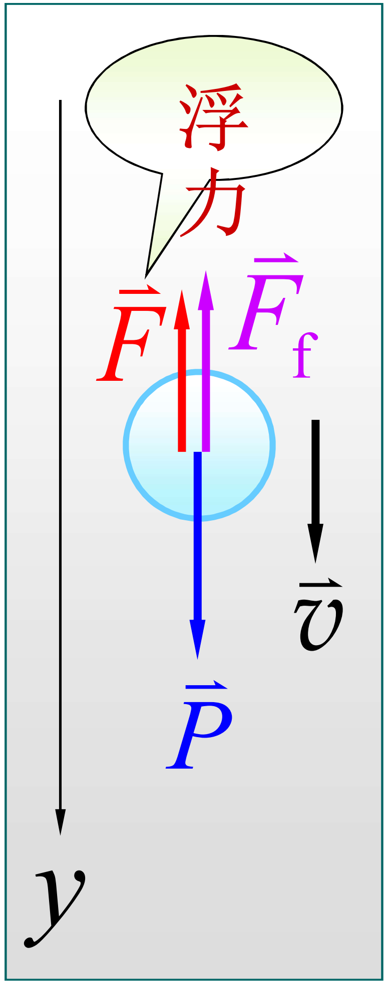
$$a = -\frac{bt}{m}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \int \mathrm{d}v = \int a\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{0} \mathrm{d}v = \frac{1}{m}\int_0^t (-bt)\mathrm{d}t \qquad t = \left(\frac{2v_0}{b}m\right)^{1/2} = 6.90\,\mathrm{s}$$

例3 雨滴的收尾速度. 设半径为r质量为m的雨滴, 从距地面高空某处以速度 **140m/s** 落下（相当于声速的**1/3**）.如果这样的雨滴密集的打在人的身上, 将会对人造成很大的伤害. 幸好, 由于大气对雨滴的阻力作用, 使雨滴的落地速度大为减小, 并使雨滴匀速地落向地面, 这个速度也叫做收尾速度. 空气对雨滴的阻力 $\boldsymbol{F}_{\mathbf{f}}$ 与很多因素有关, 作为一般计算, 常用从实验得到的经验公式即

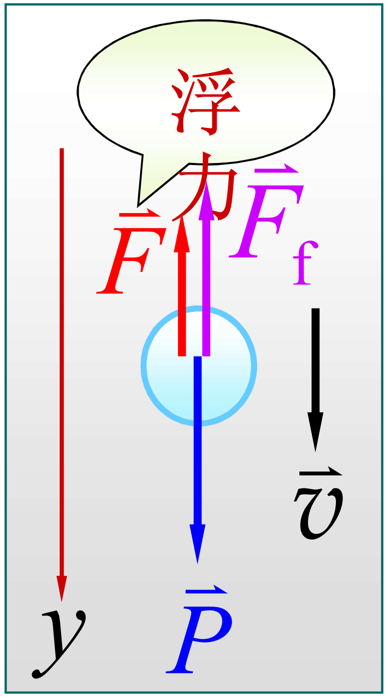
$F_{\mathrm{f}} = 0.87r^2v^2$, 式 r 和 v 中分别是雨滴的半径和速度. 试求雨滴的半径分别为 **0.5**mm、**1.0**mm 和 **1.5**mm 时的收尾速度是多少？



已知： $\rho_1 = 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ ， $\rho_2 = 1.0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

已知： $F_\mathrm{f}=0.87r^2v^2$, $\rho_1=10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\rho_2=1.0\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

解：雨滴的密度为$\boldsymbol{\rho}_1$，空气的密度为$\boldsymbol{\rho}_2$.



