

第十二章

无穷级数

无穷级数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{数项级数} \\ \text{幂级数} \\ \text{付氏级数} \end{array} \right.$

无穷级数是研究函数的工具 $\left\{ \begin{array}{l} \text{表示函数} \\ \text{研究性质} \\ \text{数值计算} \end{array} \right.$

第一节 常数项级数的概念和性质

- 一、常数项级数的概念
- 二、无穷级数的基本性质
- 三、级数收敛的必要条件
- *四、柯西审敛原理



一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

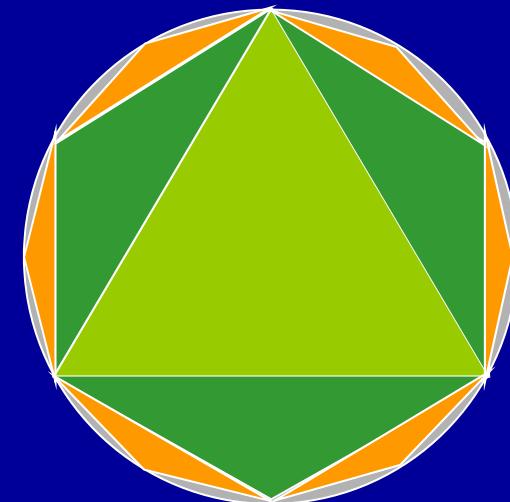
依次作圆内接正 3×2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$n \rightarrow \infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$



引例2. 小球从 1 米高处自由落下, 每次跳起的高度减少一半, 问小球是否会在某时刻停止运动? 说明道理.

由自由落体运动方程 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 知 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间, 则小球运动的时间为

$$T = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots \right) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} [1 + 2(\sqrt{2} + 1)] \approx 2.63 \text{ (s)}$$

定义: 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为**无穷级数**, 其中第 n 项 u_n 叫做**级数的一般项**,
级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为**级数的部分和**. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 则称**无穷级数收敛**, 并称 S 为**级数的和**, 记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数**发散**.

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的**余项**. 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

例1. 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$

因此级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$,

因此级数发散.

2). 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$, 因此级数发散;

当 $q=-1$ 时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

综合 1)、2) 可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛;

$|q|\geq 1$ 时, 等比级数发散.

例2. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= (\cancel{\ln 2 - \ln 1}) + (\cancel{\ln 3 - \ln 2}) + \cdots + (\cancel{\ln(n+1) - \ln n})$$

$$= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以级数 (1) 发散;

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

例3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= [\underline{\ln 3 + \ln 1 - 2\ln 2}] + [\underline{\ln 4 + \ln 2 - 2\ln 3}] + [\underline{\ln 5 +} \\ &\quad + \underline{\ln 3 - 2\ln 4}] + \cdots + [\underline{\ln(n+1)} + \underline{\ln(n-1)} - \underline{2\ln n}] \\ &= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2 \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\ln 2$, 故原级数收敛, 其和为 $-\ln 2$.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 即 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛, 其和为 $c S$.

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 则 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n c u_k = c S_n$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛, 其和为 $c S$.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2. 设有两个收敛级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$, 则

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = S_n \pm \sigma_n \rightarrow S \pm \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^n u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有无限项的情况.

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$$

则新级数的部分和序列 σ_m ($m = 1, 2, \dots$) 为原级数部分和序列 S_n ($n = 1, 2, \dots$) 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$, 但 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 发散.

例4.判断级数的敛散性：

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \dots$$

解：考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
发散，从而原级数发散。

三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

可见: 若级数的一般项不趋于0, 则级数必发散.

例如, $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots$, 其一般项为

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 不趋于0, 因此这个级数发散.

注意: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上, 假设调和级数收敛于 S , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .