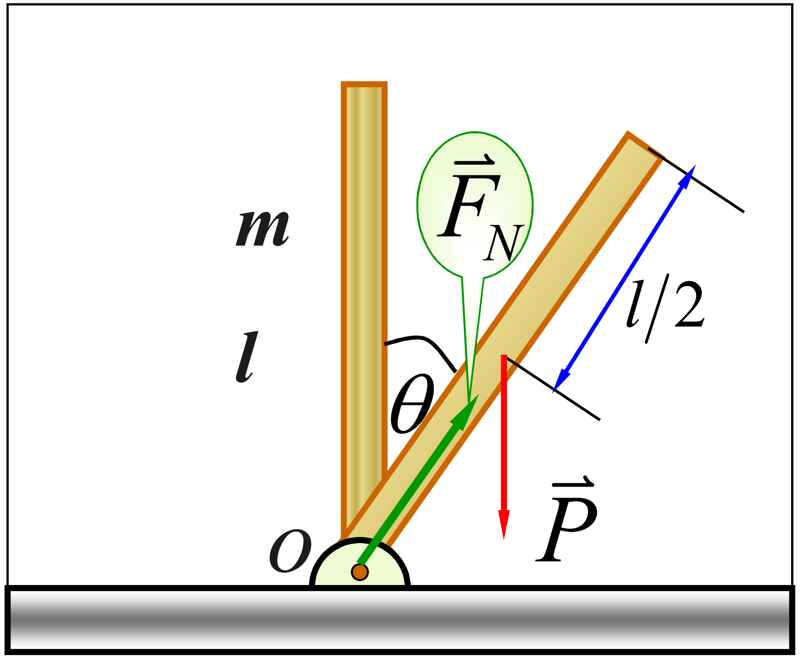
例　一长为 l 质量为m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动．由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链O 转动．试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度．

解　细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

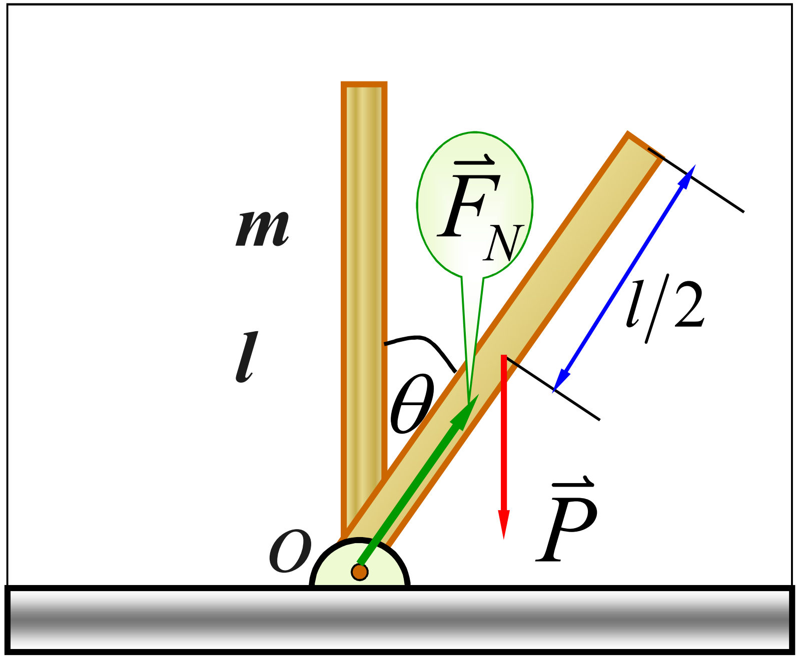
$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$



$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$

式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$

得 $\alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$



由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分 得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

5-3 角动量 角动量守恒定律

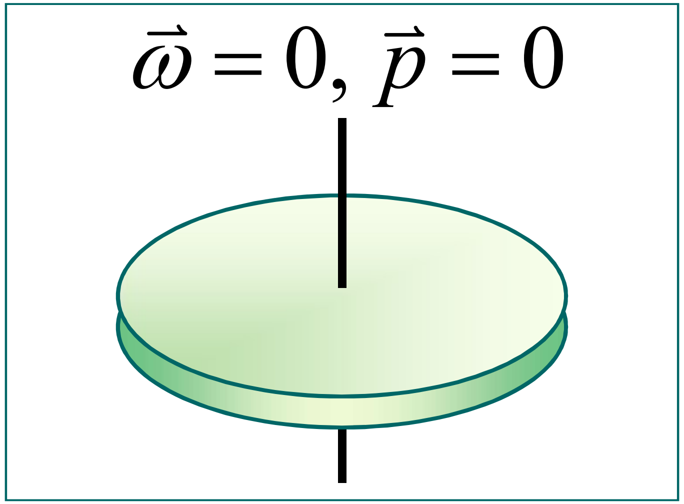
力的时间累积效应 $\Rightarrow$ 冲量、动量、动量定理.

