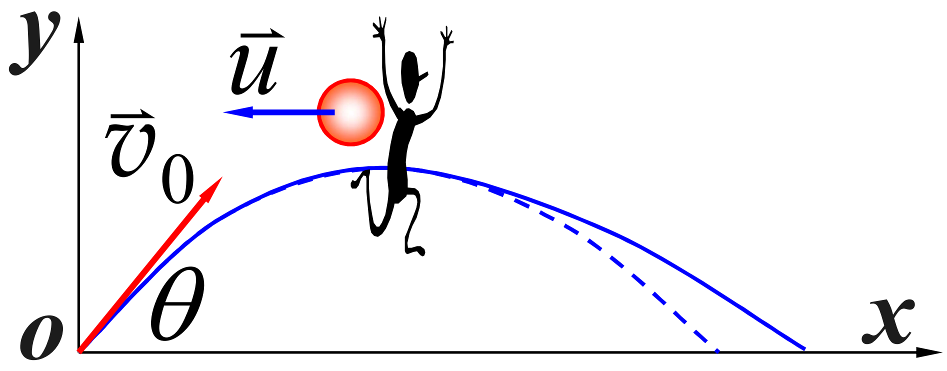
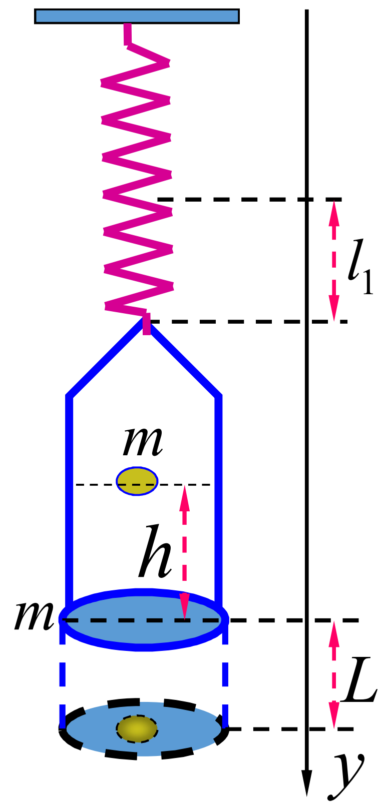
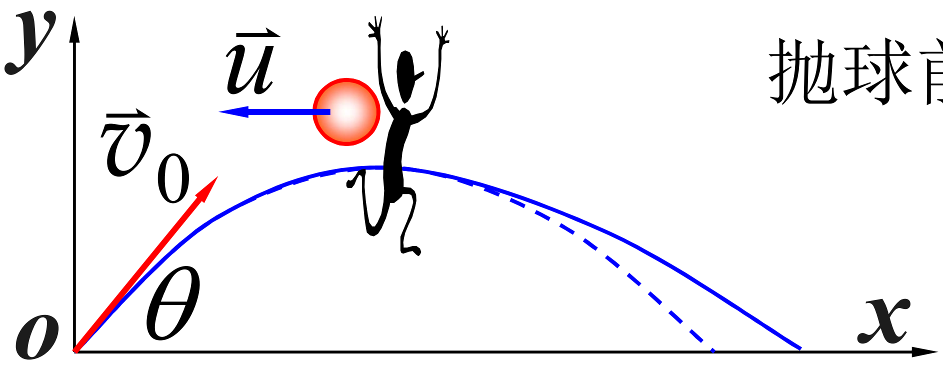
例 一人质量为M，手中拿着质量为m的小球自地面以倾角 θ，初速v_0斜向前跳起，跳至最高点时以相对人的速率 u 将球水平向后抛出，问人前进的距离增加多少？



例 一轻弹簧悬挂一金属盘，弹簧长 $l_1 = 10\,\mathrm{cm}$ 一个质量和盘相同的泥球，从高于盘 $h = 30\ \mathrm{cm}$ 处静止下落盘上，求盘向下运动的最大距离 L．



