

# 第二篇 电磁学

## 一 电磁学

广义的电磁学可以说是包含电学和磁学，但狭义来说是一门探讨电性与磁性交互关系的学科，主要研究电荷、电场与磁场的基本性质和基本规律及其相互联系科学。是电工学，无线电技术的基础课程。

## 二 历史

静磁现象和静电现象很早就受到人类注意。公元前6、7世纪发现了磁石吸铁、磁石指南以及摩擦生电等现象。系统地对这些现象进行研究则始于16世纪。

**1600年**英国医生**吉尔伯特**发表了《论磁、磁体和地球作为一个巨大的磁体》

**1785年****库仑**公布了用扭秤实验得到电力的平方反比定律，使电学和磁学进入了定量研究的阶段。

**1800年****伏特**发明电堆，使稳恒电流的产生有了可能，电学由静电走向动电。

**1819年****奥斯特**发现电流的磁效应。电学与磁学彼此隔绝的情况有了突破，开始了电磁学的新阶段。

**19世纪二、三十年代成了电磁学大发展的时期。**

**1820年**法国科学家**安培**，研究了载流导线之间的相互作用，建立了电流元之间的相互作用规律——**安培定律**。

英国物理学家**法拉第**对电磁学的贡献尤为突出。  
**1831年**发现电磁感应现象，进一步证实了电现象与磁现象的统一性。

**1865年**，**麦克斯韦**把法拉第和安培规律结合在一起，用一套方程组概括电磁规律，建立了电磁场理论，预测了光的电磁性质，终于实现了物理学史上第二次大综合。

# 第8章 真空中的静电场

## § 8.1 电荷

### 1、 电荷（电荷的种类）

摩擦起电和雷电：对电的最早认识





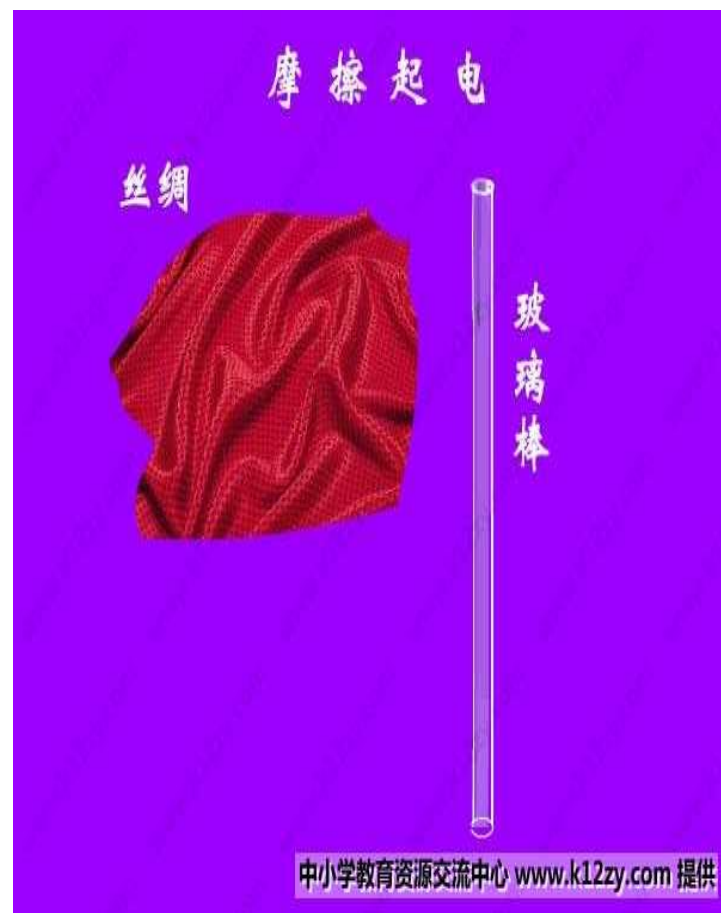
物体带电最简单直观的表现能**吸引轻小物体**。

**实验证明：**自然界中只存在两种电荷。

**规定：**绸子摩擦过的玻璃棒带的电荷叫**正电荷**，用毛皮摩擦过的橡胶棒带的电荷叫**负电荷**。

**电荷间的相互作用：**

同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。





## 2.电荷的基元性（量子性）

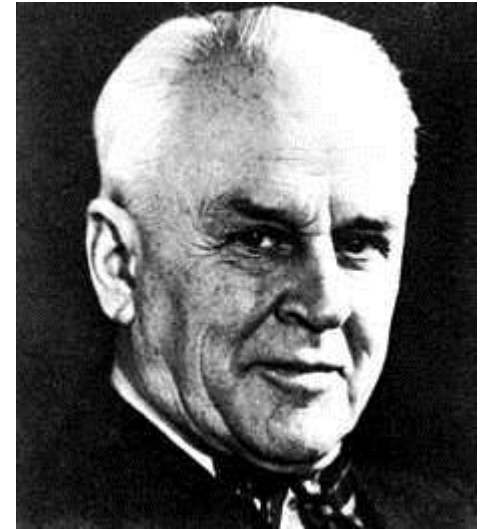
电荷量：带电物体所带电荷

任何电荷的电量总是电子电量的正负整数倍。

$$q = \pm Ne$$

$$e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

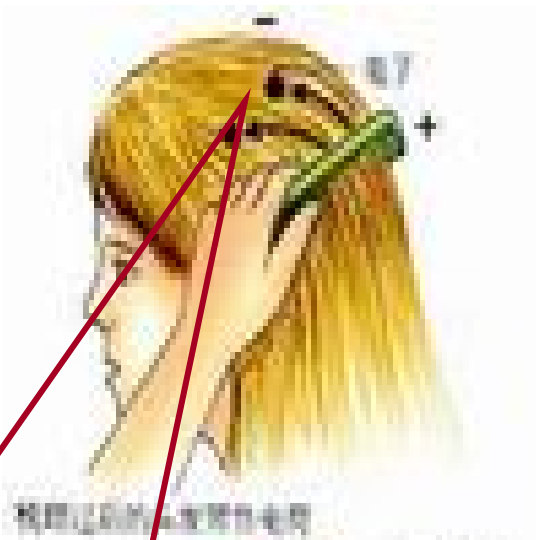
- $e=1.602 \times 10^{-19}$ 库仑，为电子电量



密立根

### 3. 电荷守恒定律

摩擦起电是电子由一个物体转移到另一个物体的结果。因此原来不带电的两个物体摩擦起电时，它们所带的电量在数值上必然相等。



系统所带的正负电荷电量的  
代数和总是保持不变—**电荷守恒定律**

**电荷守恒定律：**在一个孤立系统中，无论发生了怎样的物理过程，电荷不会创生，也不会消失，只能从一个物体转移到另一个物体上。

#### 4、 电荷电量的相对论不变性

任何带电体的电量与其运动速度无关，  
或者说，不同的参照系对同一带电体  
所测的电量是相同的。

## § 8.2 库仑定律与电力的叠加原理

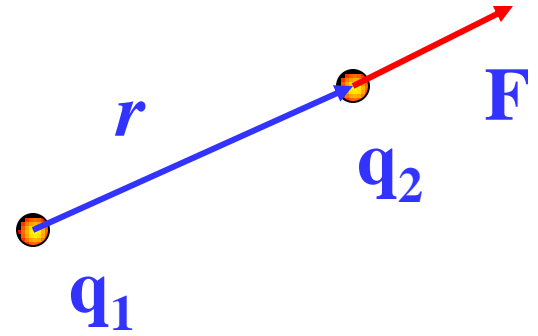


库仑（**Coulomb 1736 -- 1806**），法国工程师、物理学家。**1785~1789**年，用扭秤测量静电力，导出著名的库仑定律。库仑定律使电磁学的研究从**定性进入定量**阶段，是电磁学史上一块重要的里程碑。

# 一 库仑定律

## 1. 表述：

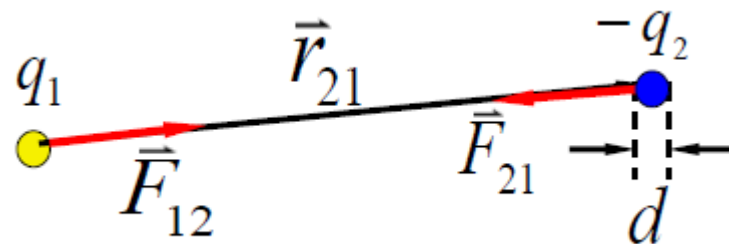
在真空（或自由空间）中，两个静止点电荷 $q_1$ 及 $q_2$ 之间的相互作用力的大小和 $q_1$ 与 $q_2$ 的乘积成正比，和它们之间距离 $r$ 的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。



$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

点电荷：只带电荷而没有形状和大小的物体。

点电荷模型 ( $d \ll r_{21}$ )



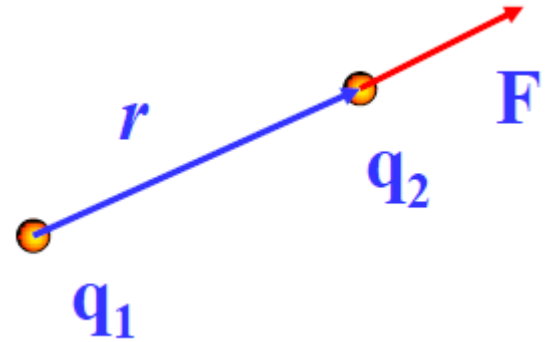
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

相互作用力的大小

## 2、库仑定律的数学表达式：

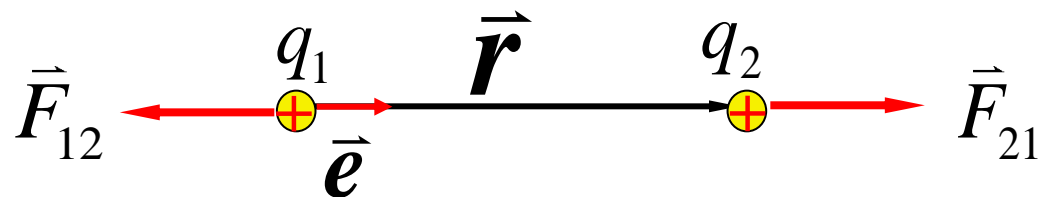
标量式

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

矢量式



$\vec{e}$  为  $\vec{r}$  矢量单位矢量  $\vec{r} = |\vec{r}|\vec{e} = r\vec{e}$   $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e} = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}_{12}$$



$$\text{令 } k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 \text{ 为真空电容率})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

引入  $\varepsilon_0$  同时引入  $4\pi$ ，虽使库仑定律形式变得复杂，但重要的是为以后从它推得公式变得简单。

真空中的库仑定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e} = -\vec{F}_{12}$$

### 3、讨论：

- 库仑定律只适合于真空中（或自由空间中）的点电荷相互作用。
- 实验发现：在 $10^{-15}$ 米至 $10^3$ 米范围内库仑定律都成立。这表明库仑力是长程力。
- 库仑力遵守牛顿第三定律。

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

**例1** 在氢原子内, 电子和质子的间距为  $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ .

求它们之间电相互作用和万有引力, 并比较它们的大小.

