

例 一弹簧振子沿x轴作简谐振动，已知振动物体最大位移为 $X_m=0.4\text{m}$ ，最大回复力为 $F_m=0.8\text{m}$ ，最大速度为 $V_m=0.8\pi\text{m/s}$ ，若 $t=0$ 时的初位移为 0.2m ，且初速度与所选x轴方向相反。

- (1) 求振动能量。
- (2) 求此振动的表达式。

例 一弹簧振子沿x轴作简谐振动，已知振动物体最大位移为 $X_m=0.4\text{m}$ ，最大回复力为 $F_m=0.8\text{N}$ ，最大速度为 $V_m=0.8\pi\text{m/s}$ ，若 $t=0$ 时的初位移为 0.2m ，且初速度与所选x轴方向相反。

- (1) 求振动能量。
- (2) 求此振动的表达式。

解：(1)由题意 $F_m = kA$, $A = X_m$, $k = \frac{F_m}{X_m}$

$$E = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}F_m X_m = 0.16J$$

(2) $v_m = A\omega$, $\omega = \frac{v_m}{A} = \frac{v_m}{X_m}$

$$\omega = 2\pi\text{rad/s}, \quad v = \omega/2\pi = 1\text{Hz}$$

$$t=0, \quad x_0 = A\cos\phi = 0.2, \quad v_0 = -A\omega\sin\phi < 0, \quad \therefore \phi = \frac{\pi}{3}$$

振动方程为 $x = 0.4\cos(2\pi t + \frac{1}{3}\pi)$ (SI)

第七章 机械波

7-1 机械波的基本概念

- 波动是自然界常见的、重要的物质运动形式
- 波动 —— 振动在空间的传播过程.

经典波 { 机械波 机械振动在弹性介质中的传播.
 电磁波 交变电磁场在空间的传播.

两类波的不同之处

- ❖ 机械波的传播需有传播振动的弹性介质；
- ❖ 电磁波的传播可不需介质。

两类波的共同特征

- 能量传播
- 反射
- 折射
- 叠加性
- 干涉
- 衍射

➤ 波的应用

音响技术：音乐的空间感、环绕感，音乐厅设计.

声纳技术：水中目标的探测、跟踪、通讯、导航等.

超声技术：超声诊断、无创治疗.

通信技术：卫星通信、光纤通信、网络世界.

一 机械波的形成

机械波：机械振动在弹性介质中的传播.（相位的传播）

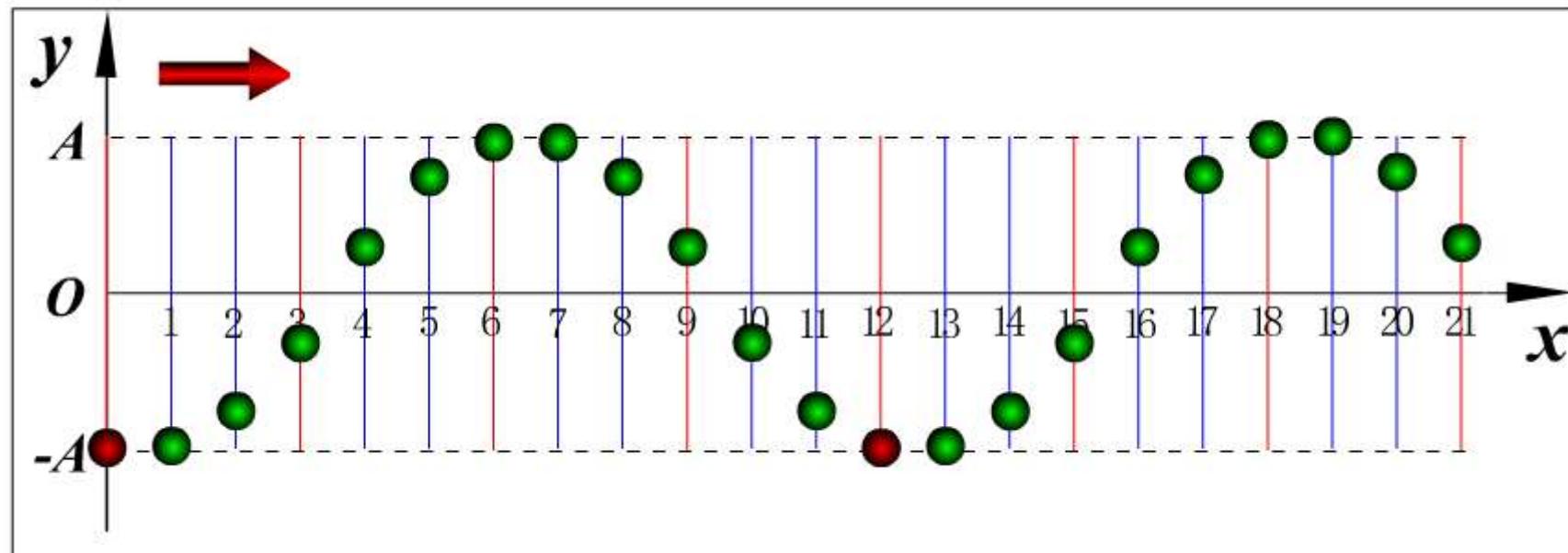
➤ 产生条件：1) 波源；2) 弹性介质.



波是振动运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.

