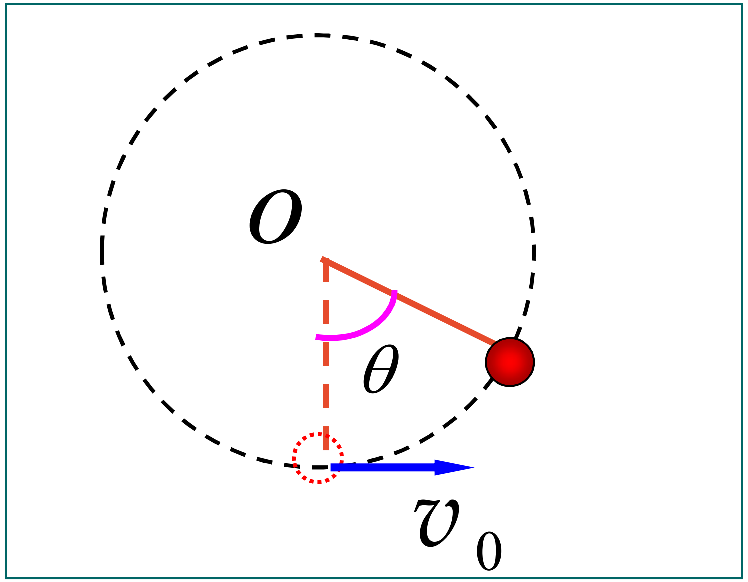
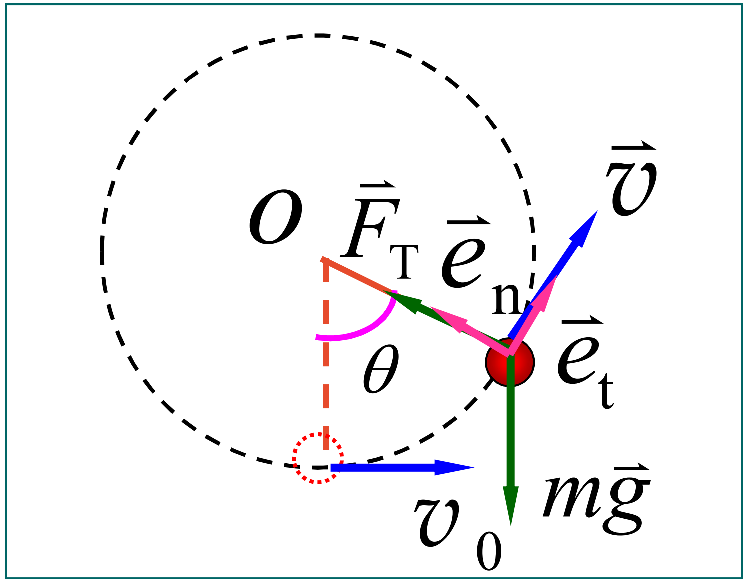
例　如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$ ，求小球在任意位置的速率及绳的张力.



例　质量为 **m** 的物体，在 $\mathbf{F = F_0 - kt}$ 的外力作用下沿 **x** 轴运动，已知 **t = 0** 时，$\mathbf{x_0 = 0}$，$\mathbf{v_0 = 0}$，求：物体在任意时刻的加速度 **a**，速度 **v** 和位移 **x** 。

例 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$，求小球在任意位置的速率及绳的张力.



解

$$\begin{cases} F_\mathrm{T} - mg\cos\theta = ma_\mathrm{n} \\ -mg\sin\theta = ma_\mathrm{t} \end{cases}$$

$$F_\mathrm{T} - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$F_\mathrm{T} = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

例 质量为 m 的物体，在 $F = F_0 - kt$ 的外力作用下沿 x 轴运动，已知 $t = 0$ 时，$x_0 = 0$, $v_0 = 0$，求：物体在任意时刻的加速度 a，速度 v 和位移 x 。

解： $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{F_0 - kt}{m} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ $\quad \therefore \mathrm{d}v = \dfrac{F_0 - kt}{m}\mathrm{d}t$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \frac{F_0 - kt}{m}\mathrm{d}t \qquad v = \frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2$$

由 $\quad v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $\quad$ 有 $\quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2\right)\mathrm{d}t \qquad x = \frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{k}{6m}t^3$$

第三章 功和能

3-1 功 功率

力的空间累积效应 ⟶ W，E，动能定理等.