$$mg-F-F_\mathrm{f}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

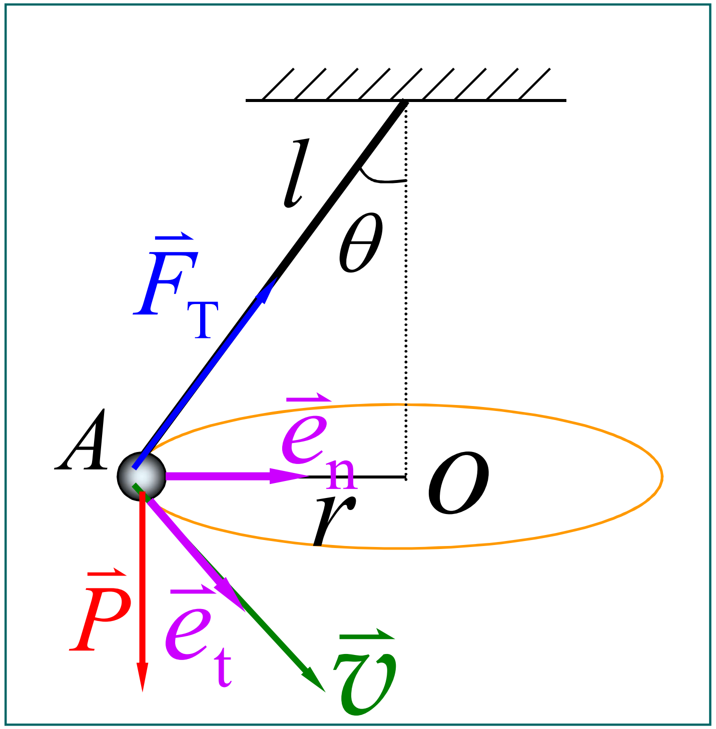
$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g-0.87r^2v^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_2)g-0.87r^2v^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

雨滴匀速时 $a=0$

$$v_L=\left[\frac{4\pi(\rho_1-\rho_2)g}{3\times0.87}r\right]^{1/2}=\begin{cases}4.86\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} & r=0.5\mathrm{mm}\\ 6.88\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} & \mathrm{r}=1.0\mathrm{mm}\\ 8.41\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} & \mathrm{r}=1.5\mathrm{mm}\end{cases}$$

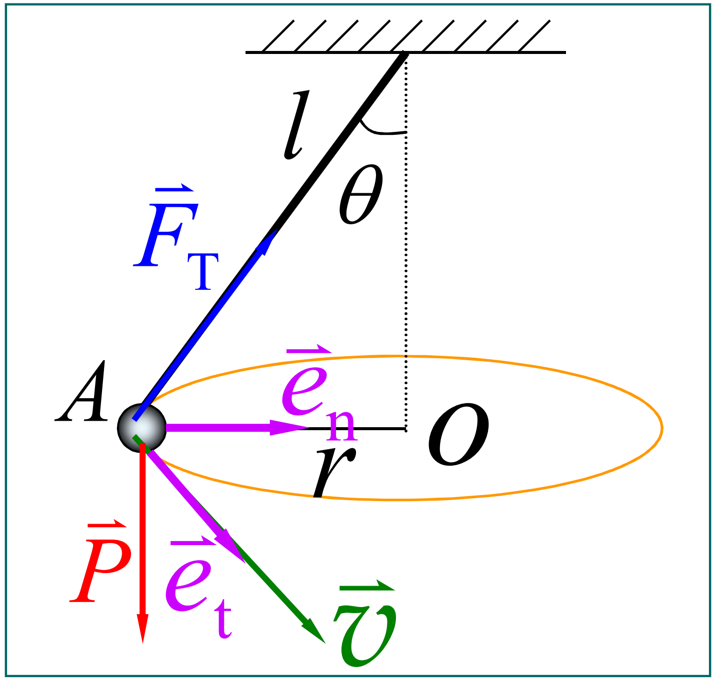
例4　如图所示（圆锥摆），长为 l 的细绳一端固定在天花板上，另一端悬挂质量为 m 的小球，小球经推动后，在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速度为 ω 的匀速率圆周运动．问绳和铅直方向所成的角度 θ 为多少？空气阻力不计.



解:　$\vec{F}_{\mathrm{T}} + \vec{P} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T}} \sin\theta = m a_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{r} = m r \omega^2 \\ F_{\mathrm{T}} \cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$r = l \sin\theta$$



$$F_{\mathrm{T}}\cos\theta = P \quad F_{\mathrm{T}} = m\omega^2 l \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

ω越大， θ 也越大

牛顿定律习题课选讲例题

例 质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用。比例系数为 k， k 为正常数。该下落物体的收尾速度(即最后物体做匀速直线的速度)将是：

★ (A) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$.　　(B) $\dfrac{g}{2k}$.

(C) gk.　　(D) $\sqrt{gk}$.

[A]

例　一小环可在半径为R的大圆环上无摩擦地滑动，大圆环以其竖直直径为轴转动，如图所示。当圆环以恒定角速度ω转动，小环偏离圆环转轴而且相对圆环静止时，小环所在处圆环半径偏离竖直方向的角度θ为

（A） $\theta = \pi/2$

（B） $\theta = \arccos(g/R\omega^2)$

（C） $\theta = \mathrm{arctg}(R\omega^2/g)$

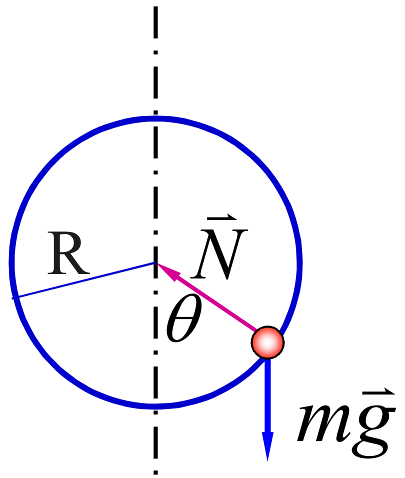
（D）需由小珠质量决定

解：对小环受力分析，有：

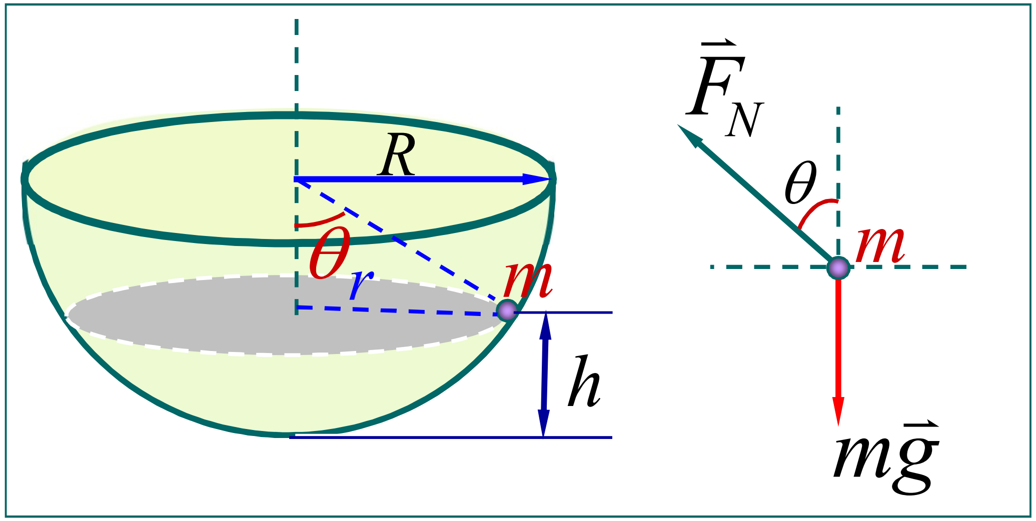
$$N\cos\theta = mg$$

$$N\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta$$

从以上二式可得到： $\cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 R}$



例 在一只半径为R 的半球形碗内，有一质量为 m 的小球，当球以角速度 ω 在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时，它离碗底有多高?



