定义1.9 矩阵的转置

设
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
称
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置，记为 A^T (T:transpose)

注1 $A: m\times n \quad A^T: n\times m$

$$\vec{e}_i^{\,T} = \begin{array}{c} \overset{i}{\downarrow}\phantom{,0,\cdots,0)_{1\times n}} \\ (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)_{1\times n} \end{array}$$

$$\vec{e}_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

为书写方便，可用行向量转置表示列向量

注2 A^T 第 i 行由A的第 i 列构成

A^T 第 j 列由A的第 j 行构成

若 A 的 (i,j) 位置上的元素为 a_{ij}

则 A^T 的 (i,j) 位置上的元素为 a_{ji}

例7　$A=(a_{ij})_{m\times n}$，求 AA^T 中 (1, 2) 元素

A^T 的运算法则：

$$(1)\left(A^T\right)^T = A$$

$$(2)\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$$

$$(3)\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(4)\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

$$\left(ABC\right)^T = C^T\left(AB\right)^T = C^T B^T A^T$$

定义1.10 若对方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 有

$A=A^T$ 即 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

则称 A 为对称矩阵。

例如：
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

例5 设$\vec{\alpha}$为n维列向量，$A=I-2\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T$

证明 A 为对称阵。

定义1.11 若对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 有 $A=-A^T$

即 $a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

则称 A 为反对称矩阵。

显然在反对称阵中： $a_{ii}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

例如：
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

§1.2 分块矩阵

一. 定义

行列数较多时，分块为小矩阵方便运算.

例:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)_{5\times 5} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$

划分原则：尽可能使0元素成为一块.

将一 $m\times n$矩阵 A 用横线划分为 r 块，用竖线划分为 s 块，得一 $r\times s$ 分块矩阵，记为：

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hline \cdots & \cdots & & \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)\end{array}=\left(A_{ij}\right)_{r\times s}$$

A_{ij} : A 的子块

A_{ij} : $m_i\times n_j$

注1. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 可看成是 $m\times n$ 分块矩阵，共有 $m\times n$ 个子块，每块1×1 矩阵，记为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

注2. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 也可看成是1×1 分块矩阵，共有 1×1 个子块，是 $m\times n$ 矩阵，记为

$$A_{1\times 1}$$

注3. 常将矩阵按列分块，或按行分块.

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^{\,T} \\ \vec{\alpha}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m^{\,T} \end{pmatrix}_{m\times 1} \quad \text{(按行分块)}$$

$$=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n)_{1\times n} \quad \text{(按列分块)}$$

本课程中，$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\ldots$ 表示列向量.

则 $\vec{\alpha}^T,\vec{\beta}^T,\vec{\gamma}^T,\ldots$ 表示行向量.

二. 分块矩阵的运算

1. 加法 设 A、B 行列数与分法均相同：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

2. 数乘

设 k 为数， $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$

则

$$kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1s} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ kA_{r1} & kA_{r2} & \cdots & kA_{rs} \end{pmatrix}$$

3. 转置

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$ 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$

如

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{\beta}_1, \ \vec{\beta}_2, \ \cdots \ \vec{\beta}_n\right)^T = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vec{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n^T \end{pmatrix}$$

4. 乘法　设$A_{m\times n}, B_{n\times l}$，且$A$的纵向分块与$B$的横向分块完全一致：

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s} \end{array} \quad B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}_{s\times t} \end{array}$$

则

$$AB=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}_{r\times t} \end{array}$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$$

$$m_i\times n_k \qquad n_k\times l_j$$

$$i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,t$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad \vec{e}_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \leftarrow i$$

$$A\vec{e}_i = \big(\underbrace{\vec{\beta}_1}_{m\times 1},\ \vec{\beta}_2,\ \cdots\ \vec{\beta}_n\big)_{1\times n}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \rightarrow 1\times 1$$

$$=\vec{\beta}_1 0+\cdots+\vec{\beta}_i 1+\cdots+\vec{\beta}_n 0=\vec{\beta}_i$$

即 $\boxed{A\vec{e}_i=\vec{\beta}_i}$

也可直接用乘法得到：

$$A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}_{m\times 1} = \vec{\beta}_i$$

同理可有 $\boxed{\vec{e}_i^{\,T} A = \vec{\alpha}_i^{\,T}}$

习题：利用分块矩阵乘法证明

$\vec{e}_i^{\,T} A = \vec{\alpha}_i^{\,T}$，其中$\vec{\alpha}_i^{\,T}$表示$A$的第$i$行.

还有：对$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$\vec{e}_i^{\,T} A \vec{e}_j = a_{ij}$.

例1. 设n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^k

例2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求AB.

