线性代数

2022-2023 春季学期

代数简介

“代数”（Algebra）的来源

Algebra ⇐ 拉丁文*aljebra*

⇑

<ilm al-jabrwal muqubalah>

《还原与对消的科学》

阿尔.花拉子米 （阿拉伯，

公元9世纪）

1859年，李善兰首次将Algebra译为“代数”

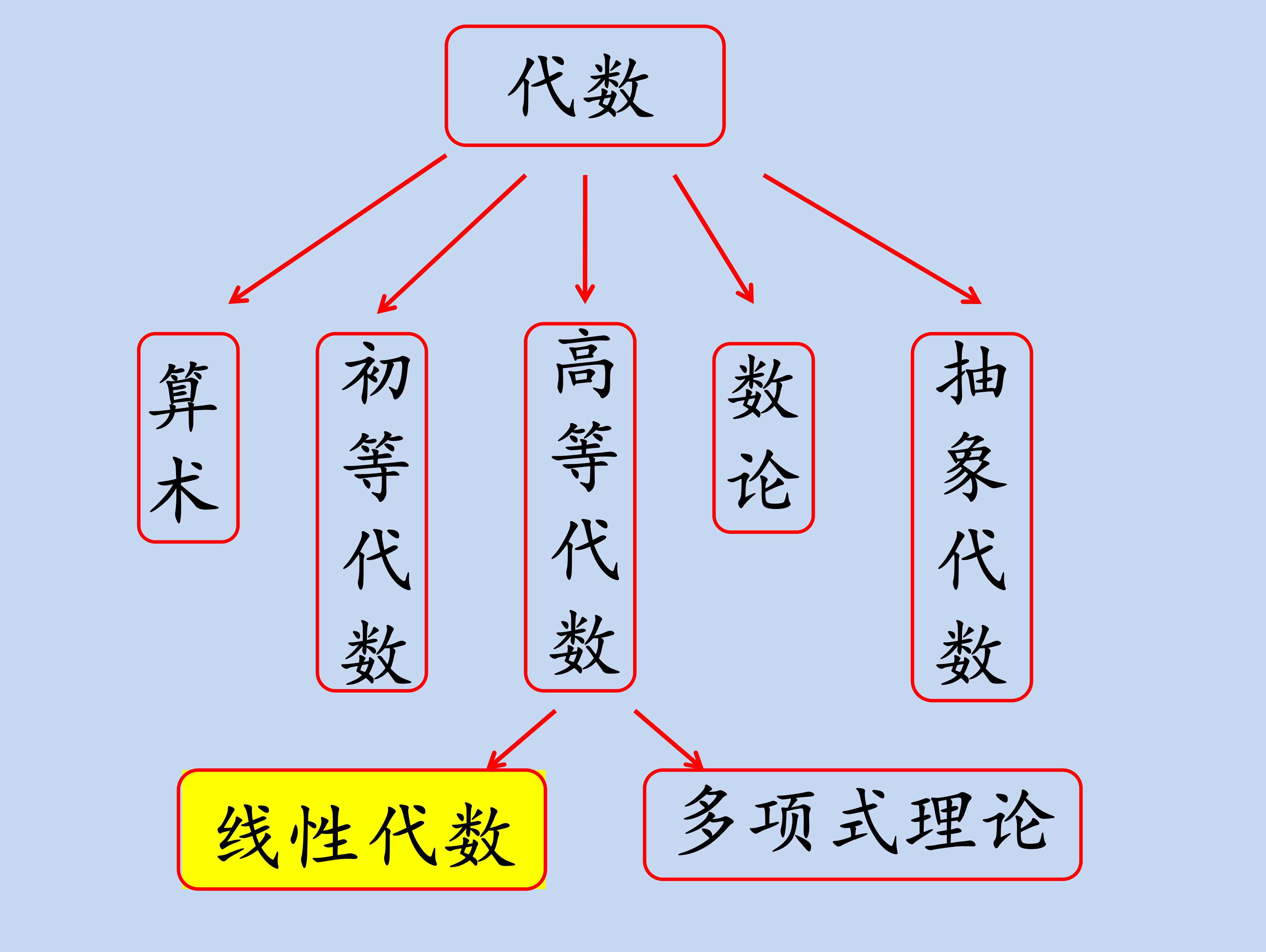
代数：“代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之”

代数，就是运用文字符号来代替数字的一种数学方法。

古希腊数学家丢番图（Diophantus）引入了未知数的概念

并建立方程的思想，被称为“代数学之父”

Father of algebra


代数
算术
初等代数
高等代数
数论
抽象代数
线性代数
多项式理论

有关事宜

总评成绩=平时30%+期末70%

平时=考勤40%+作业60%

考勤：签到学习通.

假条：姓名学号请假时间，事由合理.