例　一人质量为M，手中拿着质量为m的小球自地面以倾角 θ ，初速 v_0 斜向前跳起，跳至最高点时以相对人的速率 u 将球水平向后抛出，问人前进的距离增加多少？



设：人在最高点抛球后的速度为v_2

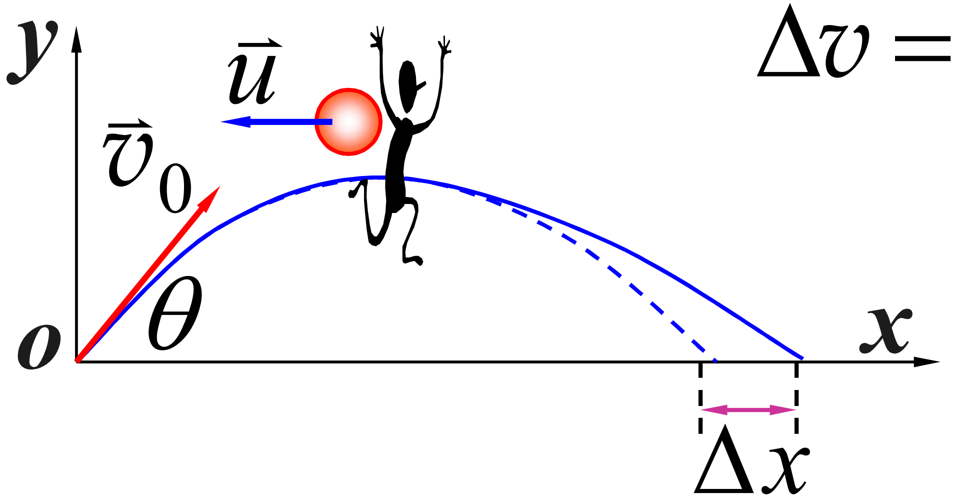
抛球前的速度$v_1 = v_0 \cos\theta$

人和球为系统 $\sum F_x = 0$

P_x 守恒

$$(M+m)v_1 = Mv_2 + m(v_2 - u)$$

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{m+M}u \qquad \Delta v = v_2 - v_1 = \frac{m}{m+M}u$$



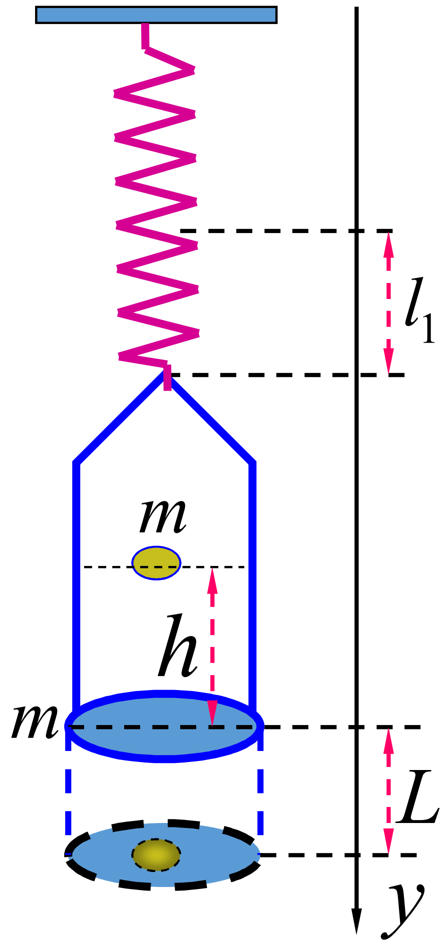
$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{m}{m+M} u$$

$$\Delta x = \Delta v \cdot t$$

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\Delta x = \frac{m}{m+M} u \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

例 一轻弹簧悬挂一金属盘，弹簧长 $l_1 = 10\,\text{cm}$
一个质量和盘相同的泥球，从高于盘 $h = 30\,\text{cm}$
处静止下落盘上，求盘向下运动的最大距离 L .



解：本题分为三个过程

1．泥球下落（机械能守恒）

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{2gh}$$

2．泥球与盘碰撞（动量守恒）

$$mv = (m+m)V$$

$$V = v/2 = \sqrt{gh/2}$$

$$V = {}^{v}\!/_{2} = \sqrt{gh/2}$$

3．泥球与盘一块下落（机械能守恒）

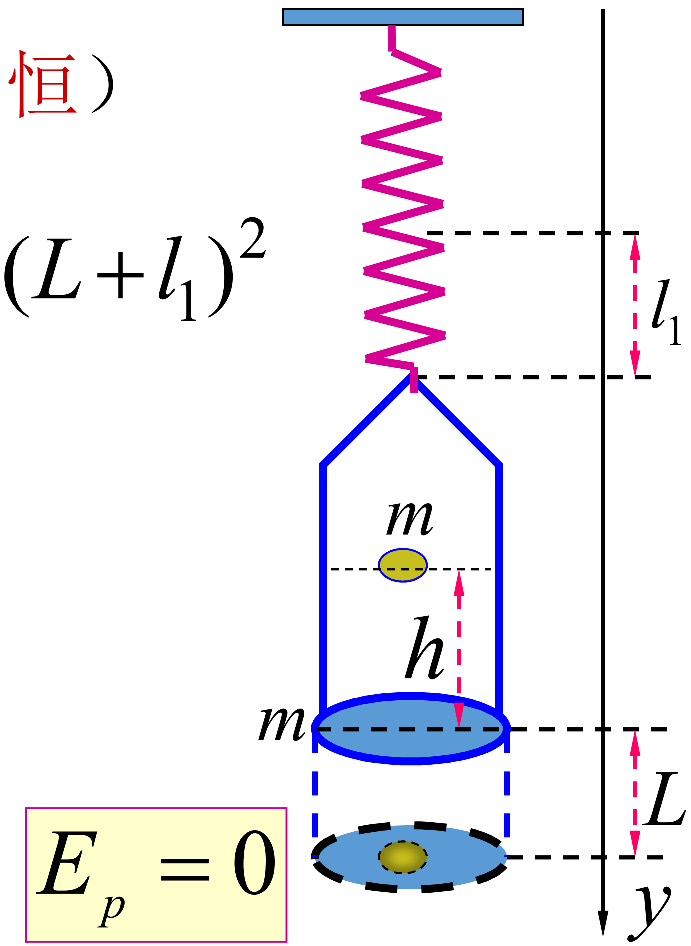
$$\frac{1}{2}(2m)V^2 + (2m)gL + \frac{1}{2}kl_1^2 = \frac{1}{2}k(L+l_1)^2$$