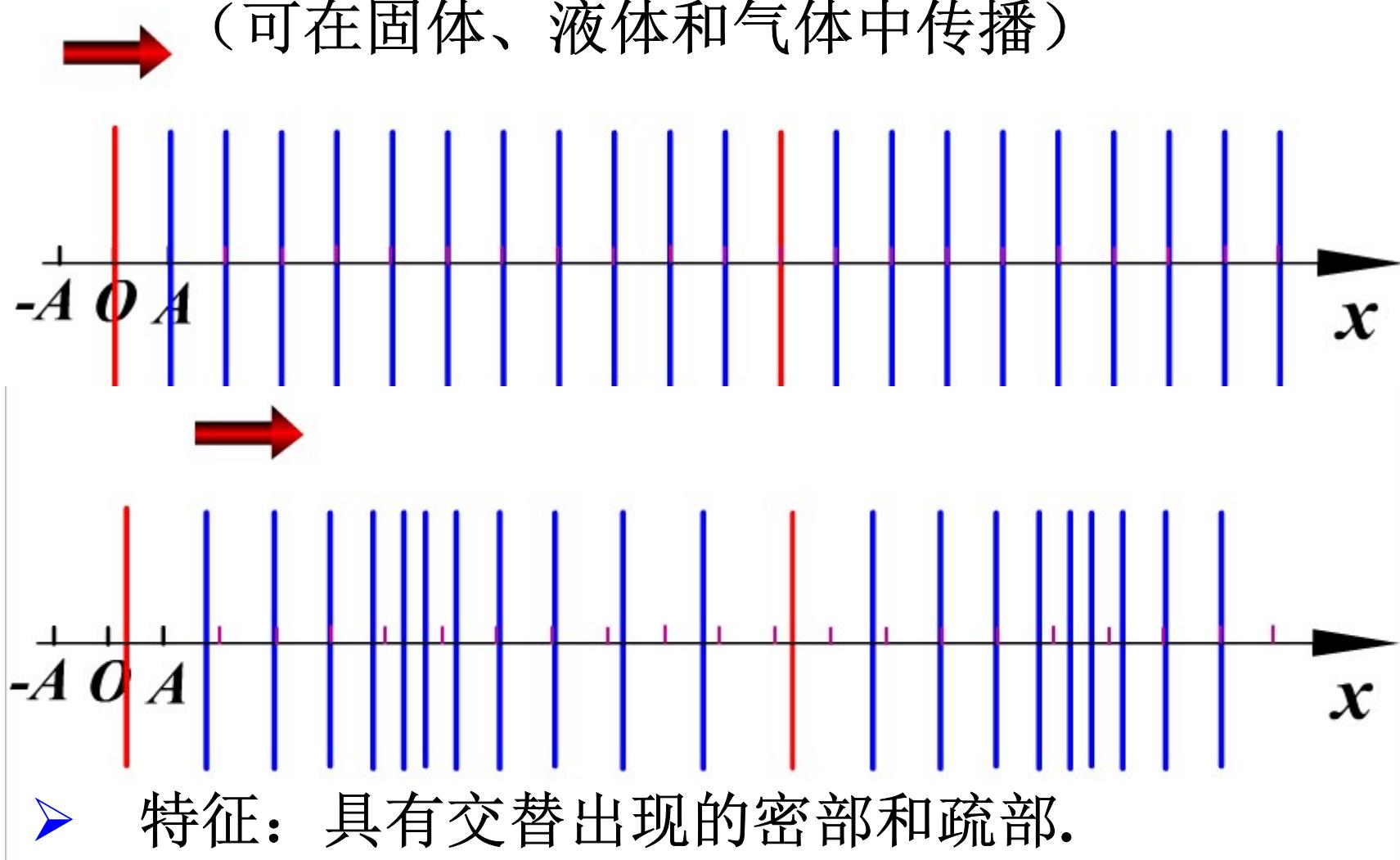
二 横波与纵波

横波：质点振动方向与波的传播方向相**垂直**的波。
(仅在固体中传播)



- 特征：具有交替出现的波峰和波谷。

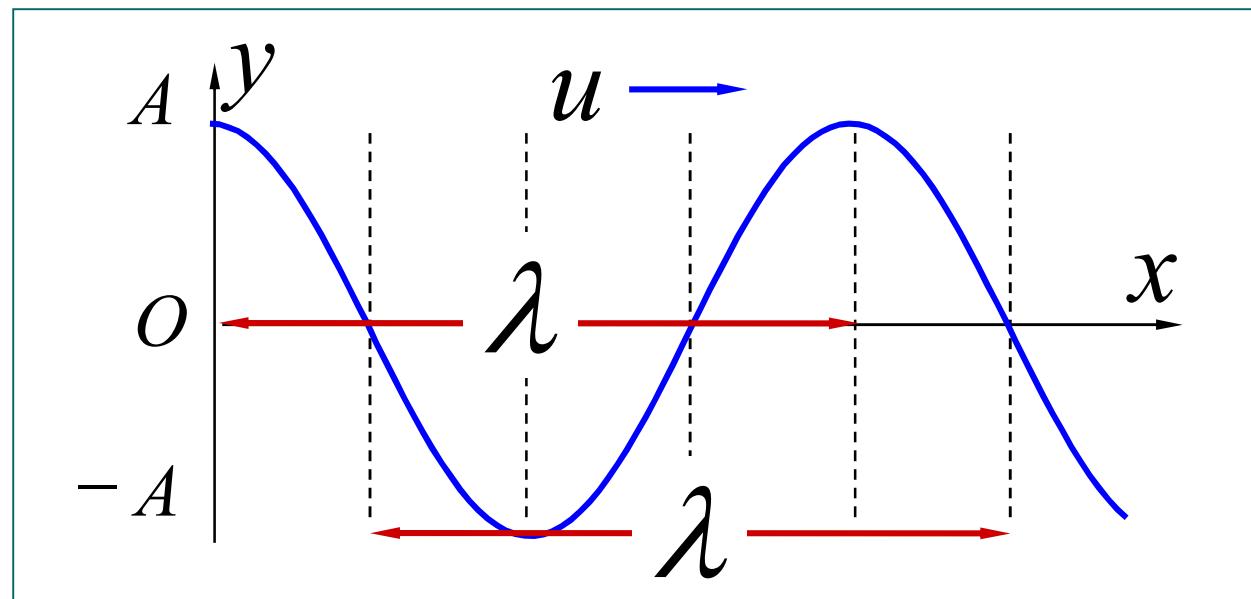
纵波：质点振动方向与波的传播方向互相平行的波。
（可在固体、液体和气体中传播）



➤ 特征：具有交替出现的密部和疏部。

三 波长 波的周期和频率 波速

➤ 波形图： y 表示各质点相对其平衡位置 x 的位移。
(横波和纵波均可用)



■ 波长 λ ：沿波的传播方向，两个相邻的、相位差为 2π 的振动质点之间的距离，即一个完整波形的长度。

■ **周期 T** : 波前进一个波长的距离所需要的时间.

■ **频率 ν** : 周期的倒数, 即单位时间内波动所传播的完整波的数目.

$$\nu = 1/T$$

■ **波速 u** : 波动过程中, 某一振动状态(即振动相位)单位时间内所传播的距离(相速).

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$



周期或频率只决定于波源的振动!
波速只决定于媒质的性质!

波速 u 与介质的性质有关, ρ 为介质的密度.