**解**  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$        $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$

$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$        $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

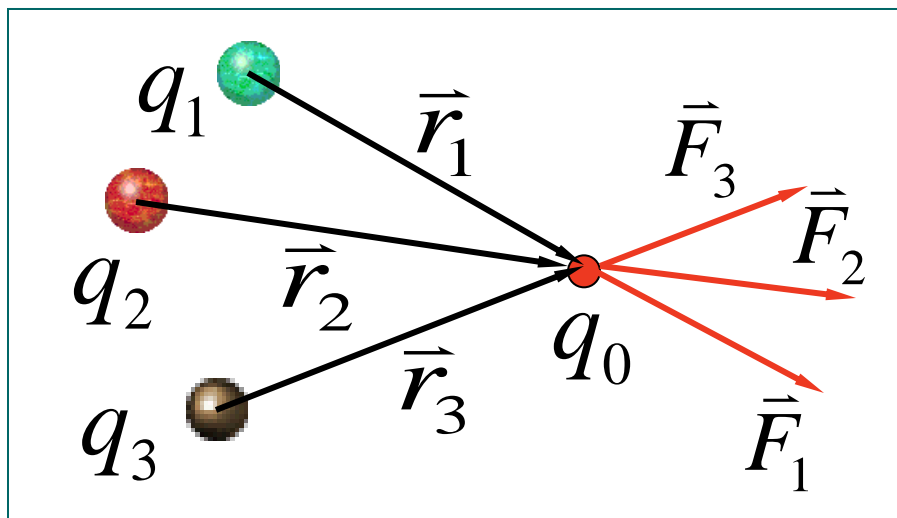
$$\left. \begin{aligned} F_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{N} \\ F_g &= G \frac{m_e m_p}{r^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{N} \end{aligned} \right\} \frac{F_e}{F_g} = 2.28 \times 10^{39}$$

(微观领域中, 万有引力比库仑力小得多, 可忽略不计.)

## 二 电力的叠加原理

点电荷  $q_i$  对  $q_0$  的作用力

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \vec{e}_i$$



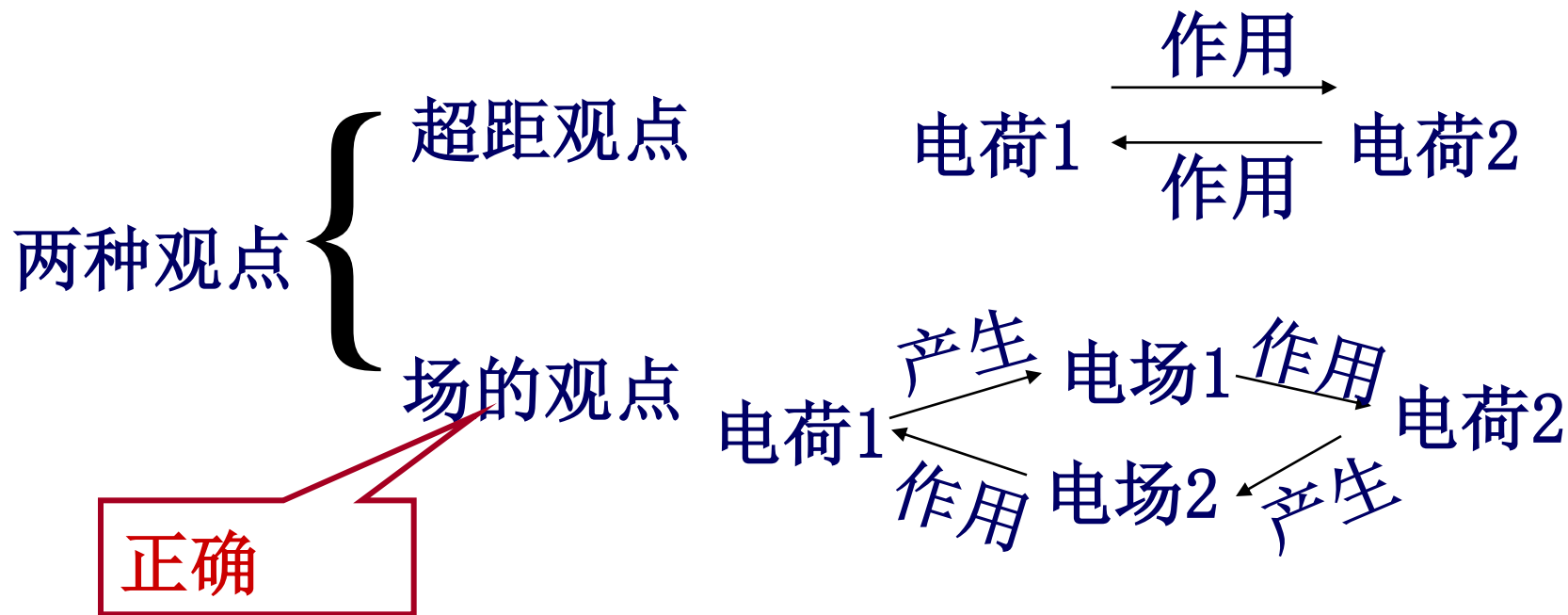
由力的叠加原理得  $q_0$  所受合力

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \vec{e}_i$$

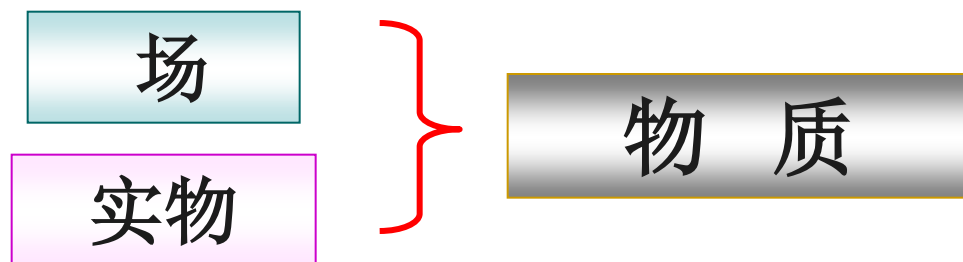
## § 8.3 电场 电场强度

### 一 电场

实验证实了两静止电荷间存在相互作用的静电力，但其相互作用是怎样实现的？



场是一种特殊形态的物质



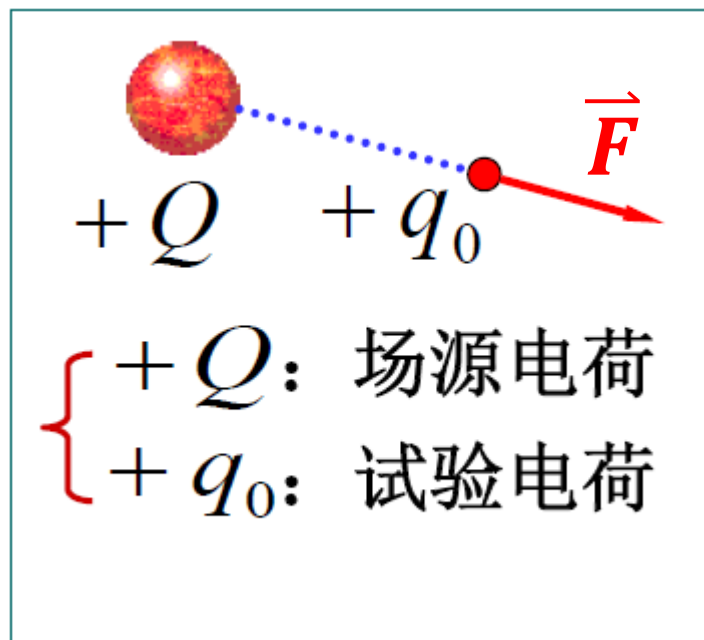
**静电场：**相对于观察者静止的电荷在周围空间激发的电场。

## 二 电场强度

- 试验电荷 $q_0$ 及条件

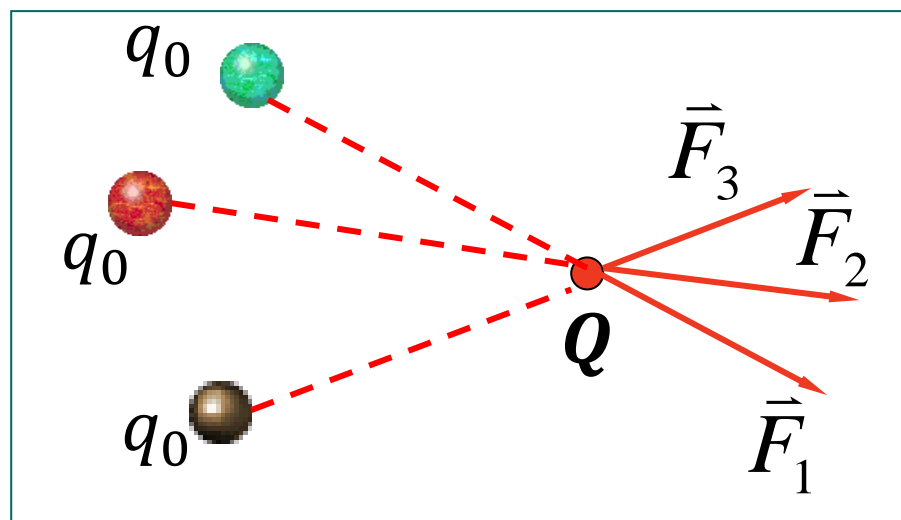
(1) 点电荷（尺寸小）

(2)  $q_0$ 电量足够小，对待测电场影响可忽略



1. 在电场的不同点上放同样的试验电荷 $q_0$

结论：电场中各处的力学性质不同。



2. 在电场的同一点上放不同的试验电荷

结论：

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \text{恒矢量}$$



## 电场强度定义：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{单位：N C}^{-1} \text{或V m}^{-1}$$

1. 电场强度的大小为 $F/q_0$ 。
2. 电场强度的方向为**正电荷**在该处所受电场力的方向。

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

## 随堂小议

1. 关于电场强度定义式  $\vec{E} = \vec{F} / q_0$ ，下列说法中哪个是正确的？

- (A) 场强  $\vec{E}$  的大小与试探电荷  $q_0$  的大小成反比.
- (B) 对场中某点，试探电荷受力  $\vec{F}$  与  $q_0$  的比值不因  $q_0$  而变.
- (C) 试探电荷受力的方向就是场强  $\vec{E}$  的方向.
- (D) 若场中某点不放试探电荷  $q_0$ ，则  $\vec{F} = 0$ ，从而  $\vec{E} = 0$  .