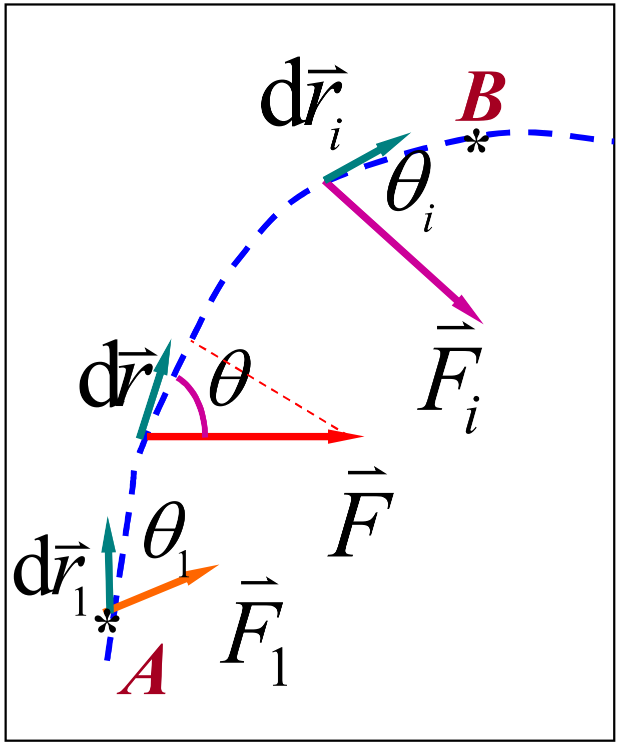
一　功

力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积 .（功是标量，过程量）

$$\mathrm{d}W = F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

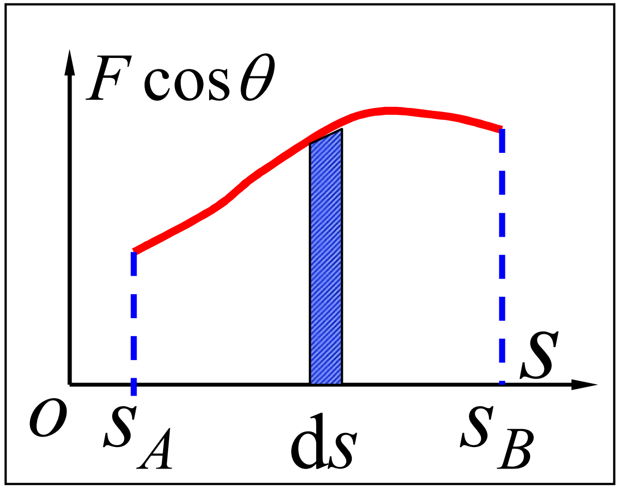
$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{cases} 0^\circ < \theta < 90^\circ, & \mathrm{d}W > 0 \\ 90^\circ < \theta < 180^\circ, & \mathrm{d}W < 0 \\ \theta = 90^\circ \quad \vec{F}\perp\mathrm{d}\vec{r} & \mathrm{d}W = 0 \end{cases}$$



- 变力的功 $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \, \mathrm{d}s}$$



- 合力的功 **=** 分力的功的代数和

$$W = \int \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum \int \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i W_i$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k} \end{cases}$$

$$W = \int F_x \mathrm{d}x + \int F_y \mathrm{d}y + \int F_z \mathrm{d}z$$

$$W = W_x + W_y + W_z$$

二　功率

做功的快慢可用功率表示

- 平均功率　$\overline{P}=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

- 瞬时功率　$P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$$P=Fv\cos\theta$$

- 功率的单位（瓦特）$1\mathrm{W}=1\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$　$1\mathrm{kW}=10^3\,\mathrm{W}$

汽车爬坡、车床切削工件都需要考虑到功与功率的问题。

例1 一个质点在恒力 $\vec{F}=-3\vec{i}-5\vec{j}+9\vec{k}(\mathrm{N})$ 作用下的位移为 $\Delta\vec{r}=4\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}(\mathrm{m})$ 则这个力在该位移过程中所做的功为：

（A）

☆ (A) $67J$,　　(B) $91J$,

(C) $17J$,　　(D) $-67J$

分析：$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

$$=(4\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k})\cdot(-3\vec{i}-5\vec{j}+9\vec{k})$$

$$=67J$$

例2 甲、乙、丙三物体的质量之比是1：2：3，若它们的动能相等，并且作用于每一个物体上的制动力都相同，则它们制动距离之比是：

（C）

（A）1：2：3　　（B）1：4：9

★（C）1：1：1　　（D）3：2：1

分析：

由动能定理可知三个制动力对物体所作的功相等；在这三个相同的制动力作用下，物体的制动距离是相同的.

