二阶微分方程的
解法及应用

一、两类二阶微分方程的解法

二、微分方程的应用

一、两类二阶微分方程的解法

1. 可降阶微分方程的解法 — 降阶法

- $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \longrightarrow$ 逐次积分求解

- $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \xrightarrow{\text{令 } p(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

- $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \xrightarrow{\text{令 } p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

2. 二阶线性微分方程的解法

- 常系数情形 $\begin{cases} \text{齐次} \\ \text{非齐次} \end{cases}$ —————— 代数法
- 欧拉方程

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = e^t, D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left[D(D-1) + pD + q\right] y = f(e^t)$$

例1. 求微分方程 $\begin{cases} y'' + y = x, & x \le \frac{\pi}{2} \\ y'' + 4y = 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 满足条件 $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$, 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处连续且可微的解.

提示: 当 $x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 解满足 $\begin{cases} y'' + y = x \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

特征根： $r_{1,2} = \pm i$,

设特解： $y^* = Ax + B$, 代入方程定 A, B, 得 $y^* = x$

故通解为 $\quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$, 得

$$y = -\sin x + x \quad (x \le \frac{\pi}{2})$$

由 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的衔接条件可知, 当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，解满足

$$\begin{cases} y''+4y=0 \\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1+\frac{\pi}{2}, \quad y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1 \end{cases}$$

其通解: $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$

定解问题的解: $y=-\frac{1}{2}\sin 2x+(1-\frac{\pi}{2})\cos 2x,\ \ x\ge\frac{\pi}{2}$

故所求解为

$$y=\begin{cases} -\sin x+x, & x<\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}\sin 2x+(1-\frac{\pi}{2})\cos 2x, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

例2. 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且满足方程

$$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

求 $f(x)$.

提示: $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x t\,f(t)\,dt$, 则

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-\cancel{x\,f(x)}+\cancel{x\,f(x)}$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

问题化为解初值问题: $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x \\ f(0)=0\,, \qquad f'(0)=1 \end{cases}$

最后求得 $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$

思考: 设 $\varphi'(x)=e^x+\sqrt{x}\int_0^{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}\,u)\,\mathrm{d}u,\ \varphi(0)=0,$ 如何求 $\varphi(x)$?

提示: 对积分换元，令 $t=\sqrt{x}\,u$，则有

$$\varphi'(x)=e^x+\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x)=e^x+\varphi(x)$$

解初值问题: $\begin{cases}\varphi''(x)-\varphi(x)=e^x\\ \varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=1\end{cases}$

答案: $\varphi(x)=\frac{1}{4}e^x(2x+1)-\frac{1}{4}e^{-x}$

例3. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续二阶导数, 且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的函数 ,

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y}\right)^3=0$$

变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程 ;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

(03**考研**)

解: (1) 由反函数的导数公式知 $\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y}=\frac{1}{y'}$, 即 $y'\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y}=1$,

上式两端对 x 求导, 得:

$$y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(y')^2=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x \qquad ①$$

(2) 方程①的对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

设①的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$, 代入①得 $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$, 故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$, 从而得①的通解:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

由初始条件 $y(0) = 0, \ y'(0) = \frac{3}{2}$，得

$$C_1 = 1, \ C_2 = -1$$

故所求初值问题的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

二、微分方程的应用

1 . 建立数学模型 — 列微分方程问题

建立微分方程 (共性)
- 利用物理规律
- 利用几何关系

确定定解条件 (个性)
- 初始条件
- 边界条件
- 可能还要衔接条件

2 . 解微分方程问题

3 . 分析解所包含的实际意义

备用题 **1.** 设二阶非齐次方程 $y'' + \psi(x) y' = f(x)$ 有特解 $y = \dfrac{1}{x}$, 而对应齐次方程有解 $y = x^2$, 求 $\psi(x)$, $f(x)$ 及微分方程的通解 .

解: 将 $y = x^2$ 代入 $y'' + \psi(x) y' = 0$, 得 $\psi(x) = -\dfrac{1}{x}$

再将 $y = \dfrac{1}{x}$ 代入 $y'' - \dfrac{1}{x} y' = f(x)$ 得 $f(x) = \dfrac{3}{x^3}$

故所给二阶非齐次方程为 $y'' - \dfrac{1}{x} y' = \dfrac{3}{x^3}$

令 $y' = p(x)$, 方程化为 $p' - \dfrac{1}{x} p = \dfrac{3}{x^3}$

一阶线性非齐次方程

$$p' - \frac{1}{x}p = \frac{3}{x^3}$$

故 $$y' = p = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{3}{x^3} e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1'\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} + C_1' x$$

再积分得通解 $y = \frac{1}{x} + C_1 x^2 + C_2$ $\quad(C_1 = \frac{1}{2}C_1')$

复习: 一阶线性微分方程通解公式

$$y' + p(x)y = f(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int f(x) e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

2. (1) 验证函数

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$$

满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$; $(-\infty < x < +\infty)$

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和. (02**考研**)

解: (1) $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots$$

所以 $y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(2) 由(1)的结果可知所给级数的和函数满足

$$\begin{cases} y'' + y' + y = e^x \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

其特征方程: $r^2 + r + 1 = 0$, 特征根: $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

∴齐次方程通解为

$$Y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x)$$

设非齐次方程特解为 $y^* = A e^x$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{3}$,

故非齐次方程通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}e^x$$

代入初始条件可得 $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = 0$

故所求级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x \quad (-\infty < x < +\infty)$$