答案B

## § 8.4 电场强度的计算

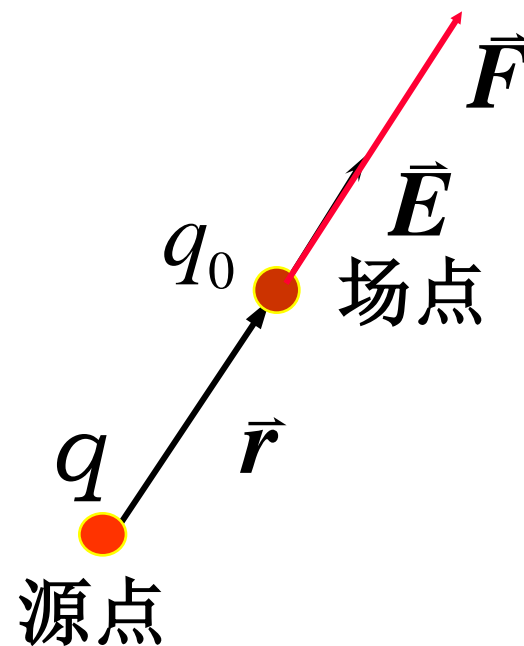
### 一 点电荷电场中的电场强度

根据库仑定律，有

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}$$

根据 $\vec{E}$ 的定义，得

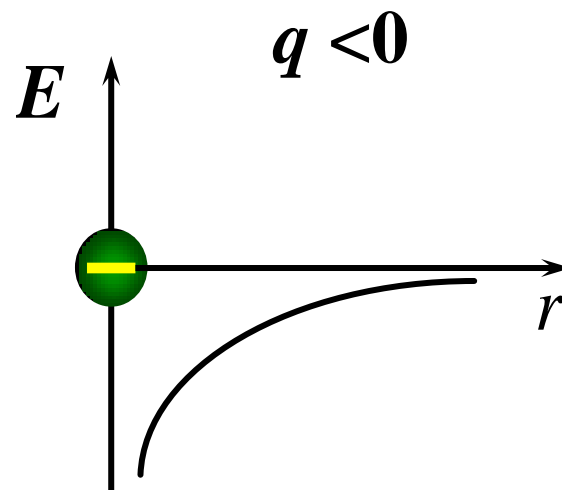
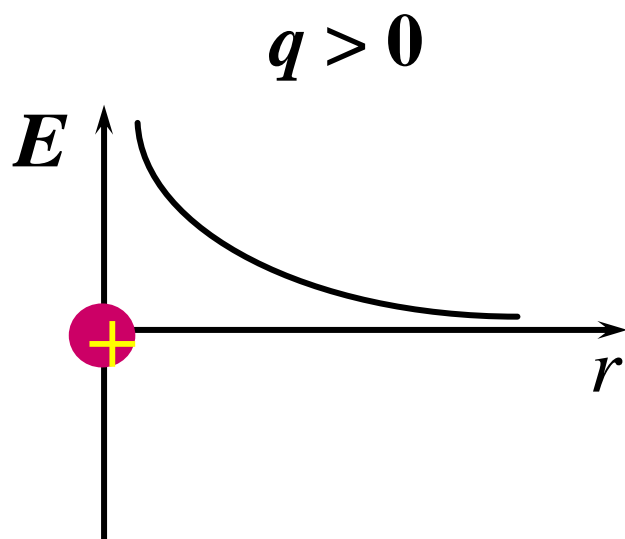
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}$$



特点

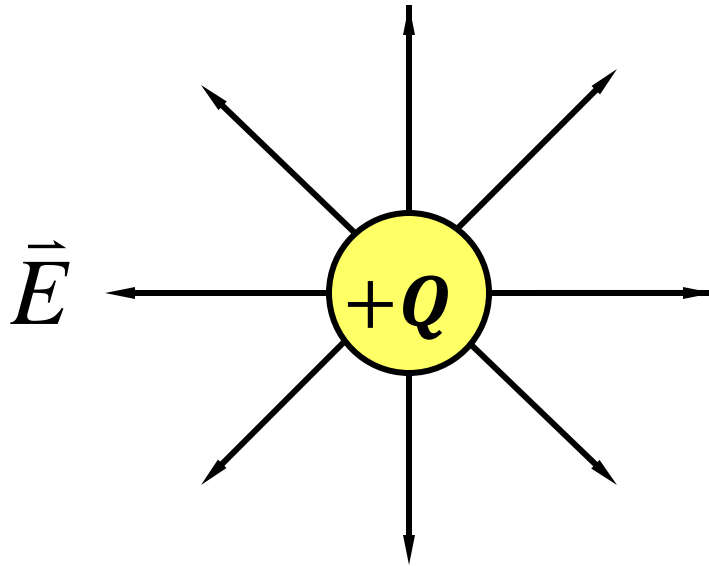
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$E$ 与场源电荷 $q$ 成正比，与 $r^2$ 成反比，

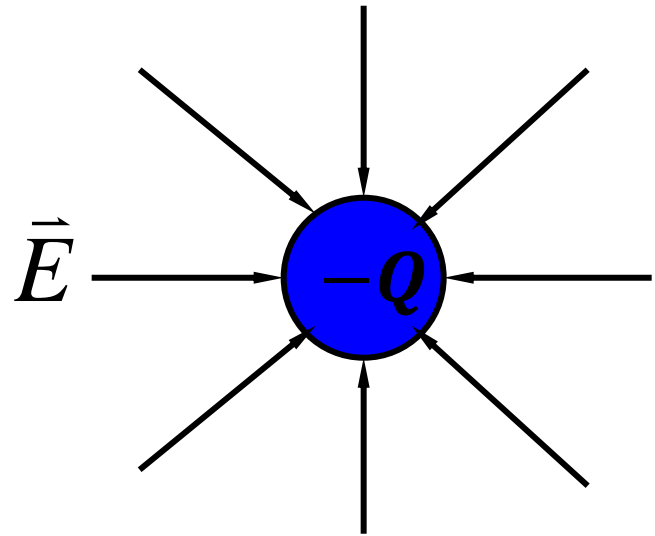


方向:

$q>0$ 时, 沿径向向外



$q<0$ 时, 沿径向向内



以 $q$ 为中心,  $r$ 为半径的球面上的场强大小相同, 具有球对称。

## 随堂小议

2. 下列几个说法中哪一个是正确的？

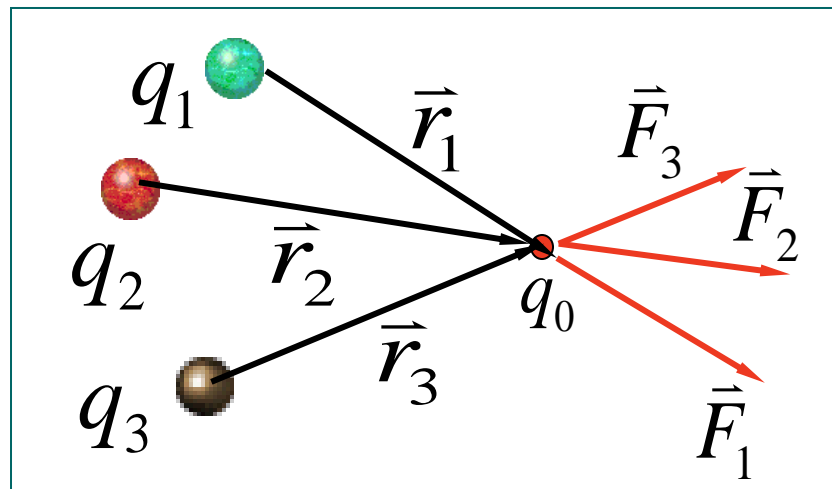
- (A) 电场中某点场强的方向，就是将点电荷放在该点所受电场力的方向.
- (B) 在以点电荷为中心的球面上， 由该点电荷所产生的场强处处相同.
- (C) 场强可由  $\vec{E} = \vec{F} / q$  定出，其中  $q$  为试验电荷， $q$  可正、可负， $\vec{F}$  为 试验电荷所受的电场力.
- (D) 以上说法都不正确.

答案 C

## 二 点电荷系的电场强度 (电场强度叠加原理)

点电荷  $q_i$  对  $q_0$  的作用力

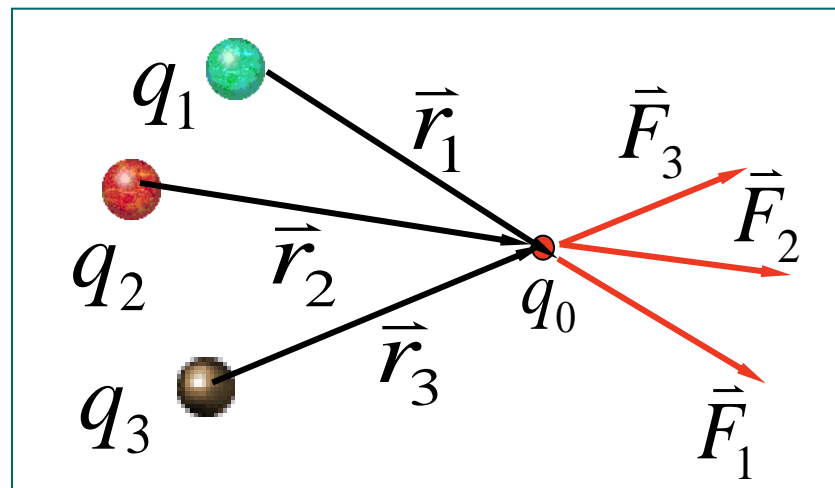
$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^3} \vec{r}_i$$



由力的叠加原理得  $q_0$  所受合力  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

故  $q_0$  处总电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0}$$



电场强度的叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

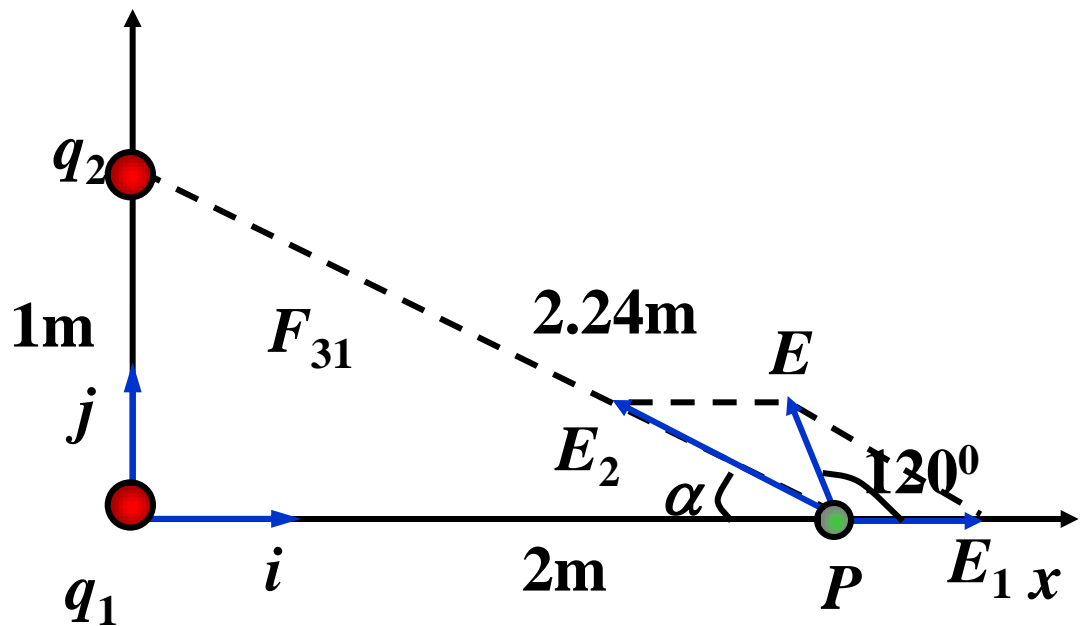
点电荷系在某点产生的场强，等于各点电荷单独存在时在该点分别产生的场强的矢量和。

——场强叠加原理



**例2** 在直角坐标系的原点  $(0, 0)$  及离原点  $1.0\text{m}$  的  $y$  轴上  $(0, 1)$  处分别放置电荷量为  $q_1 = 1.0 \times 10^{-9}\text{C}$  和  $q_2 = -2.0 \times 10^{-9}\text{C}$  的点电荷，求  $x$  轴上离原点为  $2.0\text{m}$  处  $P$  点场强（如图）。