解： 设小球位置如图

$$F_N \cos\theta = mg$$

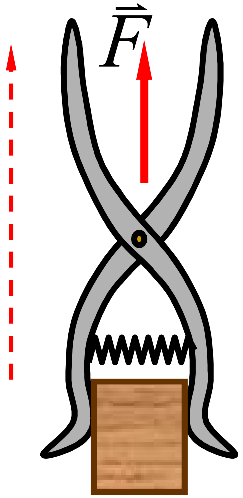
$$F_N \sin\theta = m\omega^2 r$$

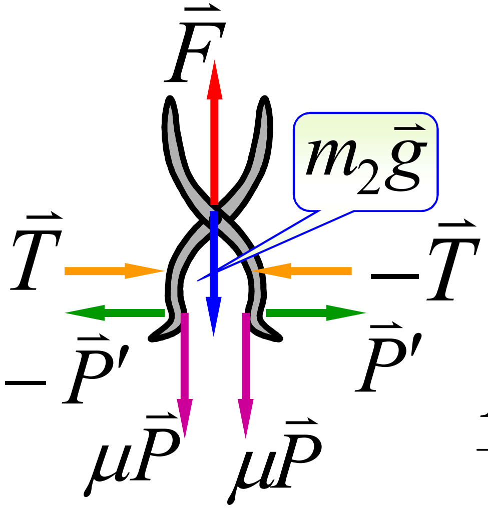
$$r = R\sin\theta, \quad \cos\theta = \frac{R-h}{R}$$

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

例　一质量为 $m_2 = 0.5\text{kg}$ 的夹子， 以压力 $\boldsymbol{P} = \mathbf{120N}$ 夹着质量 $m_1 = 1.0\text{kg}$ 的木板，已知夹子与木板间的摩擦系数 $\mu = 0.2$ 问以多大的力竖直向上拉时，才会使木板脱离夹子.

解：设木板加速度 $\vec{a}_1$；夹子加速度 $\vec{a}_2$.

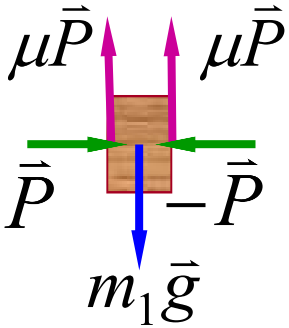




$$\begin{cases} F - 2\mu P - m_2 g = m_2 a_2 \\ 2\mu P - m_1 g = m_1 a_1 \end{cases}$$

脱离条件 $a_2 > a_1$

$$\frac{F - 2\mu P - m_2 g}{m_2} > \frac{2\mu P - m_1 g}{m_1}$$



$$F > \frac{2\mu P(m_1 + m_1)}{m_1} = 72\text{N}$$

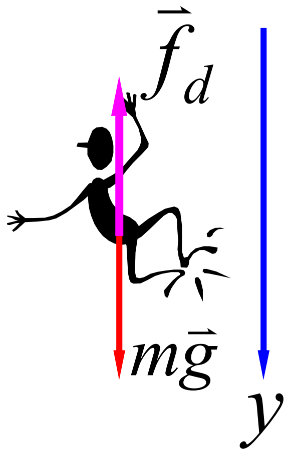
注意起重机爪钩提升物体速度安全问题.

例 一跳空运动员质量为 **80kg**，一次从 **4000m** 高空的飞机上跳出，以雄鹰展翅的姿势下落，有效横截面积 **A** 为 **0.6m²**。以空气密度为 **1.2kg/m³**，和阻力系数 **C = 0.6** 计算，他下落的终极速率多大？