作业：网上作业，自备作业本期末交

机器批阅：判断题，选择题，填空题

人工批阅：简答题，证明题

要求：写出详细解答过程，拍照上传

不得相互抄袭、盗图，一经发现，该次双方0分处理！

主要内容

第一章　矩阵

第二章　方阵的行列式

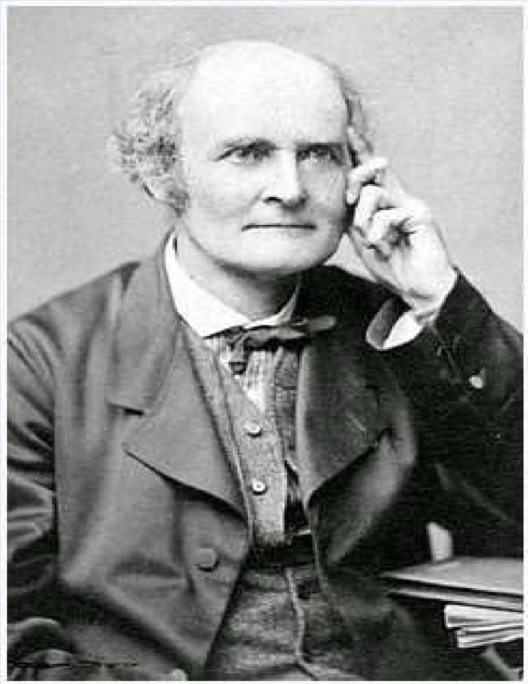
第三章　线性空间与线性变换

第四章　线性方程组

第五章　矩阵的相似与相合

第一章　矩阵

“矩阵”起源　(19世纪即已出现)



A.Cayley(1821-1895)　　矩阵理论的创始人

§1.1 矩阵的定义与运算

一. 矩阵的定义

定义1.1 由mn 个数排成的m 行n列数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$ 称为矩阵

a_{ij}：位于第i行第j列的元素

i: 称为a_{ij}的行标　j: 称为a_{ij}的列标

本课程中一般　$a_{ij}\in R$（实数域）

二. 一些特殊的矩阵

1) $m = n$： n 阶方阵

2) $n = 1$： m 维列向量

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

特别地：

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

标准单位列向量

3) $m=1$： n 维行向量

$$(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

特别地： $(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{1},0,\cdots,0)$

称为标准单位行向量

4) 零矩阵： $O=(0)_{m\times n}$

5) 上三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6) 下三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7) 对角阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\} = \Lambda$$

特别若 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶单位阵

类似于"1"

也记为E

三. 矩阵的运算

定义1.2 矩阵的相等

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$

若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n)$ 则称 $A=B$

定义1.3 矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$

定义 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

定义1.4 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,

则称 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的负矩阵

从而定义减法为：$A-B=A+(-B)$

定义1.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, k 为数,

则称 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 k 的数乘

易证对以上定义的线性运算，成立：

$(1) A+B=B+A$

$(2) (A+B)+C=A+(B+C)$

$(3) A+0=0+A=A$

$(4) A-A=0$　　　　$(5) (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

$(6) (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A, \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

$(7) 1\cdot A=A$　　$(8) 0\cdot A=0$

定义1.6 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ $B=(b_{ij})_{s\times n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1j} & & b_{1n} \\ b_{21} & \vdots & b_{2j} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & & b_{sj} & & b_{sn} \end{pmatrix}$$

令 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$

$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$

则 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为 A与 B 的乘积

记为 $C=AB$ 读" A左乘B "

注：只有矩阵A列数与矩阵B行数相等，AB才有意义，否则无意义！

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=(C)_{m\times n}$$

$$c_{ij}=(a_{i1},\cdots a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$$

例： $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $B=(1,1)_{1\times 2}$

则 AB 有意义吗？

但 BA 有意义 $=(1,2)_{1\times 2}$

例1：设 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$ 且 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 阵

求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数与列数

矩阵乘法的运算规律

$$(1)(AB)C=A(BC)$$

$$(2)A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$$

$$(3)\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$$

$$(4)AI=IA=A$$

$$(5)A_{m\times s}0_{s\times n}=0_{m\times n},0_{k\times m}A_{m\times s}=0_{k\times s}$$

注1　AB与BA未必相等

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

注2 $AB=0, A\neq 0 \cancel{\overset{?}{\Rightarrow}} B=0$

注3 $AB=AC, A\neq 0 \cancel{\overset{?}{\Rightarrow}} B=C$

定义1.7 若AB=BA，称A与B可交换

习题：证明若 $AB = BA$,

则 A, B 为同阶方阵。

例如：$A = I_n$, $B_{n\times n}$， 则 $IB = BI$

单位阵与任一方阵可交换

乘法的应用 (线性方程组的表示)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

方程组的矩阵形式

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$\vec{b} = \vec{0}$: 齐次

$\vec{b} \neq \vec{0}$: 非齐次

A: 方程组的系数矩阵

例2：求 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

矩阵形式 $Ax = \vec{b}$ 中的A

定义1.8 设A为方阵

定义 $A^0 = I, A^k = \overbrace{A A \cdots A}^{k}$

A^k 称为A的k次幂

显然 $A^k A^l = A^{k+l}$

注： $(AB)^k$ 未必等于 $A^k B^k$

$k=2$： $(AB)^2 = (AB)(AB)$

$$= A(BA)B \overset{AB=BA}{=} A^2B^2$$

例3：$\Lambda = diag\left(d_1, d_2, \cdots, d_n\right)$ 求 Λ^k

解：

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{\ 2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{\ 2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{\ 2} \end{pmatrix}$$

$$= diag(d_1^{\ 2}, d_2^{\ 2}, \cdots, d_n^{\ 2})$$

……

$$\Lambda^k = diag(d_1^{\ k}, d_2^{\ k}, \cdots, d_n^{\ k})$$

类似可得

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

即 $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,diag(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$= diag(a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n)$$

同阶对角阵的乘积仍为对角阵，且其对角元为两个对角阵相应位置对角元的乘积。

例4. $A,B:n\times n$ 判断正误

(1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

若 A,B 可交换

则 $$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^iB^{n-i}$$

特别有 $$(I+A)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA^i$$

例5. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 C^n.

例6：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_{3\times1}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1, & -1, & 2\end{pmatrix}_{1\times3}$，令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

求 $\boldsymbol{C}^2, \boldsymbol{C}^n$.