前面我们从静电场对电荷有力的作用出发研究电场，用电场强度来描述电场状态，最后得出反映静电场性质的高斯定理，揭示了静电场是一个有源场。

将从电荷在电场中的移动时电场力作功这一事实出发研究电场，并用电势来描述电场的状态，从而得出反映静电场的另一个性质的环路定理，揭示静电场是一个保守场。

8-5-1 静电场的环路定理

一 静电场力所做的功

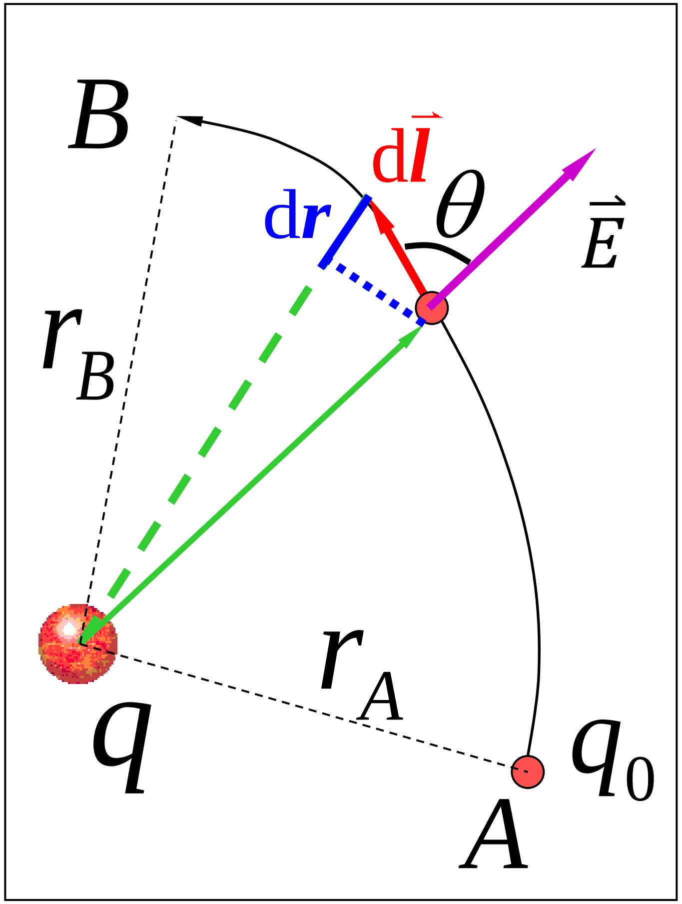
◆ 点电荷的电场

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

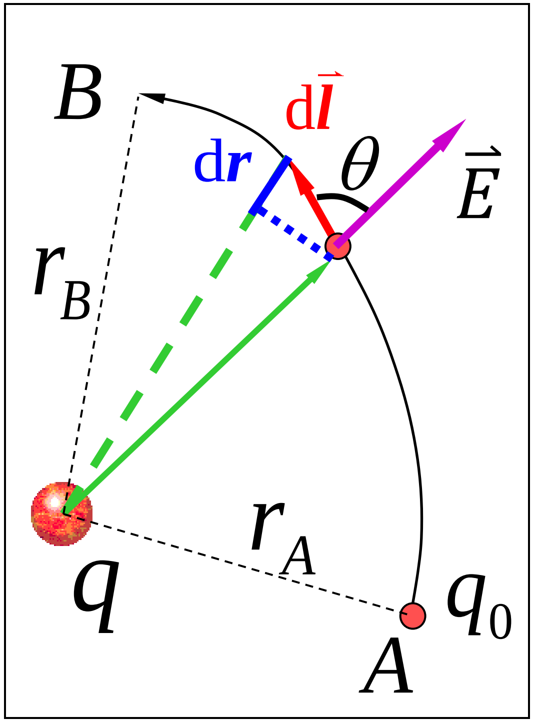
$$= \frac{qq_0}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}W = \frac{qq_0}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$



$$dW = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$



$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

结果: W 仅与 q_0的始末位置有关，与路径无关.

◈ 任意带电体系的电场

将带电体系分割为许多电荷元，根据电场的叠加性

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

电场力对试验电荷q_0做功为

$$W=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_a^b \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\cdots+q_0\int_a^b \vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=W_1+W_2+\cdots+W_n$$

