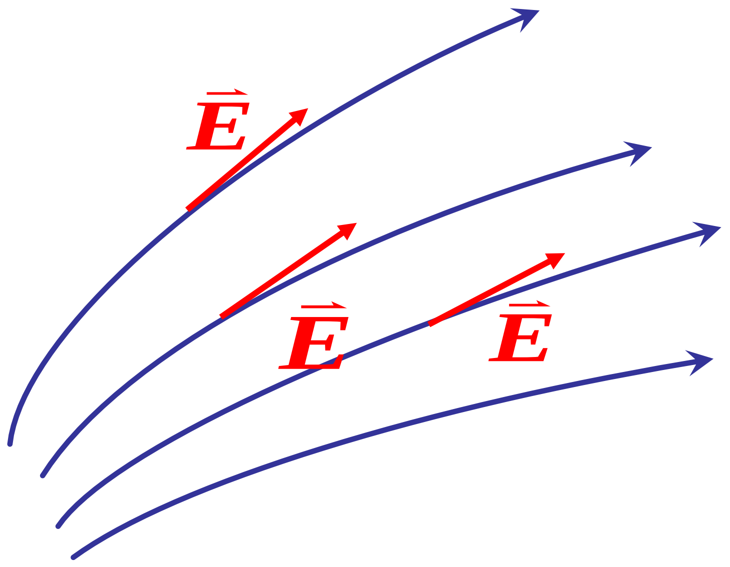
高斯定理及应用

§8.5　电场线和电通量

一　电场线　（电场的图示法）

规定

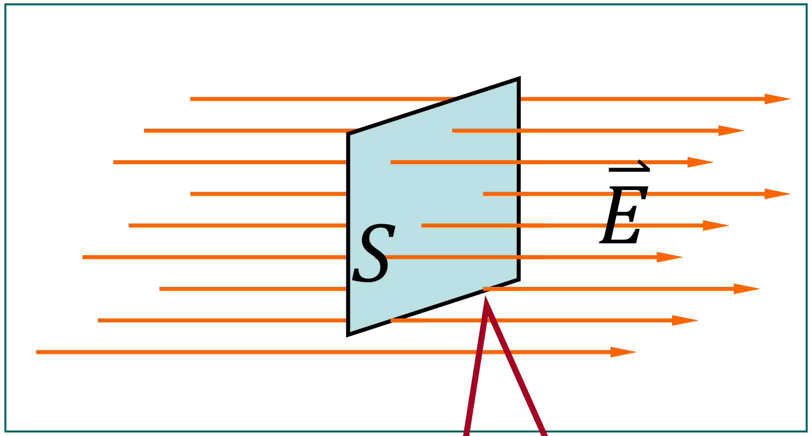
1. 在电场中画一组曲线，曲线上每一点的切线方向与该点的电场方向一致，这一组曲线称为电场线（E线）



2. 通过垂直于电场方向单位面积电场线条数为该点电场强度的大小.

