

例 一小球在竖直平面内作匀速圆周运动，则小球在运动过程中： (A)



- (A) 机械能不守恒、动量不守恒、角动量守恒
- (B) 机械能守恒、动量不守恒、角动量守恒
- (C) 机械能守恒、动量守恒、角动量不守恒
- (D) 机械能守恒、动量守恒、角动量守恒

解：小球在竖直平面内作匀速圆周运动，其动能不变，势能改变，所以机械能不守恒。

小球在运动过程中，速度方向在改变，所以动量不守恒。

由于小球作匀速圆周运动，它所受的合力指向圆心，力矩为零，所以角动量守恒。

# 第五章 刚体的定轴转动

## 5-1 刚体的定轴转动

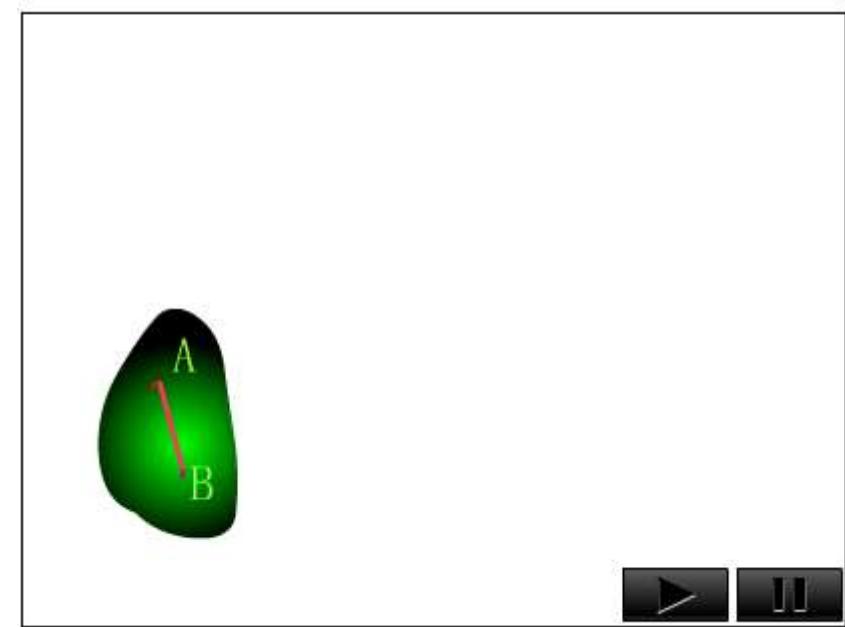
## 一 刚体的平动与转动

➤ **刚体**: 在外力作用下, 形状和大小都不发生变化的物体. (任意两质点间距离保持不变的特殊质点组)

刚体的运动形式: 平动、转动.

➤ **平动**: 若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同, 或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线.

刚体平动 → 质点运动



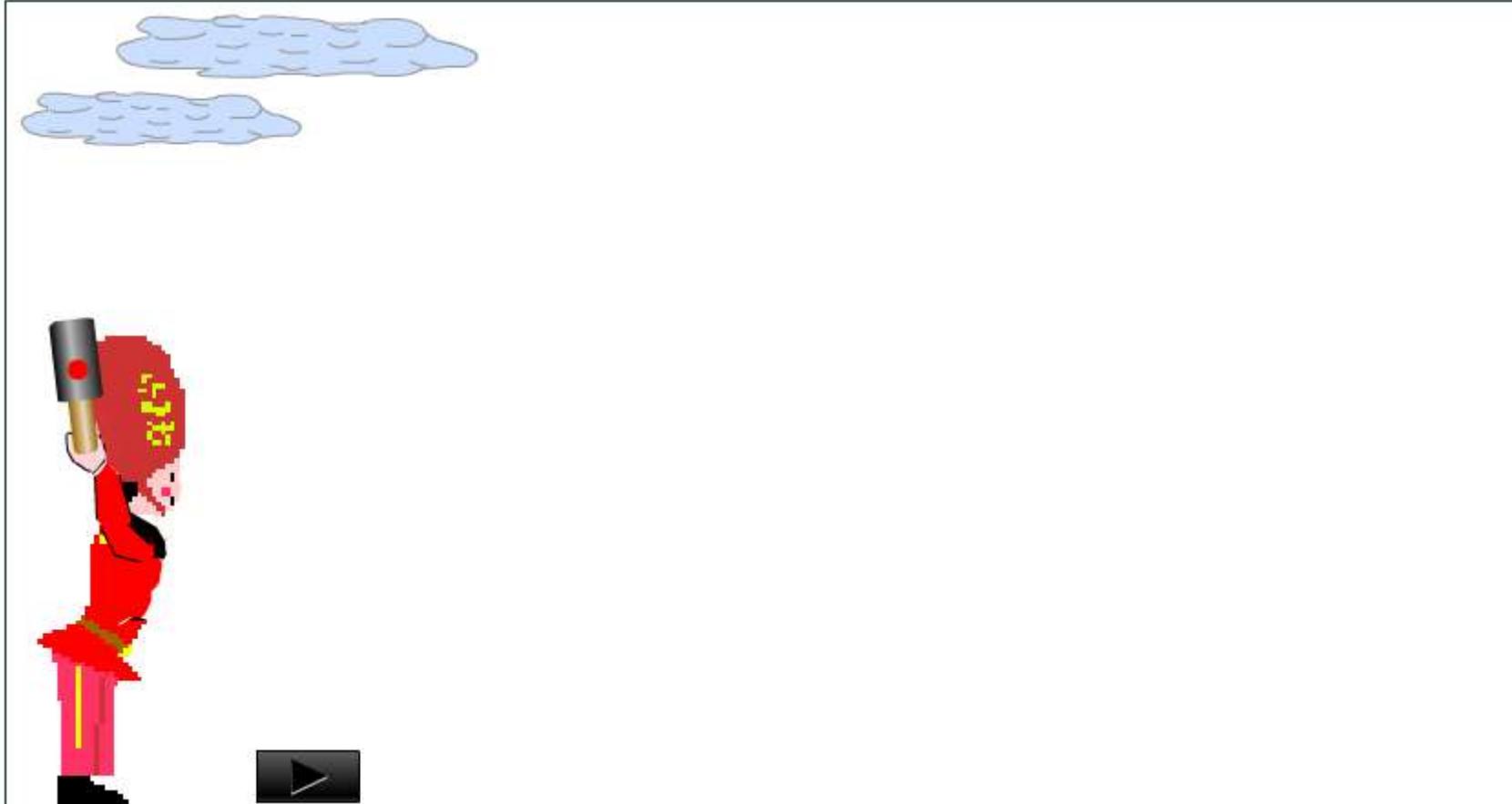
- 转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动。  
转动又分定轴转动和非定轴转动。