例3　质量为 **2kg** 的物体由静止出发沿直线运动，作用在物体上的力为 $\boldsymbol{F}=\mathbf{6}\,\boldsymbol{t}\,(\mathbf{N})$．试求在头 **2** 秒内，此力对物体做的功.

解:

$$a_x = F_x/m = 3t \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v = \int_0^t 3t\,\mathrm{d}t \qquad v_x = 1.5t^2$$

$$\mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}t = 1.5t^2\mathrm{d}t$$

$$W = \int F\mathrm{d}x = \int_0^2 9t^3\mathrm{d}t = 36\mathrm{J}$$

例4 今有倔强系数为$\boldsymbol{k}$的弹簧（质量忽略不计）竖直放置，下端悬挂一小球，球的质量为$\boldsymbol{m_0}$，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触。今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力做功为$\underline{\quad m^2g^2/2k \quad}$。

解：小球刚能脱离地面时，弹簧伸长量为 $x=\dfrac{mg}{k}$

$$\therefore\ \mathrm{W}_{弹}=\int_0^{\frac{mg}{k}}(-kx)\mathrm{d}x=-\frac{m^2g^2}{2k}$$

$$\mathrm{W}_{外}=-\mathrm{W}_{弹}=\frac{m^2g^2}{2k}$$

3-2 动能 动能定理

一 质点的动能定理

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}|\mathrm{d}\vec{r}|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s \qquad F_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$W=\int_{v_1}^{v_2}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

- 动能（状态函数）

$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}}$$

- 动能定理

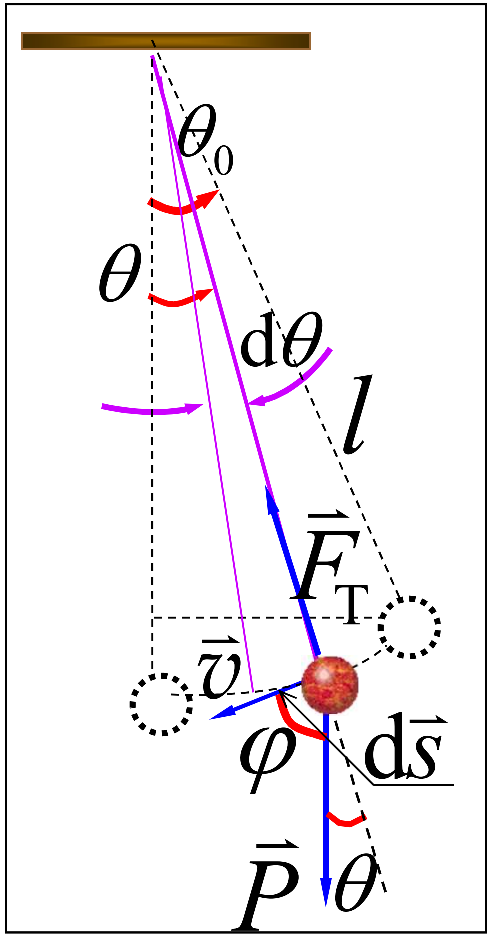
合外力对质点所做的功，等于质点动能的增量 .

$$\boxed{W=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}}$$

注意

功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系 .

例 5 一质量为1kg 的小球系在长为1m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上．起初把绳子放在与竖直线成30°角处，然后放手使小球沿圆弧下落．求绳与竖直线成10°角时小球的速率．



解：$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

$$= \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$W = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$m = 1\mathrm{kg} \qquad l = 1\mathrm{m}$$