$$\left|\vec{E}\right| = E = N / S$$

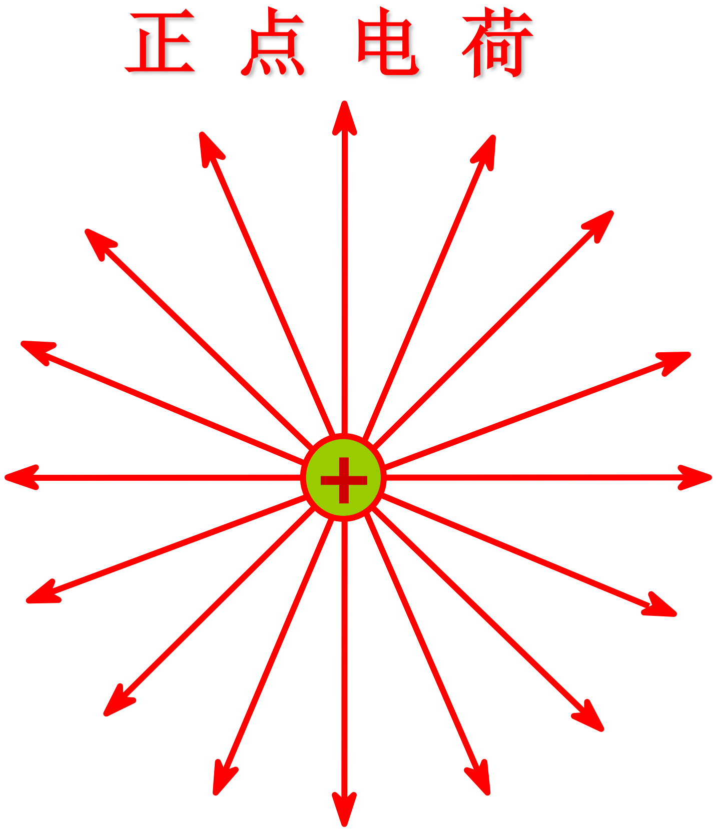
电场线条数 $N = ES$

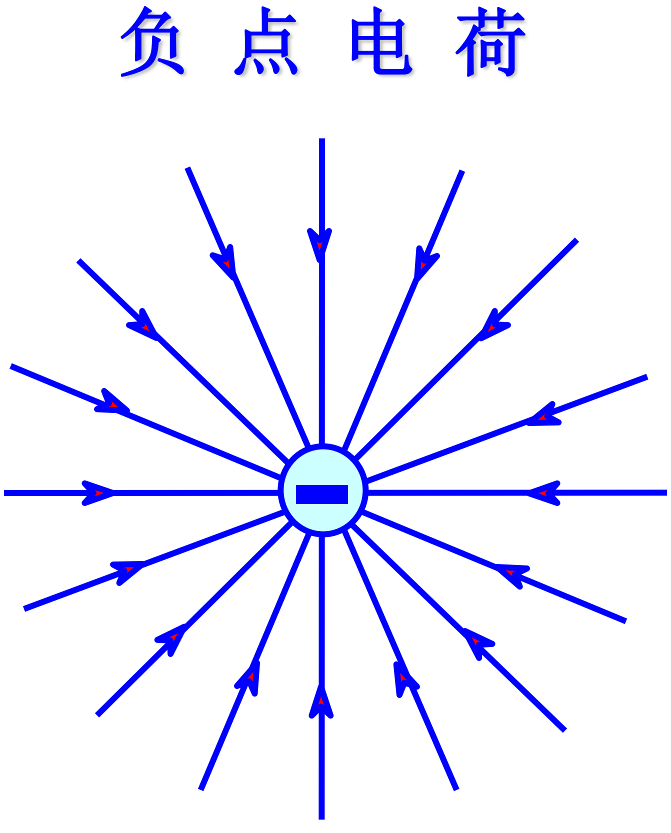


匀强电场中电场线疏密均匀

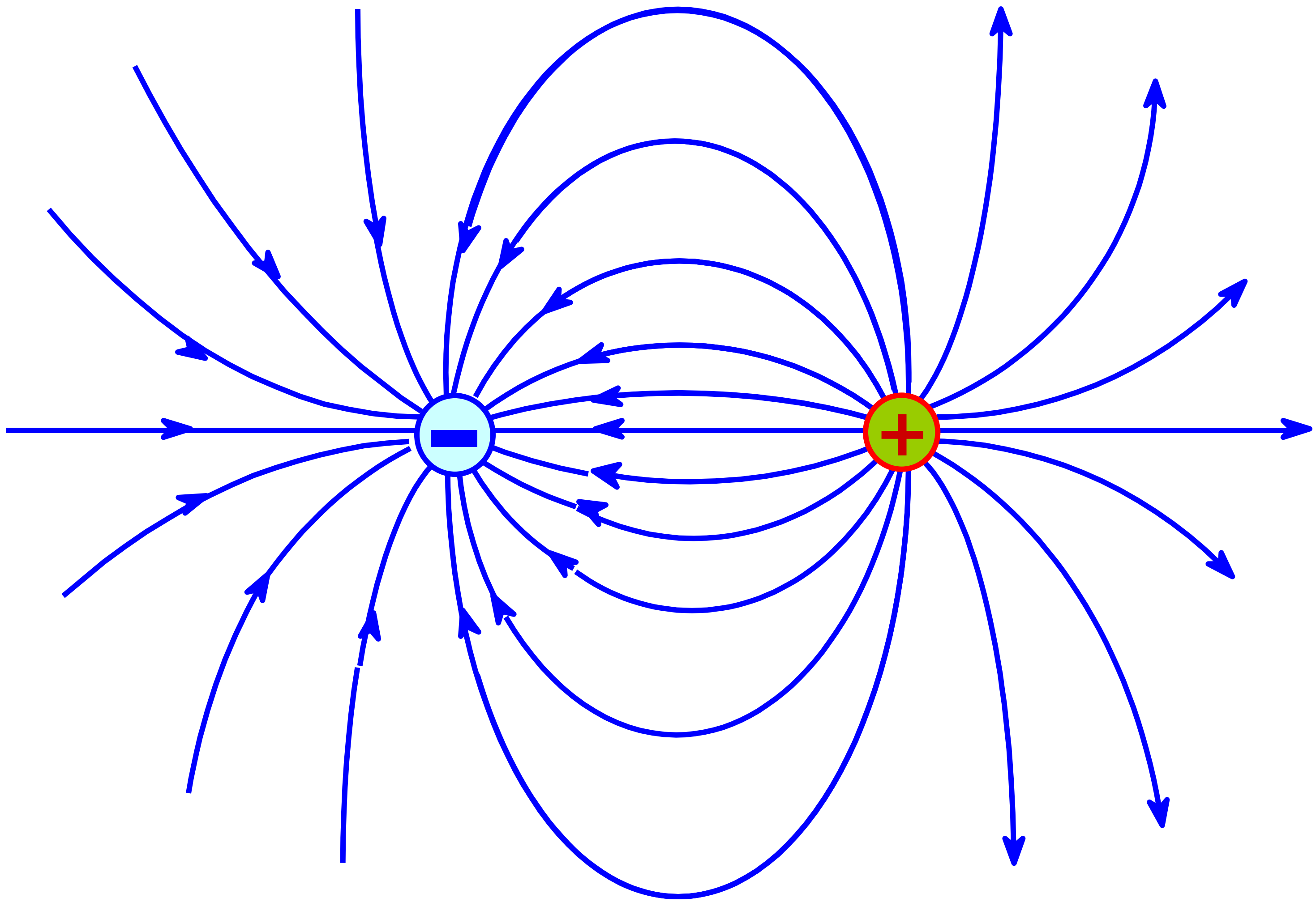
电场线的疏密表示该点处电场强度的大小

点电荷的电场线

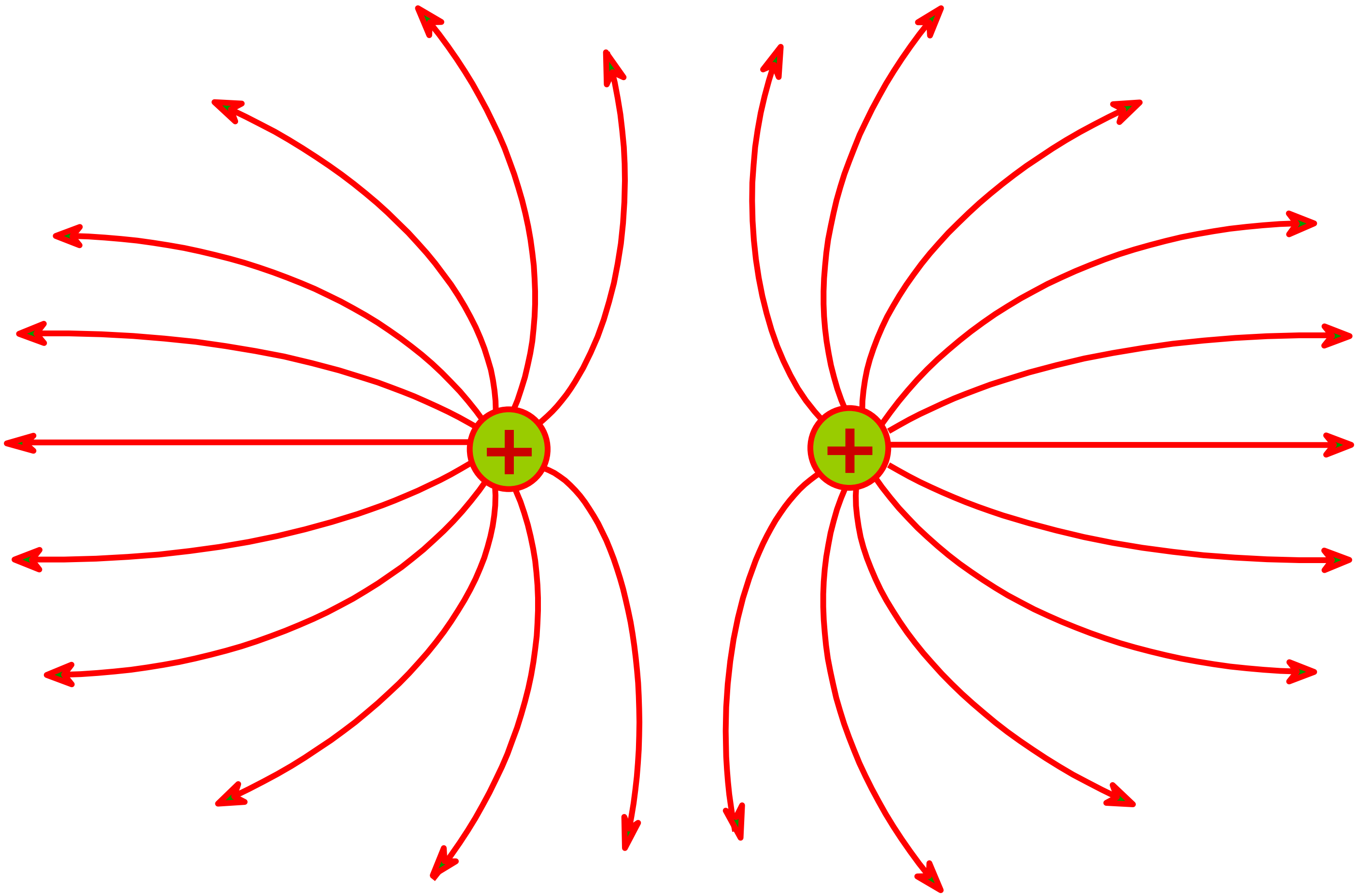




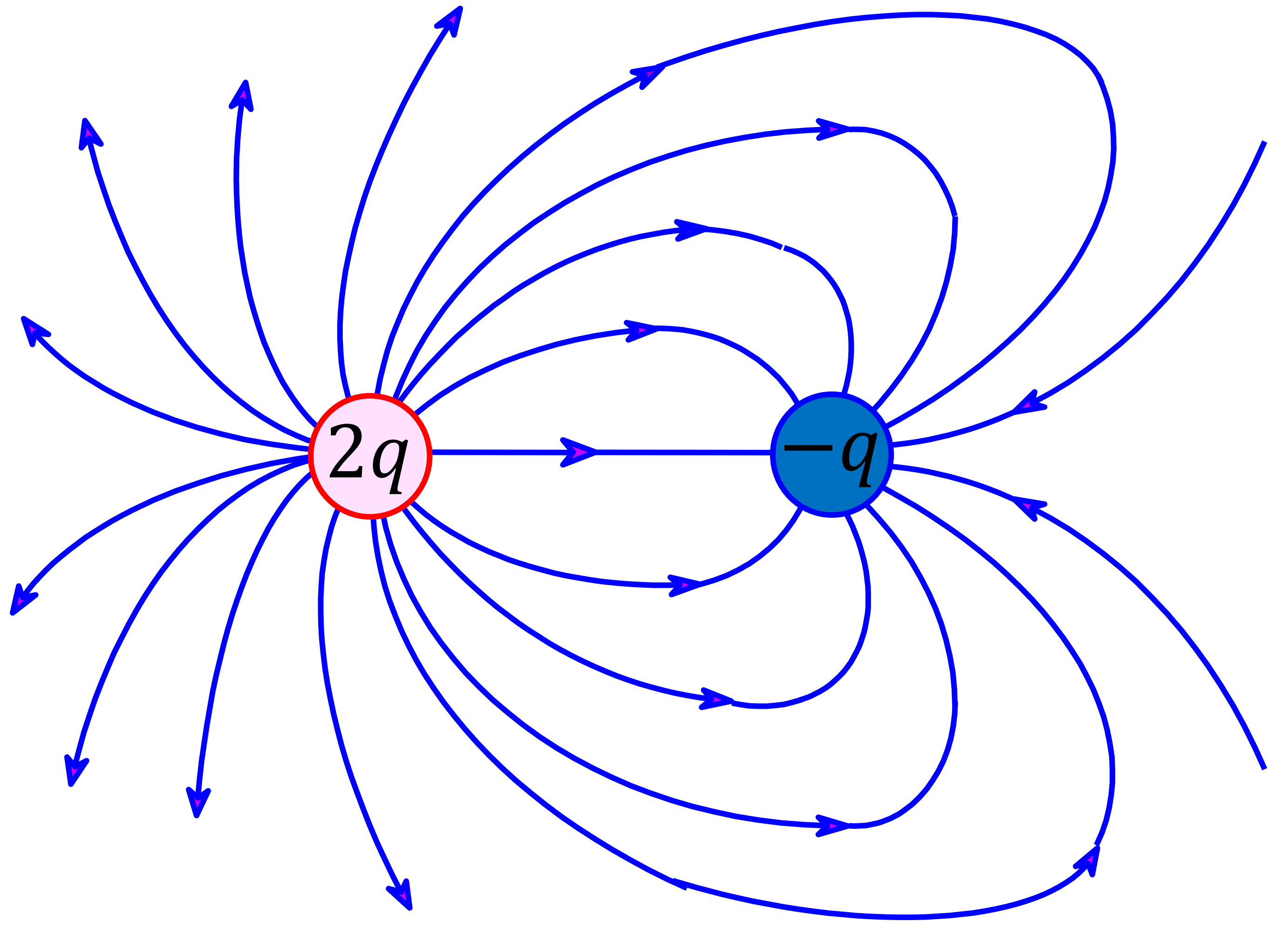
一对等量异号点电荷的电场线



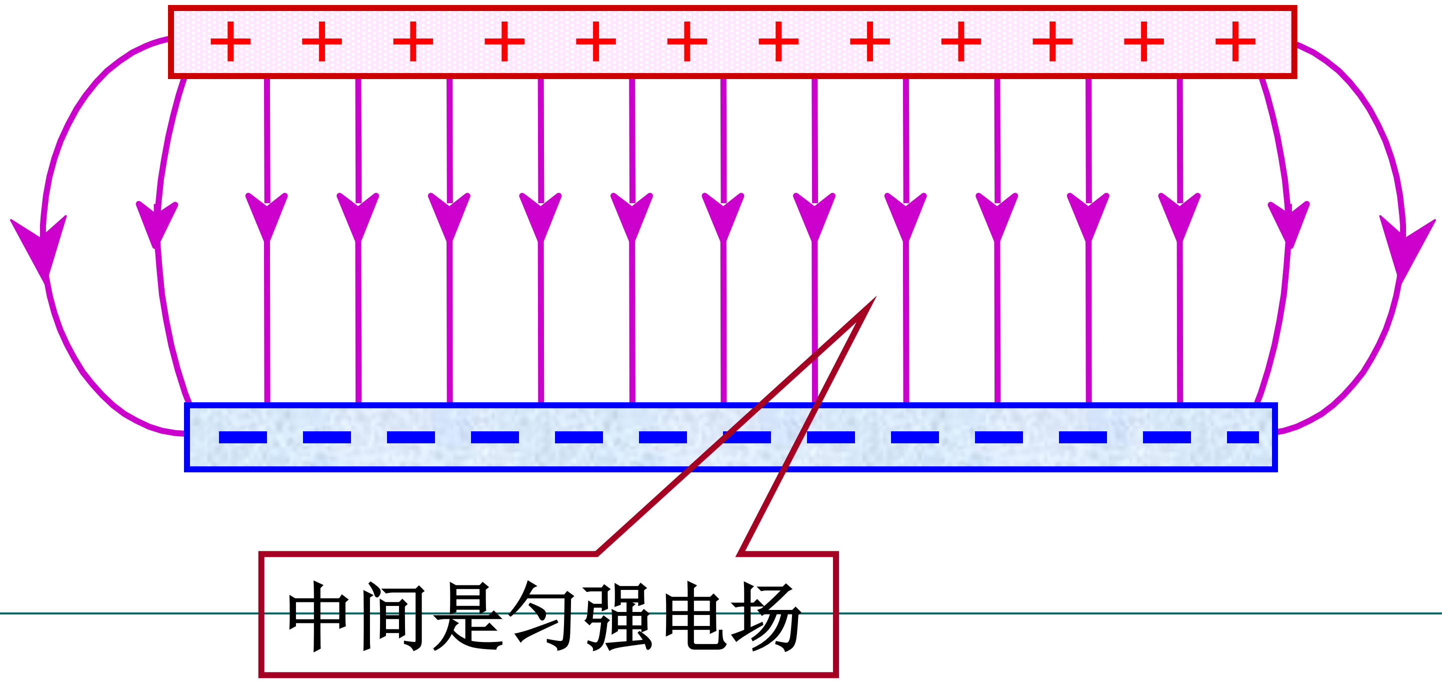
一对等量正点电荷的电场线



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线特性

1. 始于正电荷, 止于负电荷(或来自无穷远, 去向无穷远).

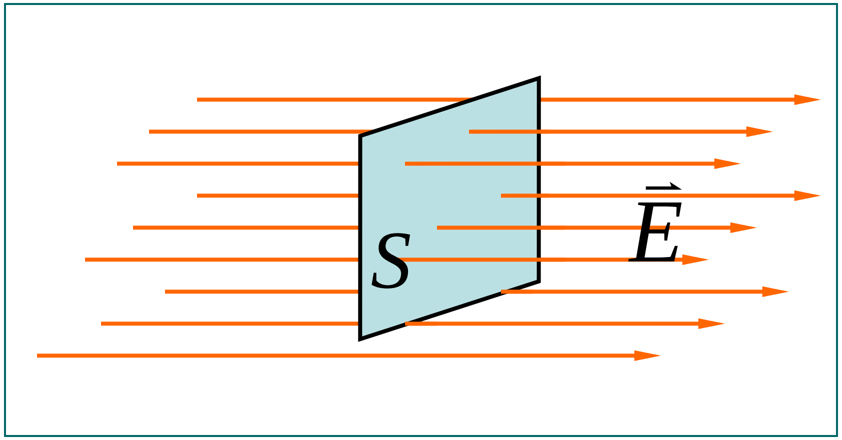
2. 电场线不相交.

3. 静电场电场线不闭合.

4. 电场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱.

二　电场强度通量（简称电通量用 $\varPhi_e$表示）

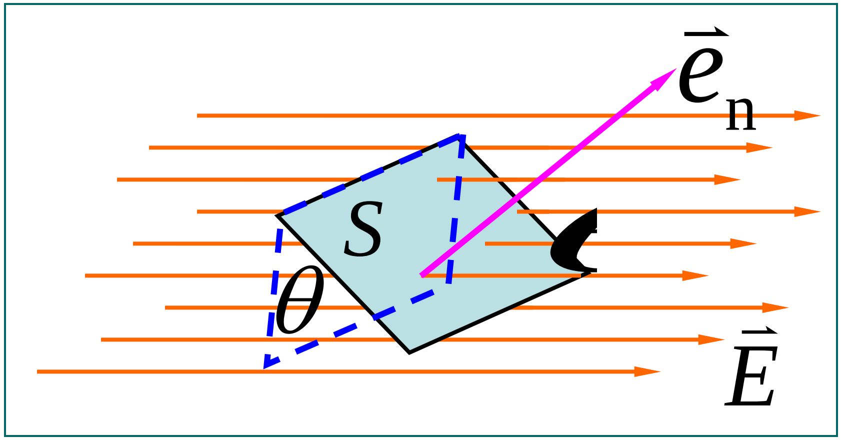
穿过电场中某一个面的电场线条数叫做通过这个面的电场强度通量.



- 均匀电场，$\vec{E}$垂直平面

电场线条数 $N = ES$

$$\varPhi_e = ES$$

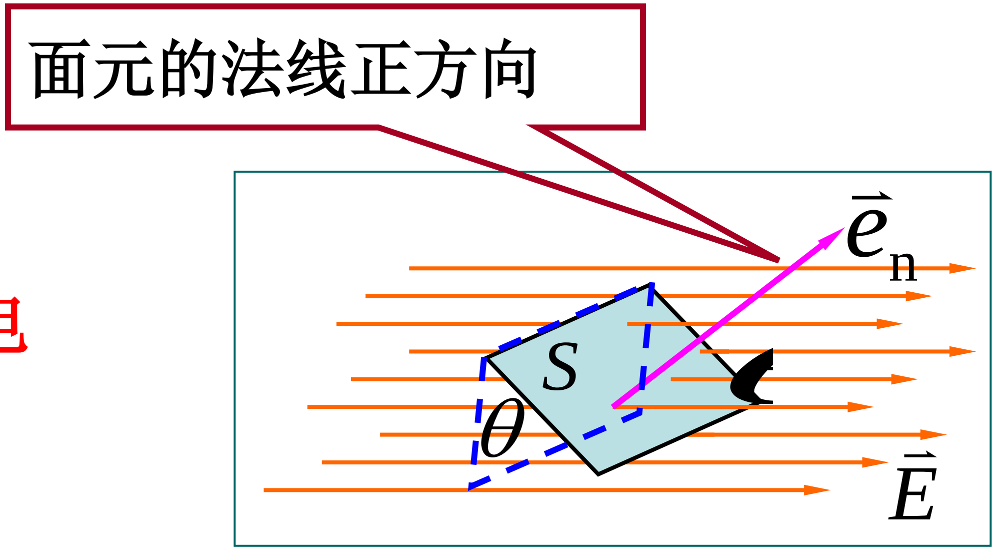


- 均匀电场，$\vec{E}$与平面夹角θ

$$\varPhi_e = ES\cos\theta$$

$$\varPhi_e = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

注意

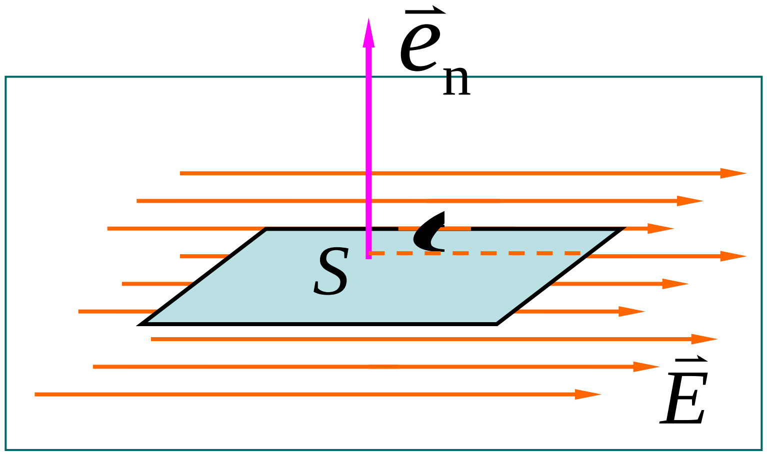


1. θ 为面法线方向与电场强度 E 之间的夹角；

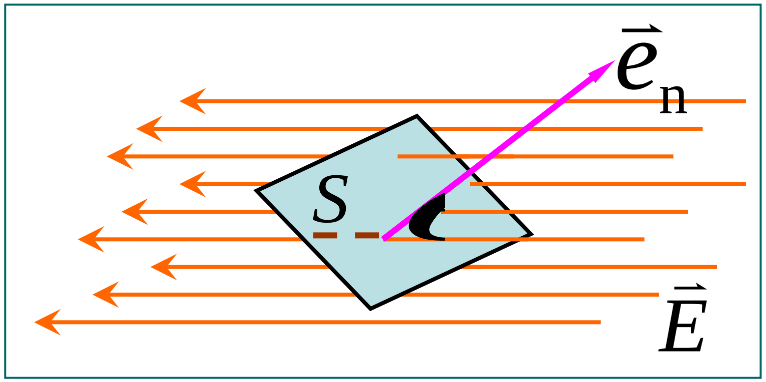
$\theta<90^0$，即电场线顺着法向穿过曲面，通量为正；

规定：垂直面积 S 的某一方向为面元的法线正方向，用单位矢量表示 $\vec{e}_n$

$\theta=90^0$，即电场线顺着平面，通量为零；



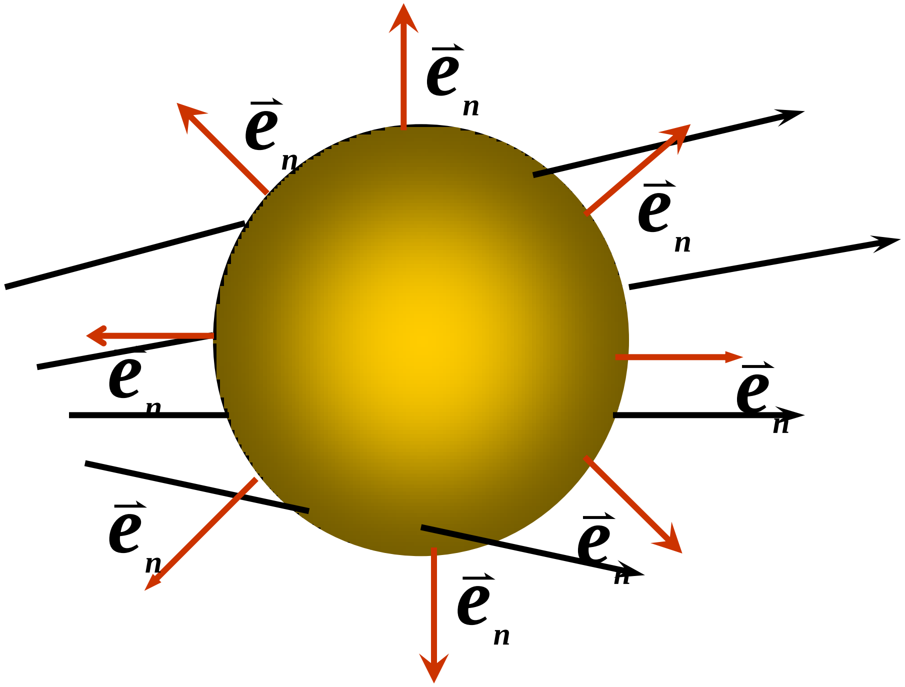
$180^0>\theta>90^0$，即电场线逆着法向穿过曲面，通量为负；



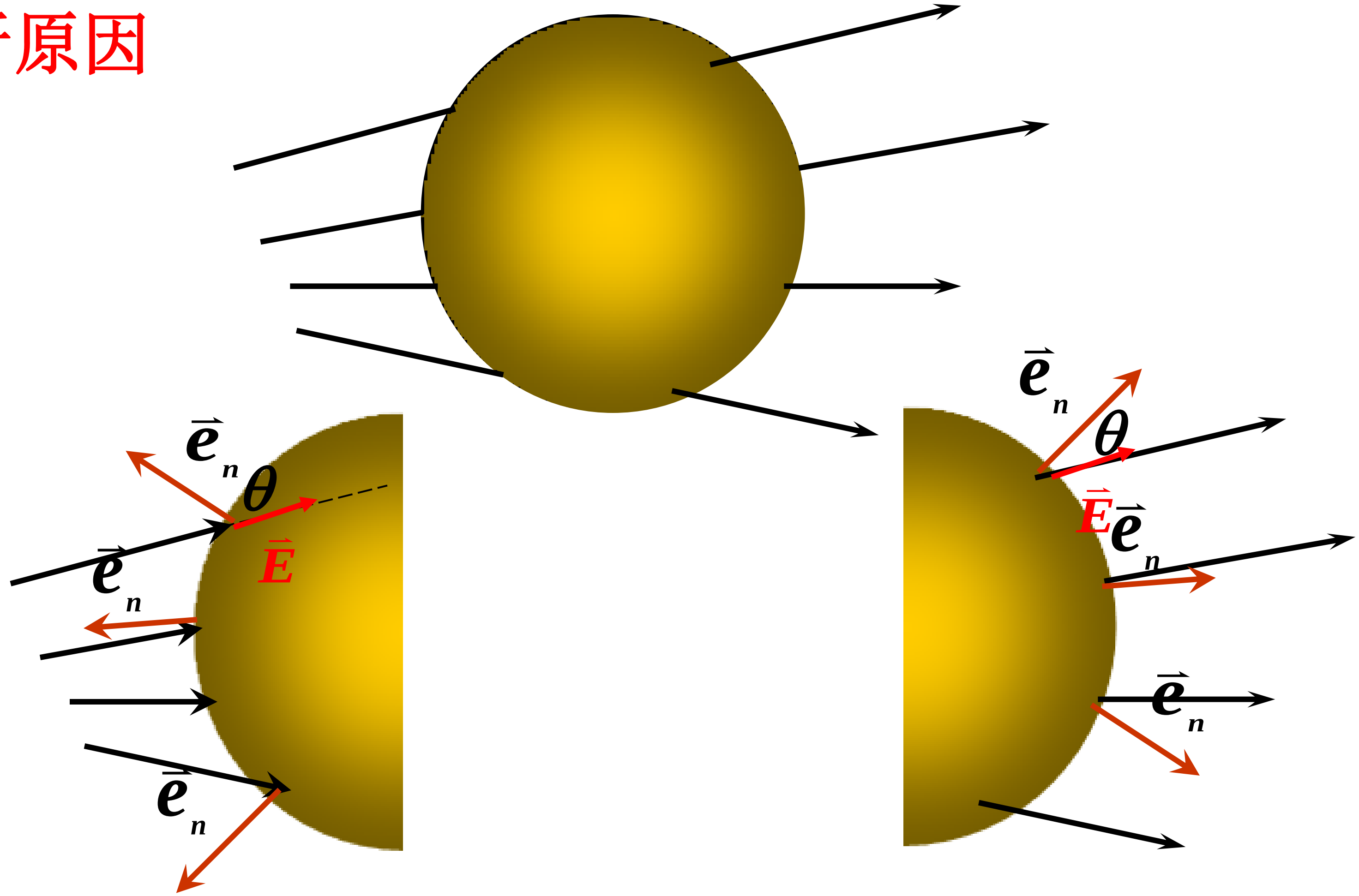
- **闭合曲面：**

规定面元的法向单位矢量取向外为正。

电场线穿出，电通量为正，反之则为负。



分析原因



$\theta > 90^0 \quad \Phi_e < 0$

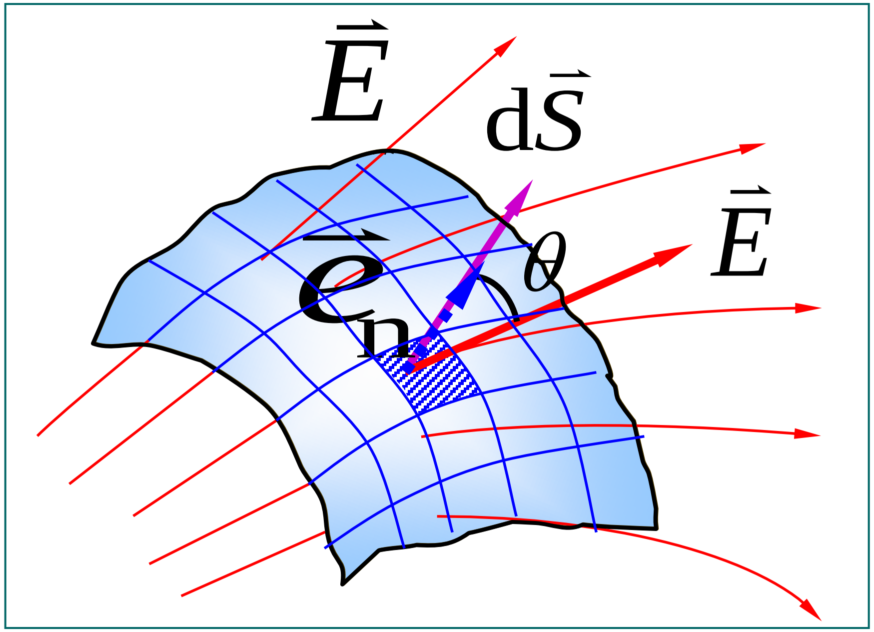
$\theta < 90^0 \quad \Phi_e > 0$

◆ 非均匀电场强度电通量

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

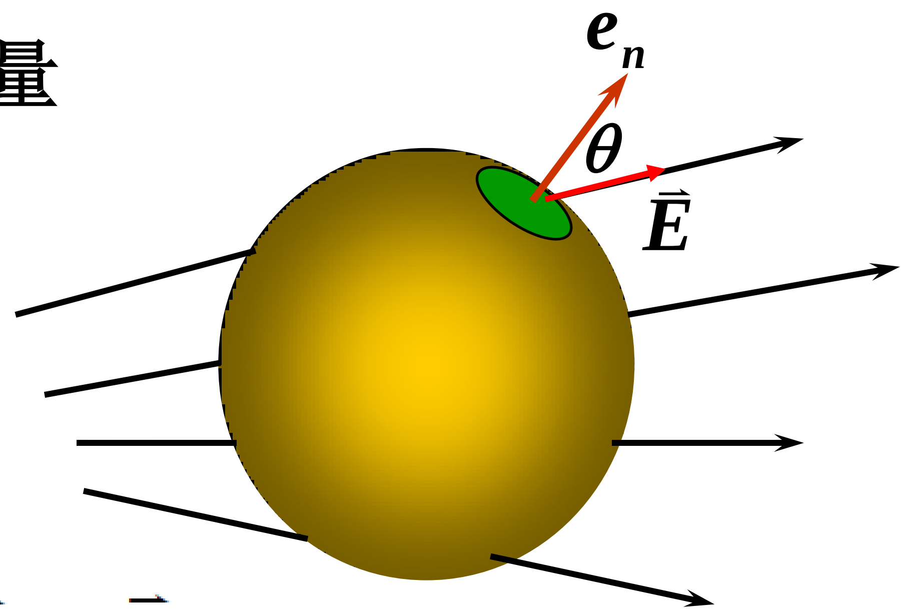
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S E \cos\theta \mathrm{d}S$$



电通量通式

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

◈ 闭合曲面的电场强度通量



$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_\mathrm{e} = \oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

表示闭合曲面

$$\boxed{\Phi_\mathrm{e} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

§ 8.6　高斯定理

高斯（Gauss）（1777—1855）Gauss是德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家。他有数学王子的美誉，并被誉为历史上最伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿、欧拉同享盛名。

一 高斯定理

在真空中, 通过任一闭合曲面的电场强度通量, 等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 .

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$\sum_{i=1}^{n} q_i$ 表示高斯面内电荷的代数和。

高斯定理的导出 $\left\{\begin{array}{l}\text{库仑定律} \\ \text{电场强度叠加原理}\end{array}\right.$ ⇒ 高斯定理

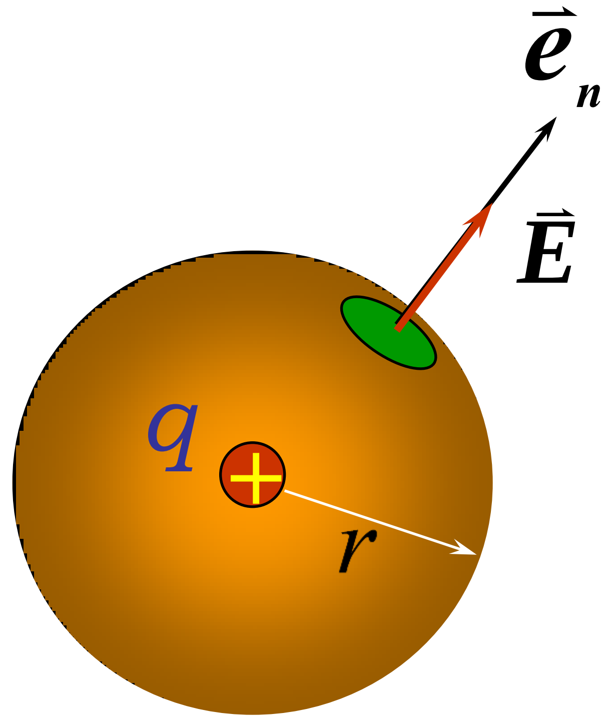
二 证明

◆ 点电荷位于球面中心

作半径为r的球面，非均匀电场，选面元dS

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

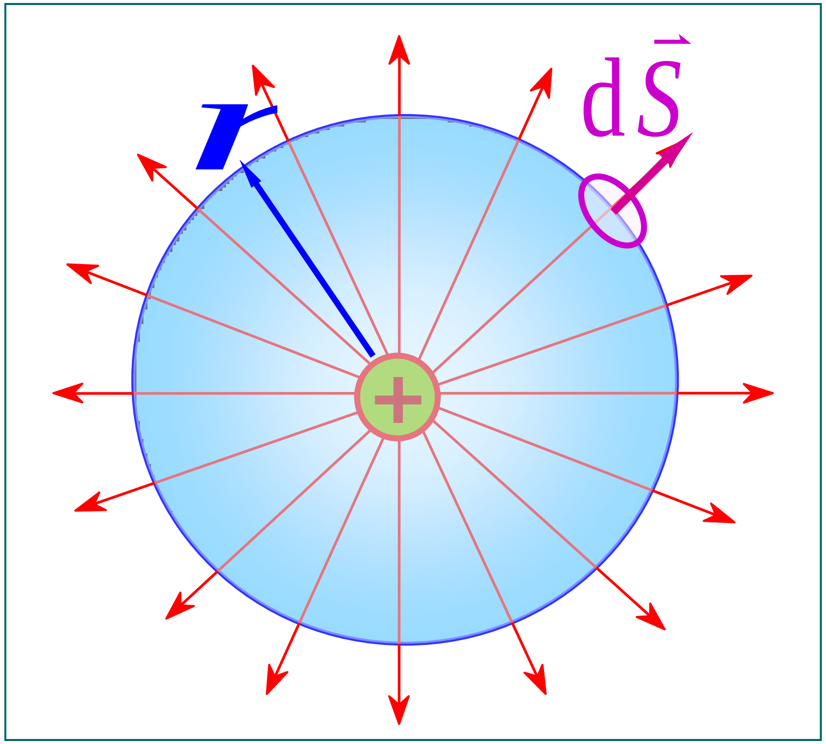
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint_S dS$$

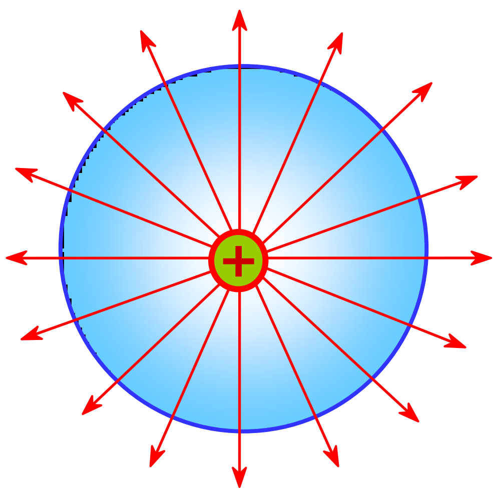
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2$$

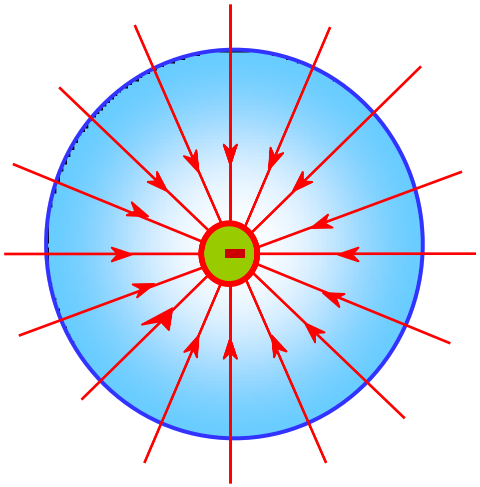
$$\boxed{\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