- 刚体的平面运动。



➤ 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动



## 二 刚体绕定轴转动的角速度和角加速度

### 1 角速度和角加速度

➤ 角坐标  $\theta = \theta(t)$

◆ 约定

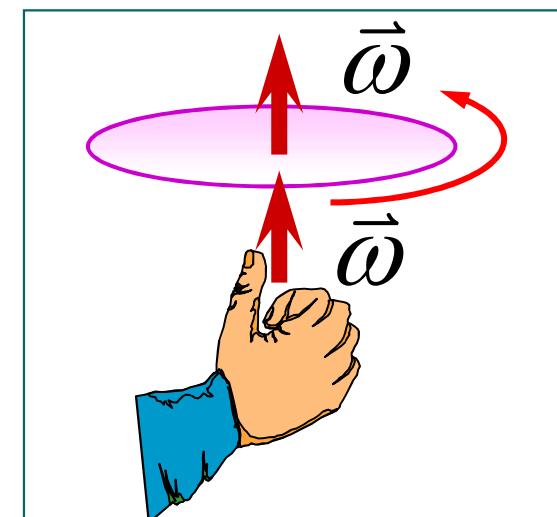
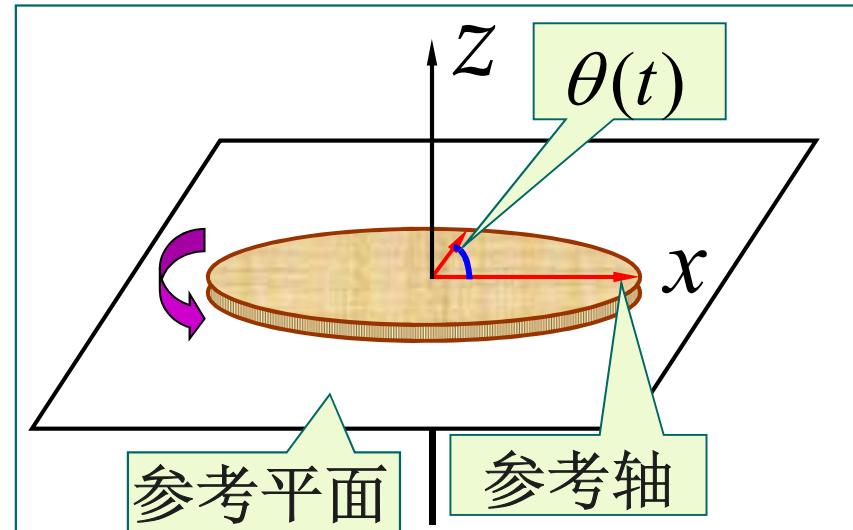
沿逆时针方向转动  $\theta > 0$

沿顺时针方向转动  $\theta < 0$

➤ 角位移  $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

➤ 角速度矢量  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

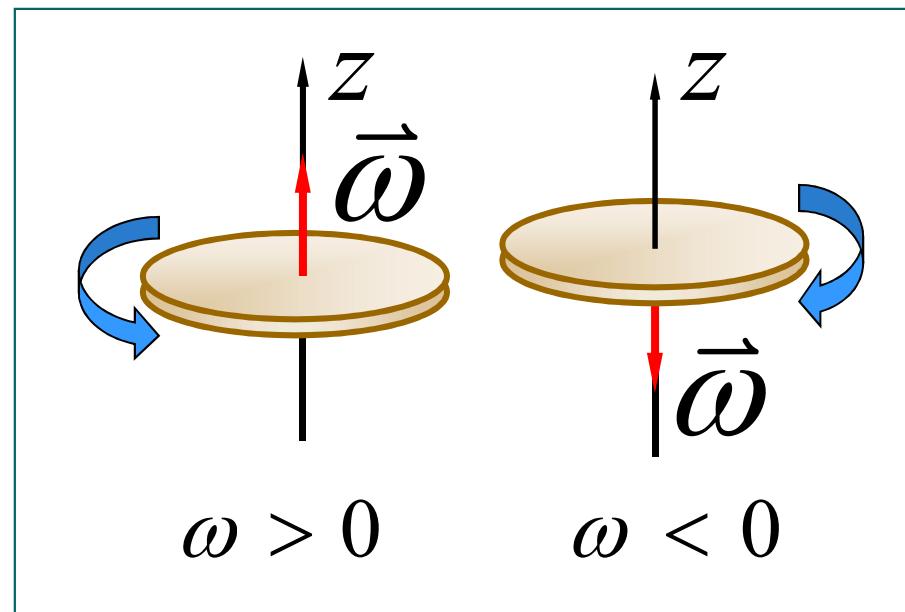
◆ 方向：右手螺旋方向



- 刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示 .
- 角加速度

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

定轴转动的特点



- 1) 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；
- 2) 任一质点运动  $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$  均相同，但  $\vec{v}, \vec{a}$  不同；
- 3) 运动描述仅需一个坐标 .