已知：$f_d = C\rho A v^2/2 \quad C = 0.6$

$\rho = 1.2\mathrm{kg/m^3}, A = 0.6\mathrm{m}^2$

解：$mg - \dfrac{1}{2}C\rho A v^2 = ma$



$$a = 0 \quad v = v_L$$

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$

例 已知一物体质量 m 沿水平方向运动，初速度为 v_0 ，所受的阻力为 $f=-kv$ ，求停止运动时，物体运动的距离。

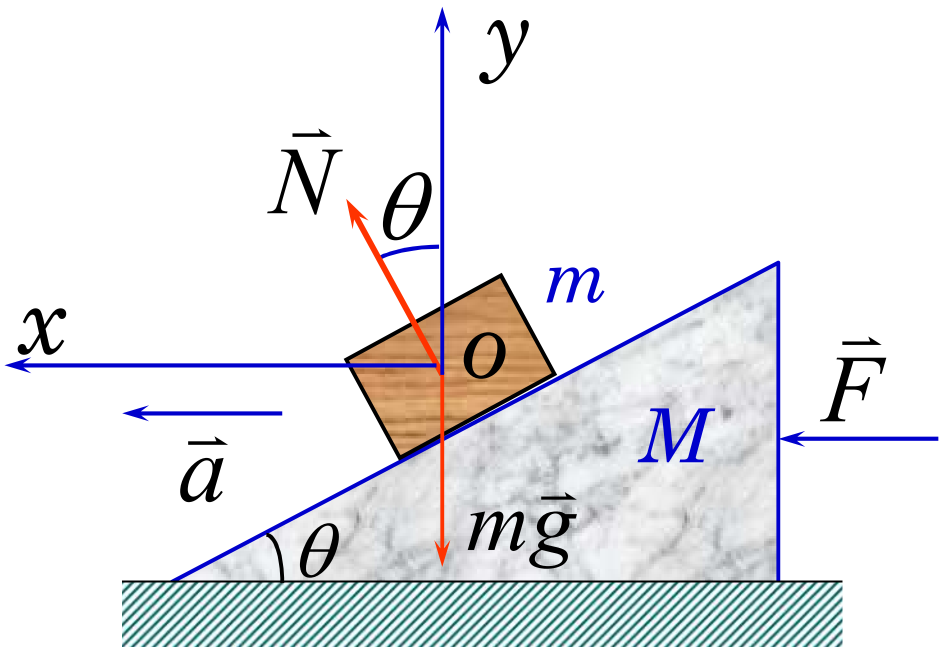
解：
$$f=-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad -kv=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \qquad -\frac{k}{m}\int_0^x\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{0}\mathrm{d}v$$

$$-\frac{k}{m}x=-v_0 \qquad x=\frac{m}{k}v_0$$

例 质量为 m 的木块放在质量为 M 倾角为 θ 的光滑斜劈上，斜劈与地面的摩擦不计， 若使 m 相对斜面静止， 需在斜劈上施加多大的水平外力？ 木块对斜劈的压力为多少？



解1 确定木块为研究对象，

在地面上建立坐标系，要想使 m 相对 M静止，m 在水平方向与 M 的加速度相同

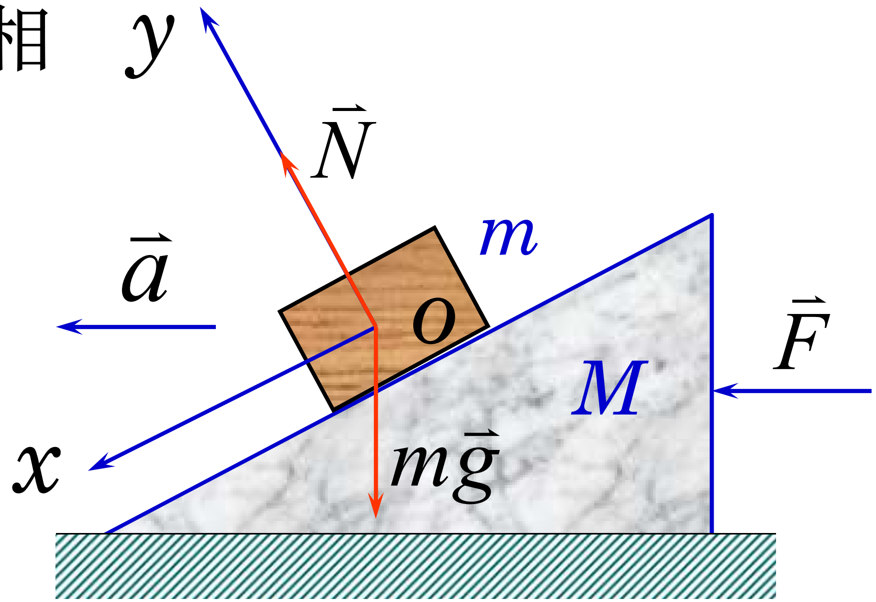
$$\begin{cases} N\sin\theta = ma \\ N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

联立求解：

$$\begin{cases} a = g\operatorname{tg}\theta \\ N = mg/\cos\theta \end{cases}$$

则外力 $F=(m+M)a=(m+M)gtg\theta$

由牛顿第三定律，m对M的压力与N大小相等方向相反，数值为$N=mg/\cos\theta$



解2 沿斜面建立坐标系， 坐标系建立得好坏，对解题难易程度有直接影响，但对结果无影响.