结论

（1）点电荷发出的电场线的条数为 $\boxed{\Phi_e = \dfrac{q}{\varepsilon_0}}$





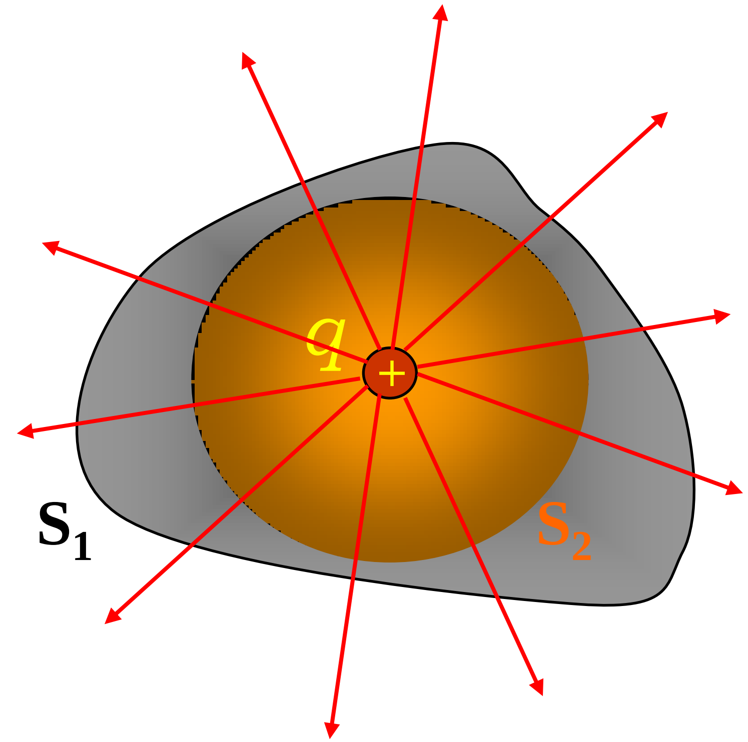
$q>0$， $\Phi_e > 0$

电场线从闭合曲面穿出

$q<0$， $\Phi_e < 0$

电场线从闭合曲面穿进

◆ 点电荷在任意封闭曲面内

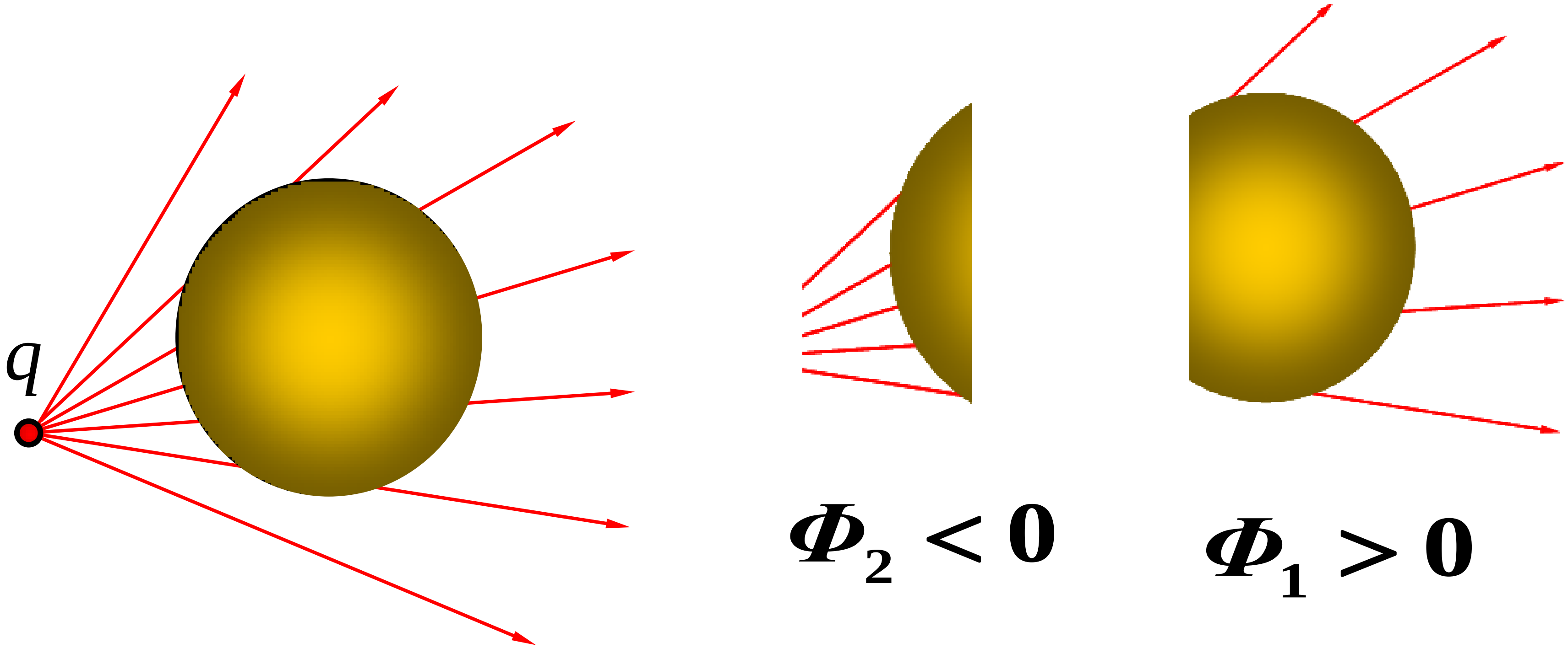


穿过任意封闭曲面电场线条数都是一样

$$\Phi_{e} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 点电荷在封闭曲面之外



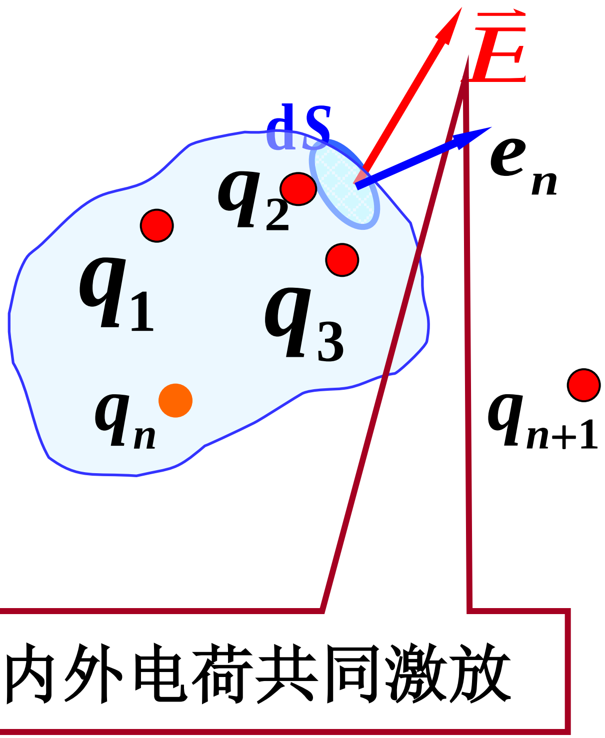
$$\Phi_2 < 0 \qquad \Phi_1 > 0$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \qquad \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

◆ 由多个点电荷产生的电场

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots\vec{E}_{n+1}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

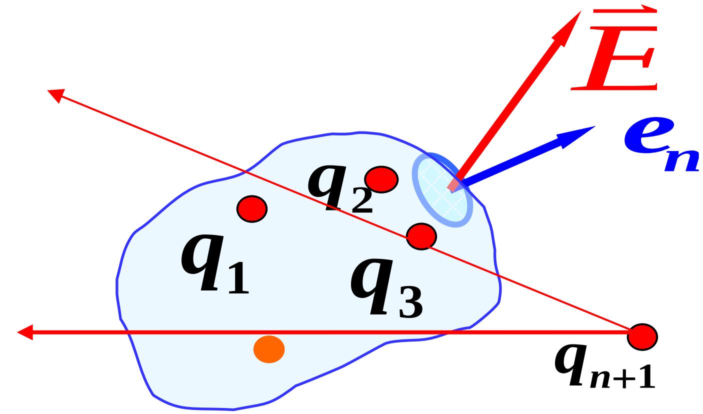


$$\Phi_{\mathrm{e}}=\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\oint_S\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots\cdot\vec{E}_{n+1}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\oint_S\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\oint_S\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\cdots\cdot\oint_S\vec{E}_{n+1}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



$$= \oint_S \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots \vec{E}_{n+1}\right) \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S \vec{E}_1 \mathrm{d}\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \mathrm{d}\vec{S} + \cdots \oint_S \vec{E}_{n+1} \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \Phi_{\mathrm{e}_1} + \Phi_{\mathrm{e}_2} + \cdots \Phi_{\mathrm{e}_\mathrm{n}} + \Phi_{\mathrm{e}_{\mathrm{n}+1}}$$

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}_{\mathrm{n}+1}} = 0}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots\cdots + \frac{q_\mathrm{n}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

高斯定理 $\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$

闭合曲面内外电荷共同激发

闭合曲面内的电荷

总 结

1）高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度.

2）仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献.

3）高斯面为封闭曲面.

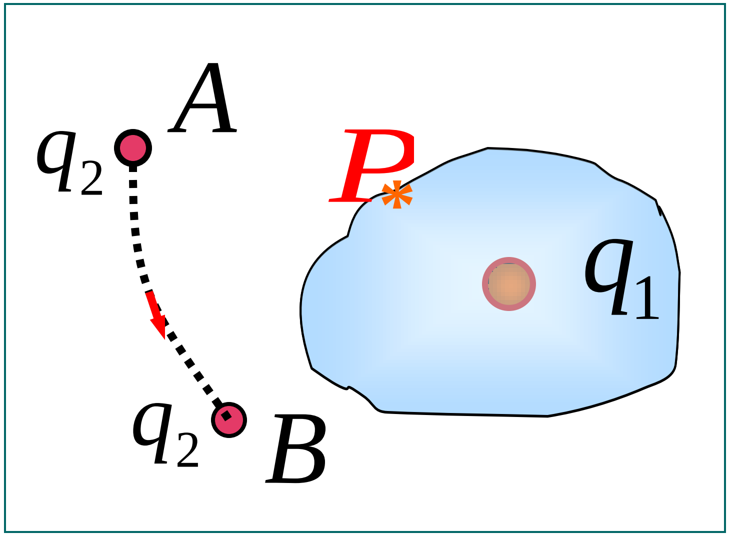
4）穿进高斯面的电场强度通量为负，穿出为正.

5）静电场是有源场.

讨论 ◆ 将 q_2 从 A 移到 B

点 P 电场强度是否变化?

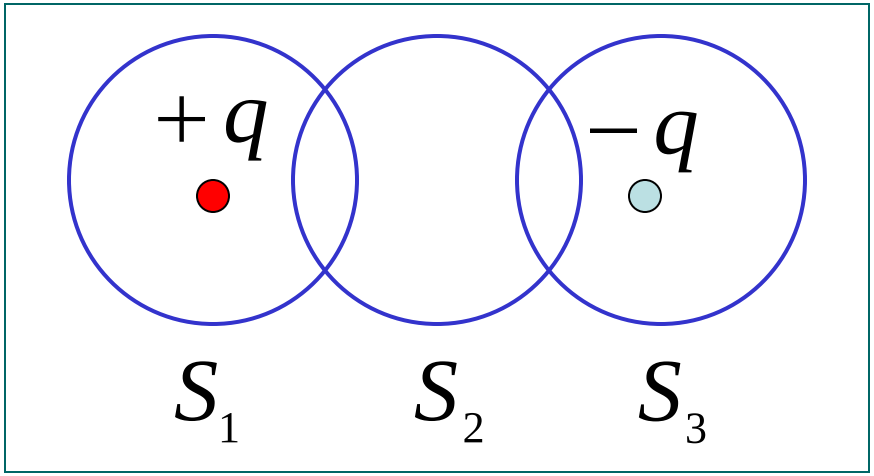
穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?