## 2 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动。

### 刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

### 3 角量与线量的关系

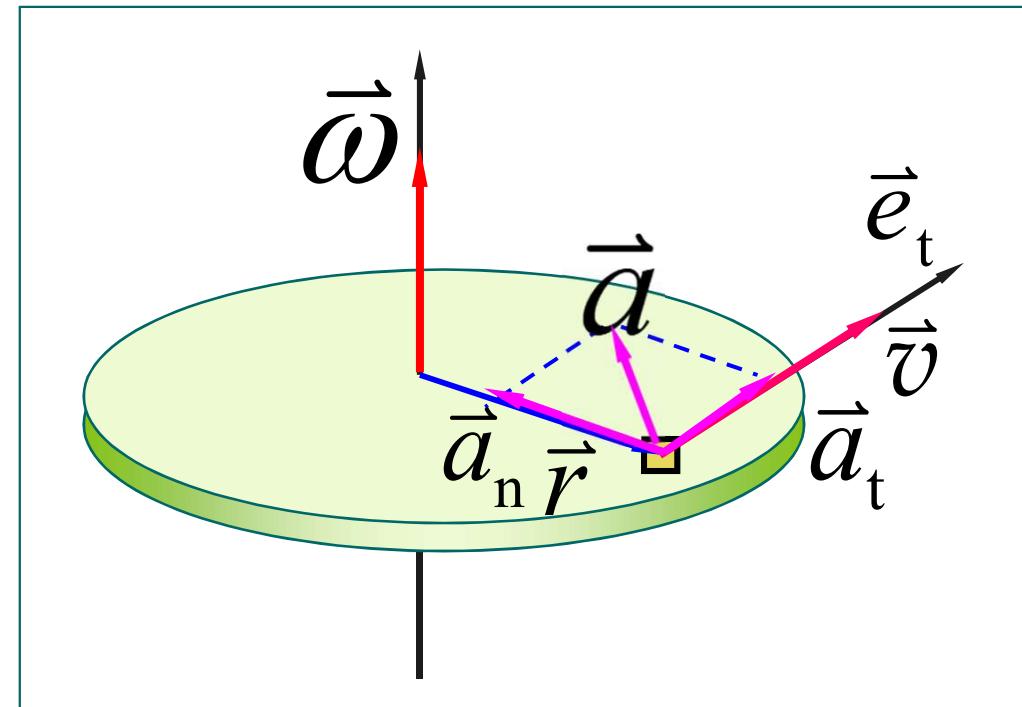
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{v} = r \omega \vec{e}_t$$

$$a_t = r \alpha$$

$$a_n = r \omega^2$$



$$\vec{a} = r \alpha \vec{e}_t + r \omega^2 \vec{e}_n$$

**例1** 一飞轮半径为 0.2m、 转速为  $150\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ ， 因受制动而均匀减速，经 30 s 停止转动。

试求：(1) 角加速度和在此时间内飞轮所转的圈数；

解 (1)  $\omega_0 = 5\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $t = 30 \text{ s}$  时,  $\omega = 0$ .

设  $t = 0 \text{ s}$  时,  $\theta_0 = 0$ . 飞轮做匀减速运动

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

飞轮 30 s 内转过的角度

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(5\pi)^2}{2 \times (-\pi/6)} = 75\pi \text{ rad}$$

转过的圈数  $N = \theta/2\pi = 37.5 \text{ r}$

已知:  $\omega_0 = 5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 0.2 \text{ m}$ . 求:

(2) 制动开始后  $t = 6 \text{ s}$  时飞轮的角速度;

解:  $\omega = \omega_0 + \alpha t = (5\pi - \frac{\pi}{6} \times 6) = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

(3)  $t = 6 \text{ s}$  时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度.

解:  $v = r\omega = 0.2 \times 4\pi = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$a_t = r\alpha = 0.2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0.105 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2 \times (4\pi)^2 = 31.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**例2** 在高速旋转的微型电机里，有一圆柱形转子可绕垂直其横截面并通过中心的转轴旋转。开始起动时，角速度为零。起动后其转速随时间变化关系为： $\omega = \omega_m(1 - e^{-t/\tau})$ ，式中  $\omega_m = 540\text{r/s}$ ， $\tau = 2.0\text{s}$ 。求：(1)  $t = 6\text{s}$  时电动机的转速。(2) 起动后，电动机在  $t = 6\text{s}$  时间内转过的圈数。(3) 角加速度随时间变化的规律。

解：(1) 将  $t = 6\text{s}$  代入得  $\omega = 0.95\omega_m = 513\text{ r/s}$

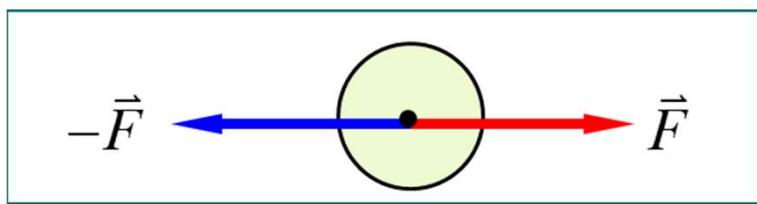
$$(2) N = \frac{1}{2\pi} \int_0^6 \omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^6 \omega_m (1 - e^{-t/\tau}) dt = 344$$

$$(3) \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_m}{\tau} e^{-t/\tau} = 540\pi e^{-t/2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

(角加速度  
指数衰减)

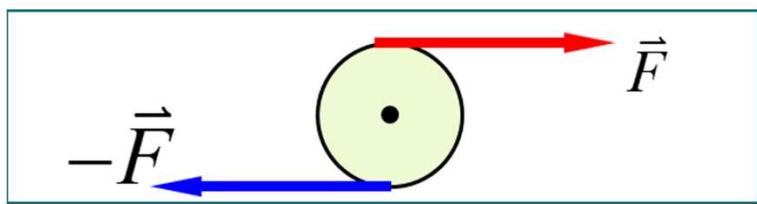
## 5-2 力矩 转动定律 转动惯量

问：在质点问题中，我们将物体所受的力均作用于同一点，并仅考虑力的大小和方向所产生的作用；在刚体问题中，我们是否也可以如此处理？力的作用点的位置对物体的运动有影响吗？