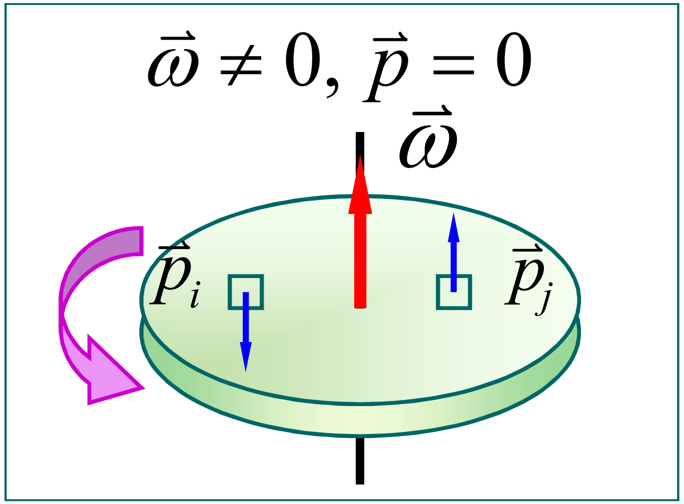
力矩的时间累积效应 $\Longrightarrow$ 冲量矩、角动量、角动量定理.

一 质点的角动量和刚体的角动量

质点运动状态的描述 $\vec{p}=m\vec{v}$ $E_{\mathrm{k}}=mv^2/2$

刚体定轴转动运动状态的描述 $\vec{L}=J\vec{\omega}$ $E_{\mathrm{k}}=J\omega^2/2$

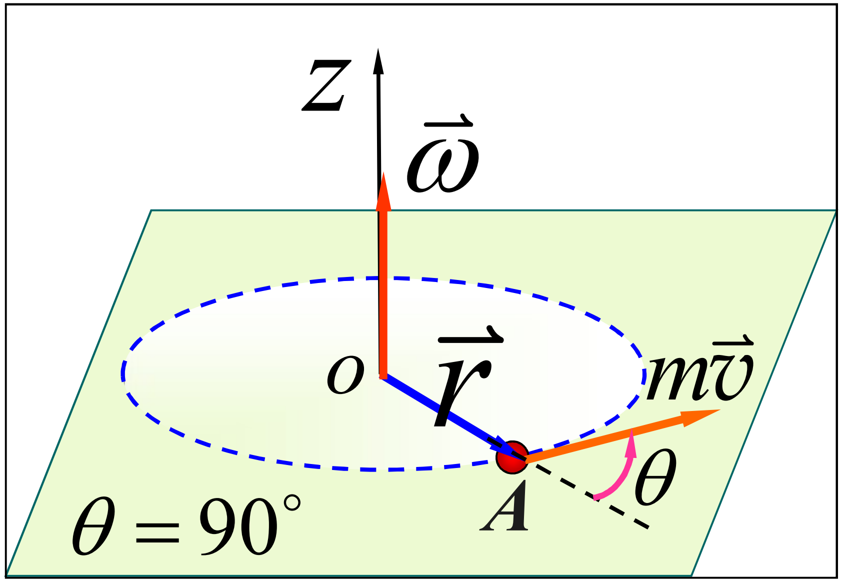




一　质点的角动量和刚体的角动量

1　质点角动量

质点在垂直于 z 轴平面上以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动.



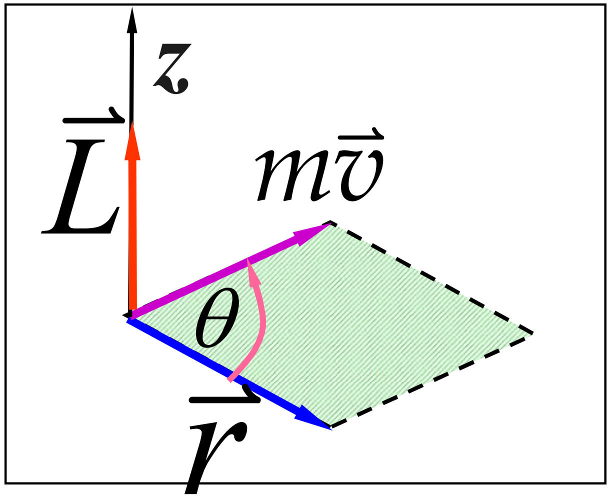
➢ 质点角动量（相对圆心）

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$$L = rmv = mr^2\omega \text{（圆运动）}$$