◆ 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1, S_2, S_3，求通过各闭合面的电通量．

$$\Phi_{e1}=\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2}=0 \qquad \Phi_{e3}=\frac{-q}{\varepsilon_0}$$

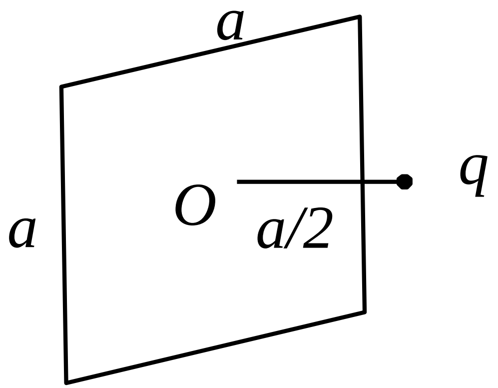


随堂小议

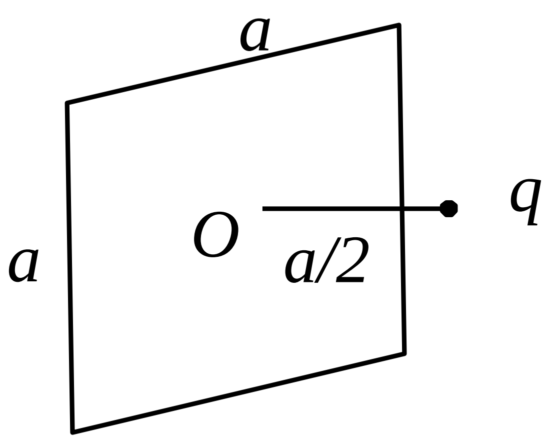
4. 有一边长为a的正方形平面，在其中垂线上距中心O点$a/2$处，有一电荷为q的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为

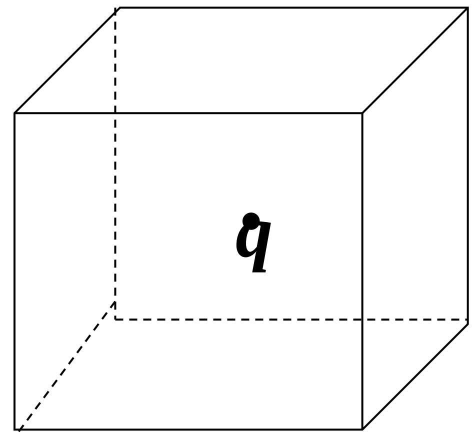
（A）$\dfrac{q}{3\varepsilon_0}$　（B）$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$

（C）$\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0}$　（D）$\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$



答案D


a
q
O
a
a/2

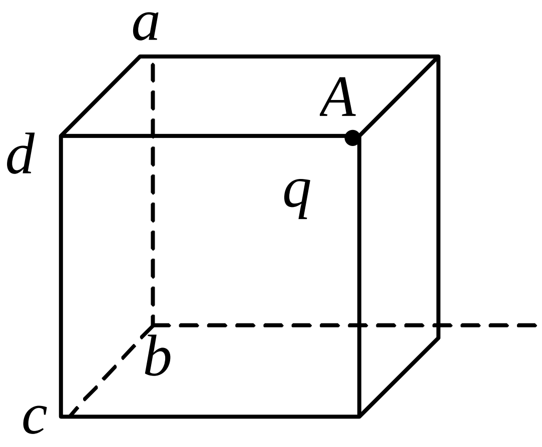

q

随堂小议

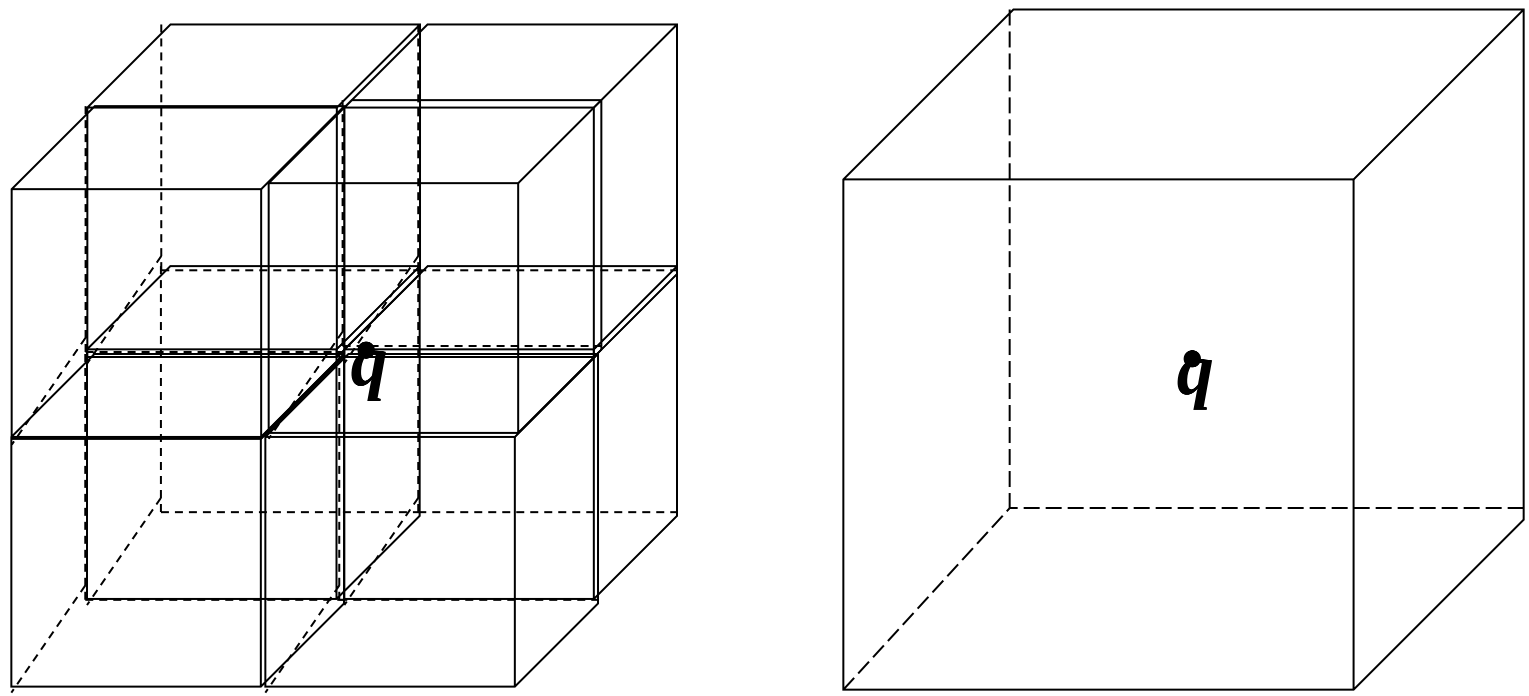
7. 如图所示，一个电荷为*q*的点电荷位于立方体的*A*角上，则通过侧面*abcd*的电场强度通量等于：

（A）$\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$　　（B）$\dfrac{q}{12\varepsilon_0}$

（C）$\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$　　（D）$\dfrac{q}{48\varepsilon_0}$



答案C


q
q

三、高斯定理的应用（§8.7 利用高斯定理求静电场的分布）

（用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性）

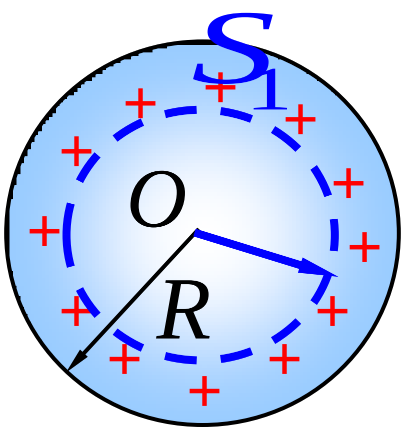
其步骤为

- 对称性分析；
- 根据对称性选择合适的高斯面；
- 应用高斯定理计算场强.

例2　均匀带电球壳（面）的电场强度

一半径为R，均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强 度.

解（1）$0<r<R$



$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}=0$$

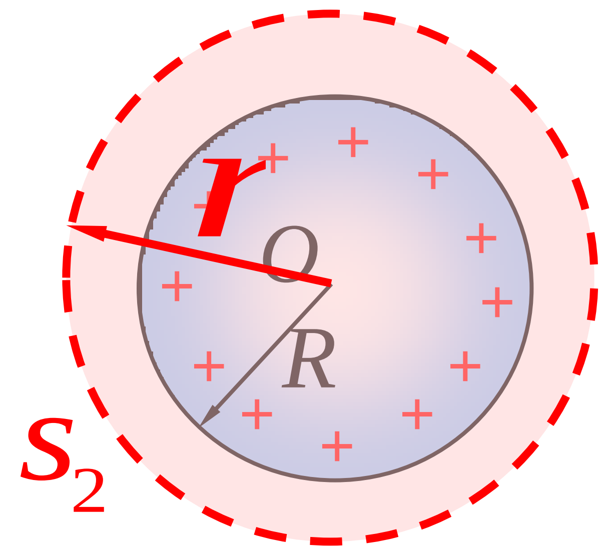
$$\boxed{\vec{E}=0}$$

（2） $r > R$

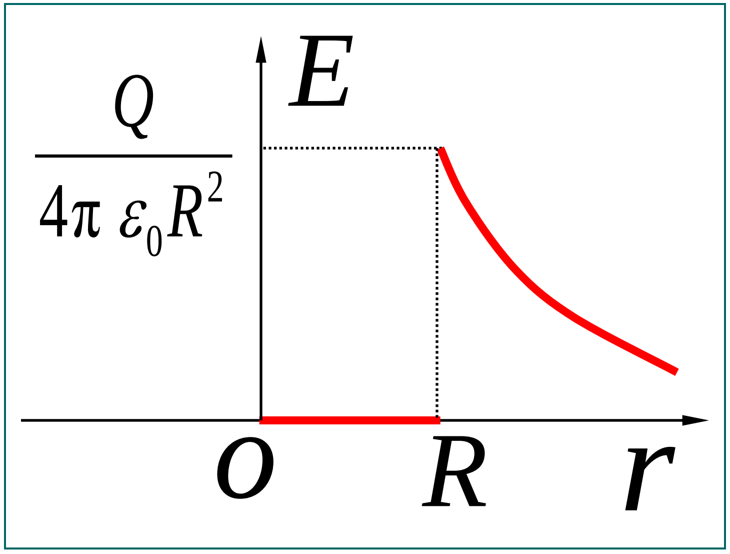
$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S_2} E \mathrm{d}S \cos\theta$$

$$= E \oint_{S_2} \mathrm{d}S$$

$$= 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

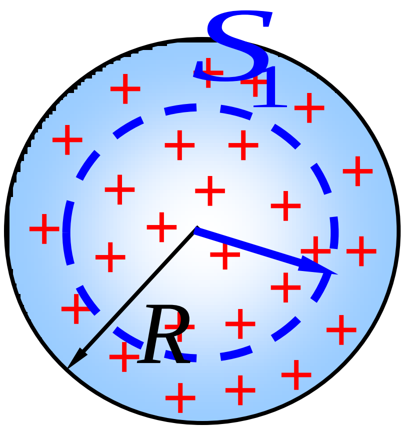


注意：$r=R$时电场E是不连续的

例3 均匀带电球体的电场。球半径为R，体电荷密度为ρ。

解： 电场分布也应有球对称性，方向沿径向。

作同心且半径为r的高斯面



$r<R$时，$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_{S_1}E\,dS\cos\theta$$