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \text{ 切变模量} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{横 波} \\ \hline \end{array}$$

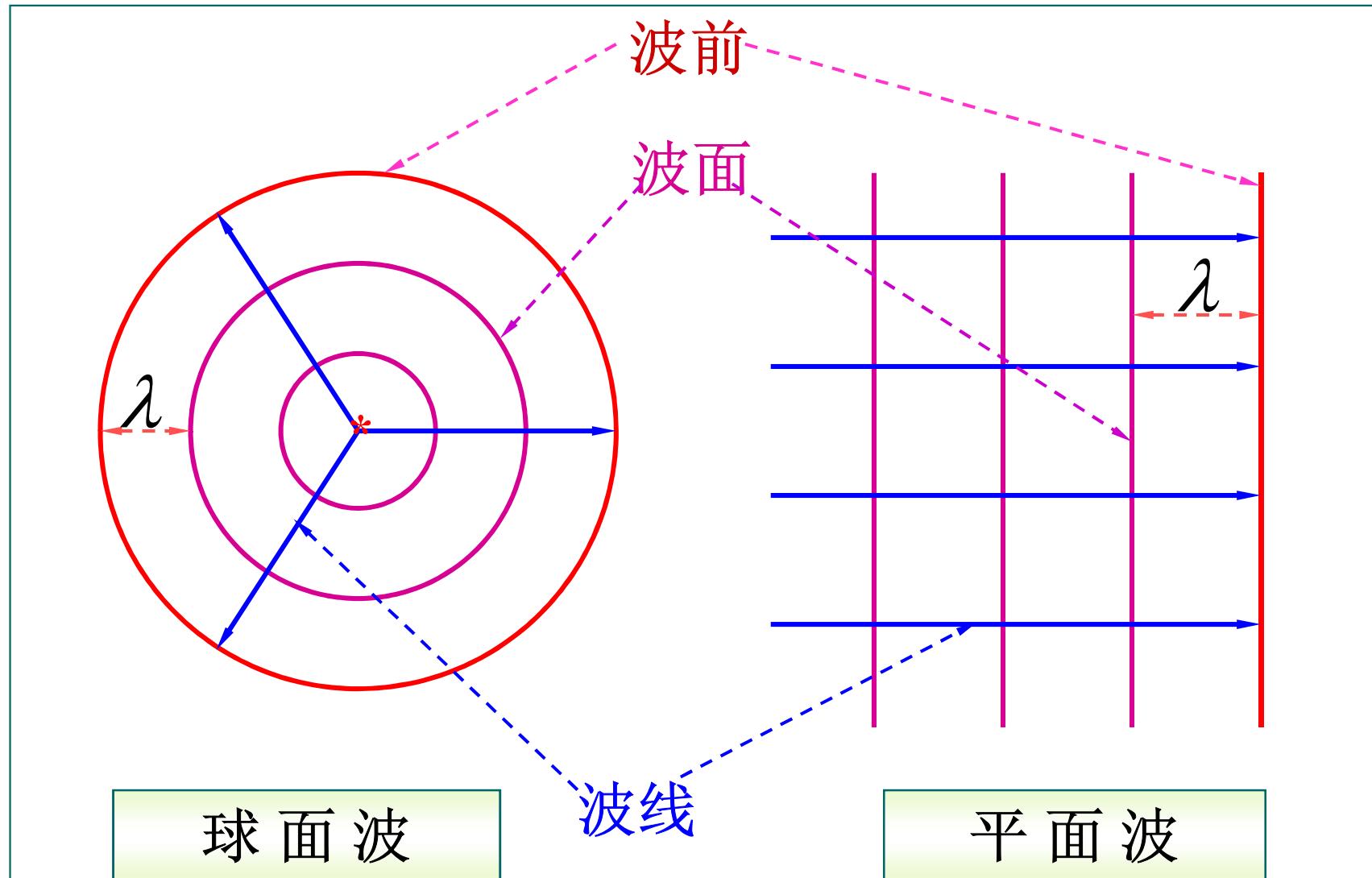
固体

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ 弹性模量} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{纵 波} \\ \hline \end{array}$$
$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \text{ 体积模量}$$

液、气体

如声音的传播速度 $\left\{ \begin{array}{l} 343 \text{ m/s 空气, 常温} \\ 4000 \text{ m/s 左右, 混凝土} \end{array} \right.$

四 波线 波面 波前



例 在室温下，已知空气中的声速 u_1 为 340 m/s，水中的声速 u_2 为 1450 m/s，求频率为 200 Hz 和 2000 Hz 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解 由 $\lambda = \frac{u}{\nu}$ ，频率为 200 Hz 和 2000 Hz 的声波在空气中的波长

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{\nu_1} = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{200 \text{ Hz}} = 1.7 \text{ m} \quad \lambda_2 = \frac{u_1}{\nu_2} = 0.17 \text{ m}$$

在水中的波长

$$\lambda'_1 = \frac{u_2}{\nu_1} = \frac{1450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{200 \text{ Hz}} = 7.25 \text{ m} \quad \lambda'_2 = \frac{u_2}{\nu_2} = 0.725 \text{ m}$$

7-2 平面简谐波的表达式

一 平面简谐波的波函数

介质中任一质点（坐标为 x ）相对其平衡位置的位移（坐标为 y ）随时间的变化关系，即 $y(x, t)$ 称为波函数。

$$y = y(x, t)$$

各质点相对平
衡位置的位移

波线上各质点
平衡位置

- 简谐波：在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波。
- 平面简谐波：波面为平面的简谐波。