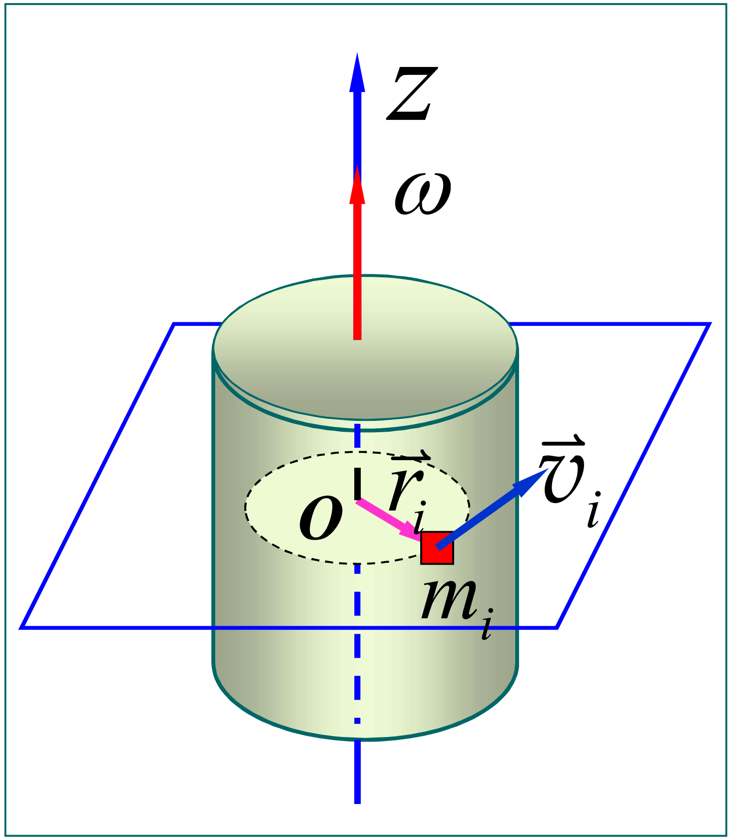
$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.



2 刚体定轴转动的角动量

$$L=\sum_i m_i r_i v_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L=J\omega}$$



二 刚体定轴转动的角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\mathrm{d}L=J\omega_2-J\omega_1$$

非刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$

➢ 刚体定轴转动的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1$

三 刚体定轴转动的角动量守恒定律

➢ 若 $M=0$，则 $L=J\omega=$ 常量 .

讨论

➢ 守恒条件 $M=0$

若J不变,ω不变；若J变,ω也变，但$L=J\omega$不变.

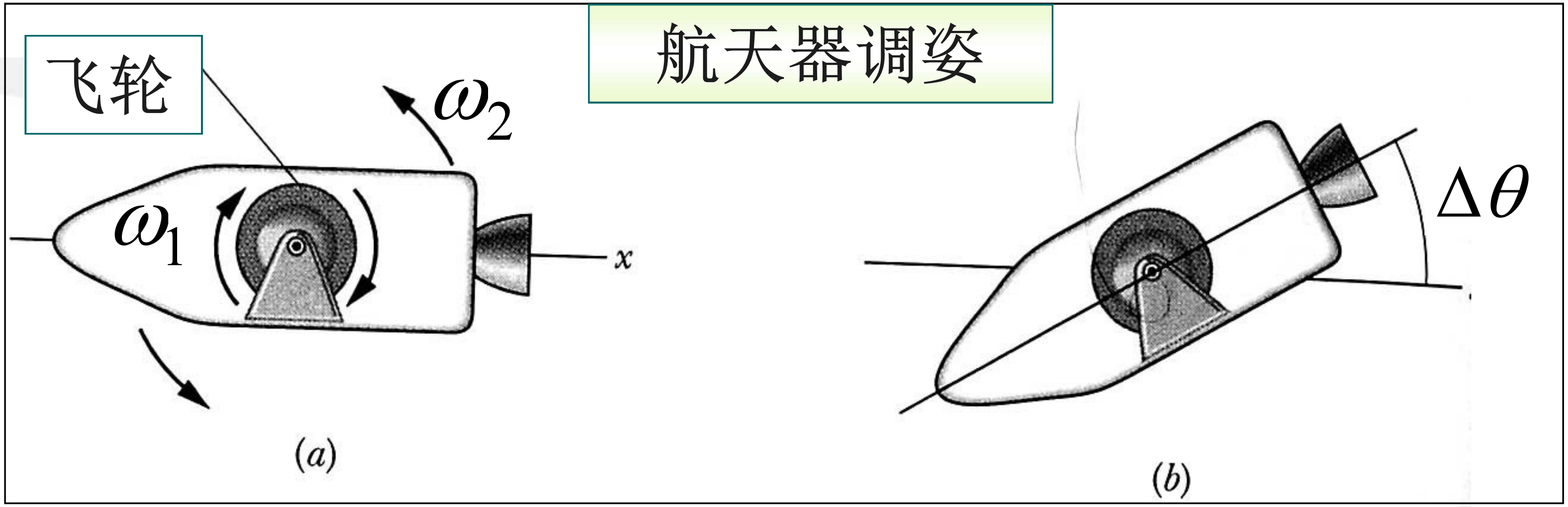
➢ 内力矩不改变系统的角动量.