$$\sum \vec{F}_i = 0, \sum \vec{M}_i = 0$$

圆盘静止不动



$$\sum \vec{F}_i \neq 0, \sum \vec{M}_i = 0$$

圆盘绕圆心转动

力矩可以反映力的作用点的位置对物体运动的影响。

## 一 力矩

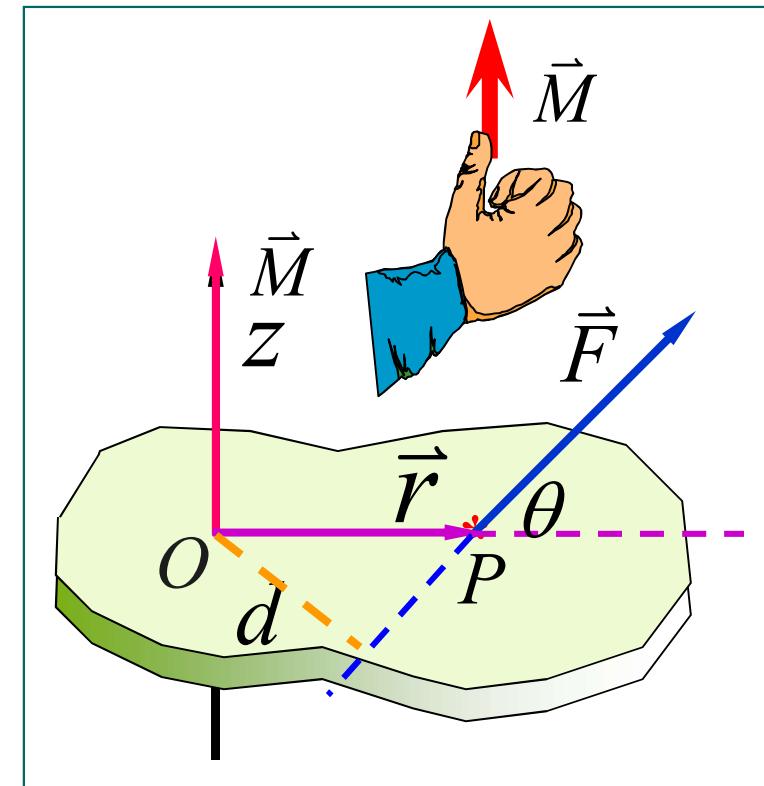
刚体绕  $Oz$  轴旋转，力  $\vec{F}$  作用在刚体上点  $P$ ，且在转动平面内， $\vec{r}$  为由点  $O$  到力的作用点  $P$  的径矢。

$\vec{F}$  对转轴 Z 的力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = Fr \sin \theta = Fd$$

$d$  : 力臂



讨论

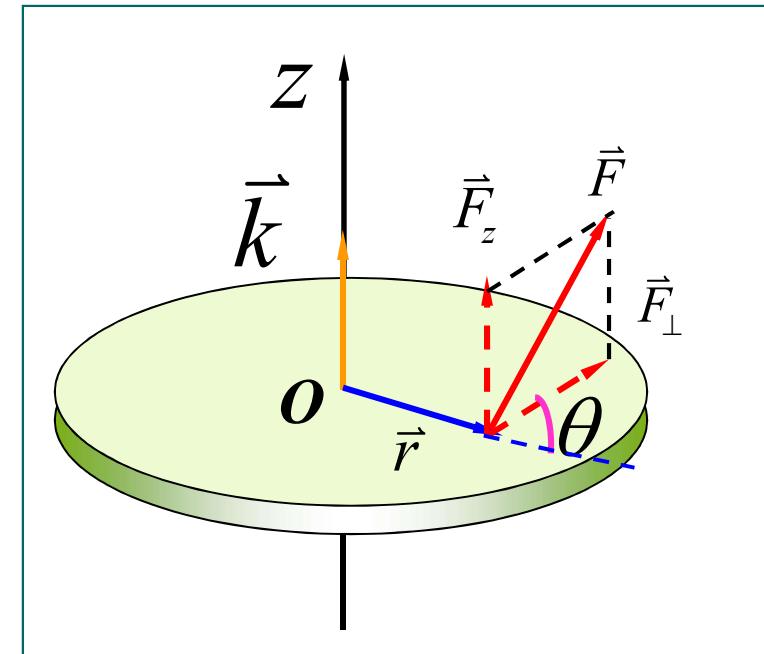
1) 若力  $\vec{F}$  不在转动平面内，可把力分解为平行于和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{\perp}$$