各种不同的简谐波

合成
分解

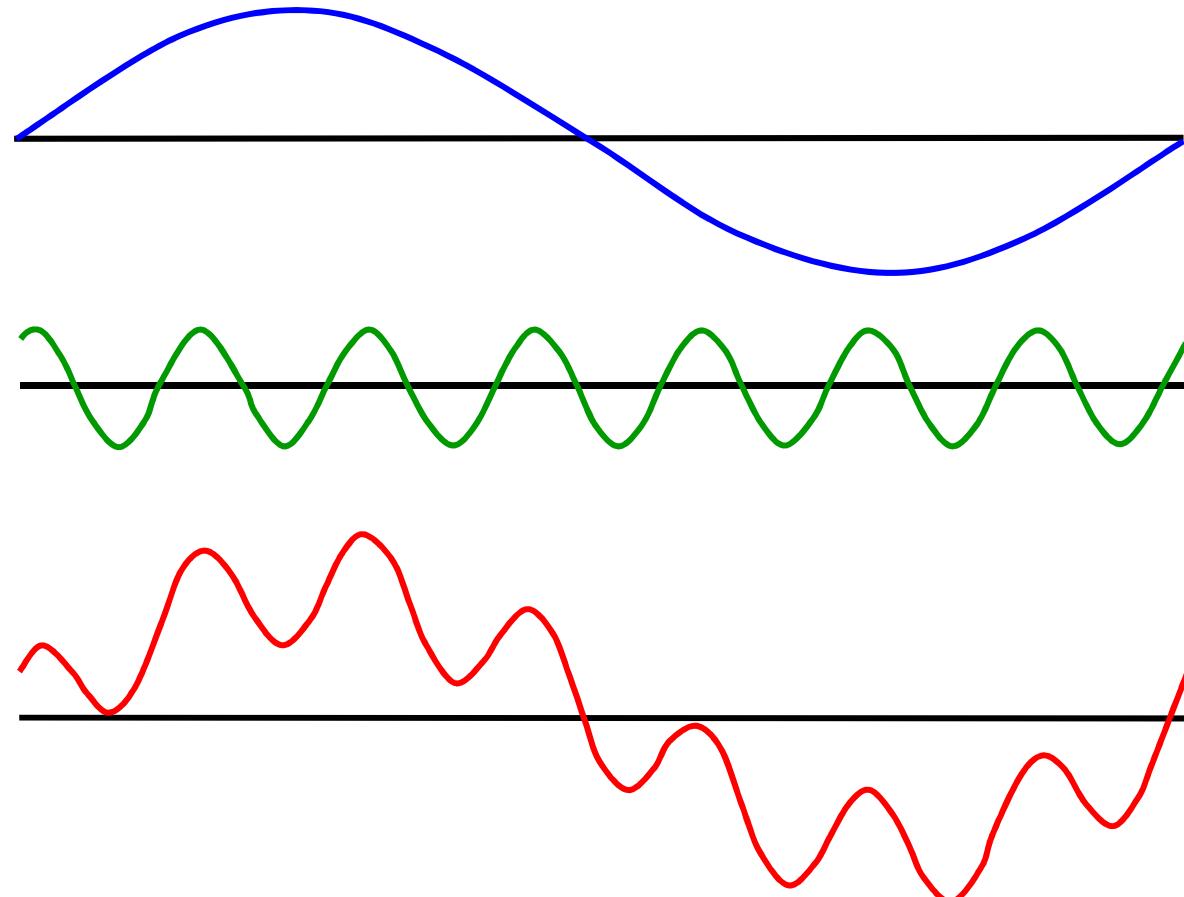
复杂波

简谐波 1

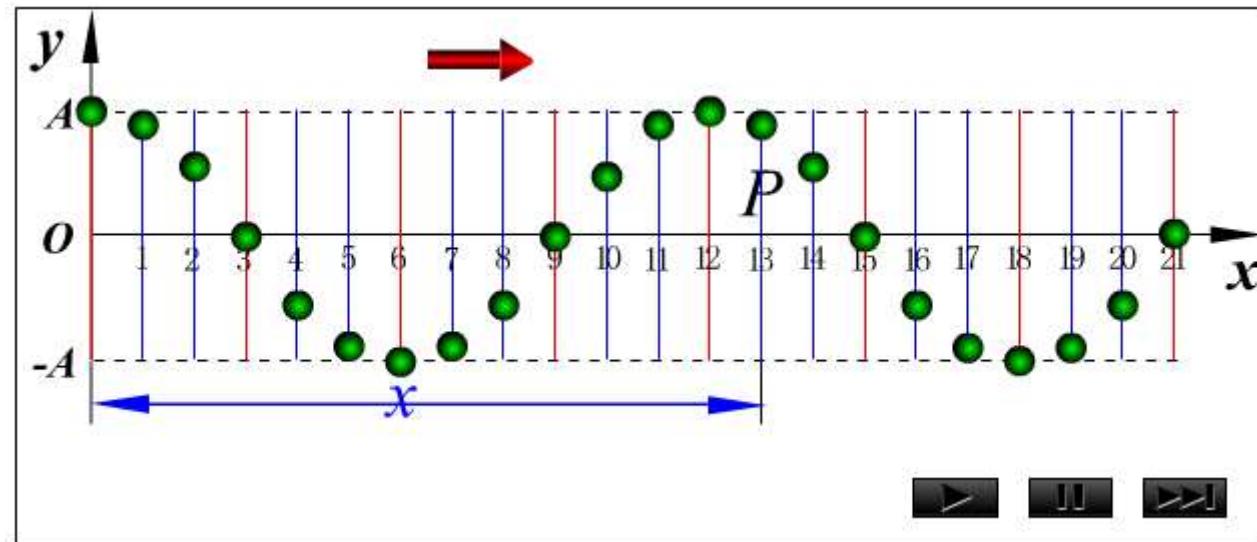
简谐波 2

合成

复杂波



以速度 u 沿 x 轴正向传播的平面简谐波。令原点 O 的初相为零，其振动方程 $y_O = A \cos \omega t$



时间推
迟方法

点 O 的振动状态
 $y_O = A \cos \omega t$

$$\Delta t = \frac{x}{u} \quad \text{点 } P$$

$t-x/u$ 时刻点 O 的运动

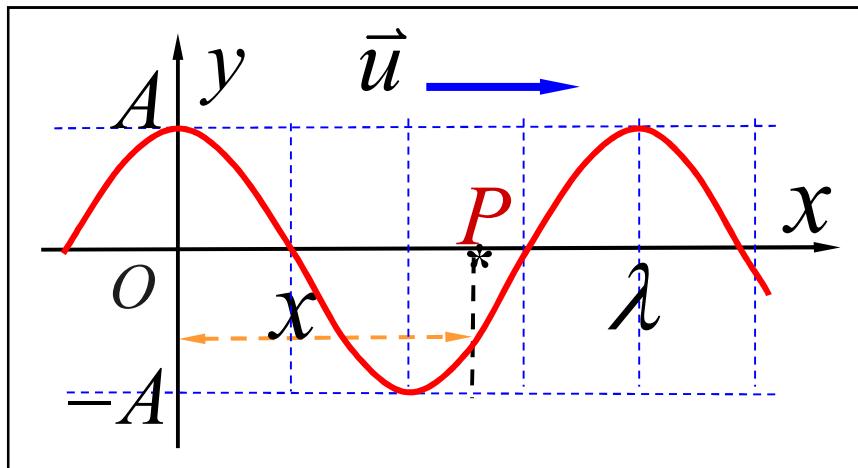
$=$ t 时刻点 P 的运动

$$\text{点 } P \text{ 振动方程 } y_P(t) = y_0(t - \Delta t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$