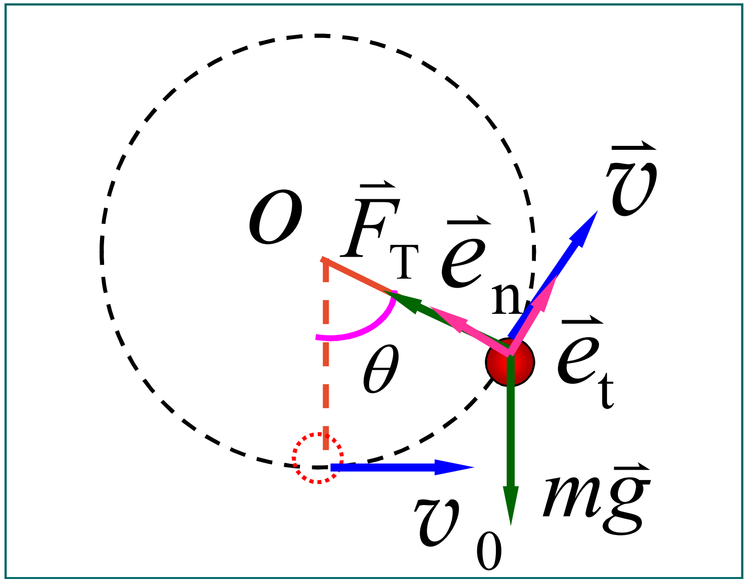
$$\begin{cases} mg\sin\theta = ma\cos\theta \\ N - mg\cos\theta = ma\sin\theta \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} a = gtg\theta \\ N = mg/\cos\theta \end{cases}$

此种方法更简单.

例 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$，求小球在任意位置的速率及绳的张力.

解 $$\begin{cases} F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = ma_{\mathrm{n}} \\ -mg\sin\theta = ma_{\mathrm{t}} \end{cases}$$



$$F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

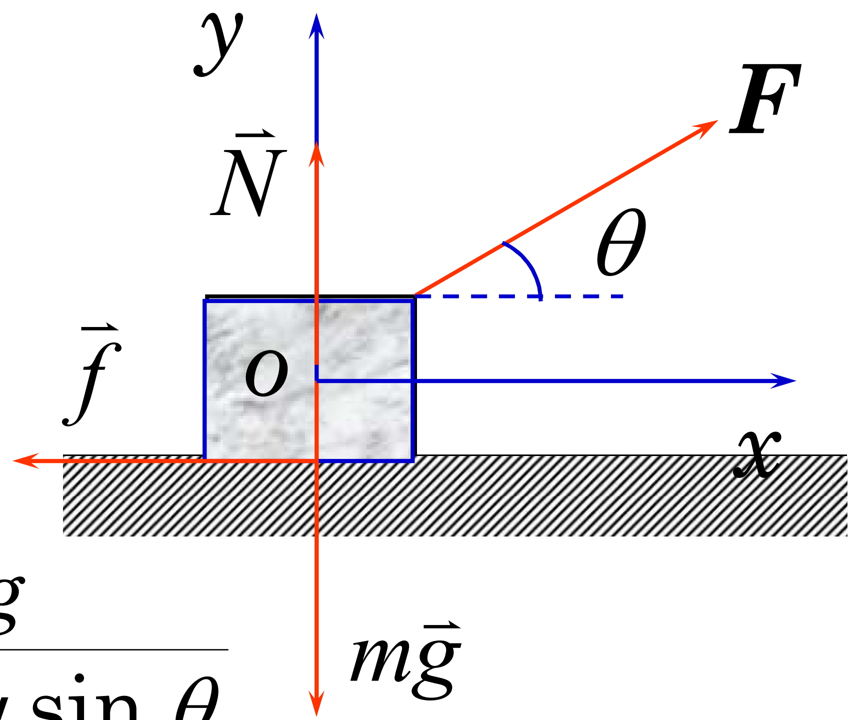
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$F_{\mathrm{T}} = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

例 质量为m的物体在摩擦系数为 μ 的平面上作匀速直线运动，问当力与水平面成θ角多大时最省力?