总功也与路径无关

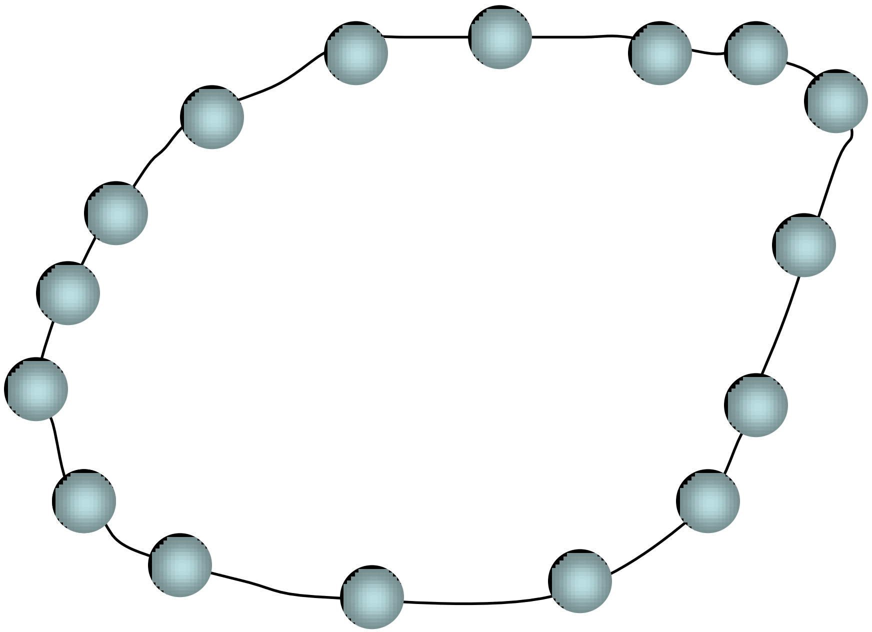
结论

试验电荷q_0在任意给定的静电场中移动时，电场力对q_0做的功仅与试验电荷q_0的电量及路径的起点和终点位置有关，而与具体路径无关。

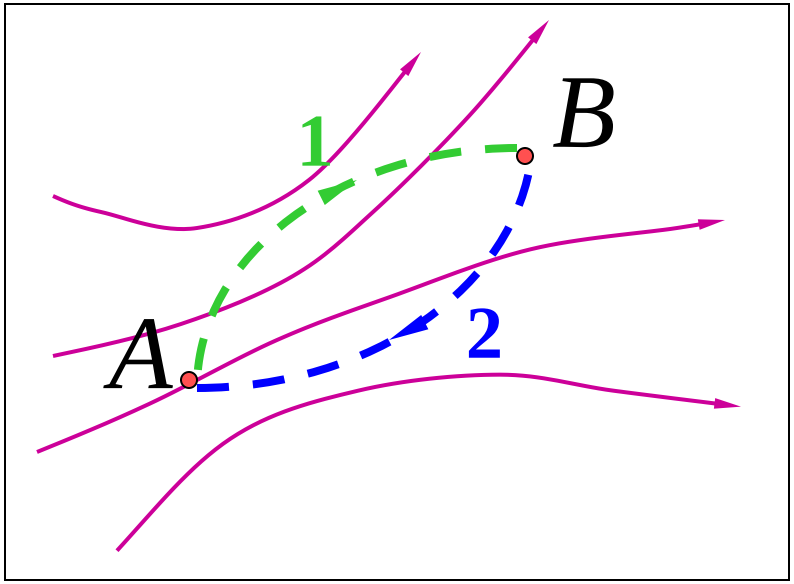
———静电场是保守场，静电场力是保守力。

二　静电场的环路定理

问题：试验电荷q_0在静电场中沿任意闭合路径L运动一周时，电场力对q_0做的功W=？



$$q_0 \int_{A1B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{A2B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



$$q_0\left(\int_{A1B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{B2A} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \right) = 0$$

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

静电场是保守场的
另一种形式

静电场的环路定理

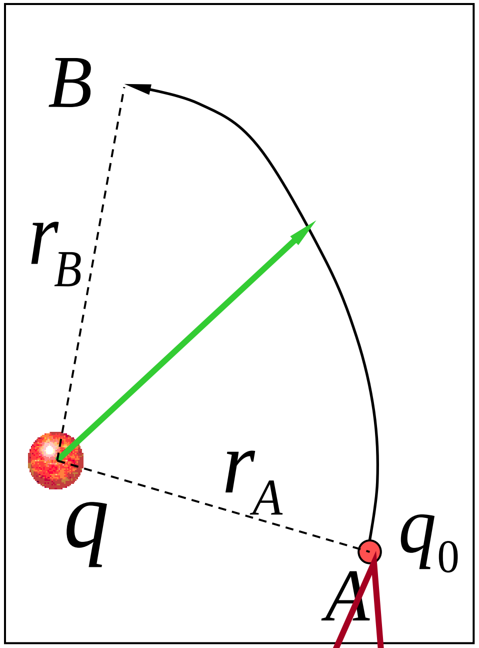
$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（称为场强的环流）恒为零。

8-5-2 电势能

由环路定理知，**静电场是保守场**

保守场必有相应的势能，对静电场则为电势能。



$$W_{AB}=E_{pA}-E_{pB}$$

$$=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

但 E_{pA} E_{pB}是多少还不能确定

E_{pA}是多少还不能确定

势能是相对量，要确定某一位置的势能，必须选取势能为零的参考点。在理论上，零势能点的选取是任意的。

选择零势能位置

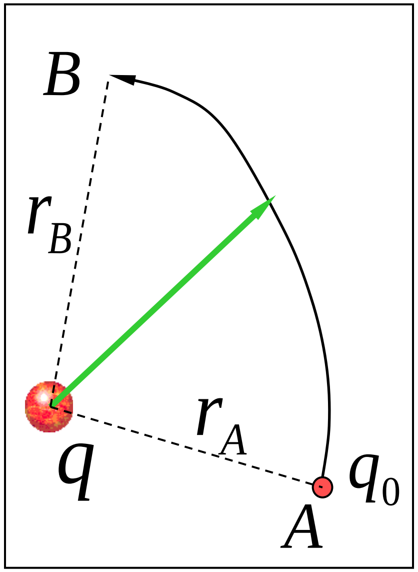
通常选择无穷远为零电势能位置，用 $E_{p\infty}=0$ 表示

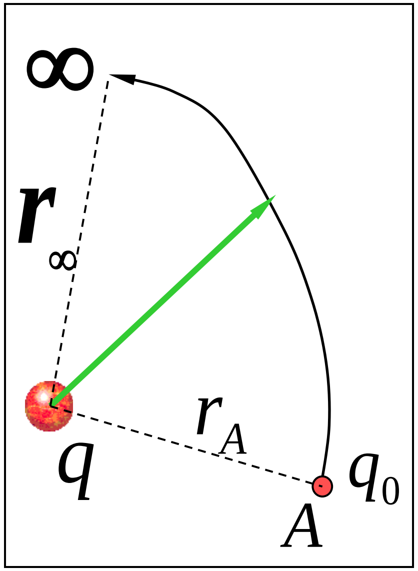
$$W_{AB}=E_{pA}-E_{pB}$$

$$=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$W_{A\infty}=E_{pA}-E_{p\infty}$$