$$k = mg/l_1 \qquad V^2 = \frac{1}{2}gh$$

$$L^2 - 20L - 300 = 0$$

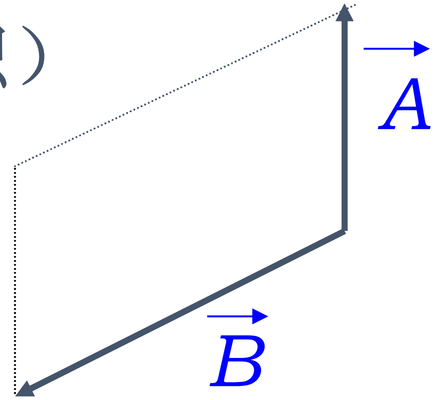
$$L = 30, \quad -10$$

$$\therefore L = 30\text{cm}$$



补充：矢量的矢积（叉积、外积）

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ 是一个矢量

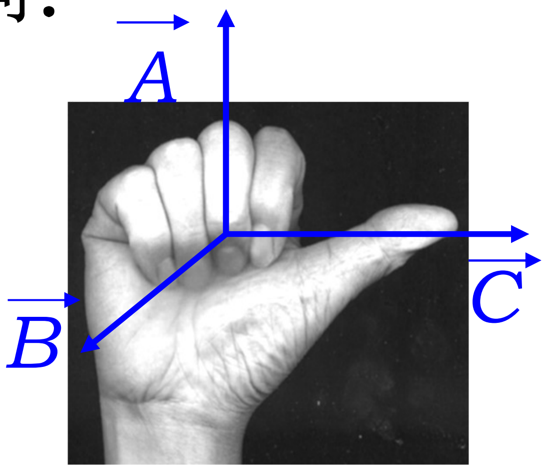


大小：平行四边形面积

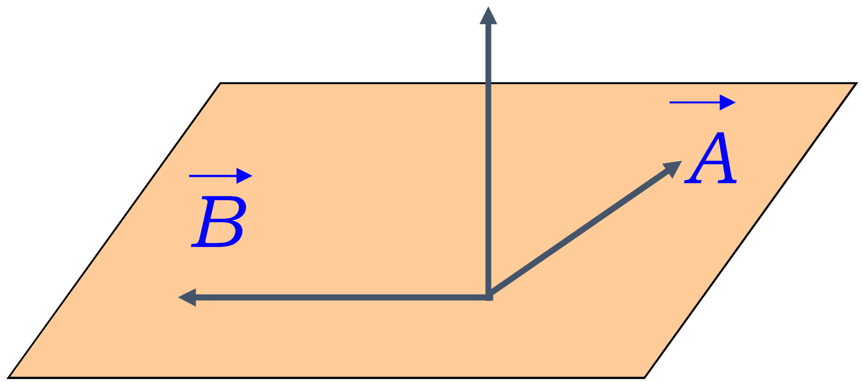
$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\ \sin\ \theta$$

$$(0<\theta<\pi)$$

方向：



右手螺旋前进

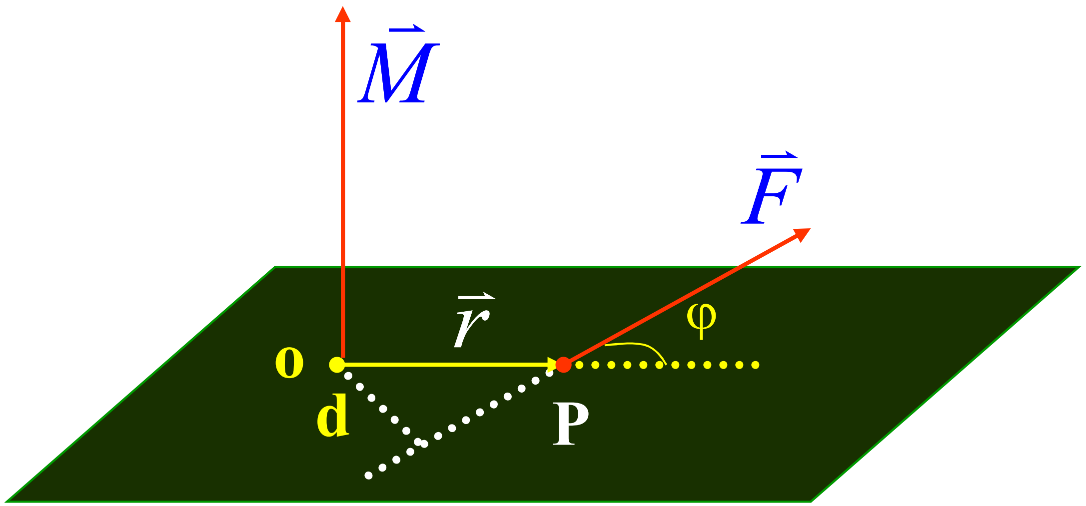


若 $\vec{A}\times\vec{B}=0$ 则 $\begin{cases}\vec{A}=0\\ \vec{B}=0\\ \vec{A}\ //\ \vec{B}\end{cases}$