波函数

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$



相位落后法

点 O 振动方程

$$y_o = A \cos \omega t$$
$$x = 0, \varphi = 0$$

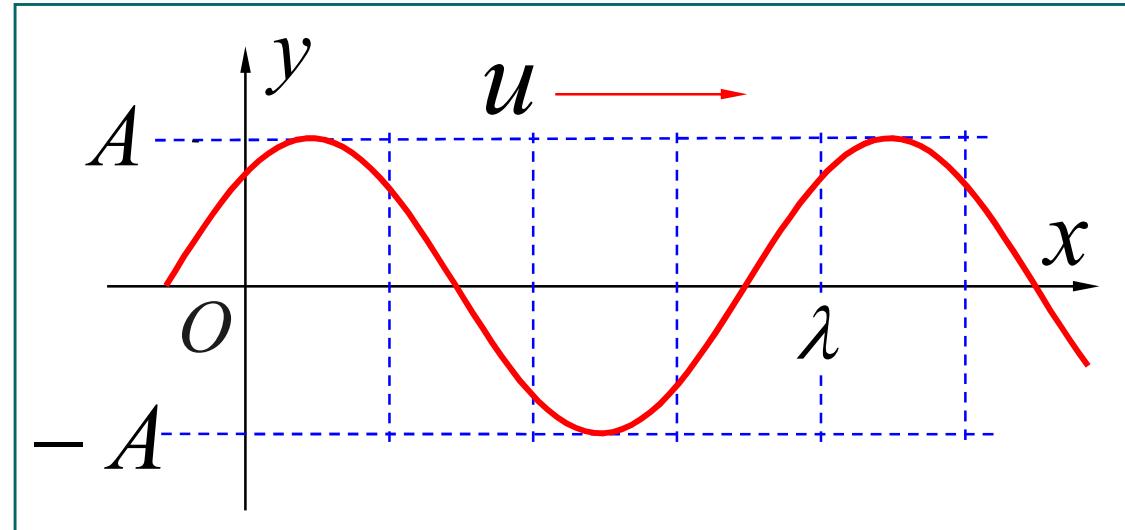
点 P 比点 O 落后的相位 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_o = -2\pi \frac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi \frac{x}{\lambda} = -2\pi \frac{x}{Tu} = -\omega \frac{x}{u}$$

点 P 振动方程

$$y_p = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

如果原点的
初相位不为零
 $x = 0, \varphi \neq 0$



点 O 振动方程 $y_O = A \cos(\omega t + \varphi)$

波函数

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] \quad u \text{ 沿 } x \text{ 轴正向}$$

$$y = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] \quad u \text{ 沿 } x \text{ 轴负向}$$

➤ 平面简谐波波函数的其它形式

$$y(x,t) = A \cos\left[2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

➤ 质点的振动速度，加速度

角波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

讨论

1) 给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y = -A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (\text{向 } x \text{ 轴正向传播}, \quad \varphi = \pi)$$

$$y = -A \cos \omega \left(-t - \frac{x}{u} \right) \quad (\text{向 } x \text{ 轴负向传播}, \quad \varphi = \pi)$$

2) 平面简谐波的波函数为 $y = A \cos(Bt - Cx)$
 式中 A, B, C 为正常数, 求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

$$y = A \cos(Bt - Cx) \quad y = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{C}$$

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{B}{C}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} = dC$$

二 波函数的物理意义

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

1 当 x 固定时，波函数表示该点的简谐振动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差。

$$\Delta\varphi = -\omega \frac{x}{u} = -2\pi \frac{x}{\lambda}$$

$$y(x, t) = y(x, t + T) \text{ (波具有时间的周期性)}$$

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

2 当 t 一定时, 波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移, 即此刻的波形.

$$y = A \cos[-2\pi\frac{x}{\lambda} + (2\pi\frac{t}{T} + \varphi)]$$

$$y(x, t) = y(x + \lambda, t) \quad (\text{波具有空间的周期性})$$

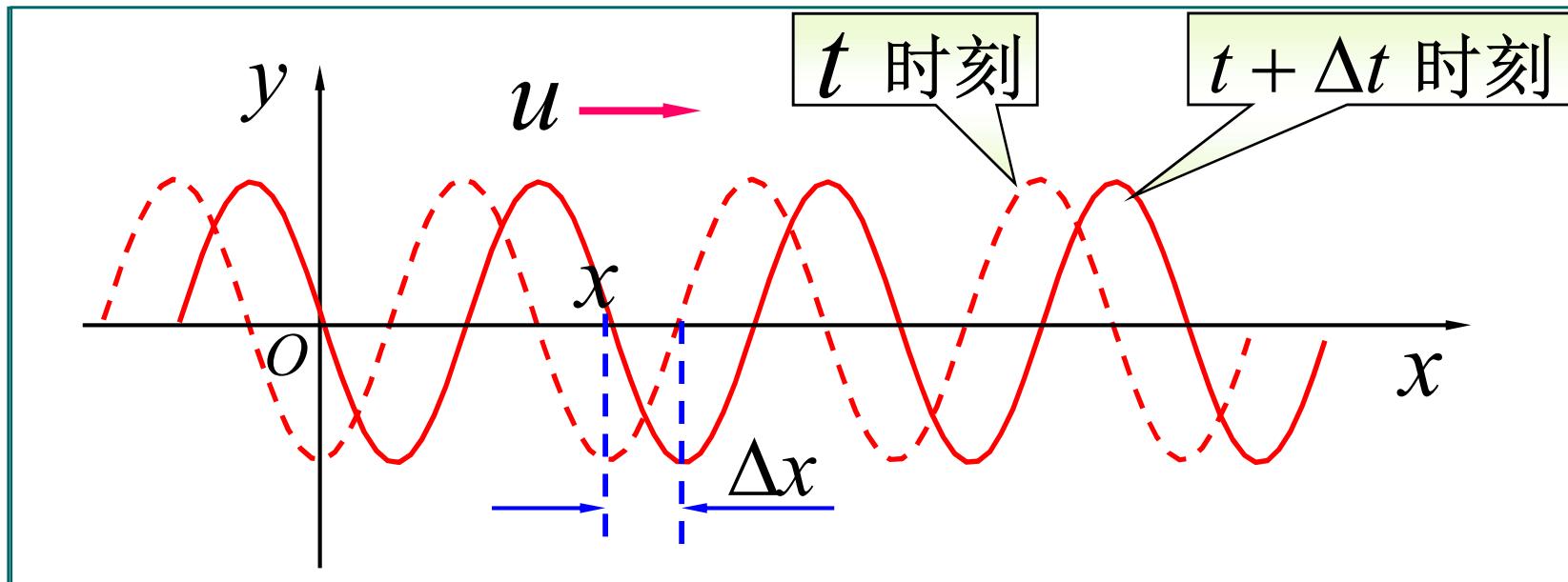
波程差

$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$$

3 若 x, t 均变化, 波函数表示波形沿传播方向的运动情况 (行波) .

