

一阶微分方程的 解法及应用

一、一阶微分方程求解

二、解微分方程应用问题

微分方程基本概念

微分方程 凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

微分方程的阶 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

通解 如果微分方程的解中含有任意常数，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解。

特解 确定了通解中的任意常数以后得到的解，叫做微分方程的特解。

初始条件 用来确定任意常数的条件。

初值问题 求微分方程满足初始条件的解的问题，叫初值问题。

一、一阶微分方程求解

1. 一阶标准类型方程求解

四个标准类型: 可分离变量方程, 齐次方程,
线性方程, 全微分方程

关键: 辨别方程类型, 掌握求解步骤

2. 一阶非标准类型方程求解

(1) 变量代换法 —— **代换自变量**
代换因变量
代换某组合式

(2) 积分因子法 —— 选积分因子, 解全微分方程

一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

分离变量法

(2) 齐次方程 形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

解法 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$

(3) 可化为齐次的方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$

当 $c = c_1 = 0$ 时，齐次方程. 否则为非齐次方程.

解法 令 $x = X + h,$
 $y = Y + k,$ 化为齐次方程.

(其中 h 和 k 是待定的常数)

(4) 一阶线性微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

当 $Q(x) \equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当 $Q(x) \not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

(使用分离变量法)

非齐次微分方程的通解为

$$y = [\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C] e^{-\int P(x) dx}$$

(常数变易法)

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

当 $n = 0, 1$ 时， 方程为线性微分方程.

当 $n \neq 0, 1$ 时， 方程为非线性微分方程.

解法 需经过变量代换化为线性微分方程.

$$\text{令 } z = y^{1-n},$$

$$\begin{aligned}y^{1-n} &= z \\&= e^{-\int(1-n)P(x)dx} \left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx} dx + C \right).\end{aligned}$$

(6) 全微分方程

形如 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

其中 $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

注意： 全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

解法 (a) 应用曲线积分与路径无关.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \\ &= \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx, \end{aligned}$$

通解为 $u(x, y) = C$.

(b) 用直接凑全微分的方法.

(7) 可化为全微分方程

形如 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

非全微分方程 $(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x})$.

若 $\mu(x, y) \neq 0$ 连续可微函数，且可使方程
 $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$ 成为全
微分方程。则称 $\mu(x, y)$ 为方程的**积分因子**。

(a)公式法：

$$\text{若 } \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x) \quad \text{则 } \mu(x) = e^{\int f(x) dx};$$

$$\text{若 } \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = g(y) \quad \text{则 } \mu(y) = e^{\int g(y) dy}.$$

(b)观察法：

熟记常见函数的全微分表达式，通过观察直接找出积分因子。

常见的全微分表达式

$xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$	$\frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln xy)$
$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right)$	
$\frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = d\left(\frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y}\right)$	

可选用积分因子 $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2 y^2}$, $\frac{1}{x^2 + y^2}$, $\frac{x}{y^2}$, $\frac{y}{x^2}$ 等.

例1. 求下列方程的通解

$$(1) y' + \frac{1}{y^2} e^{y^3+x} = 0; \quad (2) xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

$$(3) y' = \frac{1}{2x - y^2}; \quad (4) y' = -\frac{6x^3 + 3xy^2}{3x^2y + 2y^3}.$$

提示: (1) 因 $e^{y^3+x} = e^{y^3} e^x$, 故为分离变量方程:

$$-y^2 e^{-y^3} dy = e^x dx$$

通解

$$\frac{1}{3} e^{-y^3} = e^x + C$$

$$(2) xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

方程两边同除以 x 即为齐次方程，令 $y = ux$, 化为分离变量方程.

$$x > 0 \text{ 时}, y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \rightarrow xu' = \sqrt{1 - u^2}$$

$$x < 0 \text{ 时}, y' = -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \rightarrow xu' = -\sqrt{1 - u^2}$$

$$(3) y' = \frac{1}{2x - y^2}$$

调换自变量与因变量的地位，化为 $\frac{dx}{dy} - 2x = -y^2$ ，
用线性方程通解公式求解 .

$$(4) \quad y' = -\frac{6x^3 + 3xy^2}{3x^2y + 2y^3}$$

方法 1 这是一个齐次方程 . 令 $u = \frac{y}{x}$

方法 2 化为微分形式

$$(6x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + 2y^3)dy = 0$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

故这是一个全微分方程 .

例2. 求下列方程的通解:

$$(1) xy' + y = y(\ln x + \ln y)$$

$$(2) 2x \ln x dy + y(y^2 \ln x - 1) dx = 0$$

$$(3) y' = \frac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$$

$$(4) y^2(x - 3y) dx + (1 - 3xy^2) dy = 0$$

提示: (1) 原方程化为 $(xy)' = y \ln(xy)$

令 $u = xy$, 得 $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \ln u$ (分离变量方程)

(2) 将方程改写为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x \ln x} y = -\frac{y^3}{2x} \quad (\text{贝努里方程}) \quad \text{令 } z = y^{-2}$$

$$(3) y' = \frac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$$

化方程为 $\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-1)^2 + y^2}{2y(x-1)}$

↓ 令 $t = x - 1$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + y^2}{2ty} \quad (\text{齐次方程})$$

↓ 令 $y = u t$

可分离变量方程求解

$$(4) \quad y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0$$

变方程为 $y^2x dx + dy - 3y^2(ydx + xdy) = 0$

↓ 两边乘积分因子 $\mu = y^{-2}$

$$\underline{x dx + y^{-2} dy} - 3\underline{(ydx + xdy)} = 0$$

用凑微分法得通解:

$$\frac{1}{2}x^2 - y^{-1} - 3xy = C$$

例3. 设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 0$, $f(x) + g(x) = 2e^x$.

- (1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;
- (2) 求出 $F(x)$ 的表达式. (03考研)

解: (1) $\because F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned} &= g^2(x) + f^2(x) \\ &= [g(x) + f(x)]^2 - 2f(x)g(x) \\ &= (2e^x)^2 - 2F(x) \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 满足的一阶线性非齐次微分方程:

$$F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}$$

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-\int 2 \, dx} \left[\int 4e^{2x} \cdot e^{\int 2 \, dx} \, dx + C \right] \\ &= e^{-2x} \left[\int 4e^{4x} \, dx + C \right] \\ &= e^{2x} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

将 $F(0) = f(0)g(0) = 0$ 代入上式, 得 $C = -1$

于是 $F(x) = e^{2x} - e^{-2x}$