解： 建立坐标系，受力分析，列受力方程。



$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu N = 0 \\ N + F\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

联立求解： $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$

分母有极大值时，F 有极小值， $y = \cos\theta + \mu\sin\theta$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta = 0$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}\theta^2 > 0$, $\theta = arctg\mu$

例 质量为 m 的物体，在 $F=F_0-kt$ 的外力作用下沿 x 轴运动，已知 $t=0$ 时，$x_0=0, v_0=0$，求：物体在任意时刻的加速度 a，速度 v 和位移 x 。

解： $$a=\frac{F}{m}=\frac{F_0-kt}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \mathrm{d}v=\frac{F_0-kt}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t \frac{F_0-kt}{m}\mathrm{d}t \qquad v=\frac{F_0}{m}t-\frac{k}{2m}t^2$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 有 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{F_0}{m}t-\frac{k}{2m}t^2\right)\mathrm{d}t \qquad x=\frac{F_0}{2m}t^2-\frac{k}{6m}t^3$$

例　一质量为 $\boldsymbol{m}$ 的物体，最初静止于 $\boldsymbol{x_0}$ 处, 在力 $\boldsymbol{F=-k/x^2}$ 的作用下沿直线运动，

试证明：物体在任意位置 $\boldsymbol{x}$ 处的速度为

$$v=\sqrt{2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$$

证明：$\because F=ma$

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{mx^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

a 中不显含时间 t，要进行积分变量的变换 $a\mathrm{d}x=v\mathrm{d}v$

$$v\mathrm{d}v=-\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x$$

两边积分 $\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^x -\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{k}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)$$

则 $v=\sqrt{2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$

例　一质量m，半径 r 的球体在水中静止释放沉入水底. 已知阻力$F_r = -6\pi r\eta v$, η 为粘滞系数， 求 $v(t)$.

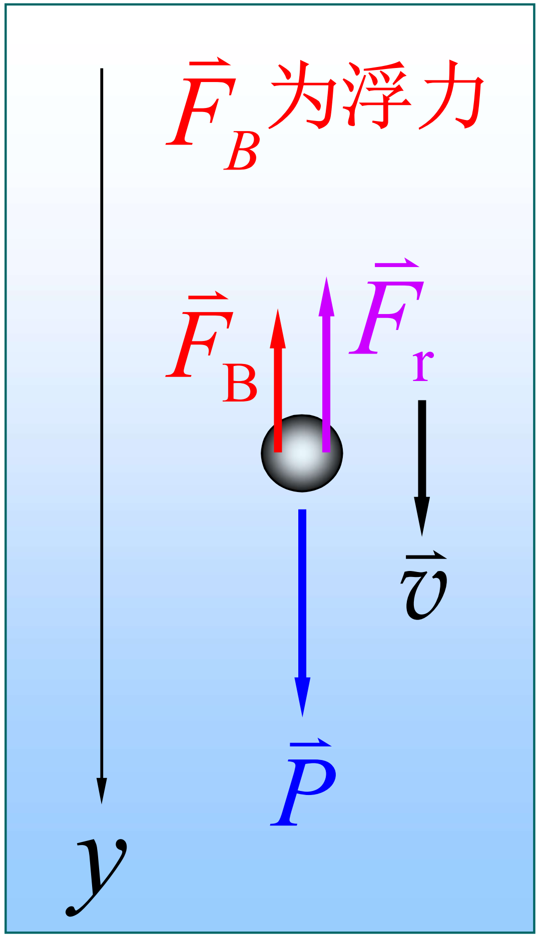
解　取坐标如图

$$mg - F_B - 6\pi\eta r v = ma$$

令 $F_0 = mg - F_B \qquad b = 6\pi\eta r$

$$F_0 - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v - (F_0/b)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