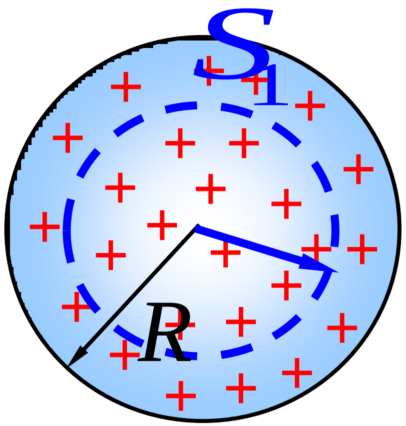
$$=E\oint_{S_1}dS$$

$$=4\pi r^2E=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad (r < R)$$

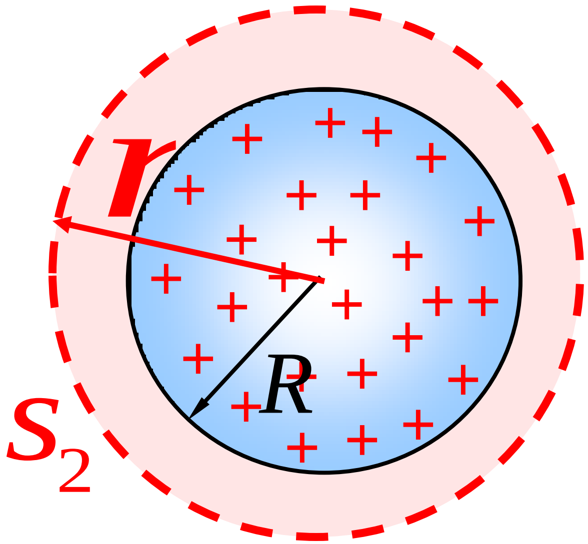


$r>R$时

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_2} E dS \cos\theta$$

$$= E \oint_{S_2} dS$$

$$= 4\pi r^2 E = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$



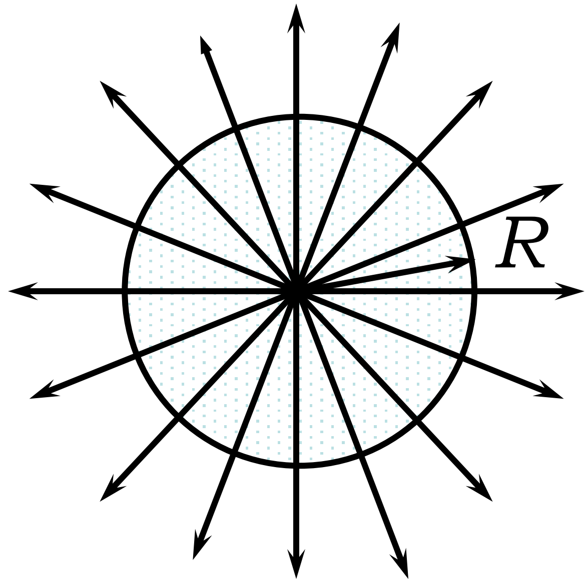
$$E = \frac{\sum q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

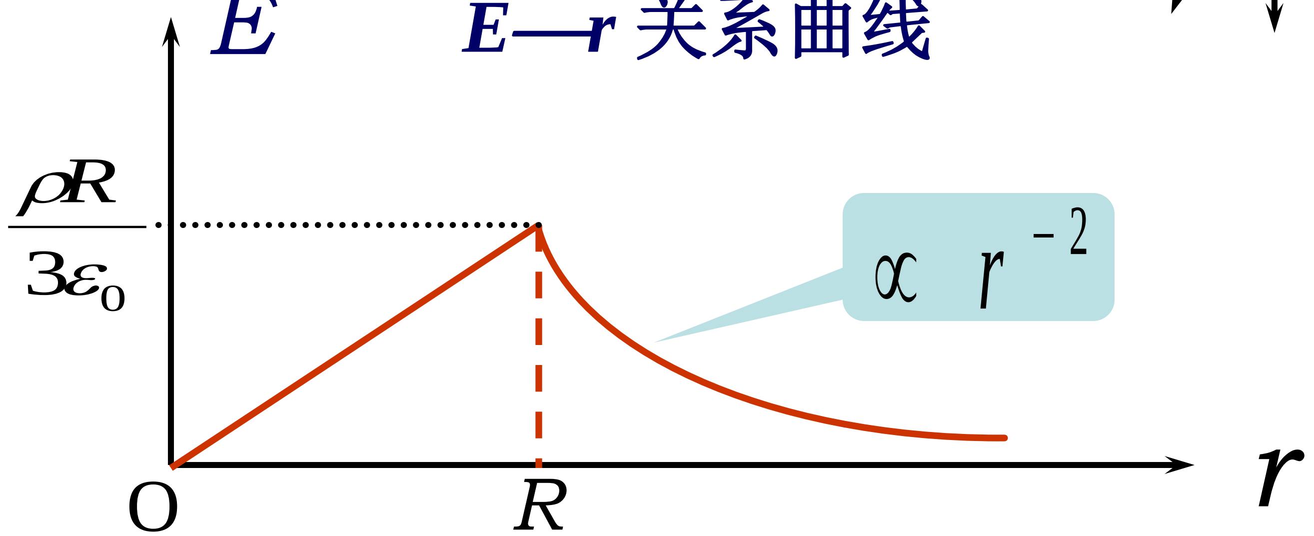
$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

均匀带电球体的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r & r<R\\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r>R\end{cases}$$

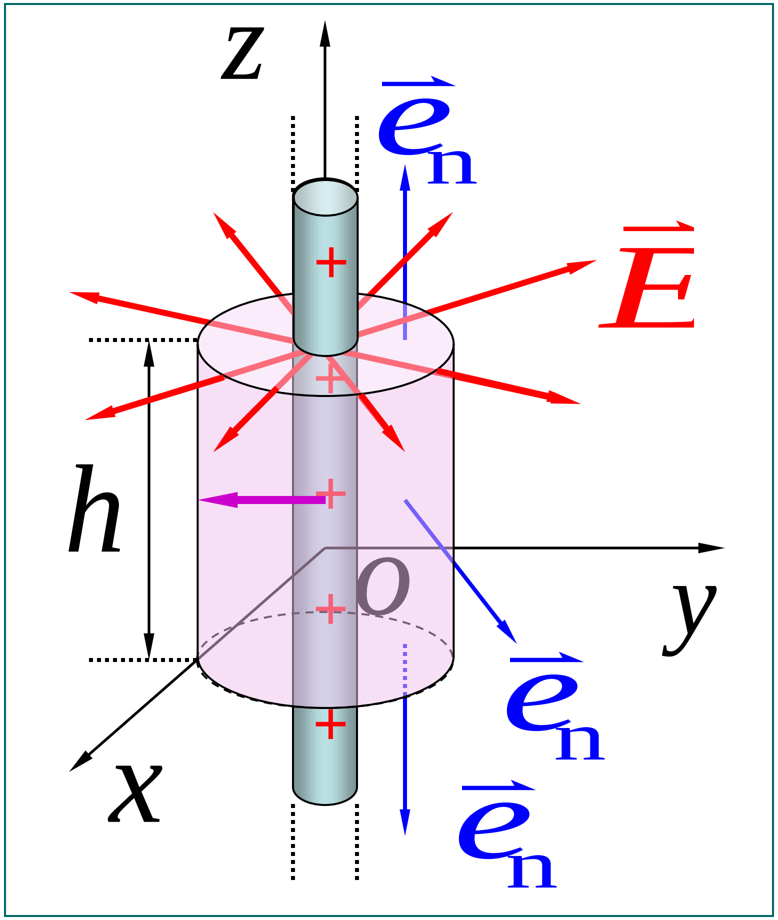


E—r 关系曲线



例4 无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ，求距直线为 r 处的电场强度.



解 对称性分析：**轴对称**

选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

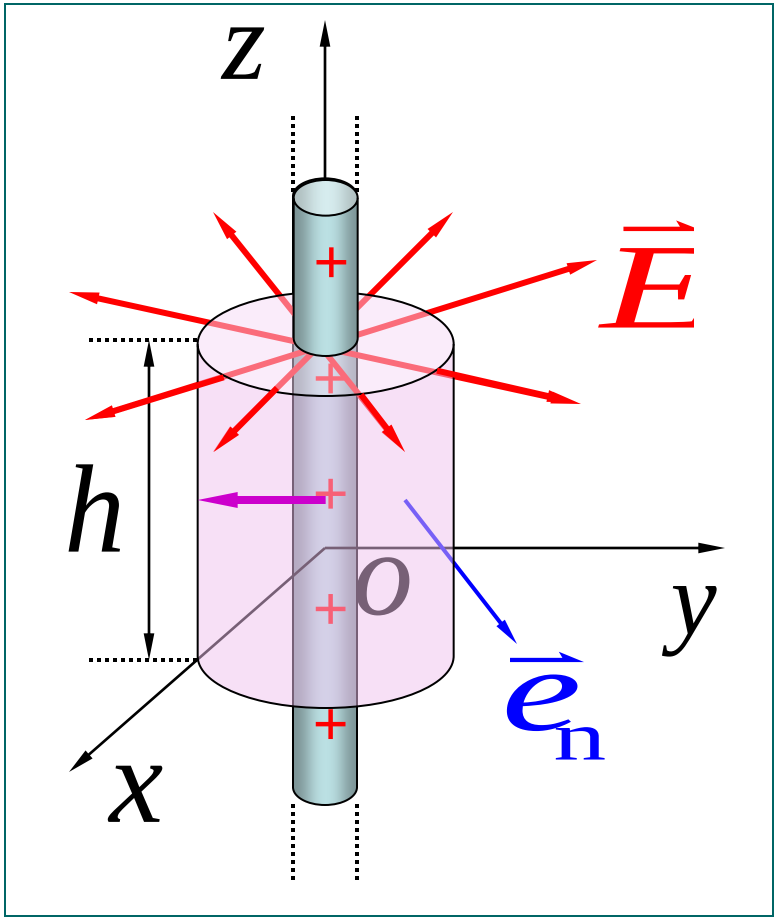
$$\int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\,\pi r h\cdot E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}}$$