➢ 在冲击等问题中 $\because M^{\mathrm{in}} \gg M^{\mathrm{ex}} \therefore L \approx$ 常量

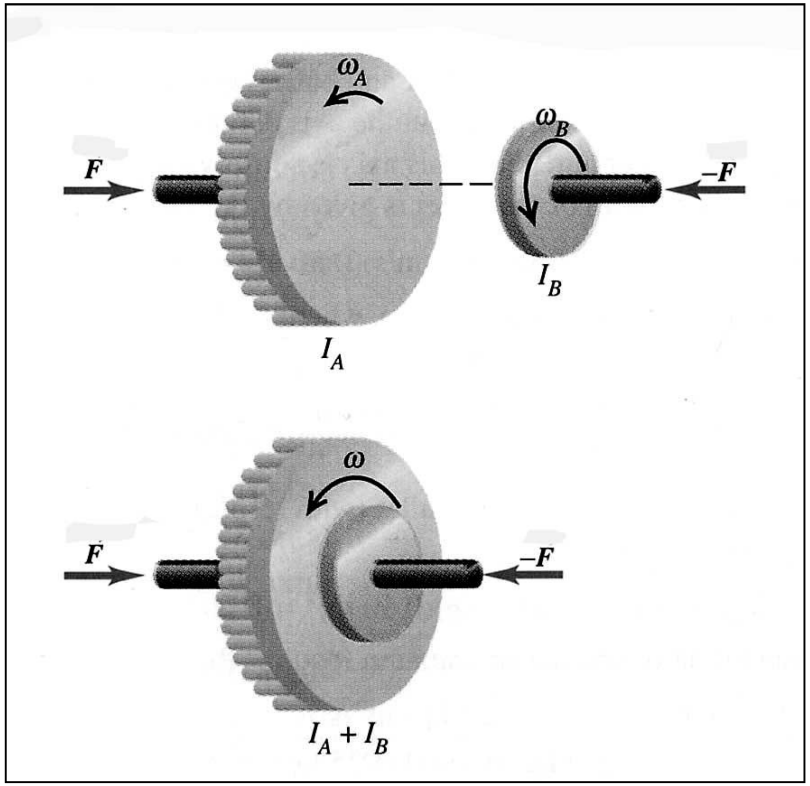
➢ 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

有许多现象都可以用角动量守恒来说明．它是自然界的普遍适用的规律.

- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水



例1 两个转动惯量分别为 J_1 和 J_2 的圆盘 *A*和 *B*. *A* 是机器上的飞轮， *B* 是用以改变飞轮转速的离合器圆盘. 开始时， 他们分别以角速度 ω_1 和 ω_2 绕水平轴转动. 然后, 两圆盘在沿水平轴方向力的作用下. 啮合为一体， 其角速度为 ω， 求齿轮啮合后两圆盘的角速度.