4-6 质点的角动量定理

一、力矩

对定点的力矩



0 参考原点

$\vec{F}$ 作用力

P 力的作用点

$\vec{r}$ 作用点位矢

作用力 $\vec{F}$ 对参考原点o的力矩定义为：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

单位：N·m

力矩的大小： $M = Fr\sin\varphi$

力矩的方向： **位矢 $\vec{r}$ 与作用力 $\vec{F}$ 的矢积方向**

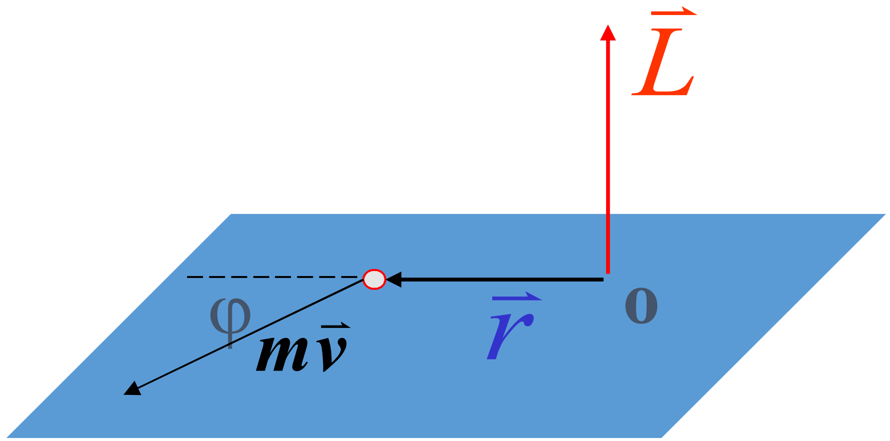
力臂： **作用力线到参考点o的垂直距离**（d=rsinφ）

二、质点的角动量

0　参考原点

$\vec{r}$　质点的位矢

$m\vec{v}$　质点的动量



运动质点对参考原点O的角动量 (动量矩)定义为：

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

$\mathrm{Kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$

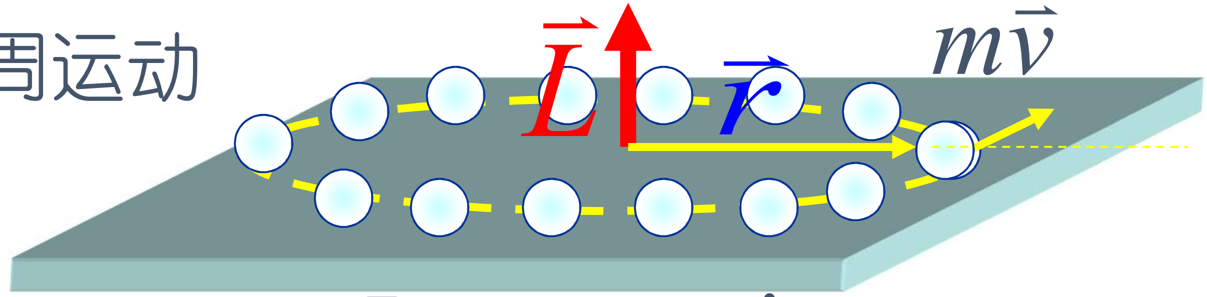
角动量大小：　$L = rp\sin\varphi = mrv\sin\varphi$