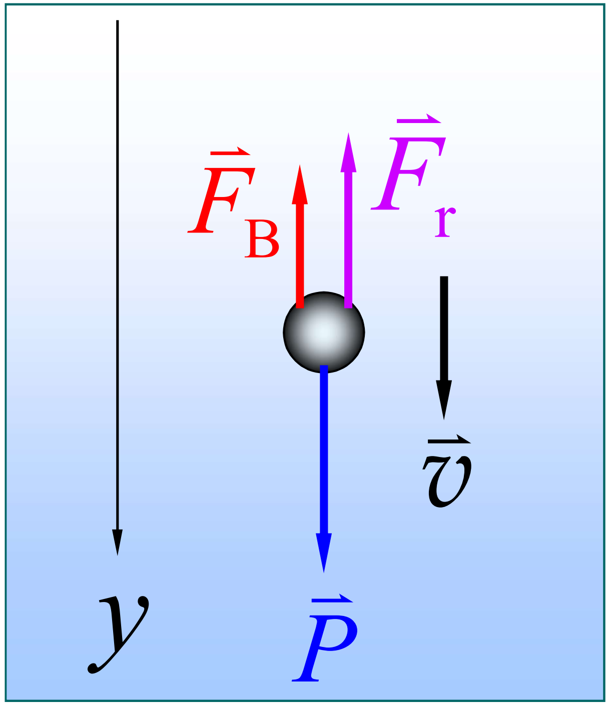
$$v = \frac{F_0}{b}\left[1 - \mathrm{e}^{-(b/m)t}\right]$$

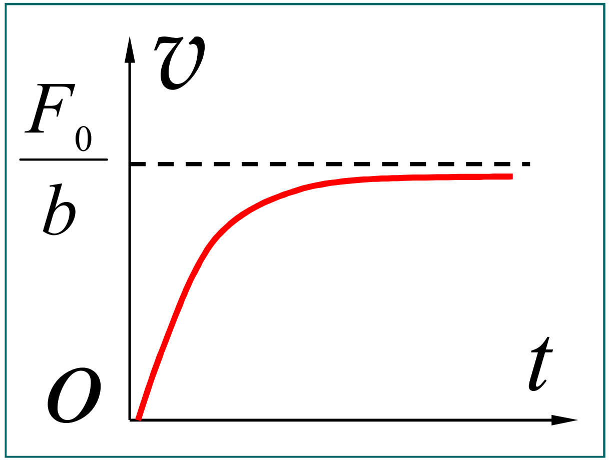
$t \to \infty$, $v_\mathrm{L} \to F_0/b$（极限速度）

当 $t = 3m/b$ 时

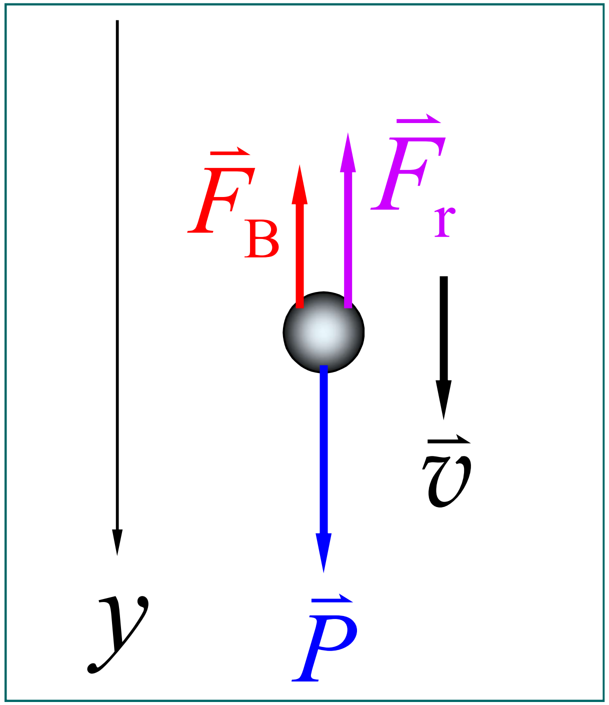
$$v = v_\mathrm{L}(1 - 0.05) = 0.95 v_\mathrm{L}$$

一般认为 $t \geq 3m/b$， $v \to v_\mathrm{L}$





若球体在水面上是具有竖直向下的速率 v_0，且在水中的重力与浮力相等，即 $F_B = P$. 则球体在水中仅受阻力 $F_r = -bv$ 的作用



$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(b/m)t}$$