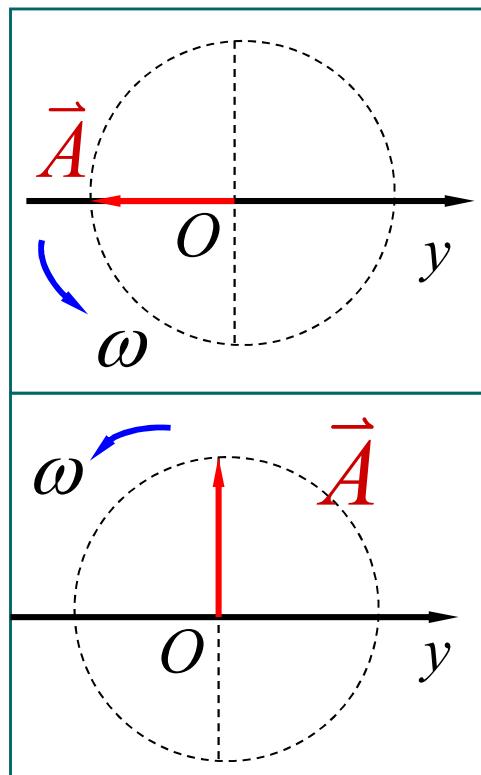
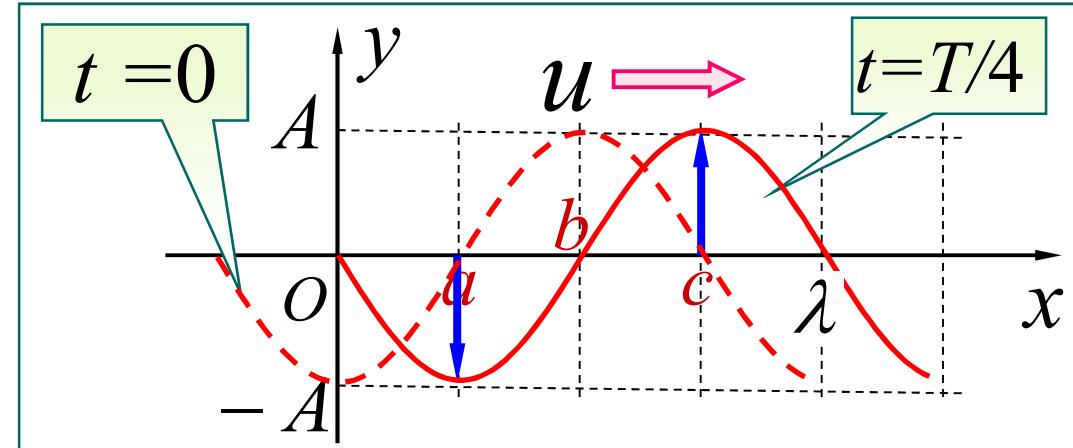


$$y = A \cos\left[2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right] \quad \varphi(t, x) = \varphi(t + \Delta t, x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \qquad \Delta x = u \Delta t$$

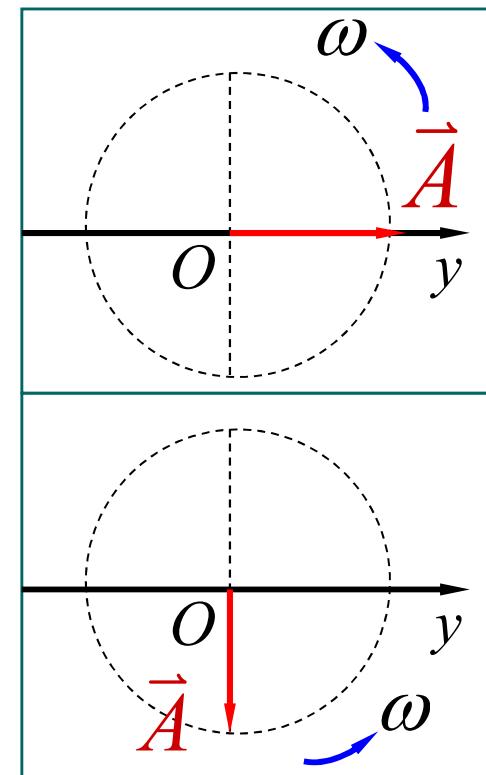
讨论：如图简谐波以余弦函数表示，求 O 、 a 、 b 、 c 各点振动初相位。

$$\varphi(-\pi \sim \pi)$$



$$\varphi_o = \pi$$

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$

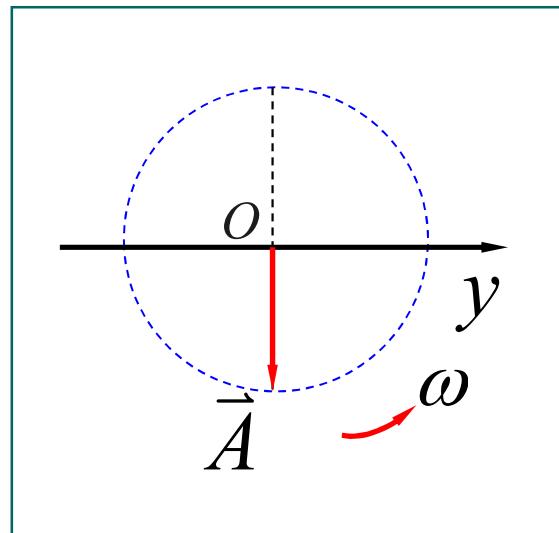


$$\varphi_b = 0$$

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

例1 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A = 1.0\text{m}$ ， $T = 2.0\text{s}$ ， $\lambda = 2.0\text{m}$ 。在 $t = 0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动。求

1) 波函数



解 写出波函数的标准式

$$y = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \boxed{\varphi}\right]$$

$$t = 0 \quad x = 0$$

$$y = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} > 0$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