角动量的方向：　矢径 $\vec{r}$ 和动量 $m\vec{v}$ 的矢积方向

注意

★角动量的定义并没有限定质点只能作曲线运动,不能作直线运动。

质点作圆周运动

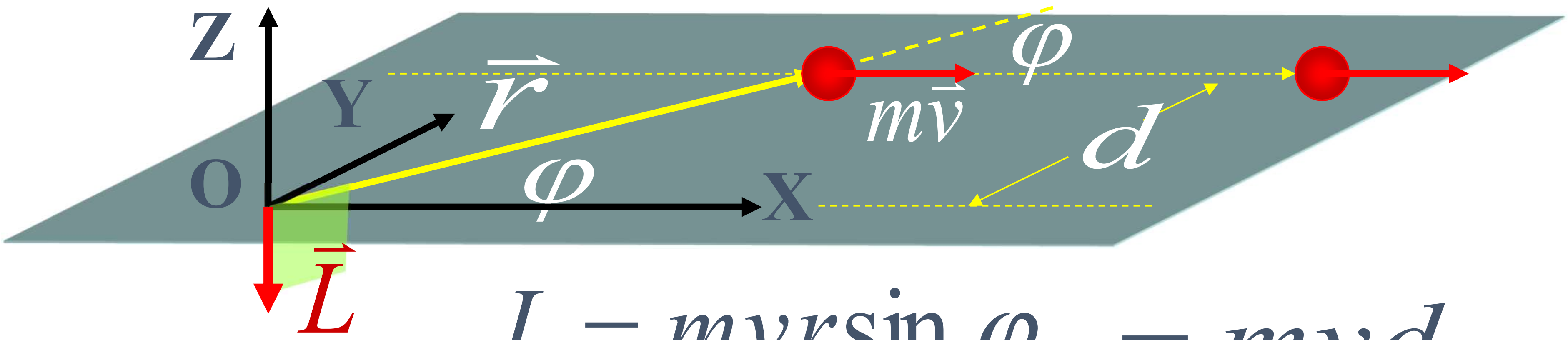


$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L = mvr\sin\varphi$$

$$= mvr = m\omega r^2$$

质点作直线运动



$$L = mvr\sin\varphi \quad = mvd$$

三、质点的角动量定理

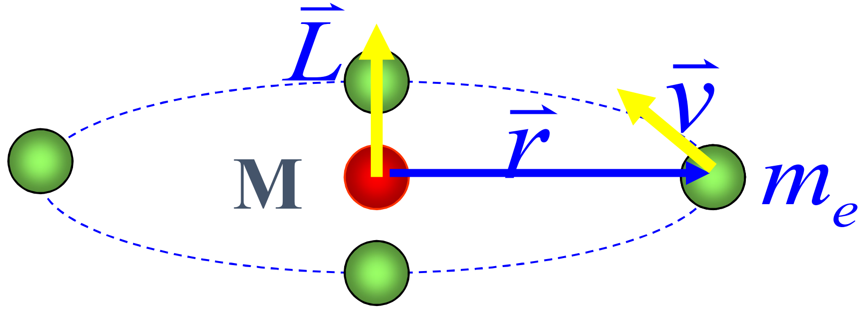
按角动量的定义： $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

两边对时间求导： $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

角动量定理： 质点所受的合力矩就等于角动量对时间的变化率。

例：计算氢原子中电子绕原子核作圆周运动时的角动量。



已知：$m_e = 9.1\times10^{-31}kg$

$r = 5.29\times10^{-11}m$

$\omega = 4.13\times10^{16}s^{-1}$

求：$\vec{L}$

解：以原子核为参考点 $\because \vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$

$$\therefore L = rmv = rm(r\omega) = mr^2\omega$$

$$= 9.11\times10^{-31}\times(5.29\times10^{-11})^2\times4.13\times10^{16}$$

$$= 1.05\times10^{-34}(kgm^2s^{-1})$$

此值为狄拉克常数: $\boxed{\hbar = h/2\pi}$

三、角动量守恒定理

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{常矢量}$$

条件： $\vec{M} = 0$

角动量守恒定律：

如果对于某一定点o，质点所受的合力矩为零，则此质点对该定点的角动量保持不变。

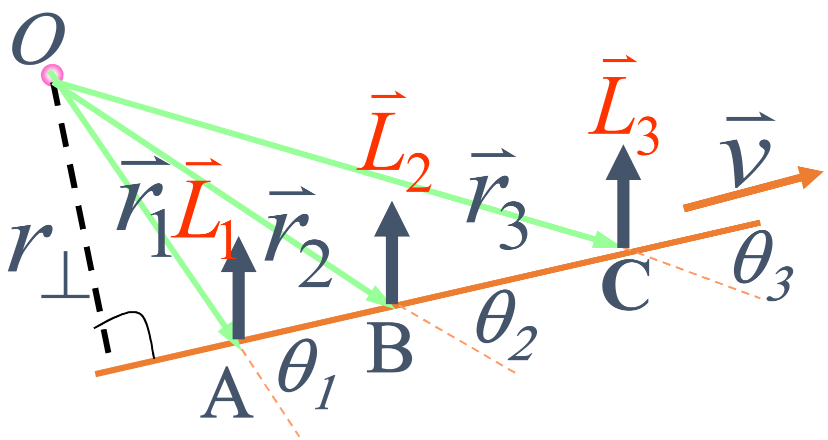
讨论

什么情况下力矩可能等于零？ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

1) $\vec{r} = 0$ 表示质点处于参考点上静止不动。

2) $\vec{F} = 0$ 表示所讨论的质点是孤立质点。

孤立质点的动量守恒，角动量也守恒



角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

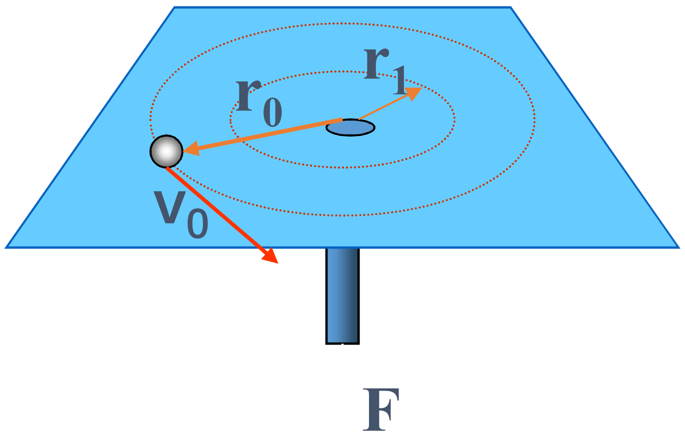
$$L_1 = r_1 m v \sin\theta_1$$
$$L_2 = r_2 m v \sin\theta_2$$
$$L_3 = r_3 m v \sin\theta_3$$

显然，$L_1 = L_2 = L_3 = r_\perp m v$

3) $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ 表示***r***与***F***平行或反平行，其夹角为**0**或π。

例1、 质量为m的小球系在绳子的一端，绳穿过铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以速度v_0绕管心作半径为r_0的圆周运动，然后向下拉绳子，使小球运动半径变为r_1。求小球的速度。