例3：设 A 、P 均为 $n\times n$ 阵，

若 $P=\begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}_{1\times n}$

$\underset{n\times 1}{\uparrow}$

则

$$A_{n\times n}P_{n\times n}=\left(\begin{array}{c} n \\ \downarrow \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \end{array}\right)_{?\times ?}\begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}_{1\times n}$$

$\underset{n\times 1}{\uparrow}$

定义1.12 设 A_i 为 n_i 阶方阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，

如果

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

则称 A 为准对角阵，记为

$$A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_m).$$

准对角阵的运算规律：

设 A_i, B_i 为 n_i 阶方阵 $(i=1,2,\cdots,n)$，

$$A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_n),$$
$$B=diag(B_1,B_2,\cdots,B_n)$$

则

$$A+B=diag(A_1+B_1,A_2+B_2,\cdots,A_n+B_n),$$
$$AB=diag(A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_nB_n).$$

§1.3 逆矩阵

矩阵有没有除法?

回忆数的除法：$a \neq 0: \dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$

$a \neq 0: a^{-1}$ 满足：$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

则对 $A \neq 0$: ?$\exists B$ $s.t.$ $AB \overset{(1)}{=} BA \overset{(2)}{=} I$

由(1), A,B 必为同阶方阵, 故只对方阵而言

由(2), 对所有非0方阵都存在这样的B吗?

答:否!　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$　$\forall B, (AB)(1,1) = 0$

一. 逆矩阵的定义

对 $n\times n$ 方阵 A, 若存在 $n\times n$ 方阵 B

s.t. $AB=BA=I$ 则称 A 可逆, 或非奇异阵

否则称 A 不可逆或奇异阵.

例如: I 是可逆阵, $\because I\cdot I=I\cdot I=I$

而 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则不可逆. 零矩阵也不可逆.

注1. 若 A 可逆, 则其逆阵唯一, 记为 A^{-1}

即 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ 　例如: $I^{-1}=I$

注2. 定义是证明矩阵可逆常用的方法.

例1. 设 A 是方阵, 且 $A^2-2A=4I$ (矩阵方程)

(1) 证明 A 可逆, 并求 A^{-1};

(2) 证明 $A-3I$ 可逆, 并求 $(A-3I)^{-1}$.

习题. 设 A,B 是方阵, 且 $AB-A=B, AB=BA$

证明 $A-I$ 可逆, 并求 $(A-I)^{-1}$.

二. 逆矩阵的性质

设 n 阶方阵 A、B 可逆，数 $\lambda \neq 0$，

则有如下性质成立：

(1) λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$；

(2) A^T 可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$；

(3) AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$；

由 (3)：$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$.

但 $(A+B)^{-1} \cancel{=} A^{-1} + B^{-1}$，例如取 $A = I, B = -I$

三.应用

1. 求矩阵方程 $AX=B \quad XA=C$

A 是 n 阶可逆阵 (即 A^{-1} 存在)，

B 是 $n\times t$ 矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，

$$A_{n\times n}X_{n\times t}=B_{n\times t} \xRightarrow{\text{左乘 } A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_{I}X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$X_{m\times n}A_{n\times n}=C_{m\times n} \xRightarrow{\text{右乘 } A^{-1}} XAA^{-1}=CA^{-1} \Rightarrow X=CA^{-1}$$

$AB=0 \ ? \Rightarrow B=0$ $\qquad$ $AB=AC \ ? \Rightarrow B=C$

A 可逆 $\qquad$ A 可逆

例2. 若 $\underline{A = P\Lambda P^{-1}}$，求 A^n

$$A^2 = P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I} \Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$$

……

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

在第5章，我们将去找这样的P，

从而化简矩阵的幂运算。

例3:设A为$r\times r$阵, B为$(n-r)\times(n-r)$阵,

且 A、B可逆,

$$P_{n\times n}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}_{2\times 2} \end{array},$$

求 P的逆矩阵.(找$Q_{n\times n}$, 使$PQ=QP=I_n$)

问题：如何分块$Q_{n\times n}$使分块矩阵的乘法

PQ 与 QP 均有意义?

为使 $\begin{pmatrix} A_{r\times r} & 0 \\ 0 & B_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ $\begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ 有意义

（第一个矩阵的列标：r，$n-r$）

为使 $\begin{array}{cc} r & n-r \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}} \end{array}$ $\begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有意义

则

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} Q_{21} & Q_{22} \\ Q_{11} & Q_{12} \end{pmatrix} \end{array}$$

设 Q 为 P 的逆阵，则 $PQ=QP=I$

由前面分析知 Q 作分块：

$$Q=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$PQ=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} AQ_{11} & AQ_{12} \\ BQ_{21} & BQ_{22} \end{pmatrix} \end{array}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AQ_{11}=I_r \quad \Rightarrow \quad Q_{11}=A^{-1}$$

$$AQ_{12}=0 \qquad Q_{12}=0$$

$$BQ_{21}=0 \qquad Q_{21}=0$$

$$BQ_{22}=I_{n-r} \qquad Q_{22}=B^{-1}$$

$$\Rightarrow Q=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

类似方法可证得：若 A, C 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

分块下三角阵

类似可证明，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵

则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$