$$=\int_A^\infty \vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



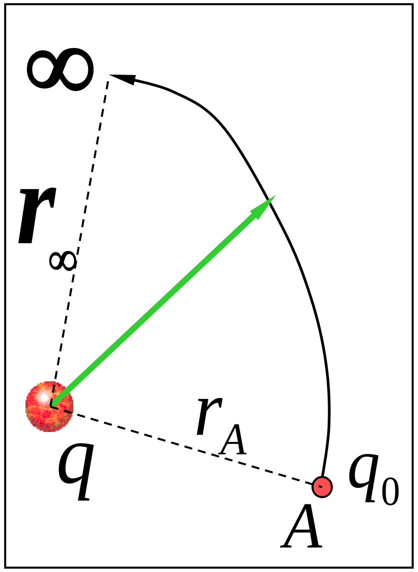


$$W_{A\infty} = E_{pA} - 0 = \int_A^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{E_{pA} = q_0 \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

积分上限为电势能零位置



试验电荷 q_0在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到无穷远处静电场力所作的功.

8-5-3 电势和电势差

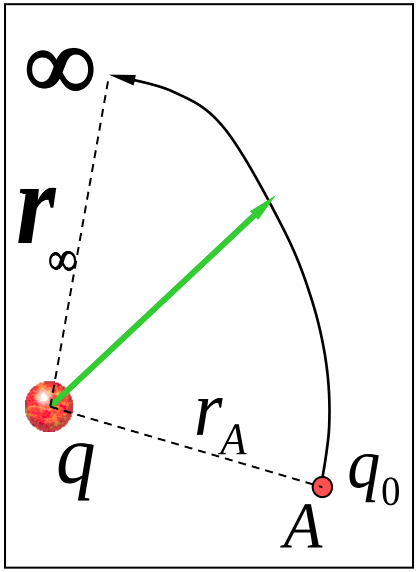
一、 电势

$$E_{pA} = q_0 \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

某点电势能E_{pA}与q_0之比只取决于电场，定义为该点的**电势**

$$V_A = \frac{E_{pA}}{q_0} = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

积分上限为电势零位置



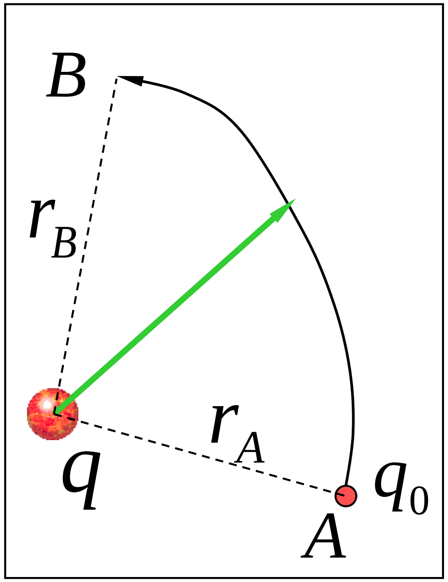
$$V_\infty = 0$$

电势零点的选取是任意的

如选B 电势零点 $V_B = 0$

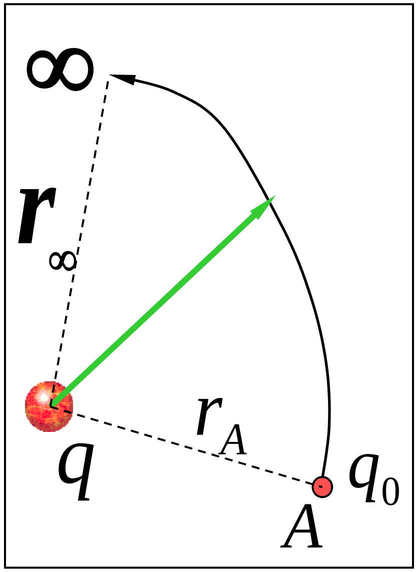
$$V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

积分上限总是为电势零位置



电势的定义

$$V_A = \frac{E_{pA}}{q_0} = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



物理意义　把单位正试验电荷从*A*点移到无穷远(**电势零点**)时，静电场力所作的功.

等价表述　单位正电荷具有的电势能

单位： 伏特　　（V）

随堂小议

1.静电场中某点电势的数值等于

(A)试验电荷q_0置于该点时具有的电势能.

(B)单位试验电荷置于该点时具有的电势能.

(C)单位正电荷置于该点时具有的电势能.

(D)把单位正电荷从该点移到电势零点外力所作的功.