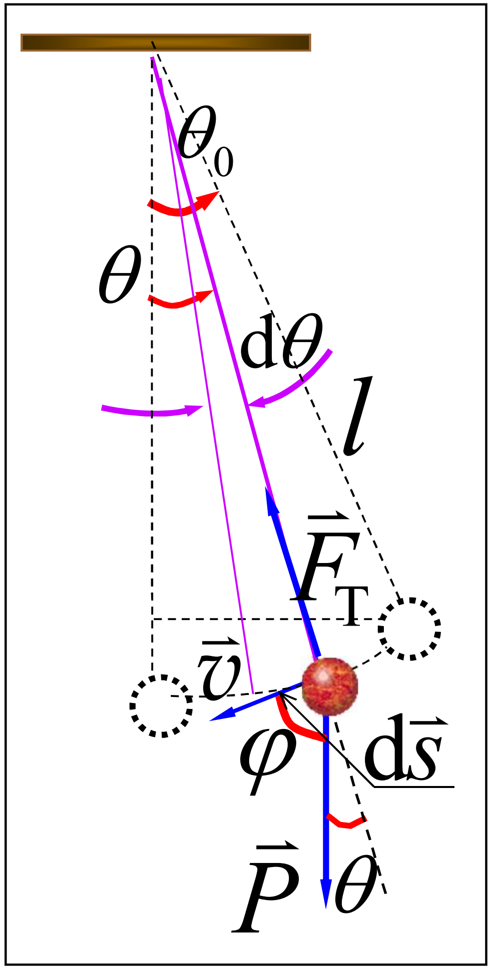
$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$W = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$= 1.53\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



二 质点系的动能定理

一般情况下，对质点系质点上的力分为内力和外力。

1. 外力的功

设作用于第 i 个质点的外力为$\vec{F}_i$，质点的元位移为$d\vec{r}_i$，此过程中$\vec{F}_i$所做功为

$$W_{i外} = \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

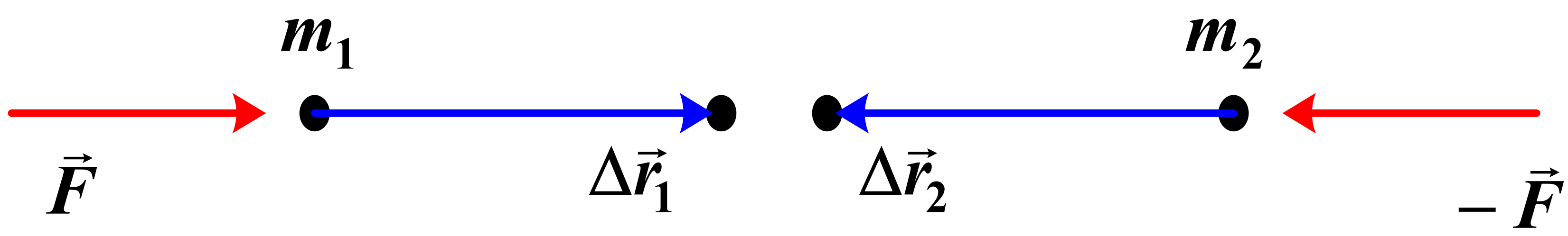
$\vec{r}_{i0}$、$\vec{r}_i$为该质点在初始位置和终了位置时的位矢。

外力对系统所做的总功为

$$W_{外} = \sum_i W_{i外} = \sum_i \int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

● 当质点系受多个外力时，外力的总功为外力做功的代数和，但不等于合外力的功，因为此时各质点的位移不相同。

例如两个质点构成的系统，每个质点受等值反向的外力$\vec{F}$与$-\vec{F}$作用产生反向的位移$\Delta\vec{r}_1$和$\Delta\vec{r}_2$，此时作用于系统的合外力为零，但总功大于零。



● 外力的总功与参考系有关，因为$d\vec{r}_i$与参考系有关。

2. 内力的功

设由m_1和m_2组成的系统，m_1对m_2的作用内力为$\vec{F}_{21}$，m_2对m_1的作用内力为$\vec{F}_{12}$。

对质点m_1，内力$\vec{F}_{12}$做功为

$$W_{1内} = \int_{\vec{r}_{10}}^{\vec{r}_1} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1$$

对质点m_2，内力$\vec{F}_{21}$做功为

$$W_{2内} = \int_{\vec{r}_{20}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

内力做功总和为

$$W_{内} = W_{1内} + W_{2内} = \int_{\vec{r}_{10}}^{\vec{r}_1} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\vec{r}_{20}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$

内力成对出现，$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$，$d\vec{r}_1-d\vec{r}_2=d\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=d\vec{r}_{12}$，$\vec{r}_{12}$为$m_1$指向$m_2$的矢径（相对位置矢量），求得内力做功

$$W_{内}=\int_{\vec{r}_{10}}^{\vec{r}_1}\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\int_{\vec{r}_{20}}^{\vec{r}_2}\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$

$$=\int\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1-\int\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2$$

$$=\int\vec{F}_{12}\cdot\left(d\vec{r}_1-d\vec{r}_2\right)=\int_{\vec{r}_{120}}^{\vec{r}_{12}}\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_{12}$$