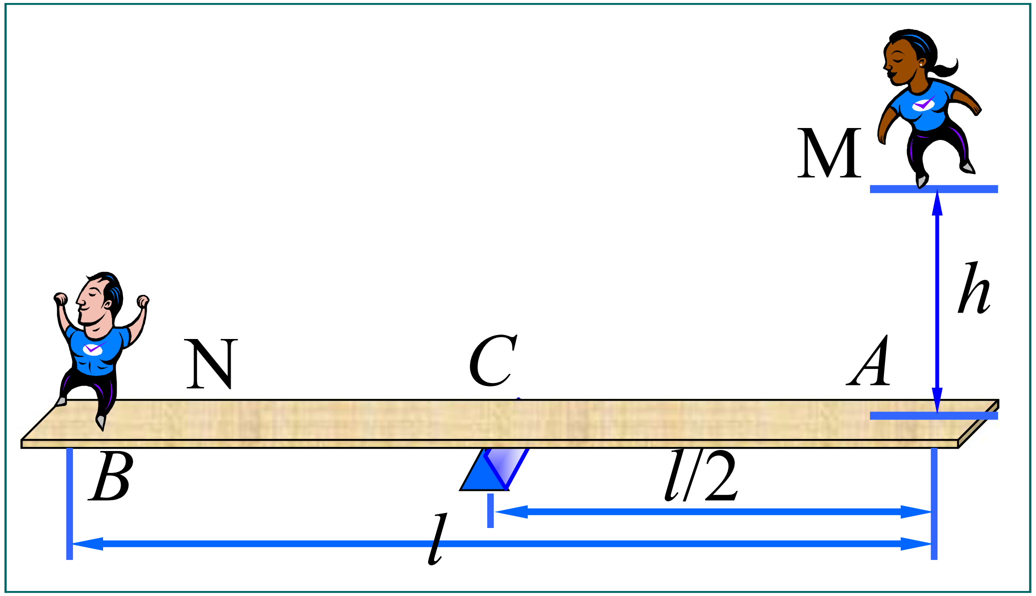


解: 系统角动量守恒

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{(J_1 + J_2)}$$

例2　一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端 A，并把跷板另一端的演员 N 弹了起来. 设跷板是匀质的，长度为 l，质量为 m'，跷板可绕中部支撑点 C 在竖直平面内转动，演员的质量均为 m. 假定演员 M 落在跷板上，与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞．问演员 N 可弹起多高？



解：碰撞前 M 落在 A 点的速度

$$v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$$

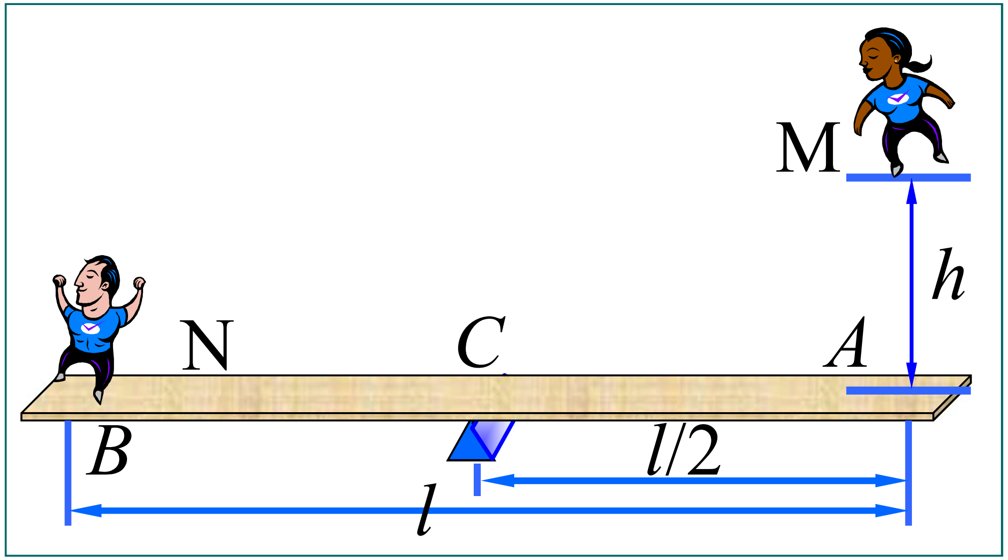
碰撞后的瞬间，M、N具有相同的线速度

$$v_{\mathrm{M}} = (2gh)^{1/2}$$

$$u_{\mathrm{N}} = u_{\mathrm{M}} = u = \frac{l}{2}\omega$$

M、N和跷板系统

角动量守恒



$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2} = J\omega + 2mu\frac{l}{2} = \frac{1}{12}m'l^2\omega + \frac{1}{2}ml^2\omega$$

$$\omega = \frac{mv_{\mathrm{M}}l/2}{m'l^2/12 + ml^2/2} = \frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$$