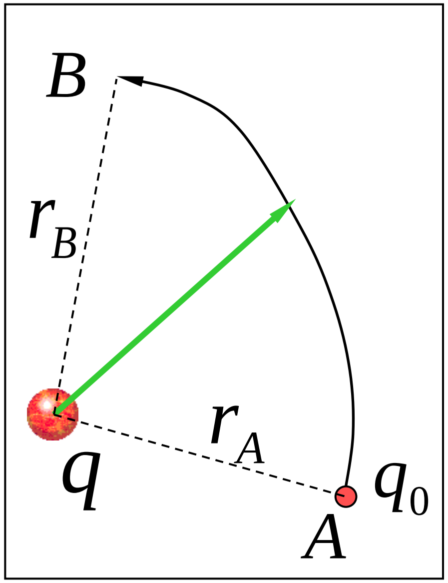
答案C

二、 电势差

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

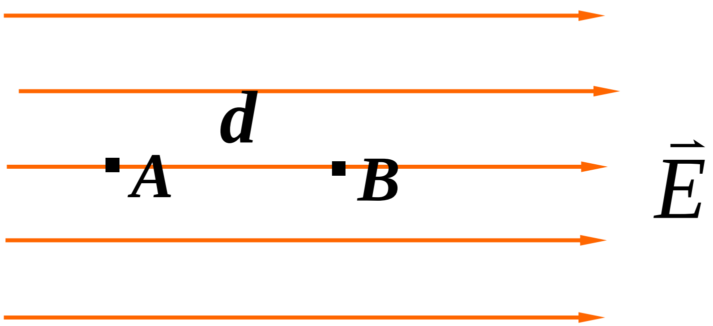
$$= \int_A^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_B^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$



物理意义 静电场中A,B两点的电势差，等于将单位正电荷从 A 移到 B电场力作的功

均强电场中的电势差



$$\boxed{U_{AB}=V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\boxed{U_{AB}=V_A-V_B=E\cdot d}$$

注意

（1）沿着电场线方向，电势降低。$\boxed{V_A>V_B}$

（2）电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；

电势大小是相对的，与电势零点的选择有关.

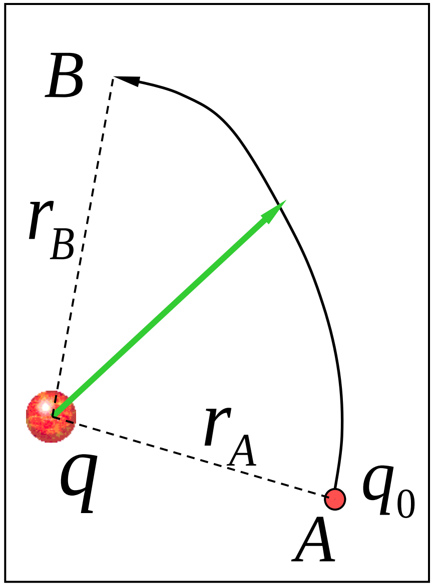
（3）用电势差计算电场力作功很方便

$$W_{AB}=E_{\mathrm{pA}}-E_{\mathrm{pB}}$$

$$=\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}=q_0\int_A^B \vec{\mathbf{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

$$=q_0\left(V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}}\right)$$

$$\boxed{W_{AB}=q_0\left(V_A-V_B\right)=q_0U_{AB}}$$



随堂小议

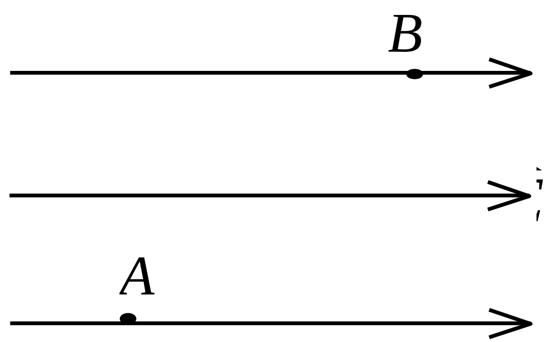
4. 在匀强电场中，将一负电荷从*A*移到*B*，如图所示．则：

（A）电场力作正功，负电荷的电势能减少．

（B）电场力作正功，负电荷的电势能增加．

（C）电场力作负功，负电荷的电势能减少．

（D）电场力作负功，负电荷的电势能增加．



答案D

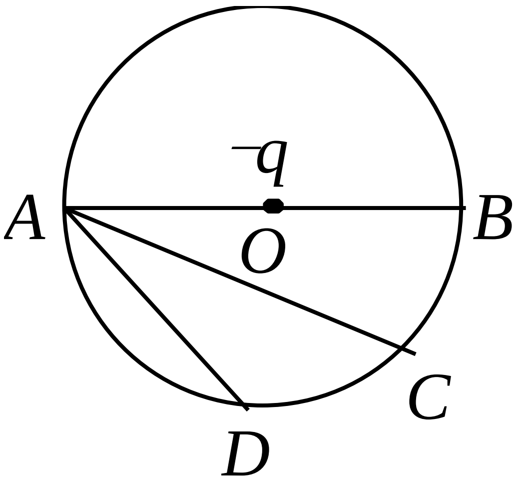
6. 点电荷-q位于圆心O处，A、B、C、D为同一圆周上的四点，如图所示．现将一试验电荷从A点分别移动到B、C、D各点，则

(A) 从A到B，电场力作功最大.

(B) 从A到C，电场力作功最大.

(C) 从A到D，电场力作功最大.

(D) 从A到各点，电场力作功相等.

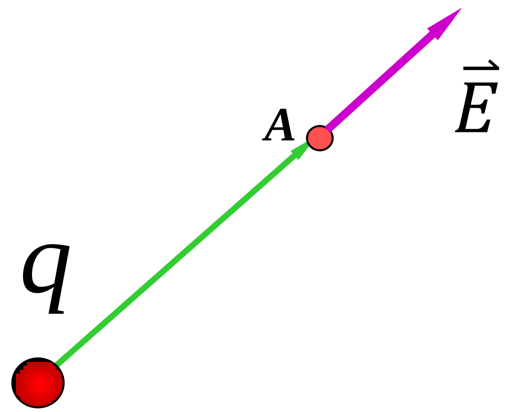


答案D

8-5-4　电势的计算(电势叠加原理)

1. 点电荷的电势

$$\boxed{V_A = \frac{E_{pA}}{q_0} = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$



$$\boxed{V_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E \cdot dr \cdot \cos\theta}$$