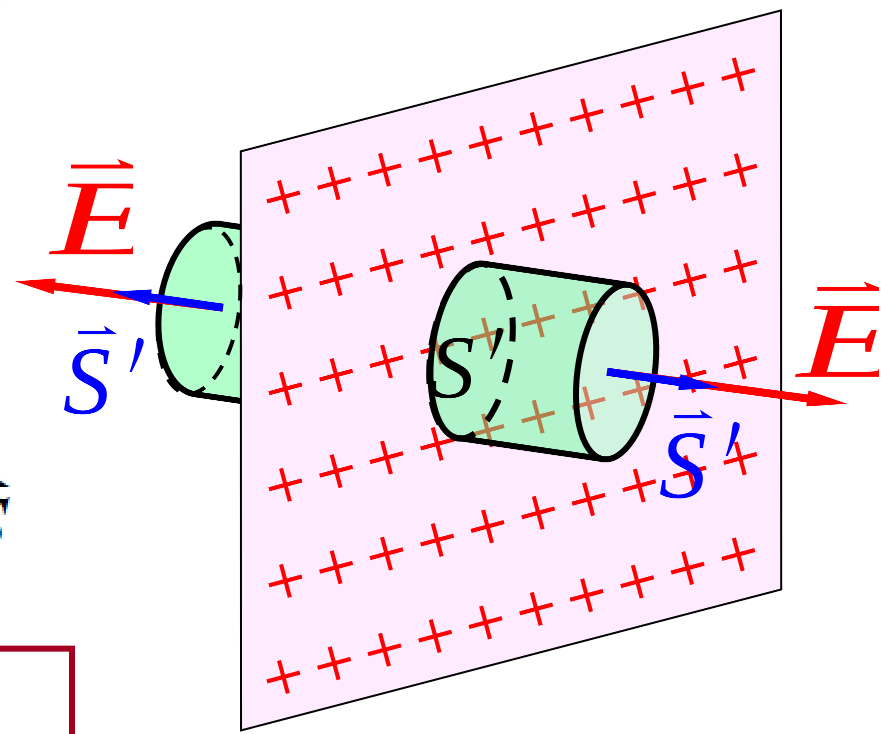


例5　无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解　对称性分析：$\vec{E}$ 垂直平面

选取闭合的柱形高斯面



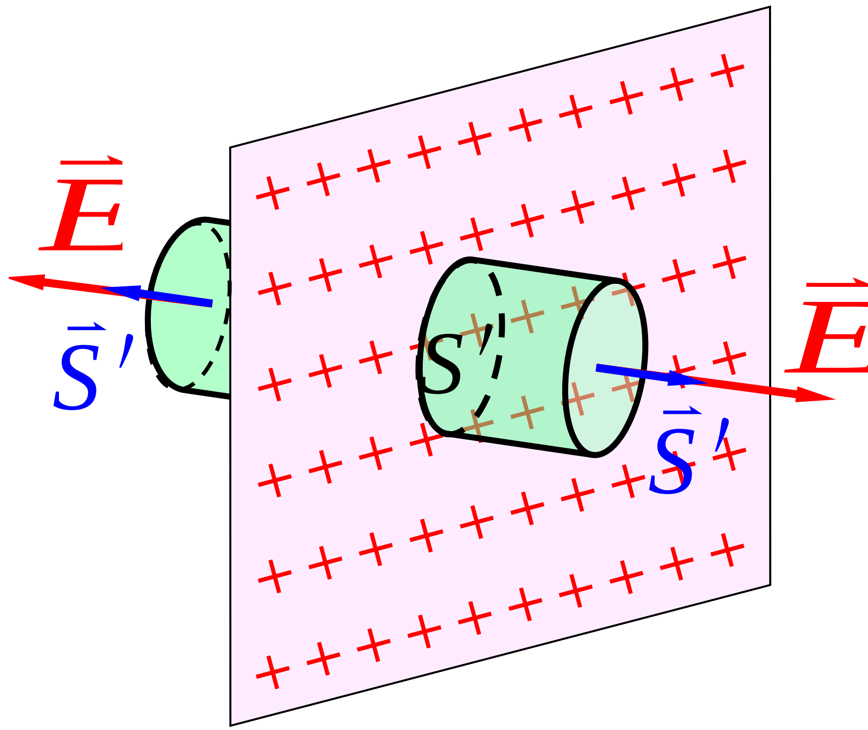
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{s(左)} \vec{E}d\vec{S} + \int_{s(右)} \vec{E}d\vec{S} + \int_{s(侧)} \vec{E}d\vec{S}$$

ES'　　ES'　　0

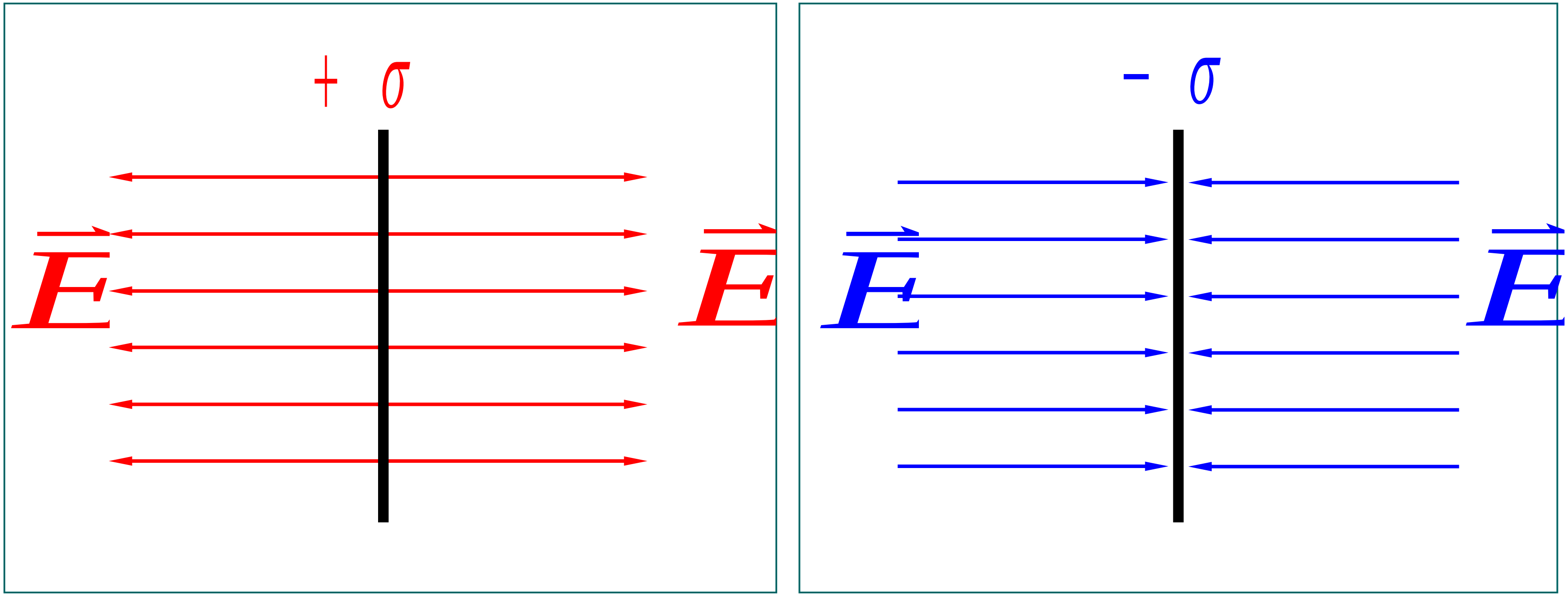
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \underbrace{\int_{s(\text{左})} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}}_{ES'} + \underbrace{\int_{s(\text{右})} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}}_{ES'} + \underbrace{\int_{s(\text{侧})} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}}_{0}$$



$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \sigma/2\varepsilon_0}$$

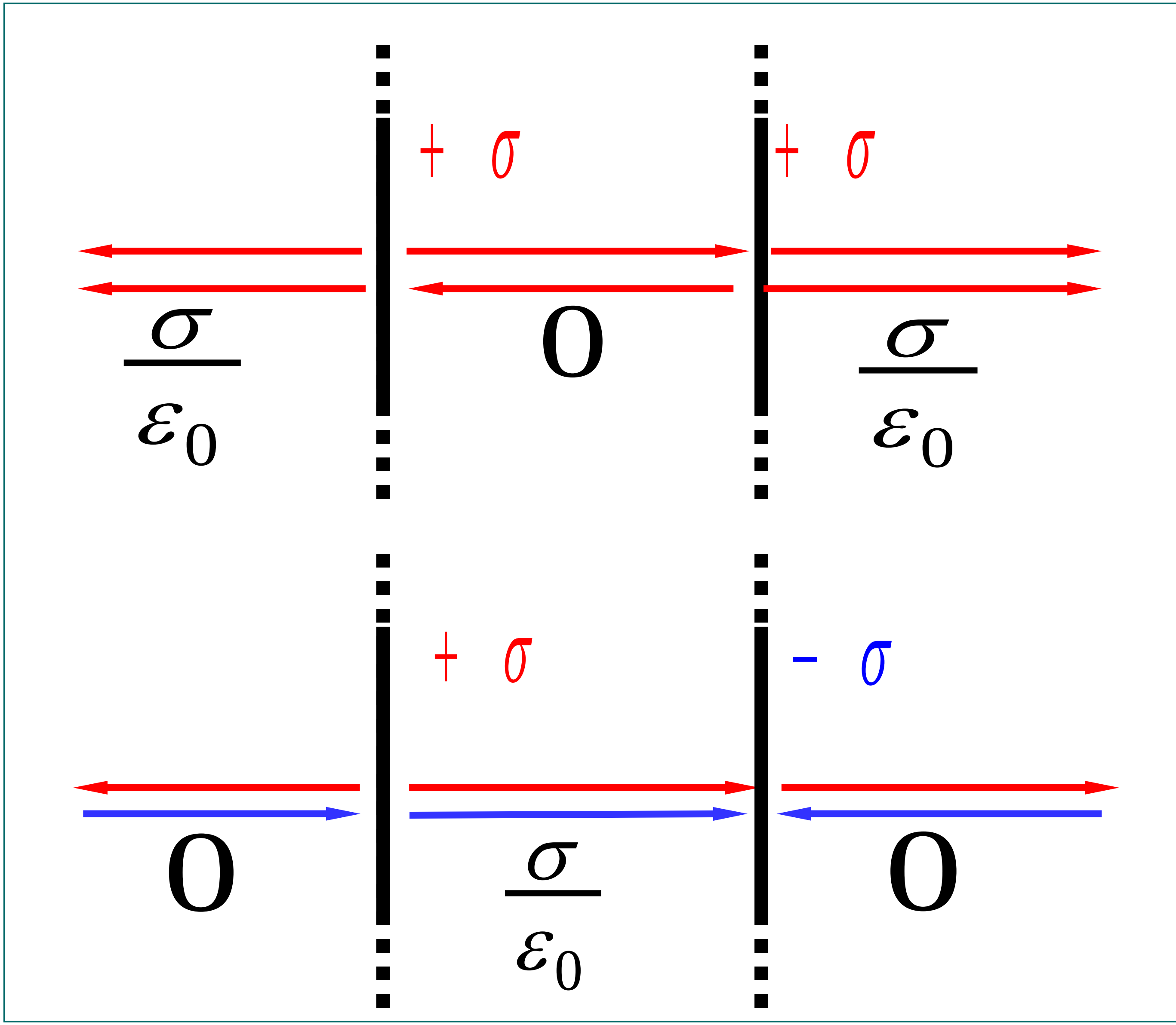


无限大均匀带电平面左右两边都是匀强电场

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

讨论

无限大带电平面的电场叠加问题



用高斯定理计算电场强度的步骤：

（1） 从电荷分布的对称性来分析电场强度的对称性，判定电场强度的方向。

（2）根据电场强度的对称性特点，作相应的高斯面（通常为球面、圆柱面等），使积分公式中的$\vec{E}$能以标量形式从积分号内提出.

（3）确定高斯面内所包围的电荷之代数和。

（4）根据高斯定理计算出电场强度大小。