微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— 积分问题

推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程, 求 y

—— 微分方程问题

第一节
微分方程的基本概念

引例 $\begin{cases} \text{几何问题} \\ \text{物理问题} \end{cases}$

↓

微分方程的基本概念

引例1. 一曲线通过点(1,2) ,在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$, 求该曲线的方程 .

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ (C为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2. 列车在平直路上以 $20\ \mathrm{m/s}$ 的速度行驶, 制动时获得加速度 $a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

解: 设列车在制动后 t 秒行驶了s 米, 即求 $s=s(t)$.

已知
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

利用后两式可得 $C_1=20,\ C_2=0$

因此所求运动规律为 $s=-0.2t^2+20t$

说明: 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住，以及制动后行驶了多少路程 .

微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程**.

$$
\text{分类}\begin{cases}\text{常微分方程 (本章内容)}\\ \text{偏微分方程}\end{cases}
$$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶.**

一般地, n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数.

$\left\{\begin{array}{l}\textbf{通解} — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同. \\ \textbf{特解} — 不含任意常数的解, 其图形称为\textbf{积分曲线}.\end{array}\right.$

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的**初始条件(或初值条件)**:

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

引例1 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=2\end{array}\right.$　　引例2 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0\,,\quad \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0}=20\end{array}\right.$

通解: $y=x^2+C$　　$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

特解: $y=x^2+1$　　$s=-0.2t^2+20t$

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例1. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2为常数) 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + k^2 x = 0$ 的解，并求满足初始条件

$x\big|_{t=0} = A, \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}\Big|_{t=0} = 0$ 的特解 .

解: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} = -C_1 k^2 \cos kt \ - C_2 k^2 \sin kt$

$$= -k^2 (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) = -k^2 x$$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为

$$x = A \cos kt$$

例2. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分, 求所满足的微分方程 .

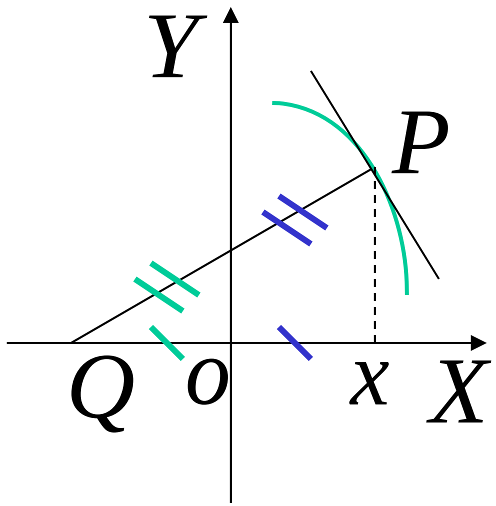
解: 如图所示, 点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令 $Y = 0$, 得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$\therefore \quad x + yy' = -x$, 即 $yy' + 2x = 0$



可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)\;N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$\Big\downarrow$ 转化

解分离变量方程 $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$

分离变量方程的解法:

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

设 $y = \varphi(x)$ 是方程①的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $$\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有 $$G(y) = F(x) + C \qquad ②$$

当$G(y)$ 与$F(x)$ 可微且 $G'(y) = g(y) \neq 0$ 时，上述过程可逆, 说明由②确定的隐函数 $y = \Phi(x)$ 是①的解．同样,当$F'(x) = f(x) \neq 0$ 时， 由②确定的隐函数 $x = \psi(y)$ 也是①的解.

称②为方程①的隐式通解, 或通积分.

例1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明: 在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增、减解.

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或

$$\boxed{\ln|y|=x^3+\ln|C|}$$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$ (C 为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解 $y=0$)

为了方便　记$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$

法二、分离变量得　$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$

积分得$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx$

$\ln y = x^3 + \ln c = \ln ce^{x^3}$

即$y = ce^{x^3}$其中c为任意常数

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x+(x^2+1)\,\mathrm{d}y=0 \\ \underline{y(0)=1} \end{cases}$

解： 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln C=\ln\dfrac{c}{\sqrt{x^2+1}}$

即 $y\sqrt{x^2+1}=C$ （C 为任意常数）

由初始条件得 $C=1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1}=1$$

例3. 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解: 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $$1 - u' = \sin^2 u$$

即 $$\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

积分得 $$\tan u = x + C$$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （C 为任意常数）

练习： 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x+y}$ 的通解.

解法 1 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y}=e^{x}+C$$

即 $$(e^{x}+C)e^{y}+1=0 \quad (C<0)$$

解法 2 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $$u'=1+e^{u}$$

积分 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{1+e^{u}}=x+C \qquad \int\frac{(1+e^{u})-e^{u}}{1+e^{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$u-\ln(1+e^{u})=x+C$$

所求通解: $\ln(1+e^{x+y})=y-C$（C 为任意常数）

内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

说明: 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$$y=-x \text{ 及 } y=C$$

后者是通解 , 但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数 .