常数项级数审敛法

一、正项级数及其审敛法

一、正项级数及其审敛法

1. 定义：　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数. 这种级数非常重要,
以后我们将会看到许多级数的敛散性判定问题
都可归结为正项级数的收敛性问题

2. 正项级数收敛的充要条件：　$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$

部分和数列$\{s_n\}$为单调增加数列.

定理　正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 s_n有界.

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: $\Longrightarrow$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

$\Longleftarrow$ $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛 , 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

注: 正项级数收敛的本质 —— $u_n \to 0$ 足够快。

3.比较审敛法 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数,

且$u_n \le v_n (n=1,2,\cdots)$, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

反之，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

证明 (1) 设$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $\because u_n \le v_n$,

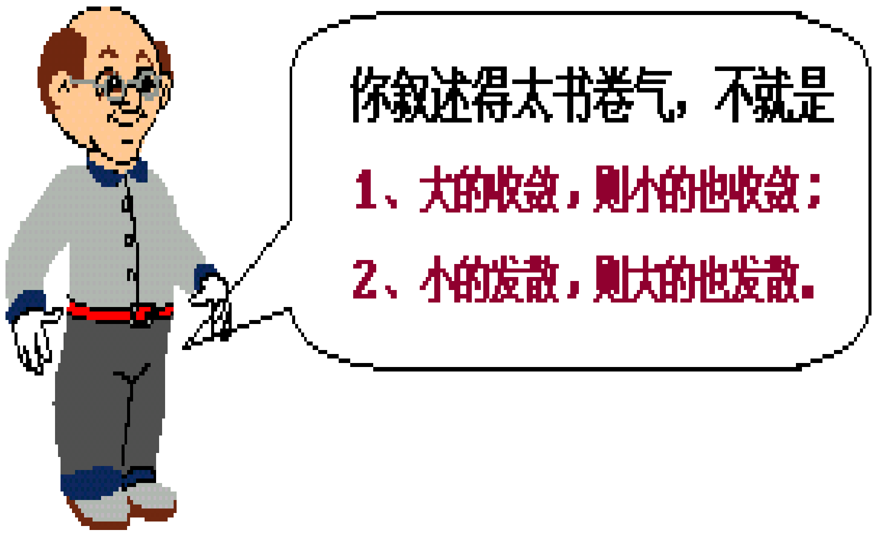
且$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

即部分和数列有界 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 设 $s_n \to \infty\ (n \to \infty)$ 且 $u_n \le v_n$,

则 $\sigma_n \ge s_n \to \infty$ 不是有界数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散. 定理证毕.



推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛(发散)，

且 $v_n \le ku_n (n \ge N)(ku_n \le v_n)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛(发散)。

例 1 讨论 P-级数

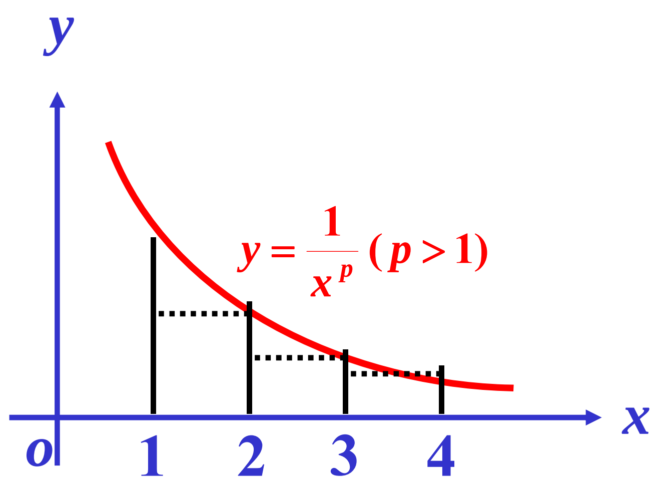
$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解　设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则 $P-$级数发散.

设 $p>1$, 由图可知

对于 $n-1\le x\le n(n\ge 2)$, 有 $x^p\le n^p \Leftrightarrow \frac{1}{x^p}\ge\frac{1}{n^p}$,

而 $\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$



$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \le 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^p}$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1}(1 - \frac{1}{n^{p-1}}) < 1 + \frac{1}{p-1}$$

即s_n有界， 则$P-$级数收敛.

$$P-级数\begin{cases} 当p > 1时， & 收敛 \\ 当p \le 1时， & 发散 \end{cases}$$

重要参考级数：几何级数，P-级数，调和级数.

调和级数与 p 级数是两个常用的比较级数.