解：  $q_1$  在  $P$  点所激发的场强为



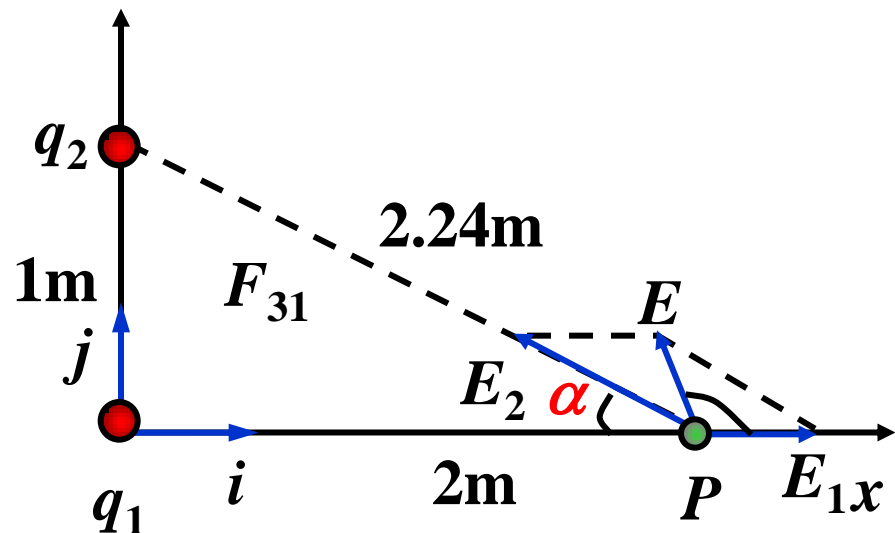
$$\vec{E}_1 = 9.0 \times 10^9 \times \frac{1.0 \times 10^{-9}}{2.0^2} \vec{i} \text{ N/C} = 2.3 \vec{i} \text{ N/C}$$

$q_2$ 在 $P$ 点所激发的场强的大小为

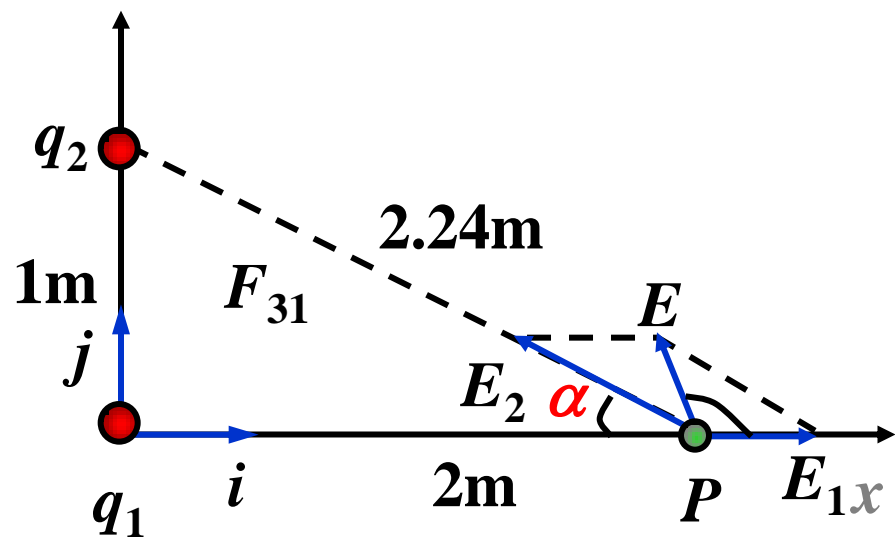
$$E_2 = 9.0 \times 10^9 \times \frac{2.0 \times 10^{-9}}{\left(\sqrt{1.0^2 + 2.0^2}\right)^2} \\ = 3.6 \text{ N/C}$$

$E_2$ 的矢量式为

$$\vec{E}_2 = \left( -3.6 \cos \alpha \vec{i} + 3.6 \sin \alpha \vec{j} \right) = \left( -3.2 \vec{i} + 1.6 \vec{j} \right) \text{ N/C}$$



根据场强叠加原理，P点的总场强为



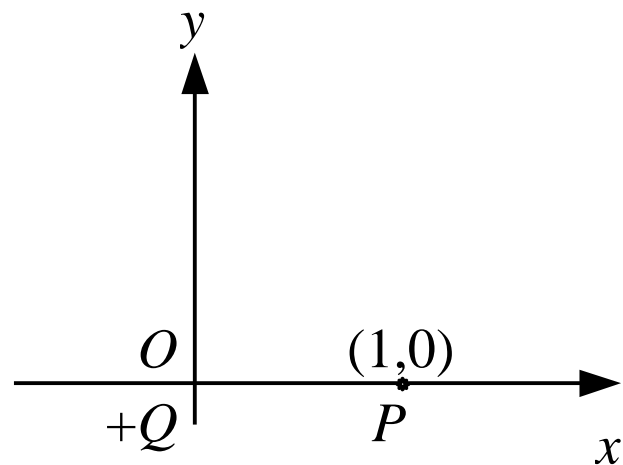
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = [(2.3 - 3.2)\vec{i} + 1.6\vec{j}] \\ &= (-0.9\vec{i} + 1.6\vec{j}) \text{ N/C}\end{aligned}$$

电场和x轴的夹角为的大小为  $\theta = \arctan \frac{1.6}{-0.9} = 120.7^\circ$

### 随堂小议

3. 在坐标原点放一正电荷 $Q$ ，它在 $P$ 点( $x=+1, y=0$ )产生的电场强度为 $\vec{E}$ 。现在，另外有一个负电荷 $-2Q$ ，试问应将它放在什么位置才能使 $P$ 点的电场强度等于零？

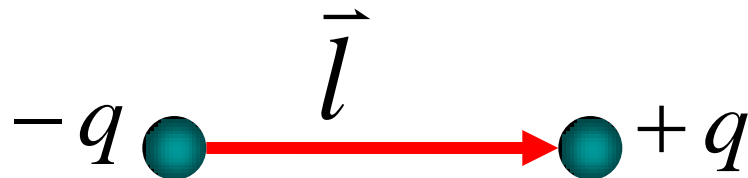
- (A)  $x$ 轴上 $x>1$ .
- (B)  $x$ 轴上 $0<x<1$ .
- (C)  $x$ 轴上 $x<0$ .
- (D)  $y$ 轴上 $y>0$ .
- (E)  $y$ 轴上 $y<0$ .



答案 C

**例3** 求电偶极子中垂线上一点 $P$ 的场强。

**解：**两个相距为 $l$ 的等量异号点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成的点电荷系，当讨论的场点到两点电荷连线中点的距离远大于 $l$ 时，称这一带电系统为**电偶极子**。