解： 角动量守恒

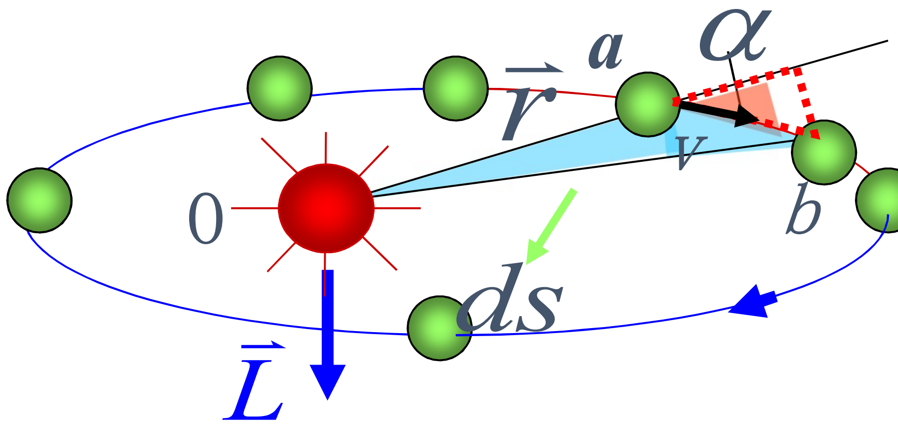


$$mv_0r_0 = mv_1r_1$$

$$v_1 = v_0 \cdot \frac{r_0}{r_1}$$

例2、用角动量守恒定律导出开普勒第二定律

-- 行星单位时间内扫过的面积相等。



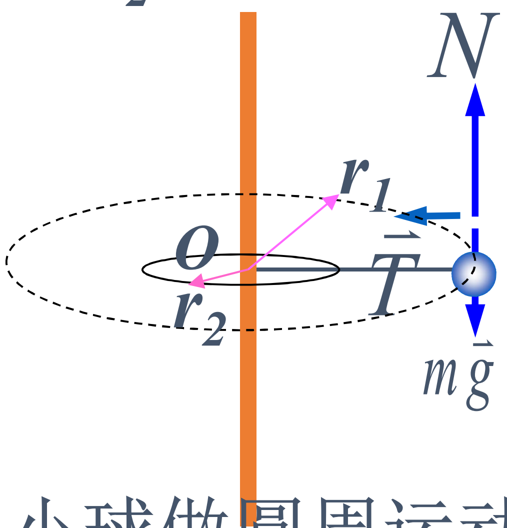
解：由于引力是向心力，故行星受到的对太阳的力矩为零，行星运动过程中角动量守恒。

设:行星质量为m，行星绕太阳运动, 在dt 时间内，从a点运动到b点，其速率为v。

则：$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)=m(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt})=m(\frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{dt})$

$\because dS=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right| \quad \therefore L=\frac{2mdS}{dt} \quad dS/dt=\frac{L}{2m}=$恒量

例3、质量为m的小球系于细绳的一端，绳的另一端缚在一根竖直放置的细棒上。小球被约束在水平面内绕细棒旋转，某时刻角速度为w_1，细绳长度为r_1。当旋转了若干圈后，由于细绳缠绕在细棒上，绳长度变为r_2，求此时小球绕细棒旋转的角速度w_2。



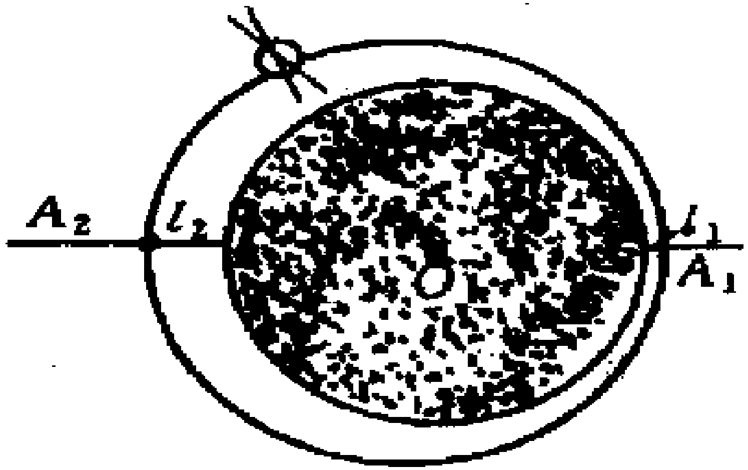
解：根据角动量守恒 $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$

小球做圆周运动，对圆点O的角动量大小为 $L = rmv$

$$\therefore mr_1v_1 = mr_2v_2 \xrightarrow{v=\omega r} mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

由此得到： $\omega_2 = \left(r_1/r_2\right)^2\omega_1$

例4　我国第一颗人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动，地球的中心O 为该椭圆的一个焦点。已知地球的平均半径$R = 6378$ km，人造卫星距地面最近距离 $l_1 = 439$km，最远距离$l_2 = 2384$ km。若人造卫星在近地点A_1 的速度$v_1 = 8.10$km / s，求人造卫星在远地点A_2 的速度。