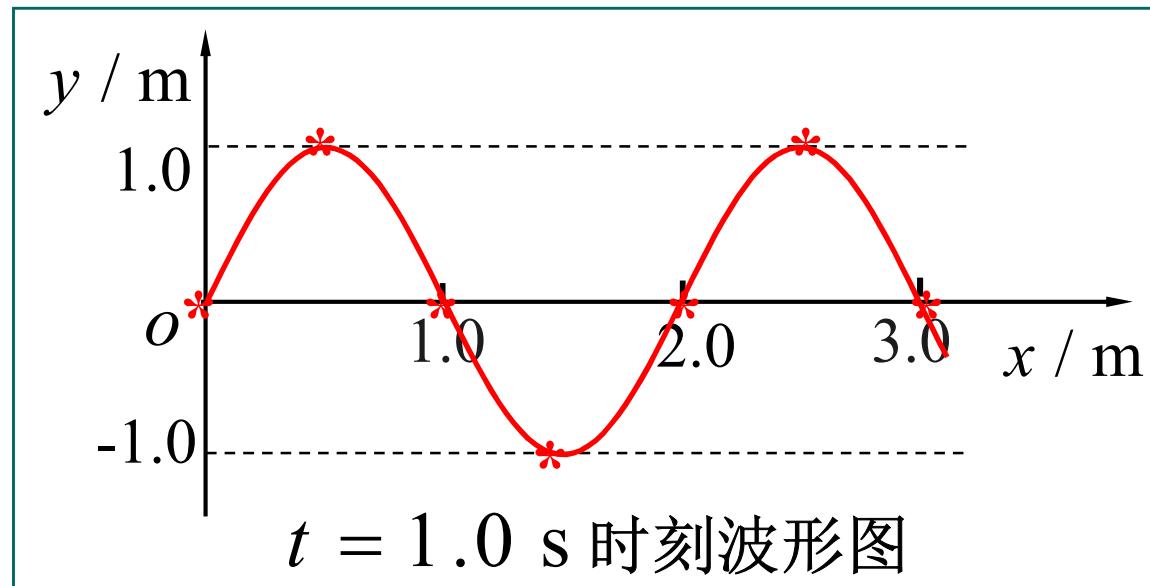
$$y = 1.0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\text{m}$$

2) 求 $t = 1.0\text{ s}$ 波形图.

$$y = 1.0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\text{m}$$

$t = 1.0\text{ s}$
波形方程

$$\begin{aligned}y &= 1.0 \cos\left[\frac{\pi}{2} - \pi x\right]\text{m} \\&= 1.0 \sin(\pi x)\text{m}\end{aligned}$$



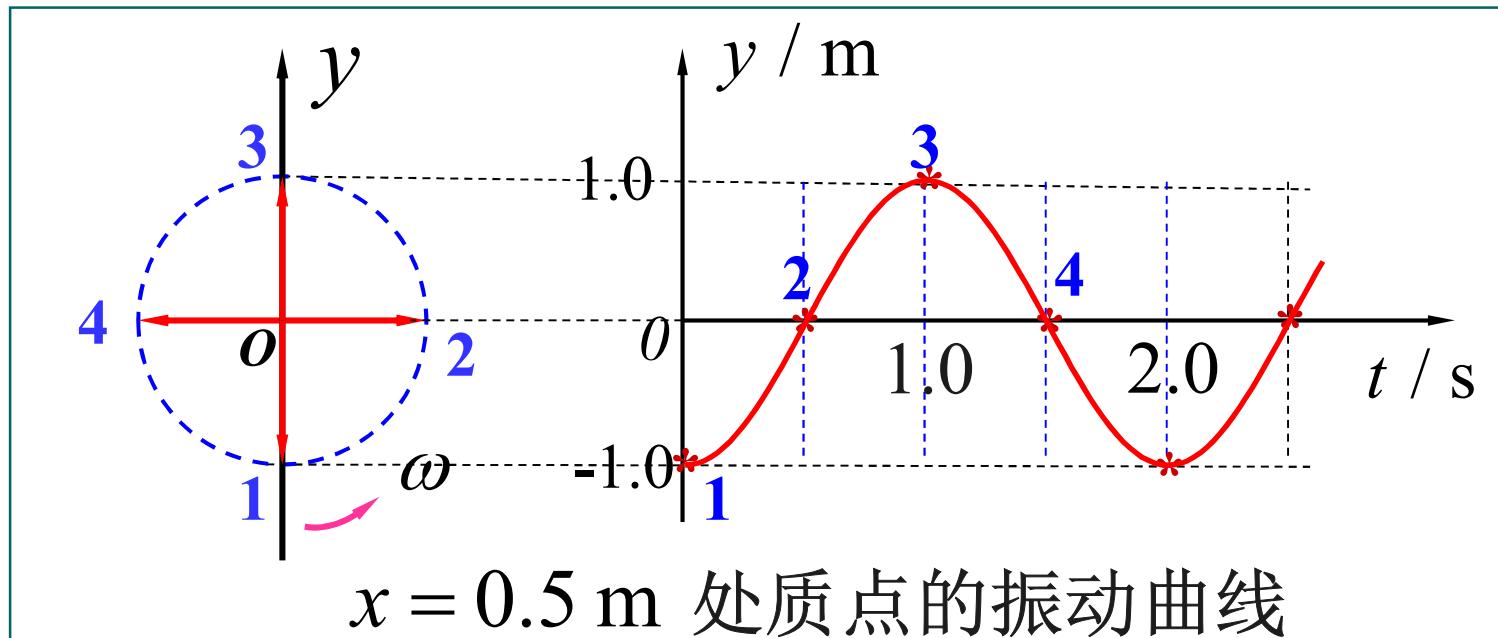
$$\begin{aligned}\sin(\pi x) &= 0 \\x &= 0, 1, 2, \dots (\text{m}) \\ \sin(\pi x) &= 1 \\x &= (2k + 0.5)\text{m} \\ \sin(\pi x) &= -1 \\x &= (2k + 1.5)\text{m} \\k &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

3) $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并作图 .

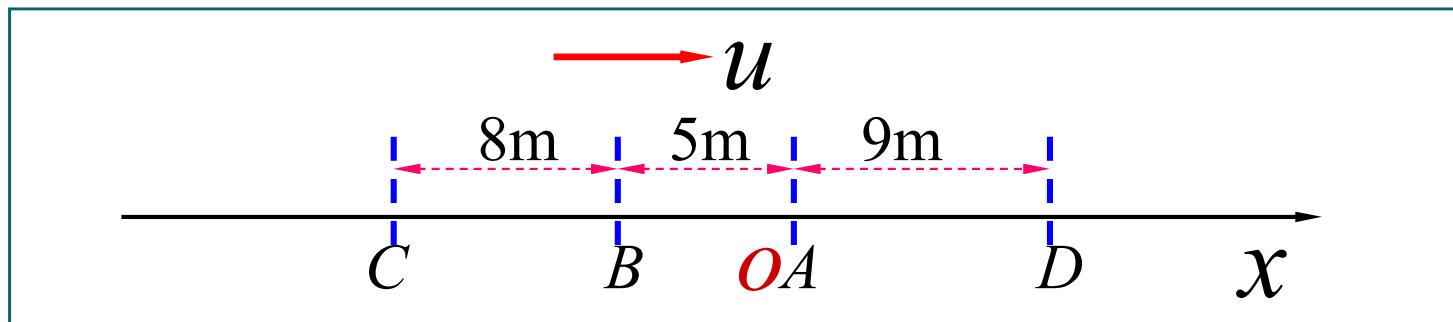
$$y = 1.0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\text{m}$$

$x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$$y = 1.0 \cos(\pi t - \pi)\text{m}$$



例2 一平面简谐波以速度 $u = 20\text{m/s}$ 沿直线传播, 波线上点 A 的简谐振动方程 $y_A = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t)\text{m}$.