若取 $-q$ 指向 $+q$ 的矢径为 $\vec{l}$ ，则矢量

$$\vec{P} = q\vec{l}$$

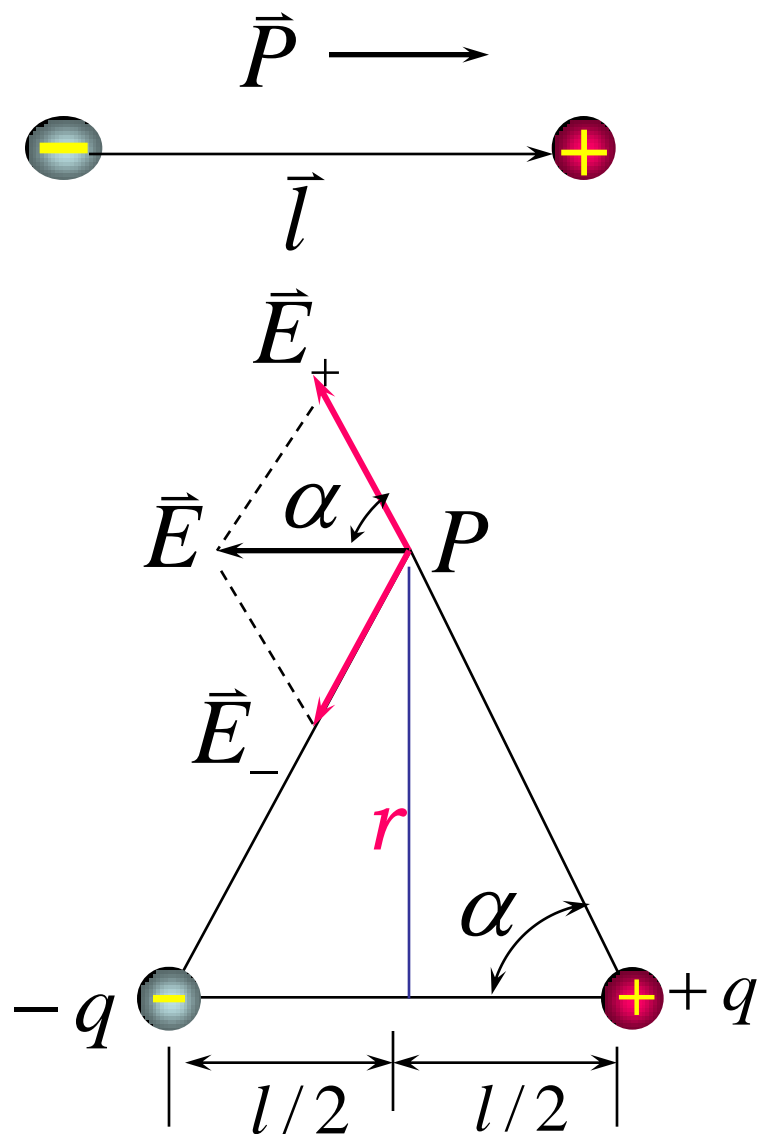
电偶极子的**电偶极矩**（电矩）

解： 电偶极矩（电矩）

$$\vec{P} = q \vec{l}$$

$$E_- = E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + l^2/4)}$$

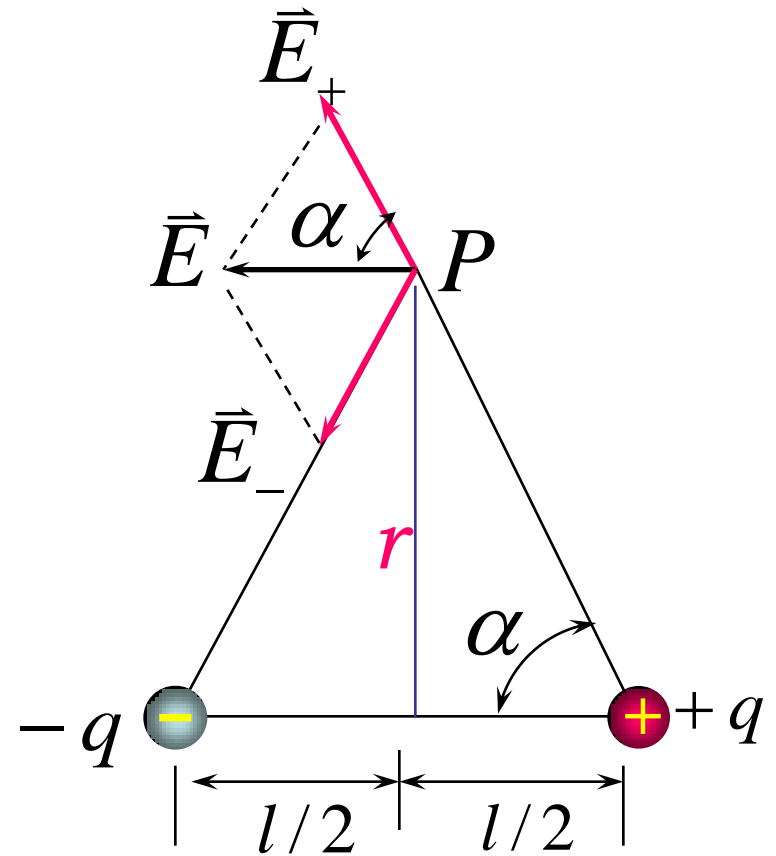
$$E = 2E_+ \cos \alpha$$



$$E = 2E_+ \cos \alpha$$

$$= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + l^2/4)} \times \frac{l/2}{(r^2 + l^2/4)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$



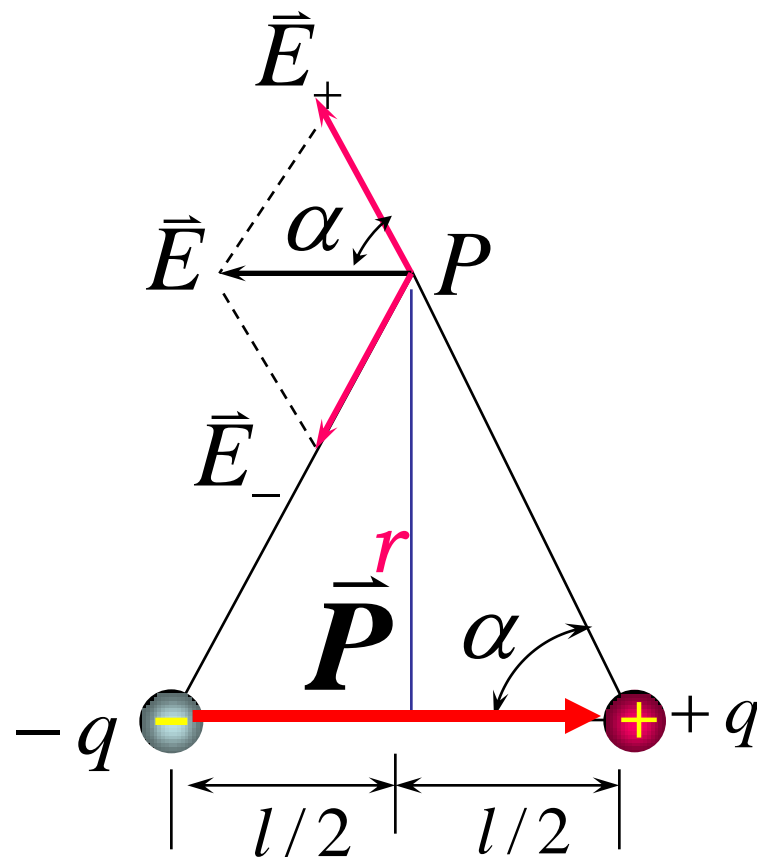
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

$$\vec{P} = q \vec{l}$$

用矢量形式表示为:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

若  $r \gg l$  
$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{r^3}$$



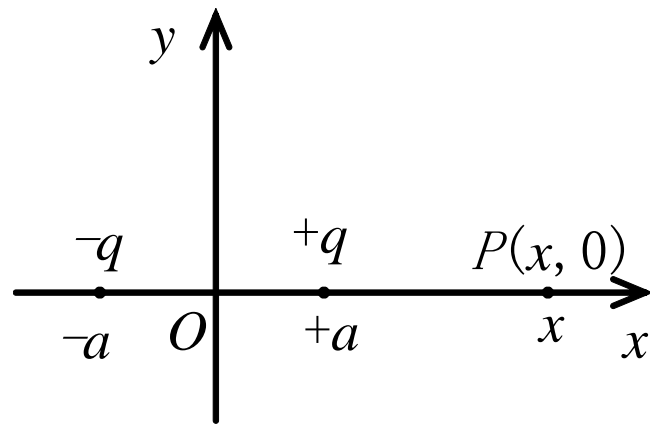


### 随堂小议

5. 如图所示, 在坐标 $(a, 0)$ 处放置一点电荷 $+q$ , 在坐标 $(-a, 0)$ 处放置另一点电荷 $-q$ .  $P$ 点是 $x$ 轴上的一点, 坐标为 $(x, 0)$ . 当 $x \gg a$ 时, 该点场强的大小为:

(A)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$       (B)  $\frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$

(C)  $\frac{qa}{2\pi\epsilon_0 x^3}$       (D)  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$



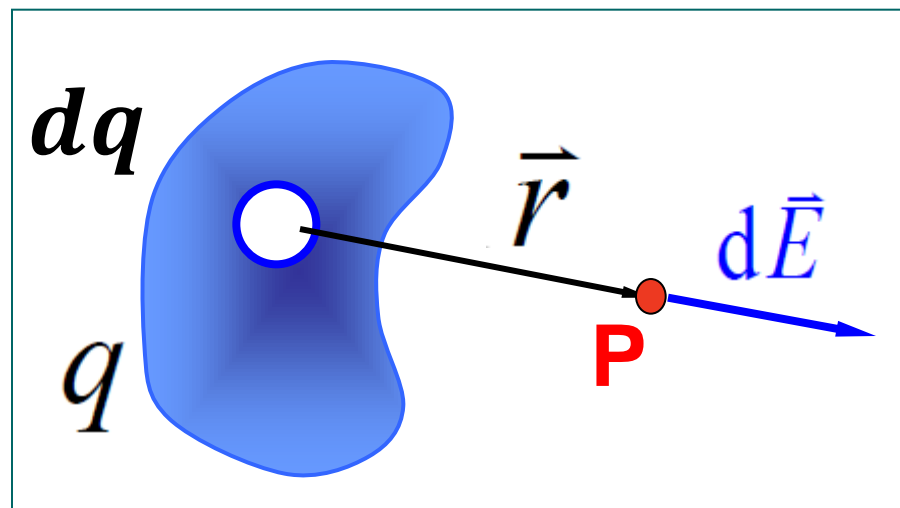
**答案B**

### 三 电荷连续分布情况

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} dq$$

电荷体密度  $\rho = \frac{dq}{dV}$

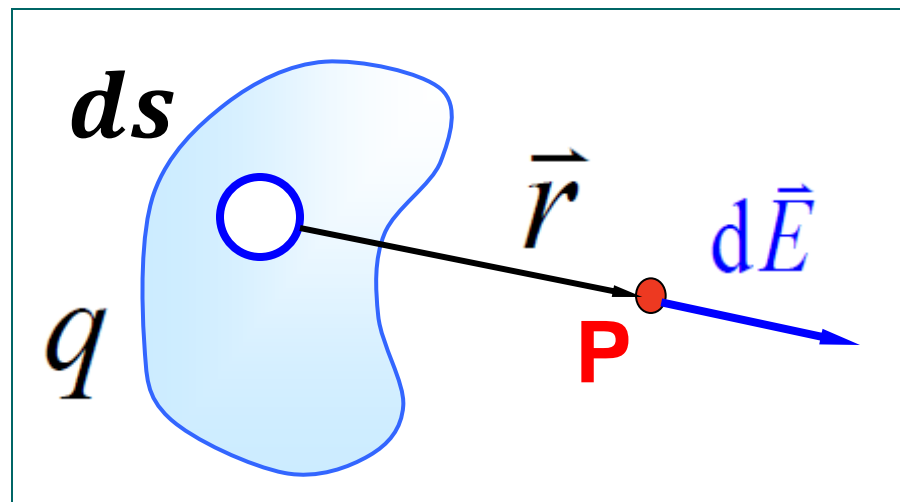


点  $P$  处电场强度

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\rho \vec{e}_r}{r^2} dV$$

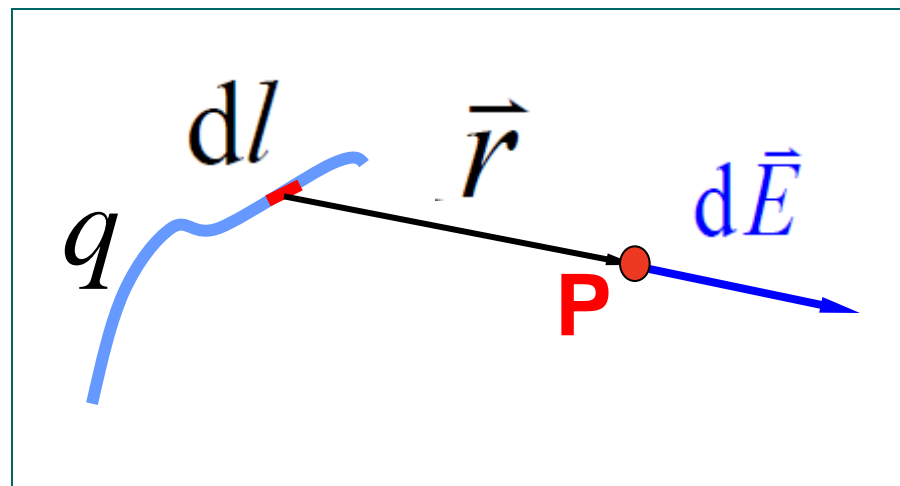
电荷面密度  $\sigma = \frac{dq}{ds}$

$$\vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma \vec{e}_r}{r^2} ds$$



电荷线密度  $\lambda = \frac{dq}{dl}$

$$\vec{E} = \int_l \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\lambda \vec{e}_r}{r^2} dl$$