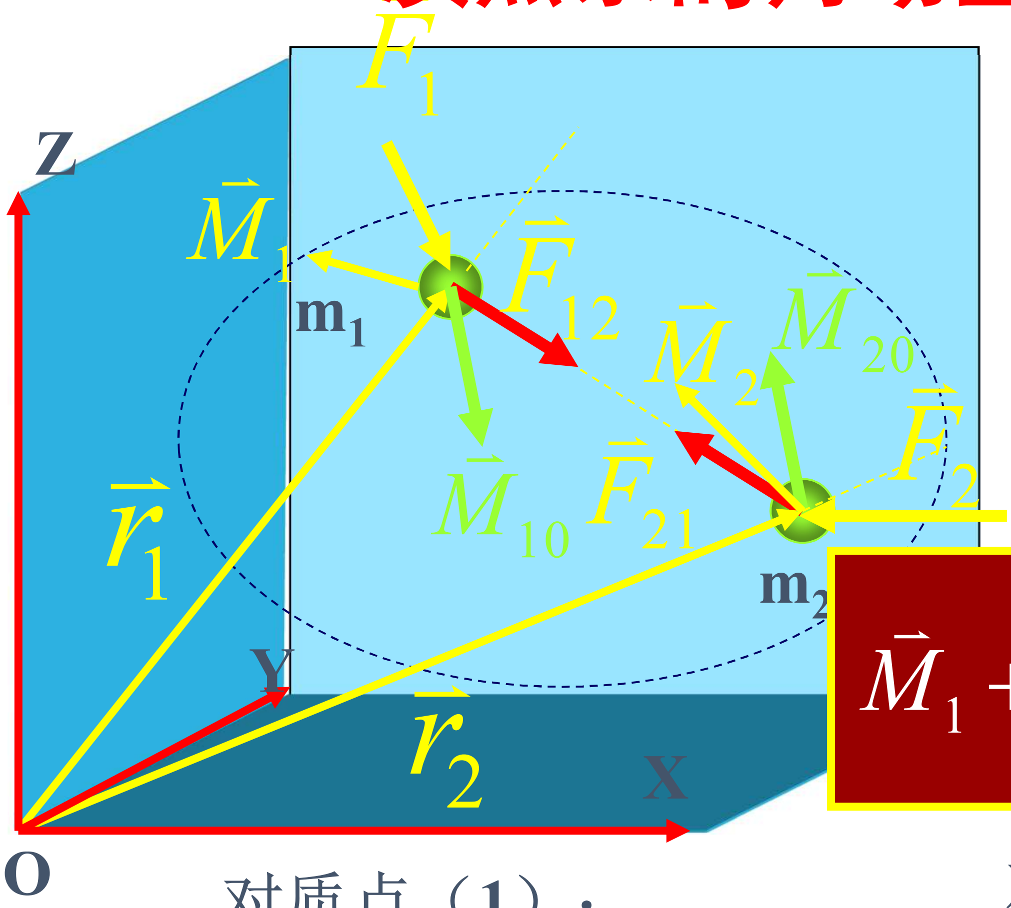
解　人造卫星在运动中受地球的引力（有心力）作用，此力对地心不产生力矩，人造卫星对地心的角动量守恒。故

$$mv_1(R + l_1) = mv_2(R + l_2)$$

解得

$$v_2 = v_1 \frac{R + l_1}{R + l_2} = 6.30\,\text{km/s}$$

4-7 质点系的角动量守恒定理



（以两个质点为例）

如图设有质点m_1、m_2

分别受外力 $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$

外力矩 $\vec{M}_1 . \vec{M}_2$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \cdots (4)$$

对质点（1）：

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_{10} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} \cdots (1)$$

