

齐次方程

一、齐次方程

二、可化为齐次方程

一、齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程叫做**齐次方程** .

解法: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$

分离变量: $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$

两边积分, 得 $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 代入原方程得

$$u + xu' = u + \tan u$$

分离变量 $\frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{dx}{x}$

两边积分 $\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{dx}{x}$

得 $\ln \sin u = \ln x + \ln c$, 即 $\sin u = Cx$

故原方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx$ (C 为任意常数)
(当 $C = 0$ 时, $y = 0$ 也是方程的解)

例2. 解微分方程 $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

解: 方程变形为 $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$u + xu' = 2u - u^2$$

分离变量 $\frac{du}{u^2 - u} = -\frac{dx}{x}$ 即 $(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})du = -\frac{dx}{x}$

积分得 $\ln \frac{u-1}{u} = -\ln x + \ln c$, 即 $\frac{x(u-1)}{u} = C$

代回原变量得通解 $x(y-x) = Cy$ (C 为任意常数)

说明: 显然 $x=0$, $y=0$, $y=x$ 也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

例3 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ 令 $u = \frac{y}{x}$ 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

代入化简 并分离变量 $\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{1}{x} dx$

两边积分 $\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x + \ln c$

换回原变量 $\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{y^2}{x^2}) = \ln x + \ln c$

或 $e^{\arctan \frac{y}{x}} = c \sqrt{x^2 + y^2}$

二、可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x = X + h, y = Y + k$ (h, k 为待定常数), 则 $dx = dX, dy = dY$, 原方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

$$\downarrow \text{令} \begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}, \text{解出 } h, k$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y} \quad (\text{齐次方程})$$

求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \quad (b \neq 0)$$

$$\downarrow \text{令 } v = ax + by, \text{ 则 } \frac{dv}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dv}{dx} = a + b \frac{v + c}{\lambda v + c_1} \quad (\text{可分离变量方程})$$

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

例4. 求解
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6} \\ y|_{x=2} = -5 \end{cases}$$

解: 令
$$\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases} \quad \text{得 } h=1, k=-5$$

令 $x = X + 1, y = Y - 5$, 得
$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

再令 $Y = Xu$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dX}{X}$$

积分得
$$\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|CX|$$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan \frac{y+5}{x-1} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{y+5}{x-1} \right)^2 \right] = \ln |C(x-1)|$$

利用 $y|_{x=2} = -5$ 得 $C = 1$, 故所求特解为

$$\arctan \frac{y+5}{x-1} = \frac{1}{2} \ln \left[(x-1)^2 + (y+5)^2 \right]$$

思考: 若方程改为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$, 如何求解?

提示: 令 $v = x + y$.