## 连续带电体的电场例题

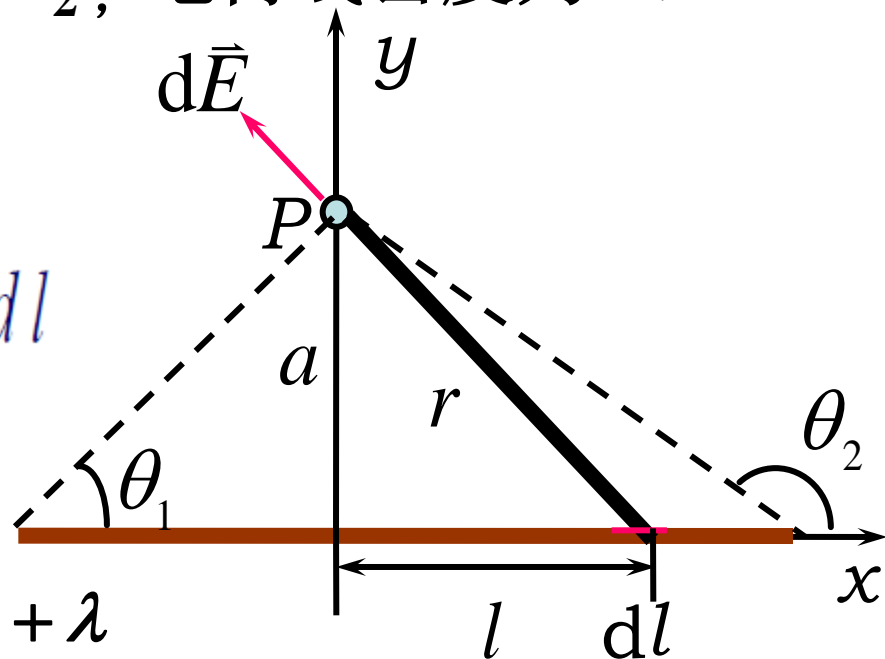
- 均匀带电直线的电场
- 均匀带电圆环轴线上的电场
- 均匀带电圆盘轴线上的电场

**例4** 求一均匀带电直线在 $P$ 点的电场（长为 $L$ ，总电荷量为 $q$ ，点 $P$ 离开直线的垂直距离为 $a$ ， $P$ 点和直线两端连线的夹角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ，电荷线密度为 $\lambda$ ）

解：建立直角坐标系

取微元  $dl$  带电  $dq = \lambda dl$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2}$$

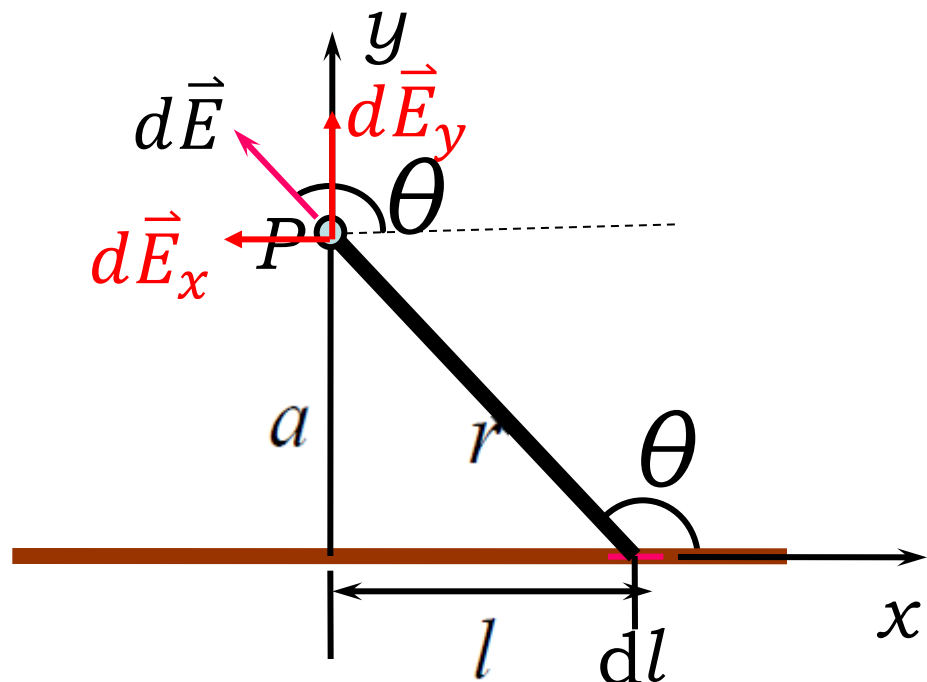


将  $d\vec{E}$  投影到坐标轴上

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \sin \theta$$

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta dl$$



$$E_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \sin \theta dl$$

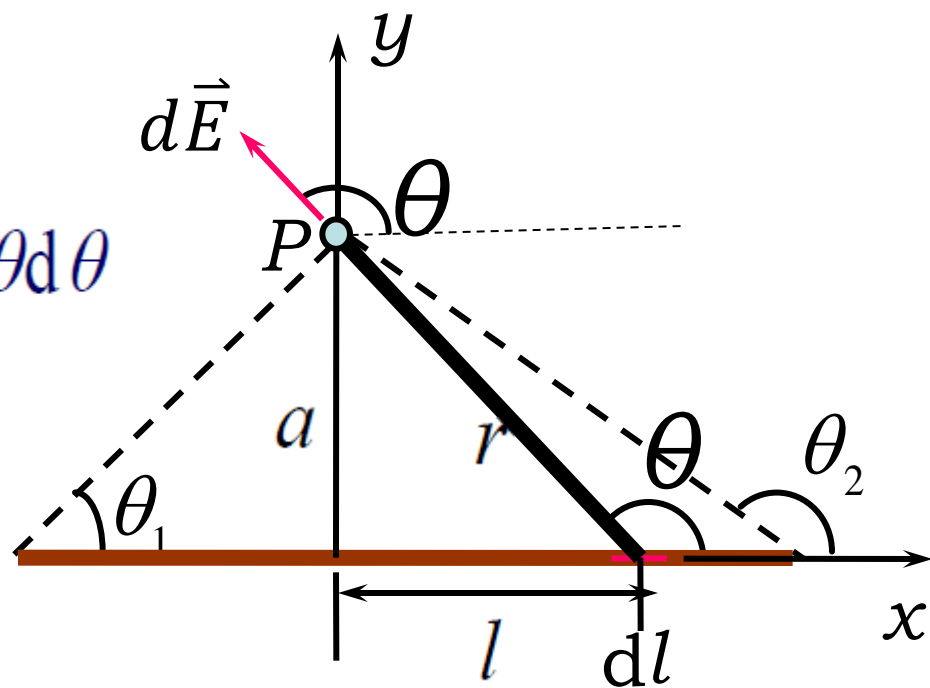
## 积分变量代换

$$r = a / \sin \theta \quad l = -a \operatorname{ctg} \theta \quad dl = a \operatorname{csc}^2 \theta d\theta$$

代入积分表达式

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{a^2 \operatorname{csc}^2 \theta} a \operatorname{csc}^2 \theta d\theta$$

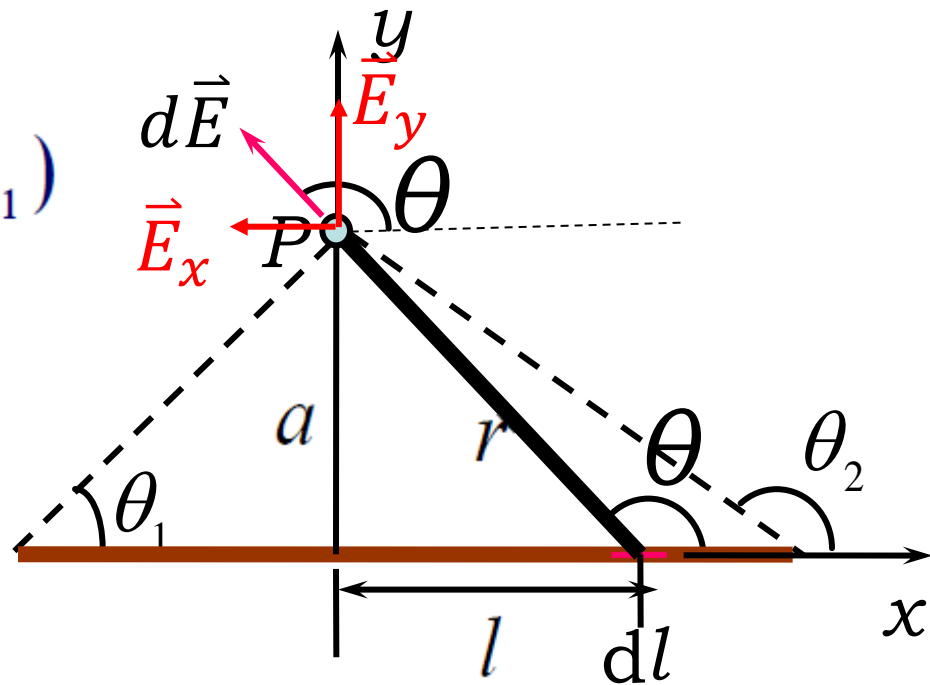
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$



$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

同理可算出

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



讨论

(1) 无限长均匀带电直线外一点的场强

$$\text{当直线长度 } L \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \rightarrow 0 \\ \theta_2 \rightarrow \pi \end{cases} \quad E_x = 0$$



$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

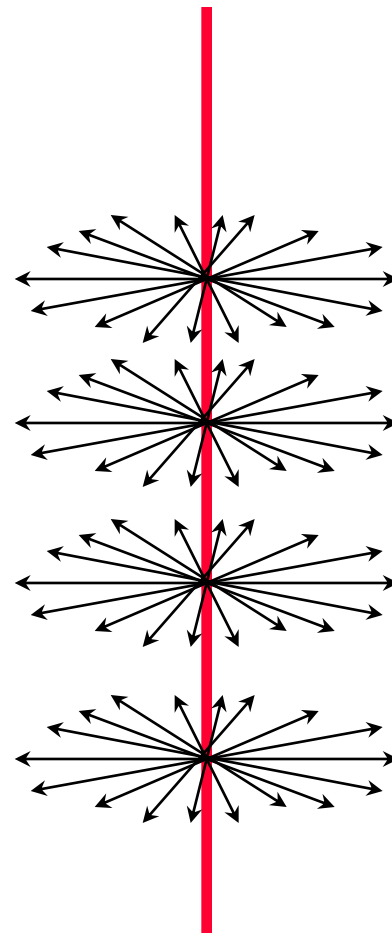
$$\theta_1 \rightarrow 0$$

$$\theta_2 \rightarrow \pi$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \times 2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

无限长均匀带电直线的场强:

