一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

二、伯努利方程

一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为**齐次方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**非齐次方程**.

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln y=-\int P(x)\,\mathrm{d}x+\ln c$

故通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)u\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)\,u\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

例1　　求方程 $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解　$P(x) = \frac{1}{x}$,　　$Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\ln x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \sin x dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(-\cos x + C \right).$$

例2. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解: 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln y=2\ln(x+1)+\ln c$， 即 $y=C(x+1)^2$

用**常数变易法**求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$, 则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例3. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 x, y 同号, 当 $x>0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\,\mathrm{d}\sqrt{x}$, 故方程可

变形为 $$2\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\frac{\sqrt{x}}{y}=-\frac{2}{\sqrt{y}}$$

这是以$\sqrt{x}$为因变量, y为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程**通解公式**, 得

$$\sqrt{x}=\underline{e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\left[\int-\frac{1}{\sqrt{y}}\,\underline{e^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\,\mathrm{d}y+\ln c\right]$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln c\right]=\sqrt{y}\ln\frac{c}{y}$$

所求通解为 $$y\,e^{\sqrt{x/y}}=C\ (C\neq 0)$$

二、伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^n 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例4. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ \ln x$$

其通解为 $$z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$y\,x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2　用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$，化为线性方程求解.

思考与练习

判别下列方程类型:

提示:

(1) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $\longrightarrow$ $\frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}y^2$ 伯努利方程

备用题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$