对

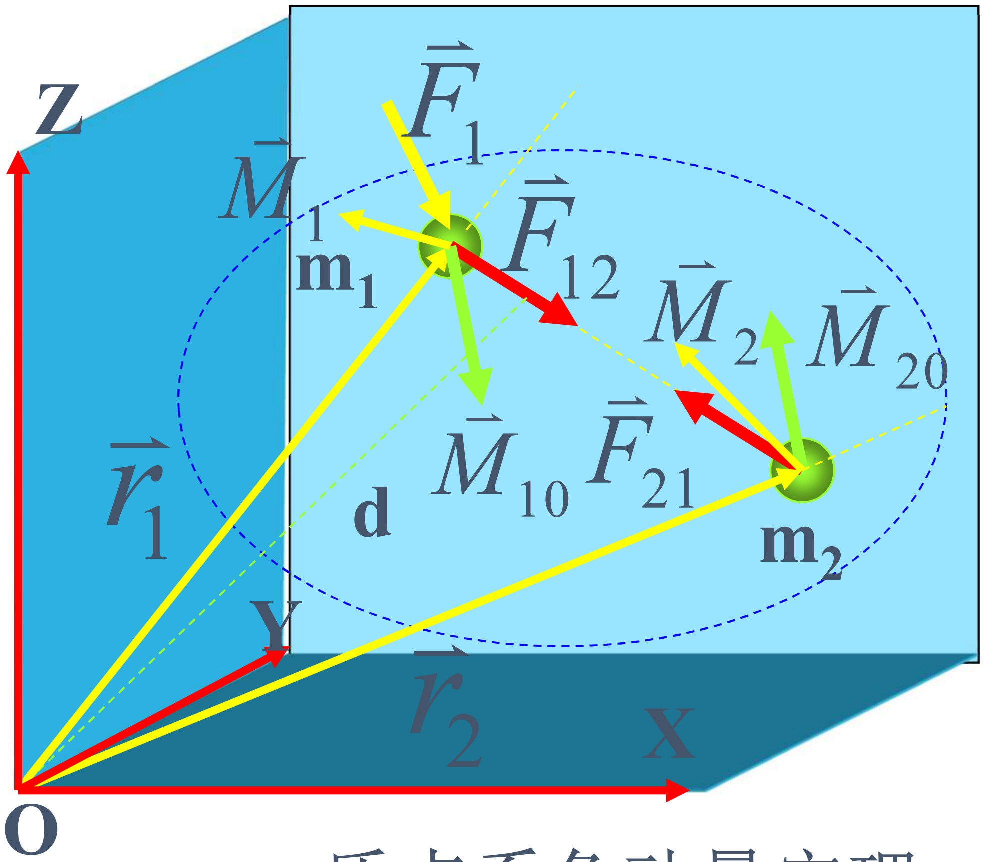
内力矩

$$\vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} = 0$$

两式相加：

$$\vec{M}_1 + \underline{\vec{M}_{10}} + \vec{M}_2 + \underline{\vec{M}_{20}} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \cdots (3)$$

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2=\frac{d}{dt}(\vec{L}_1+\vec{L}_2)\cdots(4)$$



令： $\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2$

质点所受的合外力矩

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$

质点系的总角动量

则：

$$\boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\cdots(4)}$$

推广到**n**个质点的质点系

质点系角动量定理：系统角动量对时间的变化率等于系统所受合外力矩。

质点系的角动量定理 $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

对一个质点系而言，若 $\vec{M}_{合外力矩} = 0$

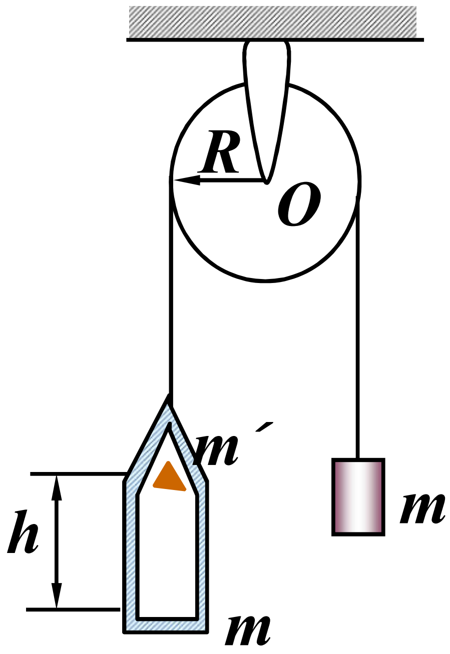
则： $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = 恒矢量$

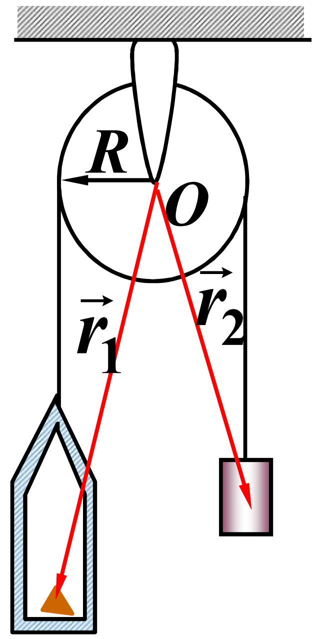
角动量守恒定律：对某一固定点，系统所受合外力矩为零时，系统对该固定点的角动量矢量保持不变。

说明

角动量守恒定律是宇宙中普遍成立的定律，无论在宏观还是微观领域中都成立。

例5：装置如图所示. 滑轮两边悬挂的重物与盘的质量相同而处于平衡，现有距盘底高为h质量为m'的胶泥自由下落，求胶泥粘在盘上时，盘获得的初速度. 滑轮和绳质量不计. 不计轴承摩擦及绳的伸长.





[解]胶泥自由下落至盘面的速度为$v_0=\sqrt{2gh}$. 将盘、重物和胶泥视为质点系，绳的拉力及物体所受重力为外力. 因不计滑轮、绳质量及轴承摩擦，两边绳的拉力相等；重物与盘所受重力也相等. 它们对轴心O的力矩之和为零，故质点系所受外力对O点的力矩之和就等于胶泥的重力矩，不等于零. 但在碰撞时，胶泥与盘之间的碰撞内力对O点的力矩远大于外力矩之和，即内力矩对质点系内各质点运动的影响远大于外力矩的影响. 讨论质点系内各质点的运动时，可不计外力矩。故在碰撞时，可用质点系对O轴角动量守恒方程求近似解. 取垂直纸面朝向读者的方向为O轴正方向，有

$$R(m'+m)v_1+Rmv_2=Rm'v_0$$

绳不伸长，故 $v_1=v_2=v$

得 $$v=\frac{m'v_0}{2m+m'}$$

将 v_0 代入，得 $$v=\frac{m'\sqrt{2gh}}{2m+m'}$$

本题也可以利用对点的角动量守恒求解。