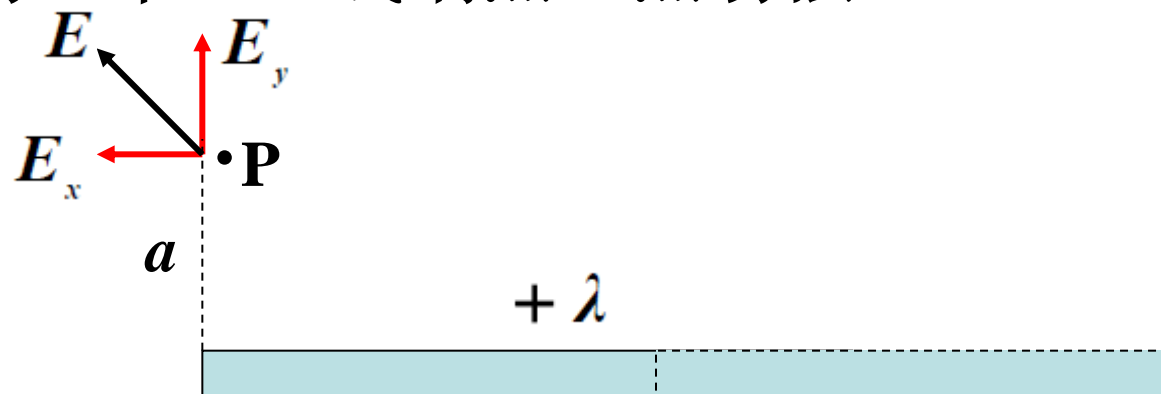
$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$



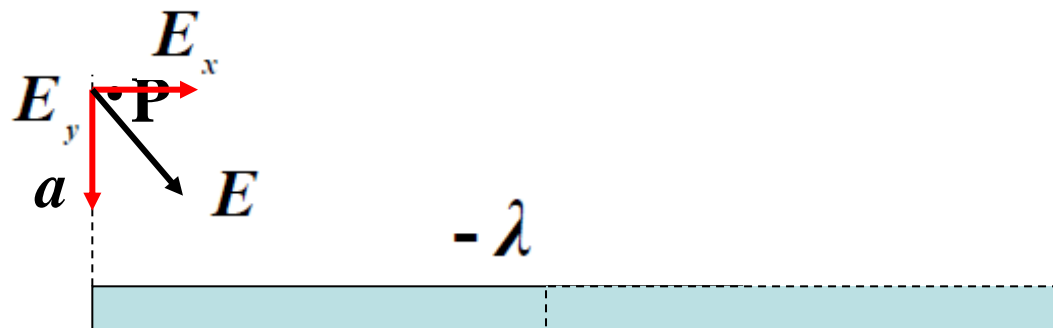
## (2) 半无限长均匀带电直线端点一点场强

$$\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 \rightarrow \pi$$



$$E_x = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$



### (3) 均匀带电直线中垂线上p点的场强

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \quad E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta_1$$

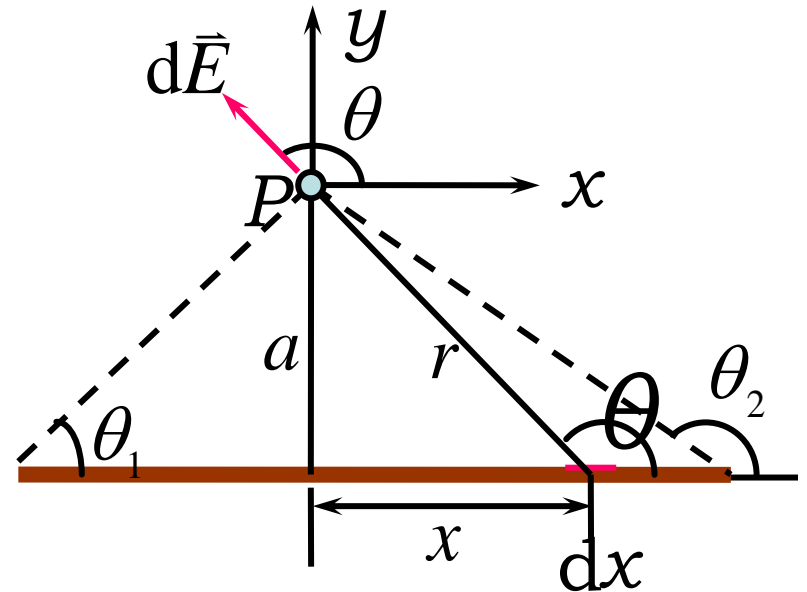
$$E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$a \ll L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$a \gg L$$

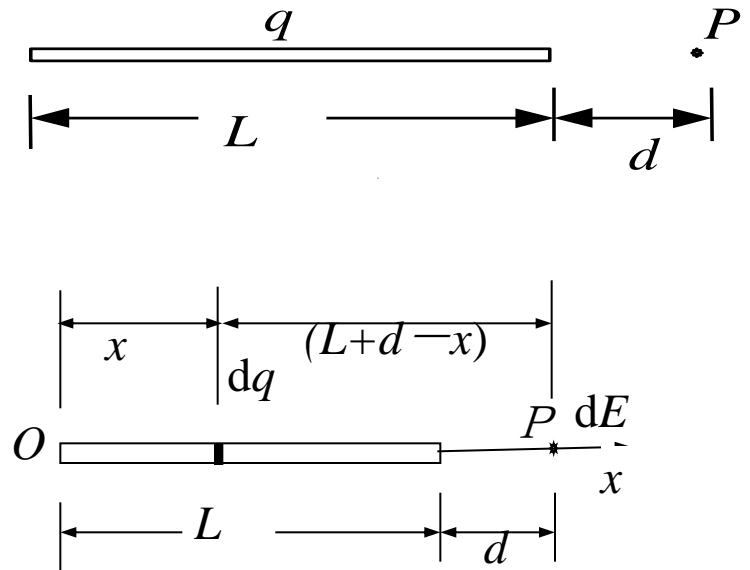
$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$



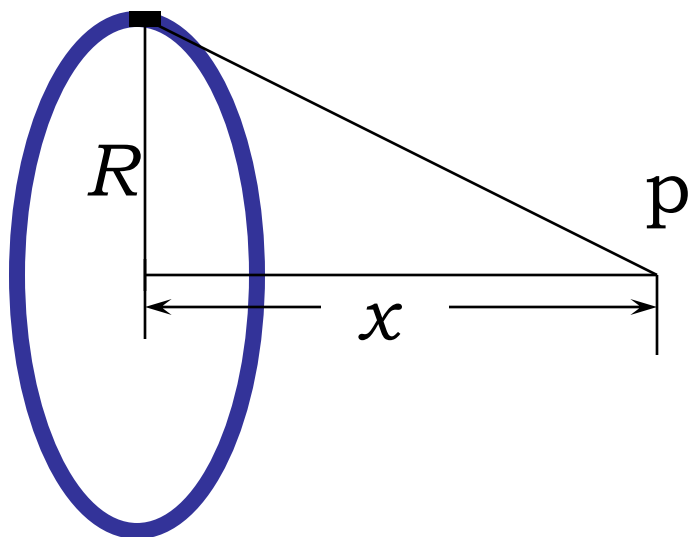
(4) 长为 $L$ 的均匀带电细直杆，总电荷为 $q$ ，在直杆延长线上距杆的一端距离为 $d$ 的 $P$ 点的电场强度。

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(L+d)}$$



**例5** 电荷 $q$  均匀地分布在一半径为 $R$ 的圆环上。  
计算在圆环的轴线上任一给定点 $P$ 的场强。



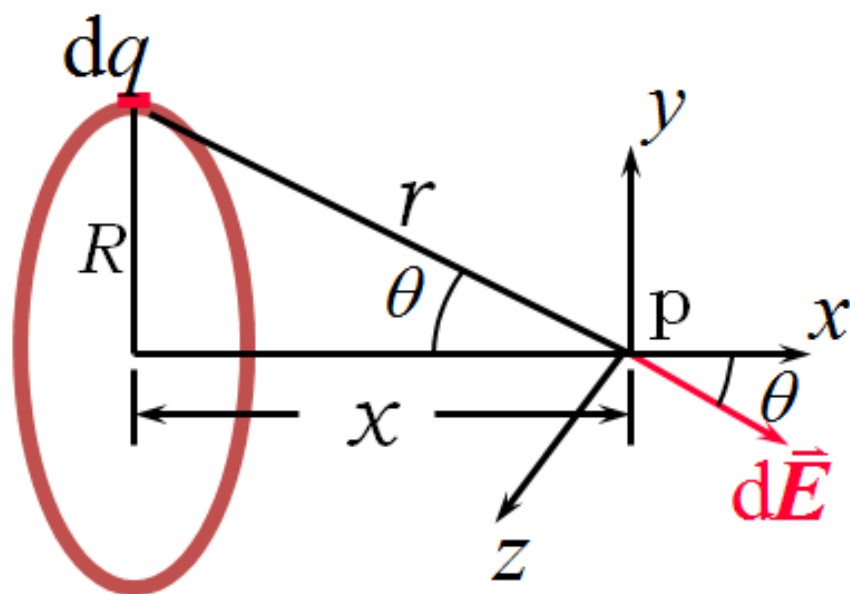
解:  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$

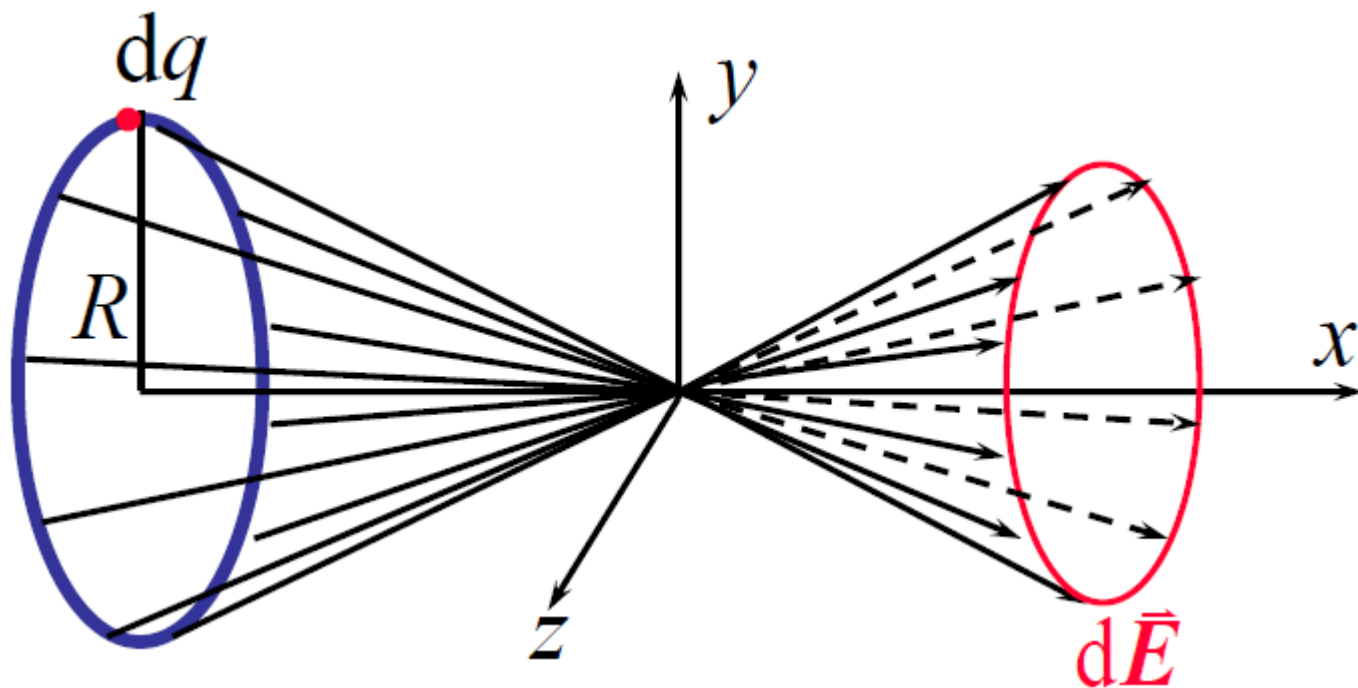
由对称性  $E_y = E_z = 0$

$$E = E_x = \int dE \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dq = \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{qx/r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$