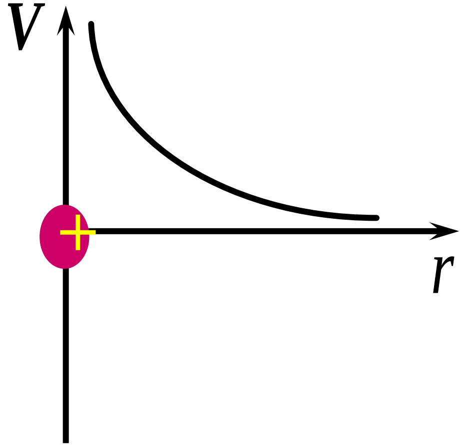
令 $V_\infty = 0$

$$V_A = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

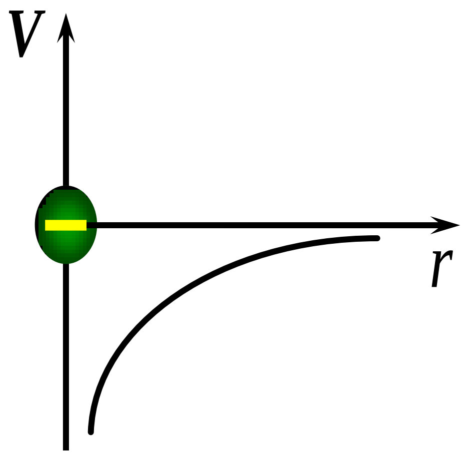
特点

源场电荷 $q>0$ $V>0$



电势越远越低

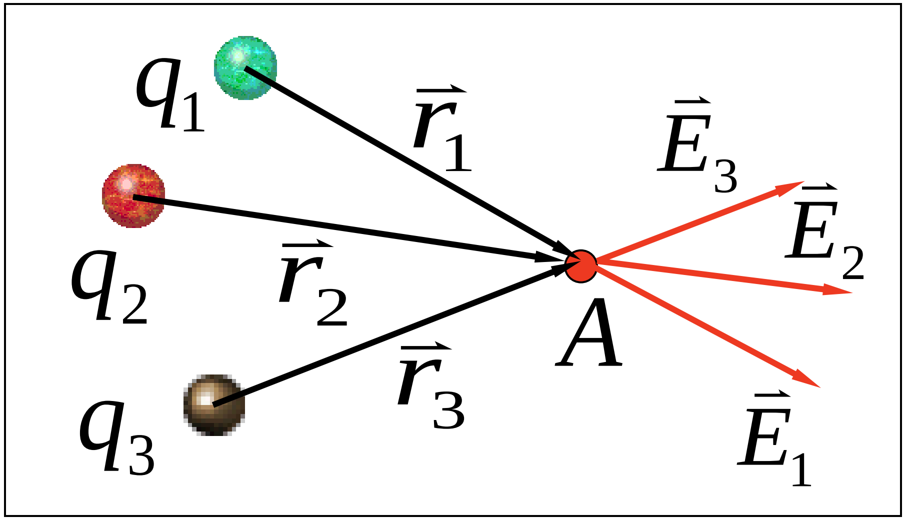
源场电荷 $q<0$ $V<0$



电势越远越高

2. 点电荷系

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$



$$V_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V_A=\int_A^{\infty}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_A^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_A^{\infty}\vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots\cdots$$

V_1 V_2 V_3

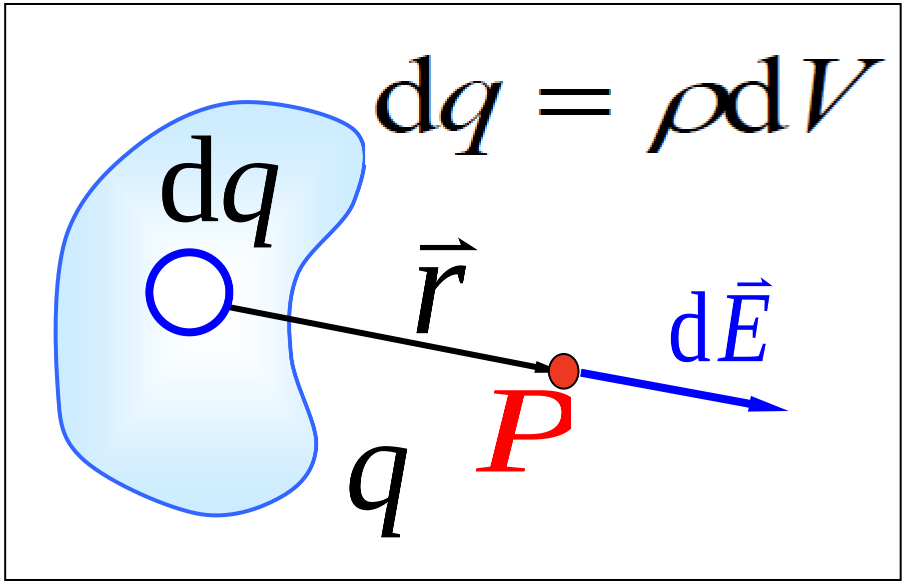
电势叠加是代数和相加

电场叠加是矢量相加

3. 电荷连续分布

$$\mathrm{d}V_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_P = \int \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



