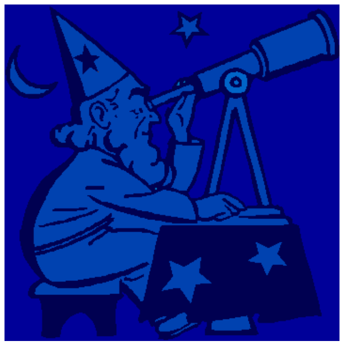
可降阶高阶微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、$y'' = f(\boxed{x}, y')$ 型的微分方程



三、$y'' = f(\boxed{y}, y')$ 型的微分方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $\boxed{z = y^{(n-1)}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$,因此

$$z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

即 $$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx + C_1'$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$ ）

例2　求方程 $y''' = \ln x$ 的通解。

解　对方程两边关于x连续积分3次，得到所求的通解：

$$y'' = \int \ln x \, \mathrm{d}x = x\ln x - x + C_1,$$

$$y' = \int (x\ln x - x + C_1) \, \mathrm{d}x$$

$$= x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left[x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) + C_1 x + C_2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \text{。}$$

例3　求方程 $y^{(n)}=1$ 的通解。

解　对方程两边关于 x 连续积分 n 次，得到所求的通解：

$$y^{(n-1)}=x+C_1\,,$$

$$y^{(n-2)}=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\,,$$

$$y^{(n-3)}=\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2!}C_1x^2+C_2x+C_3\,,$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$y'=\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}C_1x^{n-2}+\cdots+C_{n-2}x+C_{n-1}\,,$$

$$\boxed{y=\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n-1)!}C_1x^{n-1}+\cdots+C_{n-1}x+C_n\,。}$$

二、 $y'' = f(\boxed{x}, y')$ 型的微分方程

设 $\boxed{y' = p(x)}$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例4. 求解 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 3 \end{cases}$

解: 设 $y' = p(\boxed{x})$, 则 $y'' = p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p' = 2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$, 于是有 $y' = 3(1+x^2)$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y\big|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

例5 求方程 $x y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解。

解 令 $\boxed{p = y^{(4)}}$，则原方程化为

$$x \frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} x} - p = 0,$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d} p}{p} = \frac{\mathrm{d} x}{x},$$

积分，得

$$y^{(4)} = p = Cx,$$

$\boxed{y^{(n)} = f(x)\text{型}}$

连续积分 4 次，得原方程的通解为

$$y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5, \quad (C_1 = \frac{C}{120})。$$

三、$y'' = f(\boxed{y}, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(\boxed{y})$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\boxed{\mathrm{d}x}} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\cancel{\mathrm{d}y}} \cdot \dfrac{\cancel{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例6. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$$\therefore \quad y' = C_1 y$$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

   逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

   令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

   令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$