其中  $\vec{F}_z$  对转轴的力矩为零，故力对转轴的力矩

$$M_z \vec{k} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$$

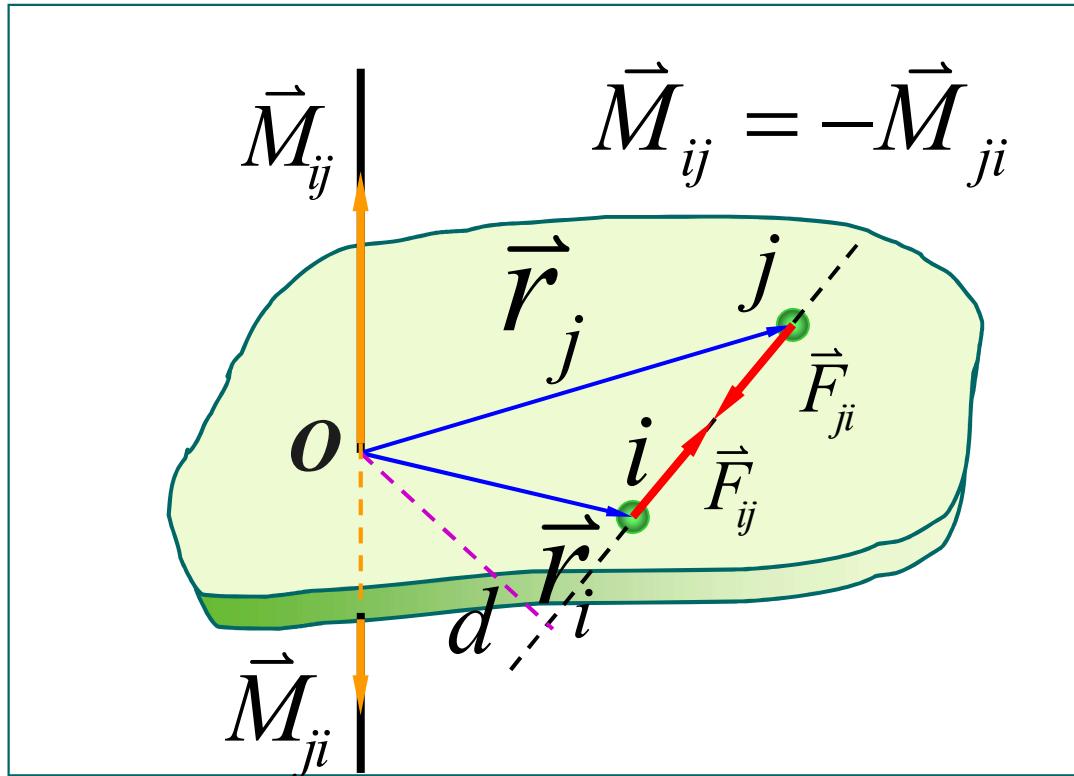
$$M_z = r F_{\perp} \sin \theta$$



2) 合力矩等于各分力矩的矢量和

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots$$

### 3) 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



**结论:** 刚体内各质点间的  
作用力对转轴的合内力矩为零.  $M = \sum M_{ij} = 0$

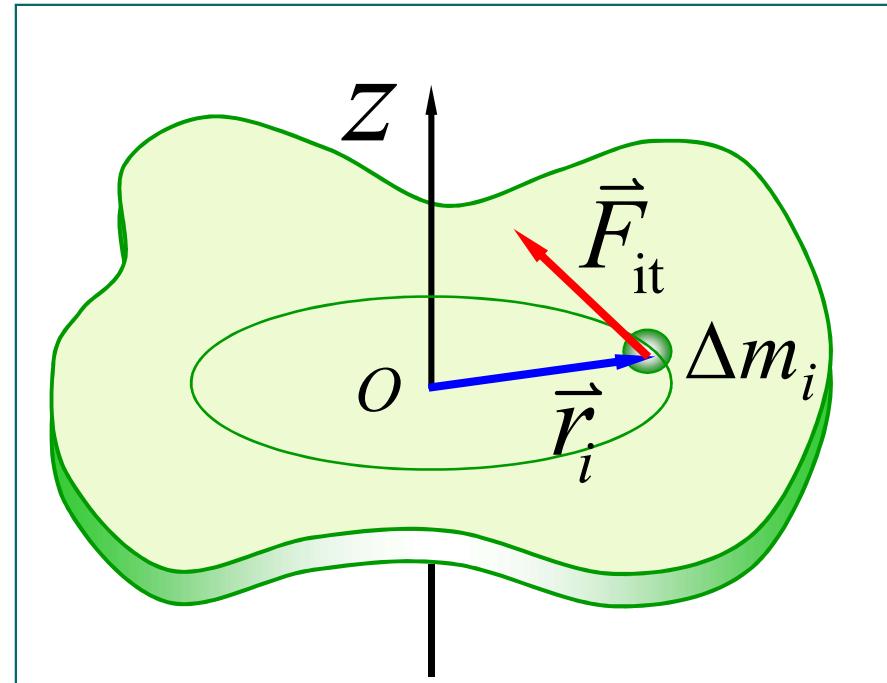
## 二 转动定律

$$F_{it} = (\Delta m_i) a_t = mr \alpha$$

$$M_i = r_i F_{it} = (\Delta m_i) a_t r_i$$

$$\therefore a_t = r \alpha$$

$$\therefore M_i = (\Delta m_i) r_i^2 \alpha$$



$$M = \sum M_i = \sum (\Delta m_i) r_i^2 \alpha = \alpha \sum (\Delta m_i) r_i^2$$

➤ 转动惯量

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

◆ 转动定律

$$M = J \alpha$$

◆ 转动定律  $M = J\alpha$        $J = \sum \Delta m_i r_i^2$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

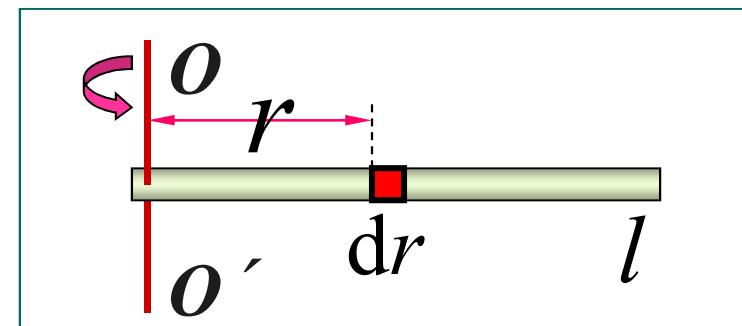
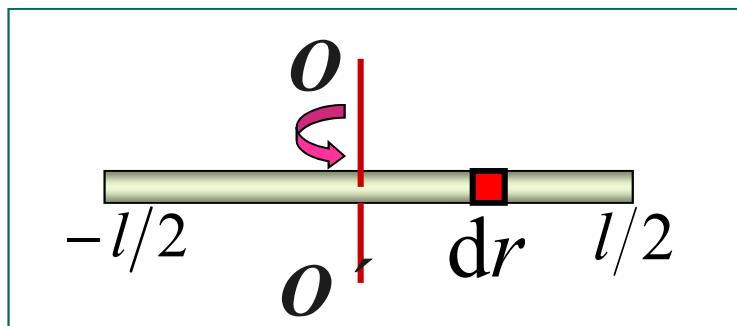
- 转动惯量物理意义：转动惯性的量度。
- 质量连续分布刚体的转动惯量