演员 N 达到的高度

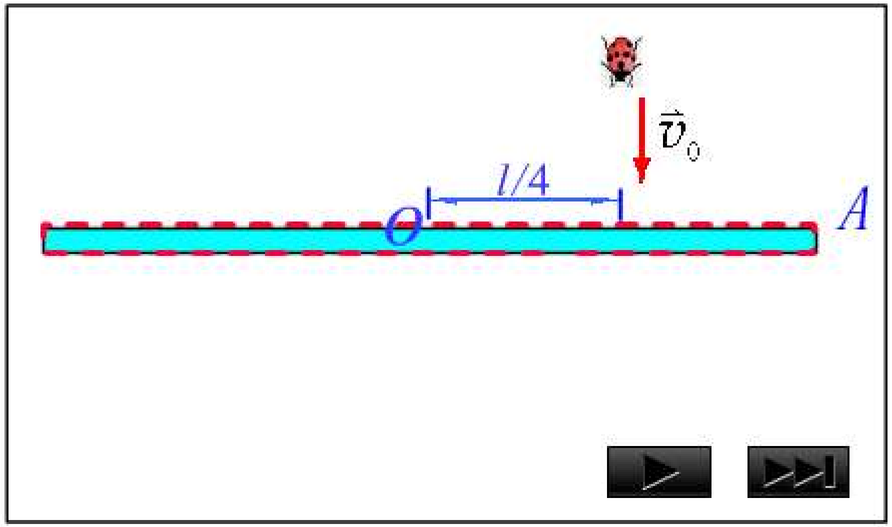
$$h' = \frac{u^2}{2g} = \frac{l^2\omega^2}{8g} = \left(\frac{3m}{m'+6m}\right)^2 h$$

例3 质量很小长度为l 的均匀细杆，可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动．当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O 为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点 A 爬行．设小虫与细杆的质量均为m．问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

解： 碰撞前后系统角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2\right]\omega$$

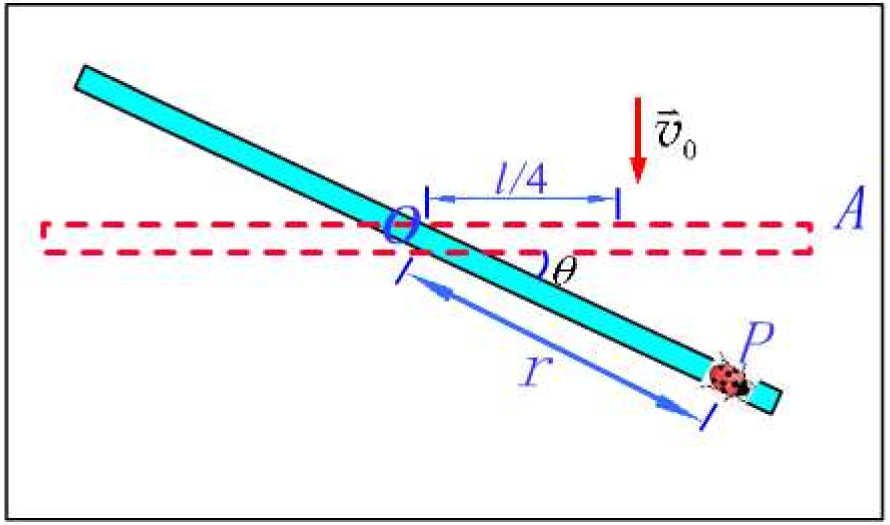
$$\omega=12v_0/7l$$



$$\omega = \frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$



$$mgr\cos\theta = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2 + mr^2) = 2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta = \omega t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$$

习题课

例　关于力矩有以下几种说法:

（1）内力矩不会改变刚体对某个轴的角动量;

（2）作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零;

（3）质量相等, 形状和大小不同的两个刚体, 在相同力矩的作用下, 他们的角加速度一定相等;

在上述说法中

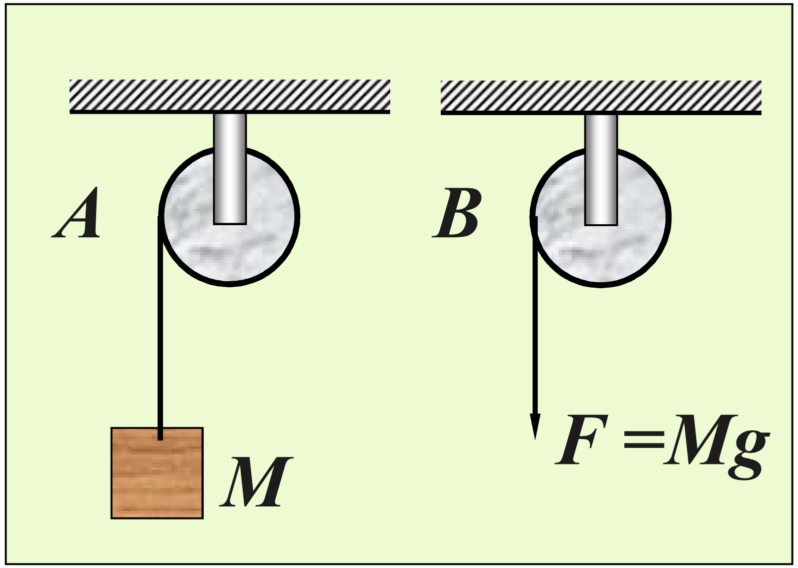
(A) 只有（2）是正确的;

(B)（1）、（2）是正确的;

(C)（2）、（3）是正确的;

(D)（1）、（2）、（3）都是正确的.