若存在 $N \in Z^{+}$, 对一切 $n \geq N$,

$$(1)\ u_n \geq \frac{1}{n},\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \text{发散};$$

$$(2)\ u_n \leq \frac{1}{n^p}\ (p>1),\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ \text{收敛}.$$

例 利用$P-$级数与比较法，判断下列级数的敛散性.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)};$$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};\quad (5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)};$$

解答： （1）收敛；（2）发散（3）收敛

（4）发散（5）发散

例2 利用比较法判定下列级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin^2\sqrt{n};\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n\sin\frac{1}{4^n};$$

提示:

$(1)\ \dfrac{1}{2^n}\sin^2\sqrt{n} \le \dfrac{1}{2^n}$，故收敛;

$(2)\ \pi^n\sin\dfrac{1}{4^n} \le (\dfrac{\pi}{4})^n$，故收敛。

注：

比较审敛法是一基本方法，虽然有用，但应用起来却有许多不便，因为它需要建立定理所要求的不等式，须有参考级数，而这种不等式常常不易建立，为此介绍在应用上更为方便的极限形式的比较审敛法

4. 比较审敛法的极限形式:

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当$0<l<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \qquad (\, l \neq \infty \,)$$

$$(l - \varepsilon) v_n \le u_n \le (l + \varepsilon) v_n \qquad (\, n > N \,)$$

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 取 $\varepsilon < l$, **由定理 2 可知** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **同时收敛或同时发散**;

(2) 当 $l = 0$ 时, 利用 $u_n < (l + \varepsilon) v_n \; (n > N)$, **由定理2 知**

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **收敛**, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 时, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时, $\frac{u_n}{v_n} > 1$,

即 $u_n > v_n$ **由定理2可知, 若** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **发散**, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

特别取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论:

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \quad \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例 3 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$;

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$ 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}} = 1,$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2 \ln[1+\frac{1}{n^2}] = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

例5 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$（ $a>0$）的敛散性.

解 当 $0<a<1$ **时，**

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$$

当 $a=1$ **时，** $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\neq 0$

当 $a>1$ **时，** $\because \frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}\to$收敛

所以当 $0<a\leq 1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散；

当 $a>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

5. 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法):

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho < 1$时级数收敛; $\rho > 1$时级数发散; $\rho = 1$时失效.

证明 当ρ为有限数时, 对$\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N$, 当$n > N$时, 有 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$,

即 $\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon \quad (n > N)$

当$\rho < 1$时， 取$\varepsilon < 1-\rho$， 使$r = \varepsilon + \rho < 1$,

$$u_{N+2} < ru_{N+1}, \quad u_{N+3} < ru_{N+2} < r^2 u_{N+1}, \quad \cdots,$$

$u_{N+m} < r^{m-1} u_{N+1}$， 而级数$\sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} u_{N+1}$收敛,

$\therefore \sum_{m=1}^{\infty} u_{N+m} = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_u$收敛， **收敛**

当$\rho > 1$时，取$\varepsilon < \rho - 1$，使$r = \rho - \varepsilon > 1$,

当$n > N$时，$u_{n+1} > ru_n > u_n$， $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$. **发散**

比值审敛法的优点:

不必找参考级数. 直接从级数本身的构成——即通项来判定其敛散性

注意:

1. 当$\rho = 1$时比值审敛法失效;

例 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 发散} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ 收敛} \end{array}\right\} (\rho = 1)$$

2. 条件是充分的, 而非必要.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n$,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2}$, $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例 6　判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

解　(1) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \dfrac{n+1}{10} \to \infty \quad (n \to \infty)$,

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\because \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = 1$,

比值审敛法失效，改用比较审敛法

$\because \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n} < \dfrac{1}{n^2}$, $\quad \because$ 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

例7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}$

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，检比法失效

而 $\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}\le\frac{n}{3^n}$ 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

由检比法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛

故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{6}$ 收敛

例8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ **的敛散性 .**

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

根据定理4可知:

当$0<x<1$时, **级数收敛 ;**

当$x>1$时, **级数发散 ;**

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

6. 根值审敛法（柯西判别法）:

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

(ρ为数或$+\infty$)，则$\rho<1$时级数收敛；

$\rho>1$时级数发散；$\rho=1$时失效.

证明 (1) $\rho < 1$ 取 $0 < \varepsilon_0 < 1 - \rho$

则 $r = \rho + \varepsilon_0 < 1$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 知 $\exists N$，使当$n > N$时

$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon_0 = r$

$\Rightarrow \quad u_n < r^n \qquad (n > N)$

由 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} r^n$ 收敛及比较审敛法得

$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛

$\Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(2) $\rho > 1$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$ 知 $\exists N$，使当 $n > N$ 时

$\sqrt[n]{u_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n > 1$

故 u_n 不趋于 0 $\quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(3) $\rho = 1$ 不能判定

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

例如，设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$,

$$\because \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

级数收敛.

例 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的收敛性。

解： $\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\to\frac{1}{2}$，故所给级数收敛。

四、小结

<table>
<tr><th></th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">审敛法</td><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.充要条件
5.比较法
6.比值法
7.根值法</td></tr>
</table>