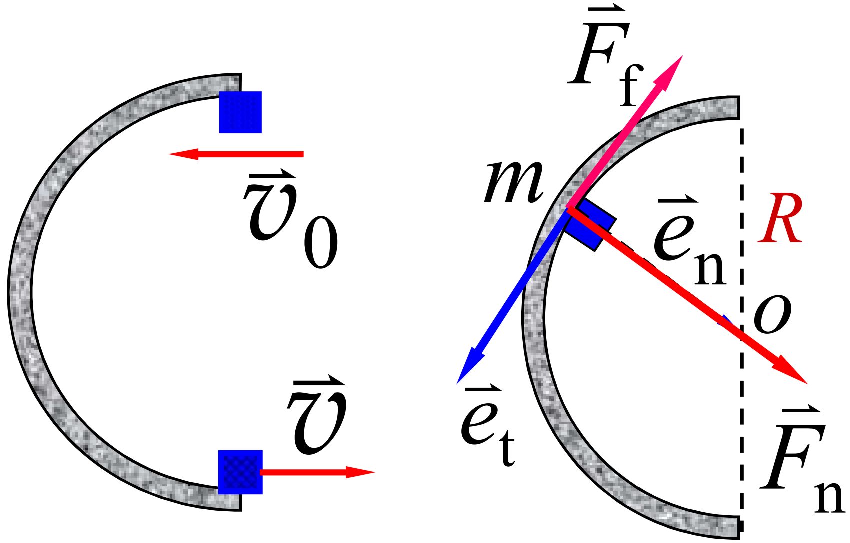
推广到 N 个质点的情况，有

$$W_{内}=\sum_i\int_{\vec{r}_{i0}}^{\vec{r}_i}\left(\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\right)\cdot d\vec{r}_i=\sum_{i<j}\int_{\vec{r}_{ij0}}^{\vec{r}_{ij}}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij}$$

注意：

1. 内力做各质点的功与参考系有关，但系统内力所做的总功与参考系无关，因为内力总功的表达式表明，内力的总功只与两质点间的相对位移有关，而相对位移与参考系是无关的。
2. 内力的矢量和为零，但内力的总功一般不为零，这是因为各质点的位移一般各不相同。

例6 在光滑水平桌面上，水平放置一固定的半圆形屏障，有一质量为 m 的滑块以初速度v_0沿切向进入屏障，设滑块与屏障间的摩擦系数为μ，求 滑块从屏另一端滑出时，摩擦力所作的功.



解: 设圆半径为 R，

摩擦力 $\vec{F}_{\mathrm{f}}$，

屏障的作用力$\vec{F}_{\mathrm{n}}$.

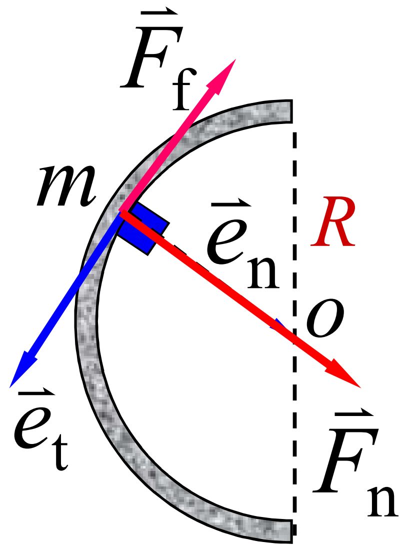
$$\because \vec{F}_{\mathrm{n}} \perp \mathrm{d}\vec{r} \quad \therefore W_{F_{\mathrm{n}}} = 0$$

质点动能定理 $$W = W_{F_{\mathrm{f}}} = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2)$$

$$W_{F_\mathrm{f}}=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)$$

摩擦力 $F_\mathrm{f}=\mu F_\mathrm{n}$

$$-F_\mathrm{f}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad F_\mathrm{n}=m\frac{v^2}{R}$$



$$F_\mathrm{f}=-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\mu m\frac{v^2}{R}$$

由 $\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int_0^{\pi R}\frac{\mu}{R}\mathrm{d}s$ 得 $\ln\frac{v}{v_0}=-\mu\pi$

$$v=v_0e^{-\pi\mu}$$

摩擦力的功 $W=\frac{1}{2}mv_0^2(e^{-2\pi\mu}-1)<0$