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad \text{质量元: } dm$$



转动惯量的大小取决于刚体的密度、几何形状及转轴的位置。

讨论：一质量为  $m$ 、长为  $l$  的均匀细长棒，与棒垂直的轴的位置不同，转动惯量的变化。

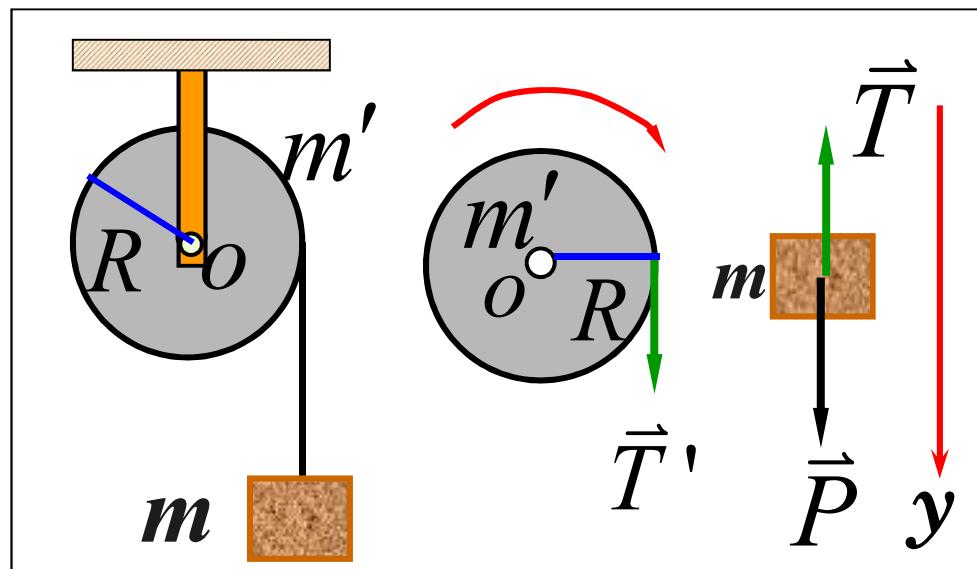


设棒的线密度为  $\lambda$ ，取一距离转轴  $OO'$  为  $r$  处的质量元  $dm = \lambda dr$   $dJ = r^2 dm = \lambda r^2 dr$

$$\text{转轴过中心垂直于棒} \quad J = 2\lambda \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{1}{12} ml^2$$

$$\text{转轴过端点垂直于棒} \quad J = \lambda \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} ml^2$$

**例1** 如图，有一半径为  $R$  质量为  $m'$  的匀质圆盘，可绕通过盘心  $O$  垂直盘面的水平轴转动。转轴与圆盘之间的摩擦略去不计。圆盘上绕有轻而细的绳索，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为  $m$  的物体。试求物体下落时的加速度、绳中的张力和圆盘的角加速度。



解： 1) 分析受力  
2) 选取坐标

注意：转动和平动的坐标取向要一致。

### 3) 列方程 (用文字式)

牛顿第二定律 (质点)

转动定律 (刚体)

约束条件

转动惯量

$$mg - T = ma_y$$

$$T'R = J\alpha$$

$$a_y = R\alpha \quad T = T'$$

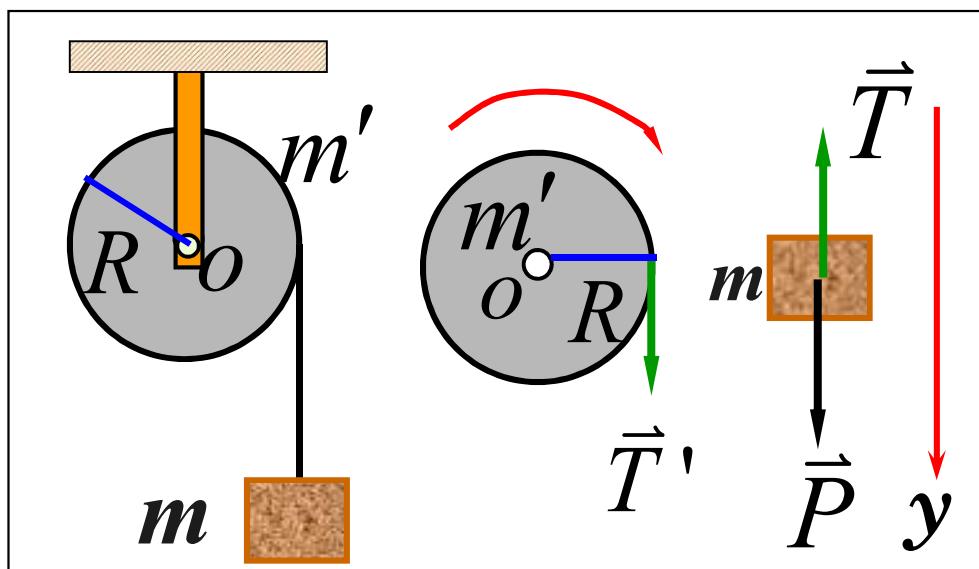
$$J = m'R^2 / 2$$

先文字计算求解,  
后代入数据求值.

$$a_y = 2mg/(2m+m')$$

$$T = m'mg/(2m+m')$$

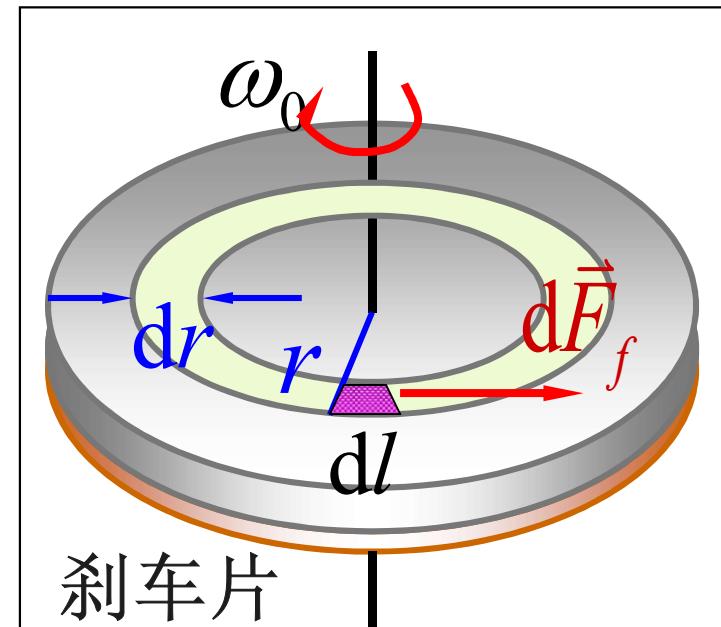
$$\alpha = 2mg/[(2m+m')R]$$



**例2** 有一半径为  $R$  质量为  $m$  匀质圆盘, 以角速度  $\omega_0$  绕通过圆心垂直圆盘平面的轴转动. 若有一个与圆盘大小相同的粗糙平面(俗称刹车片)挤压此转动圆盘, 故而有正压力  $N$  均匀地作用在盘面上, 从而使其转速逐渐变慢. 设正压力  $N$  和刹车片与圆盘间的摩擦系数均已被实验测出. 试问经过多长时间圆盘才停止转动?

