一、交错级数及其审敛法

二、绝对收敛与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

定义：正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

莱布尼茨定理　如果交错级数满足条件：

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1} \ (n = 1,2,3,\cdots)$；（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛，且其和 $s \leq u_1$，其余项 r_n 的绝对值

$|r_n| \leq u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1}-u_n \geq 0,$

$$\because s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

数列 s_{2n}是单调增加的，

又 $s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$

$\leq u_1$ 数列 s_{2n}是有界的，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=s\leq u_1.$ $\because \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=0,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

$\therefore$ 级数收敛于和 s，且 $s \le u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

满足收敛的两个条件， $\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

用Leibnitz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ **收敛**

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ **收敛**

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ **收敛**

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 **收敛** **收敛**

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{\ln n}$.

提示：

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0, \text{且} \frac{1}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln n}<0$$

$\therefore$ 级数收敛

例 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的收敛性.

解 $\because (\frac{\sqrt{x}}{x-1})' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$单调递减, $\quad \therefore u_n > u_{n+1}$,

又 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$ 原级数收敛.

证明 u_{n} 单调减的方法:

$$u_{n+1} - u_n \overset{?}{<} 0 \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \overset{?}{<} 1$$

$$u_n = f(n) \text{ 考察 } f'(x) \overset{?}{<} 0$$

二、绝对收敛与条件收敛

定义: 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛;

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

例如 : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.（即绝对收敛的级数一定收敛）

证明 令$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$,

显然$v_n\geq 0$, 且$v_n\leq|u_n|$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

又$\because\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

此定理的作用：

任意项级数 $\Longrightarrow$ **正项级数**

例. 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$.

证: (1) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$, **而** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ **收敛**,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ **收敛**

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$ **绝对收敛**.

(2) 令 $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ **收敛，因此** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ **绝对收敛.**

练习1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos x}{n^3}$ 的敛散性.（x 为常数）

解 $$|u_n| = \frac{|\cos x|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$

由 P 级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛.

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

练习2 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 是否绝对收敛?

解 $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n+1}$

由调和级数的发散性可知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|$ 发散.

但原级数是一个交错级数，且满足：

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}} = u_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

由莱布尼兹判别法可知，该交错级数收敛.

故原级数是条件收敛，不是绝对收敛的.

例. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 条件收敛.

证：对 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ ∴发散

$\because \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}(n = 3, 4, \ldots)$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

对 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 收敛

$(i)u_n \geq u_{n+1};(n = 3, 4, \ldots)$ $(ii)\lim_{n\to\infty}u_n = 0$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}.(x > 2)$ 单调减少

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0.(x > e)$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}.(x > 2)$

罗比达法则

例 讨论交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$： $p>1$ 时收敛， $p\le 1$ 时发散；

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时绝对收敛；

在 $p\le 1$ 时，讨论交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$

的敛散性：

$$u_n = \frac{1}{n^p}$$

(1) $0 < p \leq 1$ 时， $n^p < (n+1)^p$,

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$$ ，且 $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$$ 收敛；

(2) $p \leq 0$ 时， $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$$

故级数 $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$$ 发散；

所以原级数在 $p > 1$ 时绝对收敛，

$0 < p \leq 1$ 时条件收敛， $p \leq 0$ 时发散.

注意

一般而言，由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，并不能推出 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_n$ 发散　如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散　　但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛

如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|u_n|$ 发散是由检比法和检根法而审定，

则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_n$ 必定发散。这是因为检比法与检根法审定级数发散的原因是通项不趋向于0

由 $|u_n| \not\to 0 \Rightarrow u_n \not\to 0$