讨论

求电势的方法

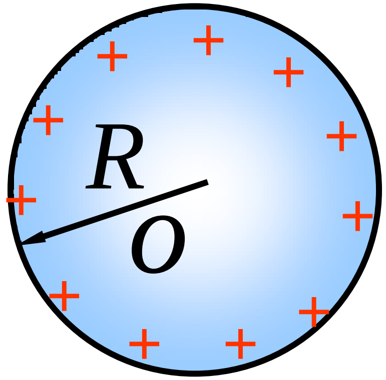
- 利用 $V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（利用了点电荷电势 $V = q/4\pi\varepsilon_0 r$，这一结果已选无限远处为电势零点，使用此公式的前提条件为**有限大**带电体且选**无限远**处为电势零点.）

- 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

则 $$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

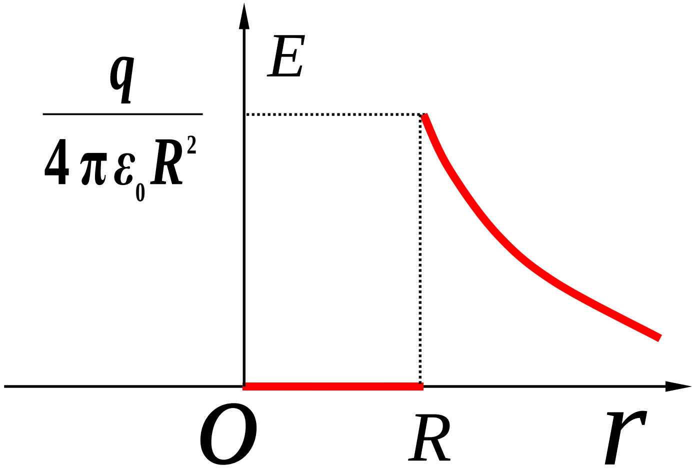
利用 $V_A = \int_A^{V=0点} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 求电势



例1. 求均匀带电球面的电势分布，半径为R，总带电量为q.

解：由高斯定律知，电场分布为

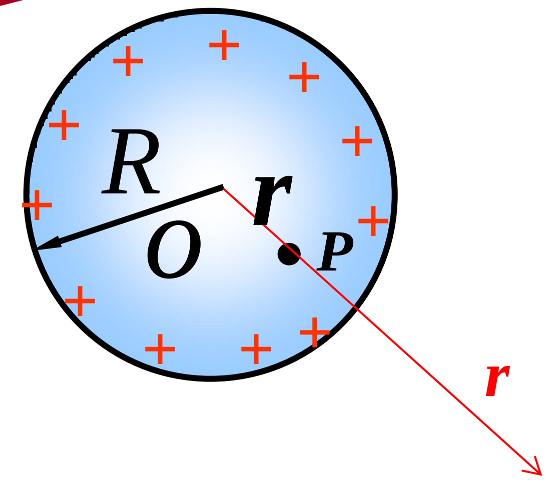
$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r^2} & r > R \end{cases}$$



注意：$r=R$时电场E是不连续的

不连续分布, 分段积分

1.当 $r < R$ 时



$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_r^R \vec{E}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

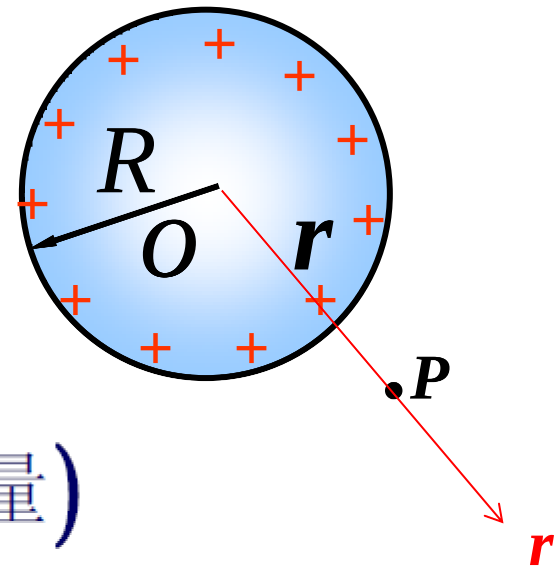
$$= \int_R^\infty \vec{E}_{外} \mathrm{d}\vec{r} = \int_R^\infty E_{外} \cos\theta \, \mathrm{d}r$$

$$= \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad (常量)$$

注意

球面内各点场强都为零，但球面内各点电势不为零，各点电势都相等。

2.当 $r > R$ 时



$$V=\int_r^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E_{外}\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

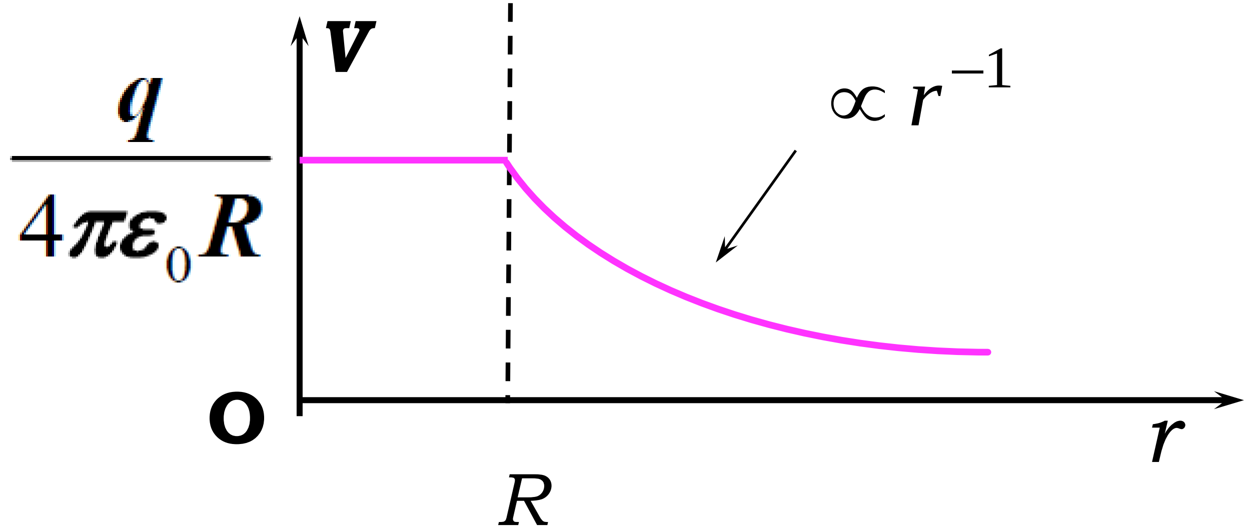
$$=\int_r^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\ (变量)$$