例　如图所示，A、B为两个相同的定滑轮，A 滑轮挂一质量为M的物体，B滑轮受力$F=Mg$，设 A、B两滑轮的角加速度分别为 α_A和α_B，不计滑轮的摩擦，这两个滑轮的角加速度的大小关系为：

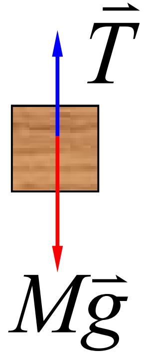


（A）$\alpha_A=\alpha_B$；

（B）$\alpha_A>\alpha_B$；

（C）$\alpha_A<\alpha_B$；

（D）无法确定.



A $\begin{cases} Tr=J\alpha_A=J\dfrac{a_A}{r} \\ Mg-T=Ma_A \end{cases}$

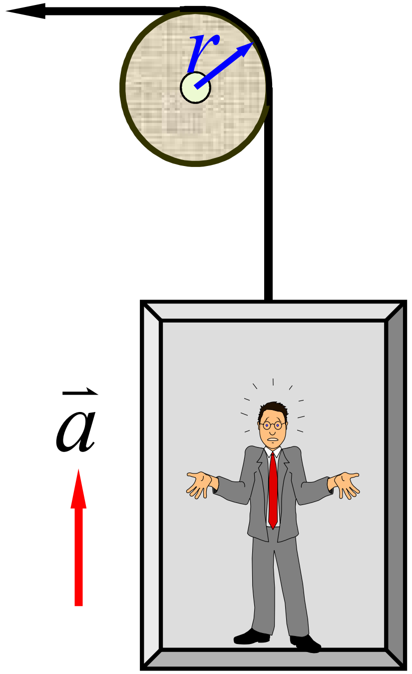
B $Fr=Mgr=J\alpha_B=J\dfrac{a_B}{r}$

例 一飞轮在时间 t 内转过角度 $\boldsymbol{\theta = at + bt^3 - ct^4}$，式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是常量，求它的角加速度.

解：
$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at + bt^3 - ct^4) = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a + 3bt^2 - 4ct^3) = 6bt - 12ct^2$$

例 一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机，滑轮半径 $r=0.5\mathrm{m}$，如果升降机从静止开始以 $a=0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 加速度上升，求（1）滑轮角加速度；（2）$t=5\mathrm{s}$ 时角速度及转过的圈数；（3）$t=1\mathrm{s}$ 时轮缘上一点的加速度.



已知：$r=0.5\mathrm{m}$ $a=0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

解（1） $a_{\mathrm{t}}=a=0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

$$\alpha=\frac{a_{\mathrm{t}}}{r}=\frac{a}{r}$$

$$\alpha=\frac{0.4}{0.5}=0.8\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

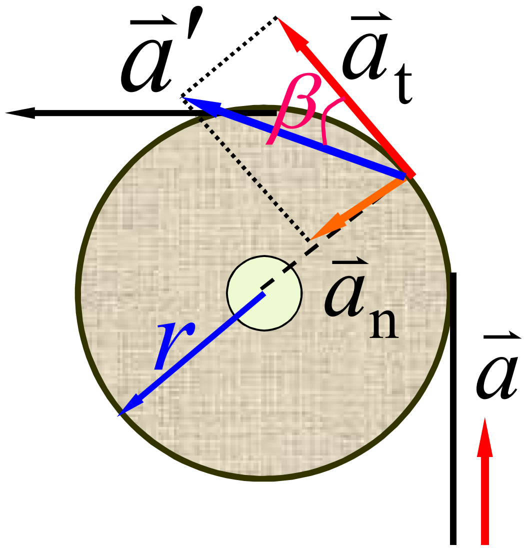
求（2）$t=5\text{s}$ 时角速度及转过的圈数；

$$\alpha=0.8\text{rad}\cdot\text{s}^{-2} \qquad \omega=\alpha t=4\text{rad/s}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2=10\text{rad} \qquad n=\frac{\theta}{2\pi}=1.6$$

求（3）$t=1\text{s}$ 时轮缘上一点的加速度.

$$r=0.5\text{m} \qquad a_{\text{t}}=a=0.4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$