解: 在圆盘上取面积微元, 面积元所受对转轴的摩擦力矩大小

$$r dF_f = r \cdot \mu \cdot \frac{N}{\pi R^2} \cdot dl dr$$



面积微元所受摩擦力矩

$$r dF_f = r \cdot \mu \cdot \frac{N}{\pi R^2} \cdot dl dr$$

圆环所受摩擦力矩

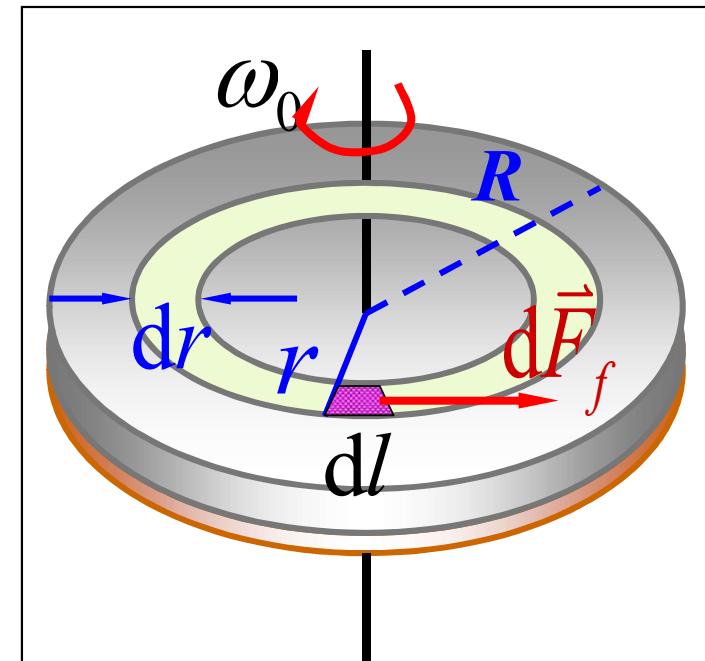
$$dM = \int r dF_f = \frac{\mu N r dr}{\pi R^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{2\mu N r^2 dr}{R^2}$$

圆盘所受摩擦力矩

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2\mu N r^2 dr}{R^2} = \frac{2}{3} \mu N R$$

圆盘角加速度  $\alpha = \frac{M}{J} = \frac{3}{4} \frac{\mu N}{MR}$

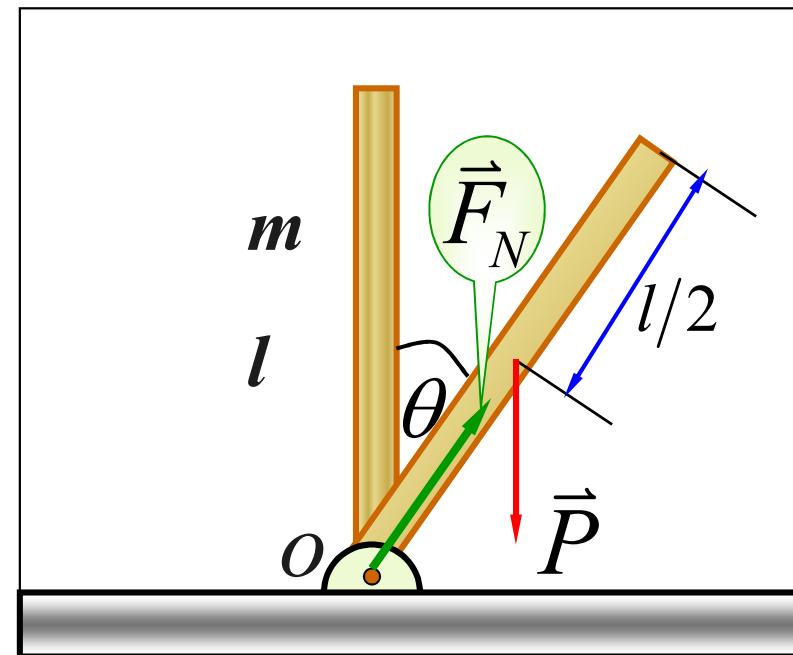
停止转动需时  $t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{3}{4} \frac{mR\omega_0}{\mu N}$



**例3** 一长为  $l$  质量为  $m$  匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链  $O$  相接，并可绕其转动。由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链  $O$  转动。试计算细杆转动到与竖直线成  $\theta$  角时的角加速度和角速度。