电势分布

$$V=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} & r\le R\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r} & r\ge R\end{cases}$$

注意：$r=R$时电势是连续的

电势分布曲线



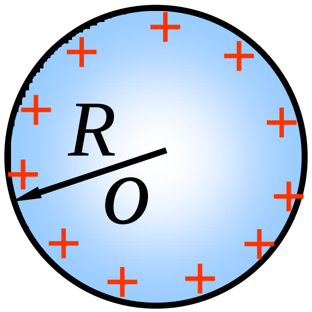
结论：均匀带电球面，球内的电势等于球表面的电势，球外的电势等效于将电荷集中于球心的点电荷的电势。

变题1 如规定球面上的电势为零，求电势分布

球面内

积分上限为电势零位置

各点电势都相等，电势都为零

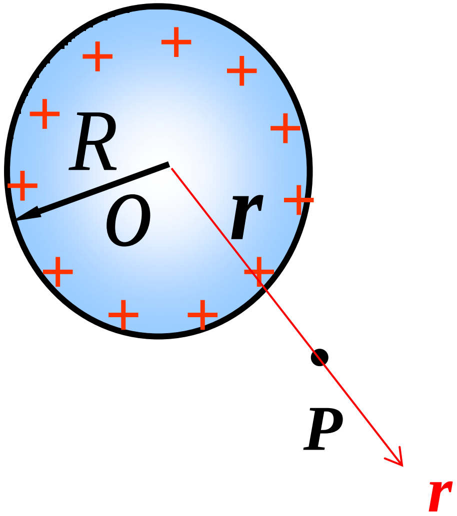


球面外

$$V=\int_r^R \vec{E}_{外}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_r^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

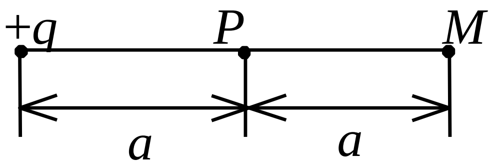


随堂小议

8. 在点电荷$+q$的电场中，若取图中P点处为电势零点， 则M点的电势为

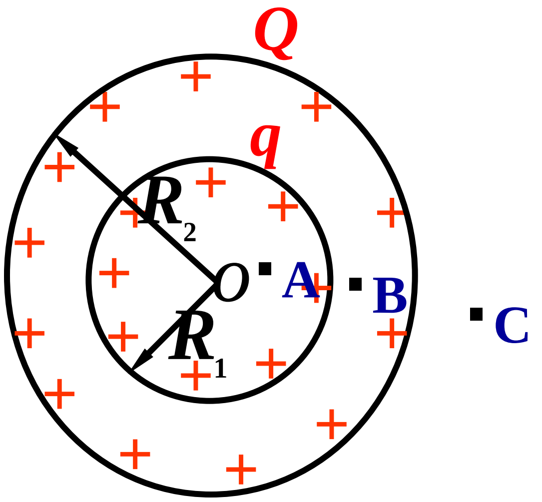
(A) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ (B) $\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

(C) $\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ (D) $\dfrac{-q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

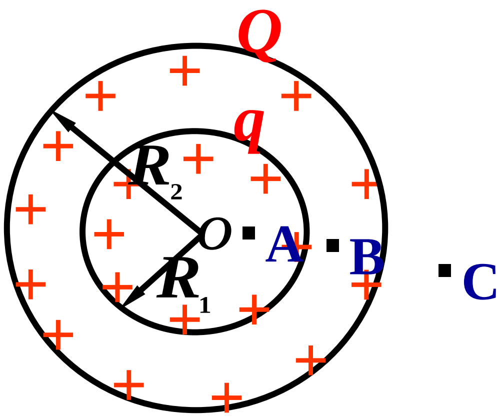


答案D

变题2　两个同心的、半径为R_1、R_2的均匀带电球面, 带电量为q、Q ，求A、B、C 三点电场、电势分布.



解法1（定义法）



$$V_A = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_r^{R_1} E_1 \cdot \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} E_3 \cdot \mathrm{d}r$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

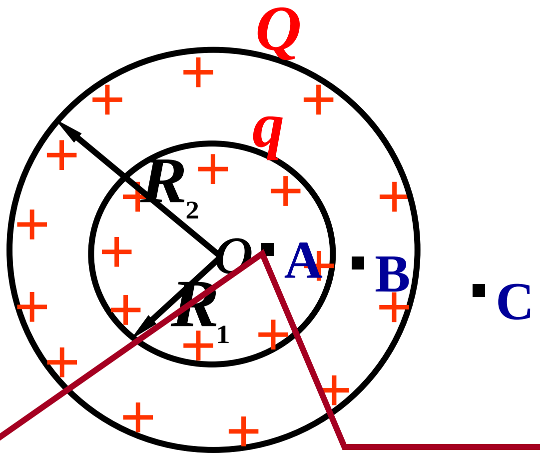
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