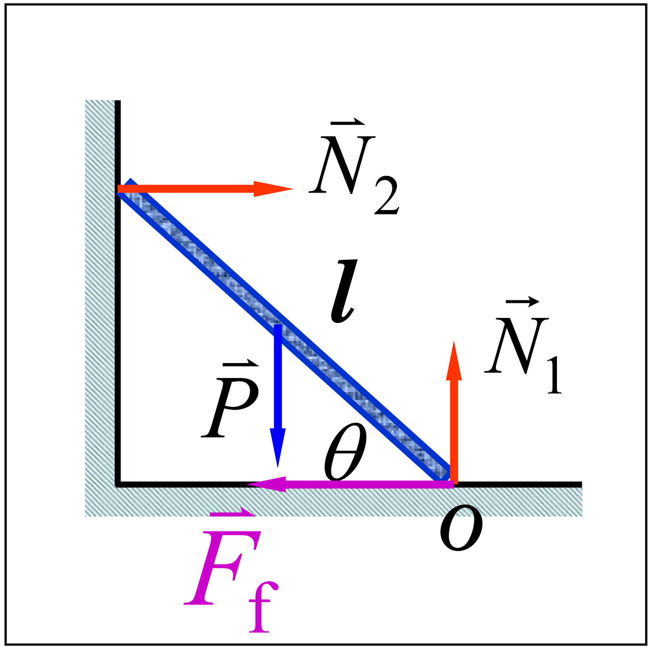
$$\omega=\alpha t=0.8\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_{\text{n}}=r\omega^2=0.32\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a'=\sqrt{a_{\text{t}}^2+a_{\text{n}}^2}=0.51\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\beta=\arctan(a_{\text{n}}/a_{\text{t}})=38.7^\circ$$

例 一长为 l，重为W的均匀梯子，靠墙放置，墙光滑，当梯子与地面成 θ 角时处于平衡状态，求梯子与地面的摩擦力。



解：刚体平衡的条件

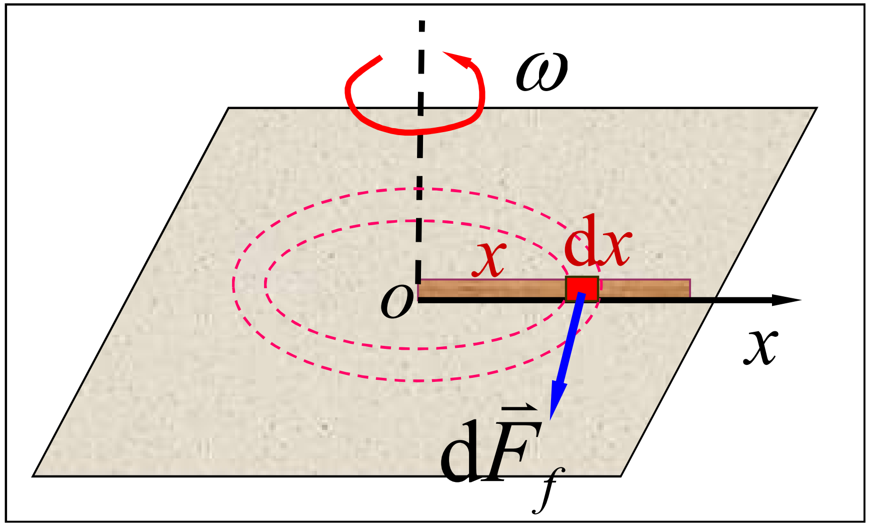
$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad \sum \vec{M}_i = 0$$

$$F_\mathrm{f} - N_2 = 0 \qquad P - N_1 = 0$$

以支点O为转动中心，梯子受的合外力矩：

$$P\frac{l}{2}\cos\theta - N_2 l \sin\theta = 0 \qquad F_\mathrm{f} = N_2 = \frac{P}{2}\cot\theta$$

例 一质量为m、长为L的均匀细棒，可在水平桌面上绕通过其一端的竖直固定轴转动，已知细棒与桌面的摩擦系数为 μ ，求棒转动时受到的摩擦力矩的大小.



解：取一小段如图

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{f}} = \mu \mathrm{d}mg$$

$$\mathrm{d}M = x(\mu \mathrm{d}mg)$$

$$M = \int x\mu \mathrm{d}mg = \frac{\mu mg}{l}\int_0^L x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu mgL$$

例 电风扇在开启电源后，经t_1时间达到了额定转速，此时相应的角速度为ω_0，当关闭电源后，经过t_2时间风扇停转．已知风扇转子的转动惯量为J，并假设摩擦阻力矩和电机的电磁力矩均为常量，求电机的电磁力矩．

解：

$$\begin{cases} M - M_{\mathrm{f}} = J\alpha_1 \\ M_{\mathrm{f}} = J\alpha_2 \\ \omega_0 = \alpha_1 t_1 = \alpha_2 t_2 \end{cases}$$

$$M = J\omega_0\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$