**解** 细杆受重力和铰链对细杆的约束力  $\vec{F}_N$  作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl \sin \theta = J\alpha$$



$$\frac{1}{2}mgl \sin \theta = J\alpha$$

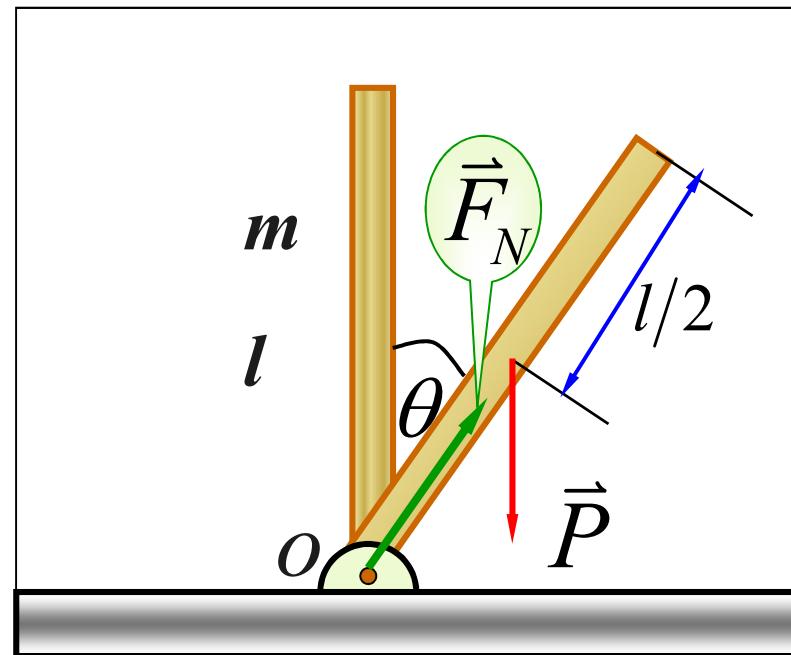
式中  $J = \frac{1}{3}ml^2$

得  $\alpha = \frac{3g}{2l} \sin \theta$

由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

代入初始条件积分 得

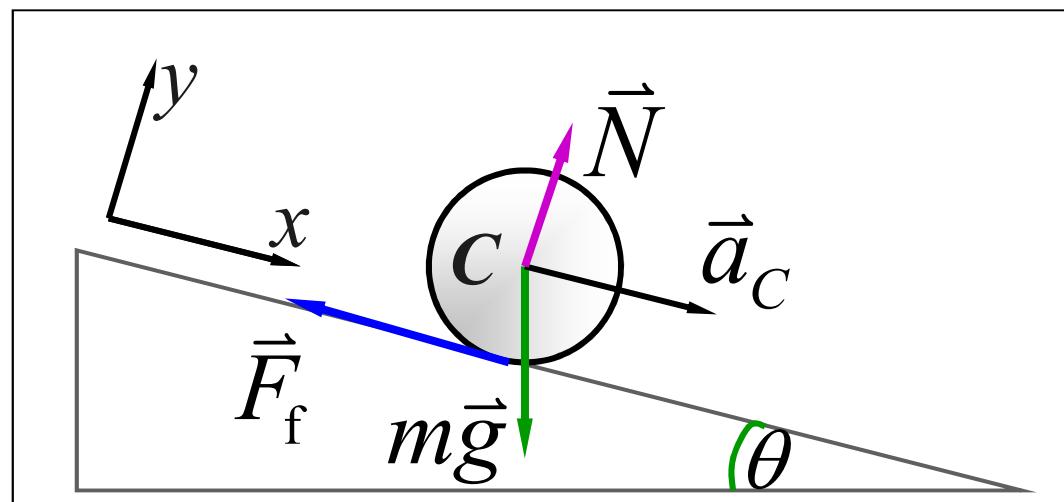


$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)}$$

**例4** 如图一斜面长  $l = 1.5\text{m}$ , 与水平面的夹角  $\theta = 5^\circ$ . 有两个物体分别静止地位于斜面的顶端, 然后由顶端沿斜面向下滚动, 一个物体是质量  $m_1 = 0.65\text{kg}$ 、半径为  $R_1$  的实心圆柱体, 另一物体是质量为  $m_2 = 0.13\text{ kg}$ 、半径  $R_2 = R_1 = R$  的薄壁圆柱筒. 它们分别由斜面顶端滚到斜面底部各经历多长时间?

**解:** 物体由斜面顶端滚下, 可视为质心的平动和相对质心的滚动两种运动合成.



## 质心运动方程

$$mg \sin \theta - F_f = ma_C$$

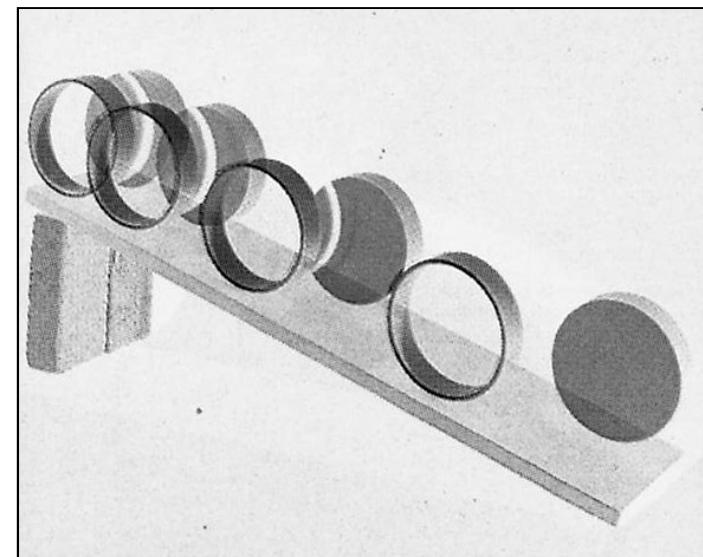
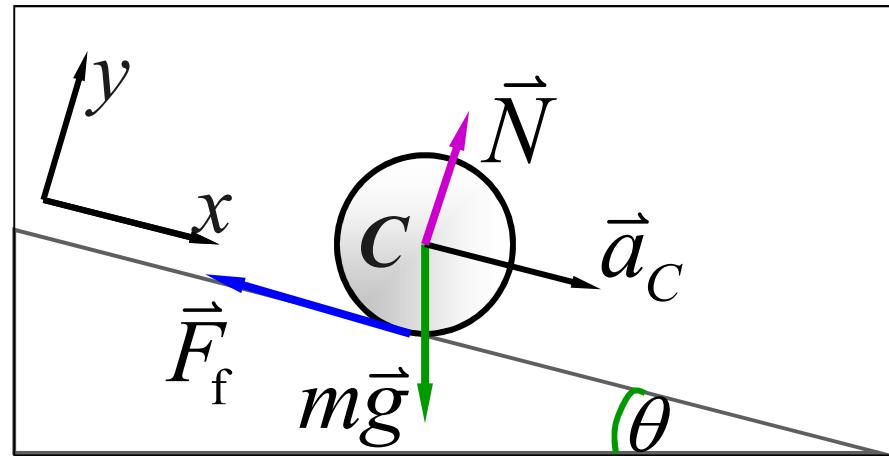
转动定律  $F_f R = J\alpha$

角量、线量关系

$$a = a_C = R\alpha$$

$$ma = mg \sin \theta - \frac{Ja}{R^2}$$

$$a = \frac{mgR^2 \sin \theta}{mR^2 + J} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2g \sin \theta / 3 \\ a_2 = g \sin \theta / 2 \end{array} \right.$$



实心圆柱  $t_1 = \sqrt{2l/a_1}$     空心圆筒  $t_2 = \sqrt{2l/a_2}$