R_1球面产生电势

R_2球面产生电势

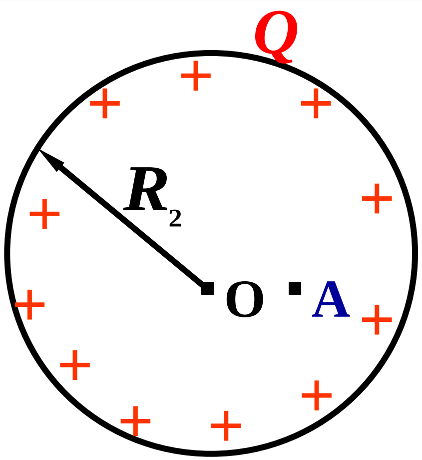
$$\begin{cases} E_1 = 0 & r < R_1 \\ E_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ E_3 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

解法2（电势叠加法）

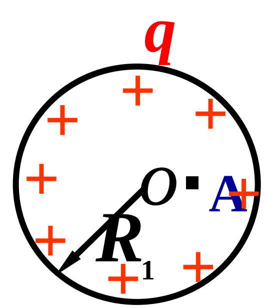


*A*点电势应是两个带电体产生的电势代数和

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



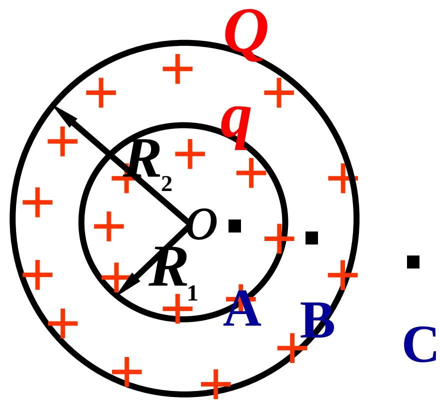
$+$



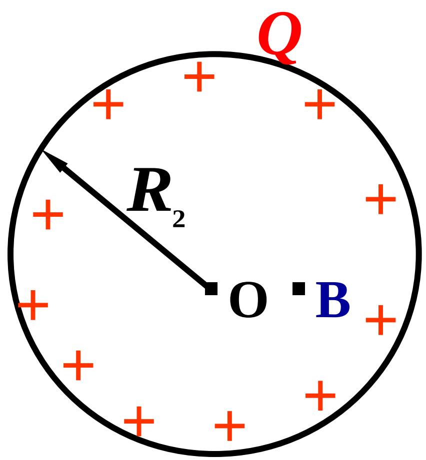
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

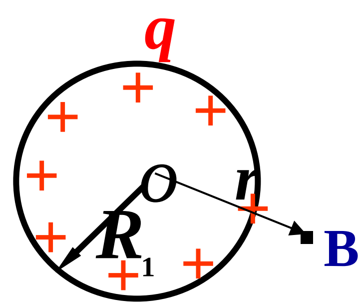
B点电势 V_B



$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$



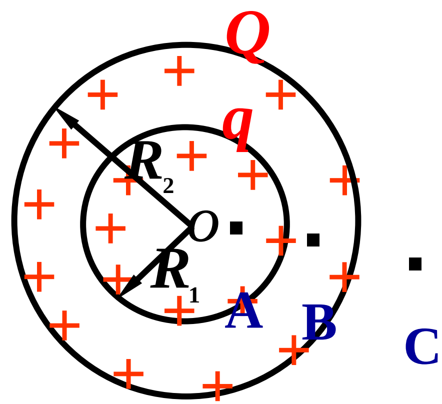
+



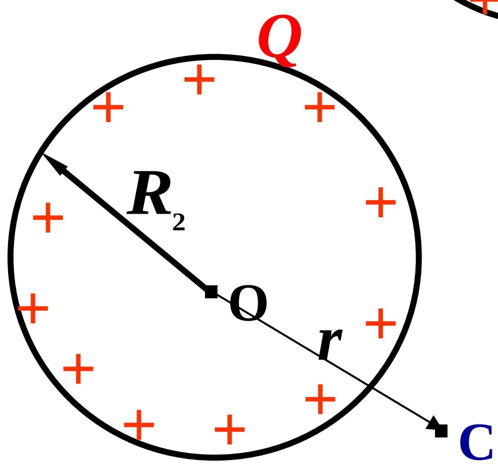
$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\boxed{V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}$$

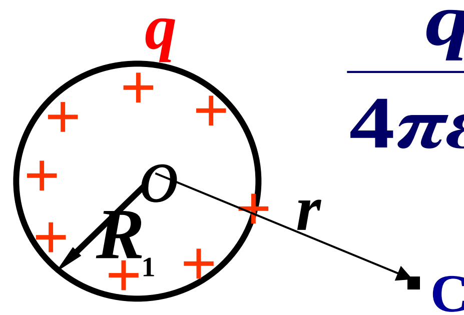
C点电势 V_C



$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



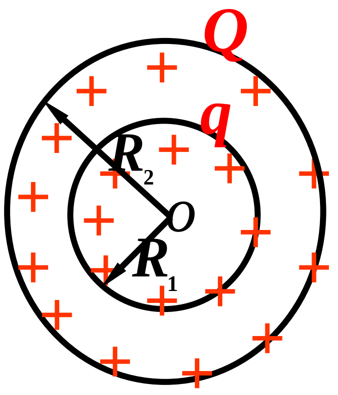
$+$



$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{V_C = \frac{q+Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}}$$

两球面间电势差



方法一

$$U_{12}=V_1-V_2$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right)$$

$$U_{12}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

方法二

$$\boxed{U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$