

# 常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程



求特征方程(代数方程)之根

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad ①$$

因为  $r$  为常数时, 函数  $e^{rx}$  和它的导数只差常数因子,  
所以令①的解为  $y = e^{rx}$  ( $r$  为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q) e^{rx} = 0$$

  $\rightarrow r^2 + pr + q = 0 \quad ②$

称②为微分方程①的特征方程, 其根称为特征根.

- 当  $p^2 - 4q > 0$  时, ②有两个相异实根  $r_1, r_2$ , 则微分方程有两个线性无关的特解:  $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ ,  
因此方程的通解为  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当  $p^2 - 4q = 0$  时, 特征方程有两个相等实根  $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$ , 则微分方程有一个特解  $y_1 = e^{r_1 x}$ .

设另一特解  $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$  ( $u(x)$  待定)

代入方程得:

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + q u] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0$$

↓ 注意  $r_1$  是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取  $u = x$ , 则得  $y_2 = x e^{r_1 x}$ , 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

3. 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

小结：

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程:  $r^2 + pr + q = 0$ , 特征根:  $r_1, r_2$

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

推广：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程：  $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$

若特征方程含  $k$  重实根  $r$ ，则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含  $k$  重复根  $r = \alpha \pm i\beta$ ，则其通解中必含  
对应项

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} [ & (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + \\ & + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x ] \end{aligned}$$

(以上  $C_i, D_i$  均为任意常数)

**例1.** 求方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.

解: 特征方程  $r^2 - 2r - 3 = 0$ , 特征根:  $r_1 = -1, r_2 = 3$ ,  
因此原方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

**例2.** 求解初值问题  $\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \\ \underline{s|_{t=0} = 4}, \quad \underline{\frac{ds}{dt}|_{t=0} = -2} \end{cases}$

解: 特征方程  $r^2 + 2r + 1 = 0$  有重根  $r_1 = r_2 = -1$ ,

因此原方程的通解为  $s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$

利用初始条件得  $C_1 = 4, C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为  $s = (4 + 2t) e^{-t}$

**例3.** 求方程  $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$  的通解.

解: 特征方程  $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$ , 特征根:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_{3,4} = 1 \pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y = C_1 + C_2x + e^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

**例4.** 解方程  $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ .

解: 特征方程:  $r^5 - r^4 = 0$ , 特征根:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, \quad r_5 = 1$$

原方程通解:  $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x$

(不难看出, 原方程有特解  $1, x, x^2, x^3, e^x$ )

**例5.** 解方程  $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0$  ( $\beta > 0$ ).

解: 特征方程:  $r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2\beta^2 r^2 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0$$

$$\text{其根为 } r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

方程通解:

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} (C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x) \\ + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} (C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x)$$

**例6.** 解方程  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ .

解：特征方程:  $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + 1)^2 = 0$$

特征根为  $r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$

则方程通解：

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$$

## 内容小结

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根:  $r_1, r_2$

(1) 当  $r_1 \neq r_2$  时, 通解为  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当  $r_1 = r_2$  时, 通解为  $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  时, 通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解.