1) 以 A 为坐标原点, 写出波函数

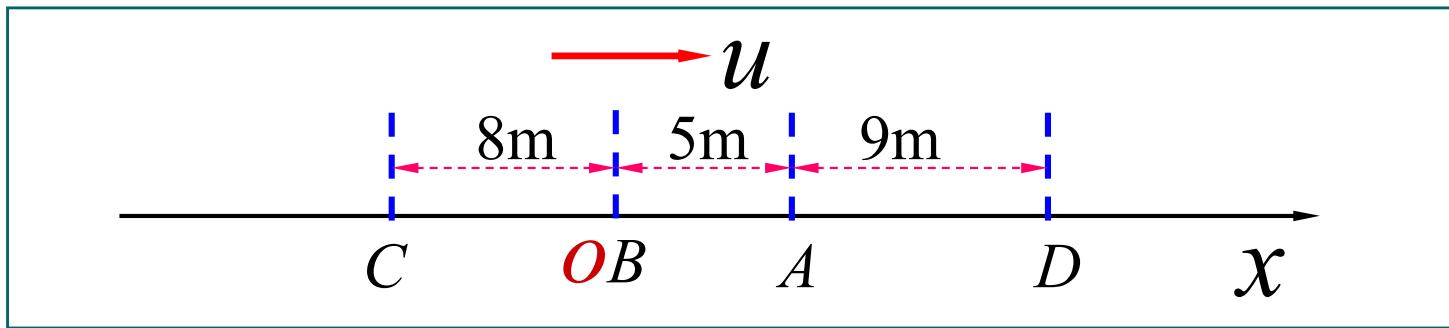
$$A = 3 \times 10^{-2} \text{m} \quad T = 0.5 \text{s} \quad \varphi = 0 \quad \lambda = uT = 10 \text{m}$$

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10} \right) \text{m}$$

2) 以 B 为坐标原点, 写出波函数

$$y_A = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t) \text{m}$$

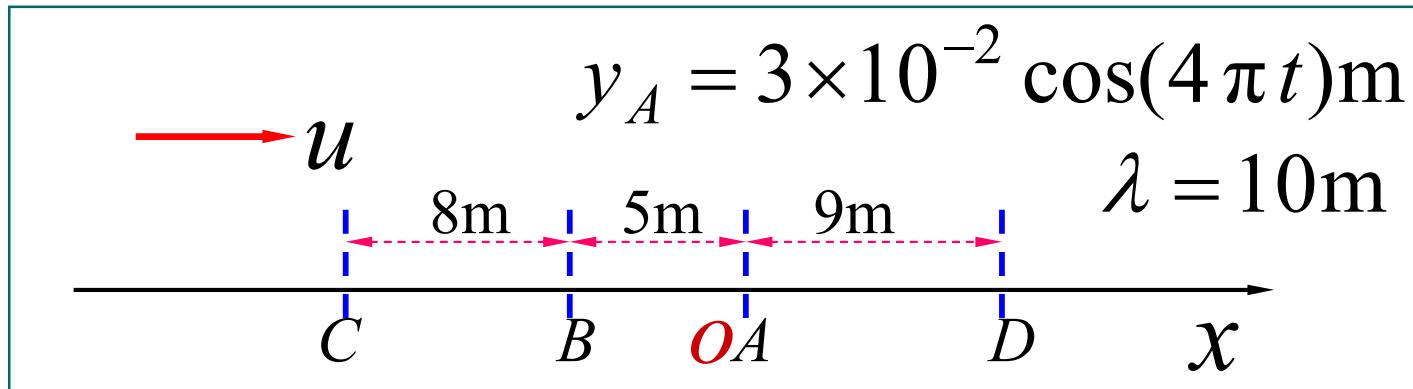


$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi \frac{-5}{10} = \pi$$

$$\varphi_B = \pi \quad y_B = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi) \text{m}$$

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10}\right) + \pi\right] \text{m}$$

3) 写出传播方向上点C、点D 的简谐振动方程



点 C 的相位比点 A 超前

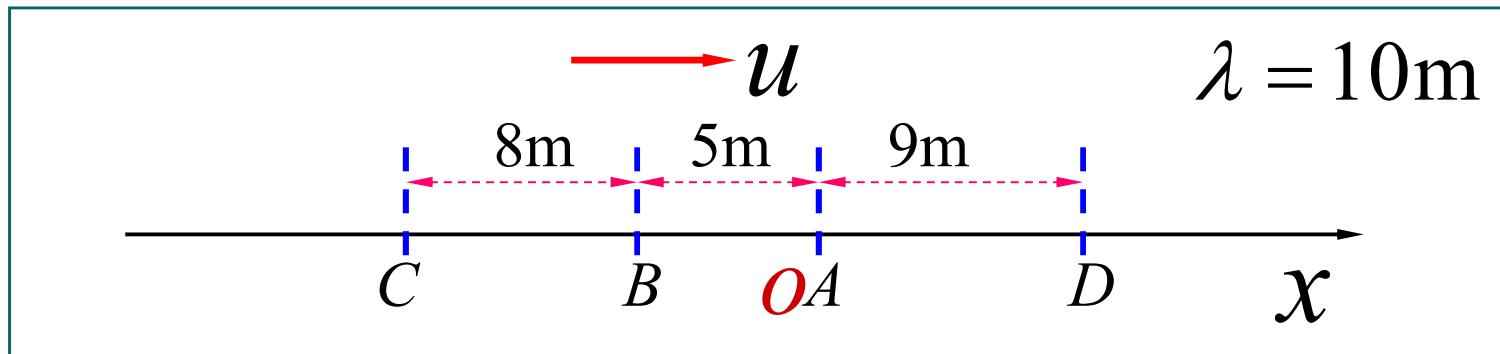
$$\begin{aligned}y_C &= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + 2\pi \frac{AC}{\lambda}) \text{ m} \\&= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi) \text{ m}\end{aligned}$$

点 D 的相位落后于点 A

$$\begin{aligned}y_D &= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - 2\pi \frac{AD}{\lambda}) \text{ m} \\&= 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - \frac{9}{5}\pi) \text{ m}\end{aligned}$$

4) 分别求出 BC , CD 两点间的相位差

$$y_A = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t) \text{m}$$



$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi \frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi \frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi \frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi \frac{-22}{10} = 4.4\pi$$