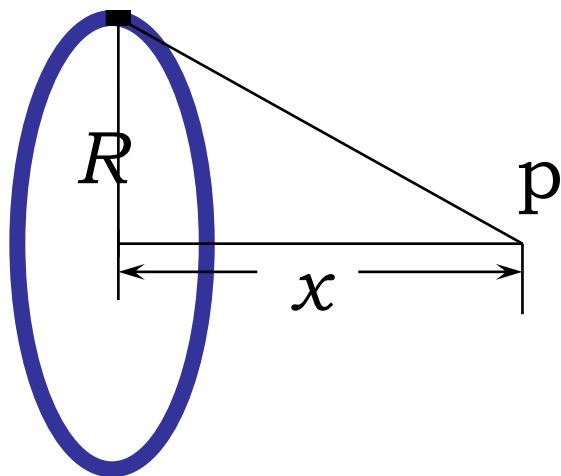
当 $dq$  位置发生变化时，它所激发的电场  $d\vec{E}$  矢量构成了一个圆锥面。

所以，由对称性  $E_y = E_z = 0$

## 讨论

(1) 圆环中心处的场强

$$x=0 \quad E=0$$



$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

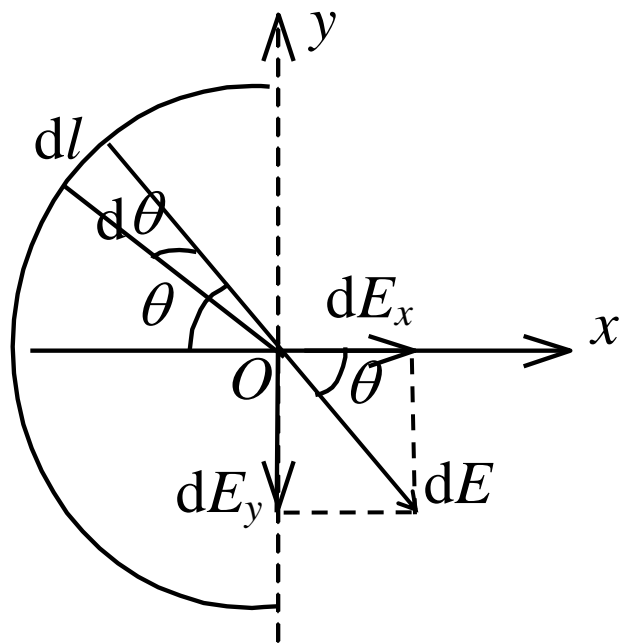
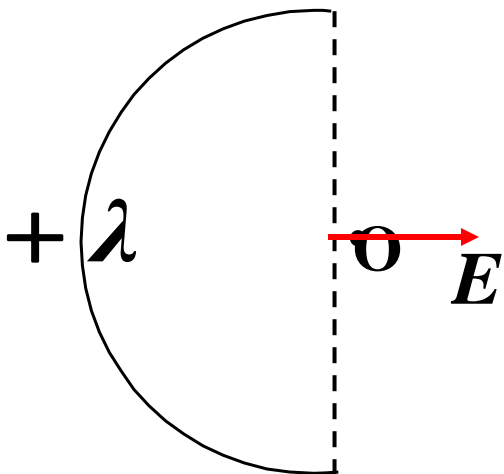


(2) 远离圆环中心的场强  $x \gg R$

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

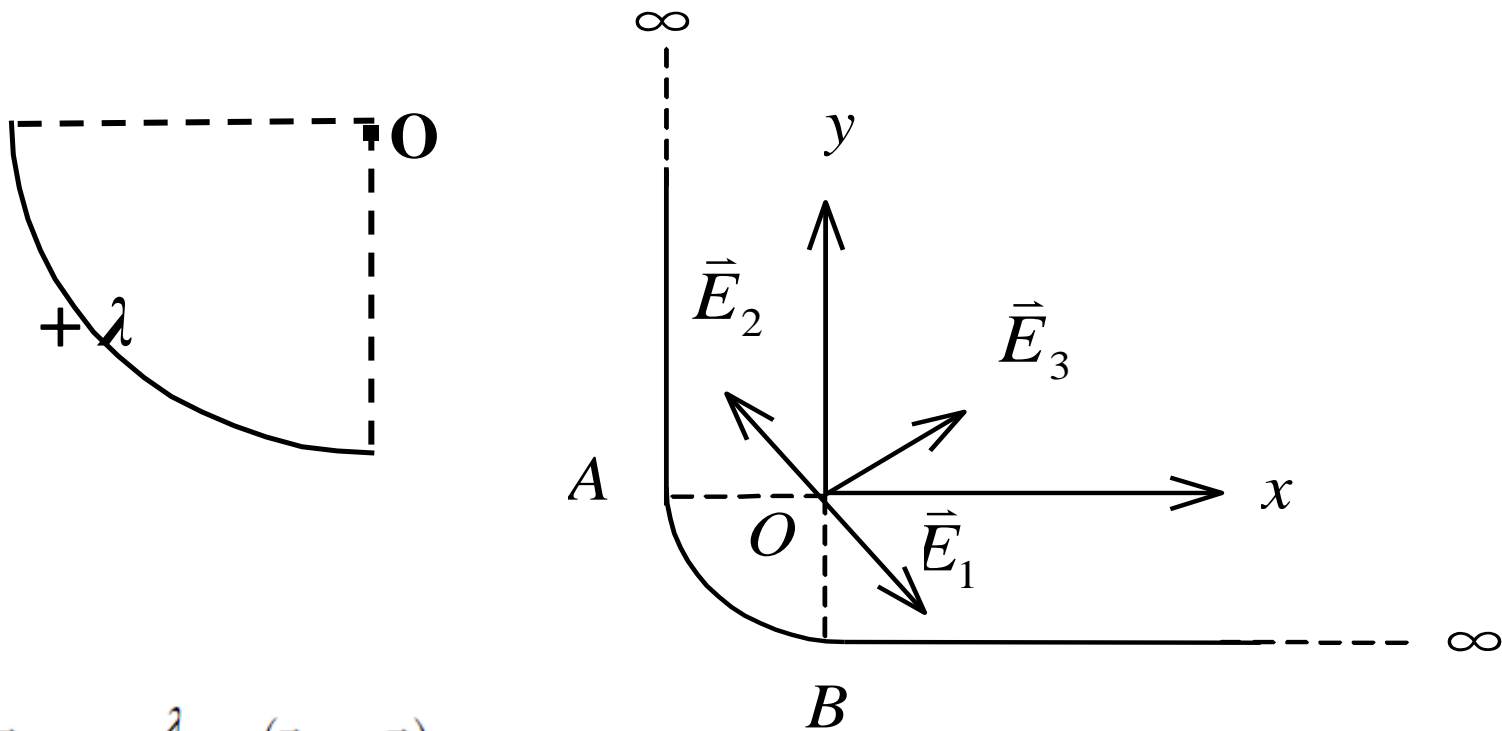
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

### (3) 半圆环中心处的场强



$$\vec{E} = E_x \vec{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{i}$$

# (4) $\frac{1}{4}$ 圆环中心处的场强



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\vec{i} + \vec{j})$$

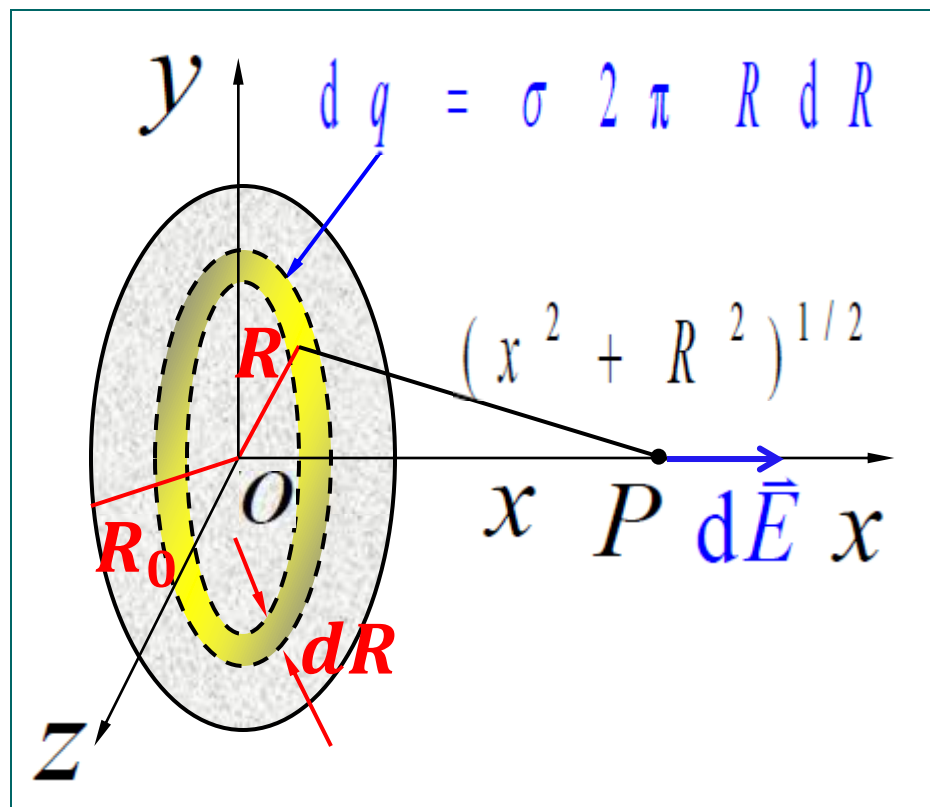
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\vec{i} + \vec{j})$$

**例6** 均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为  $R_0$ , 电荷均匀分布的薄圆盘, 其电荷面密度为  $\sigma$ . 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.

**解** 由例5

$$\begin{aligned} E &= \frac{q x}{4\pi \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \\ dE_x &= \frac{dq \cdot x}{4\pi \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{xRdR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

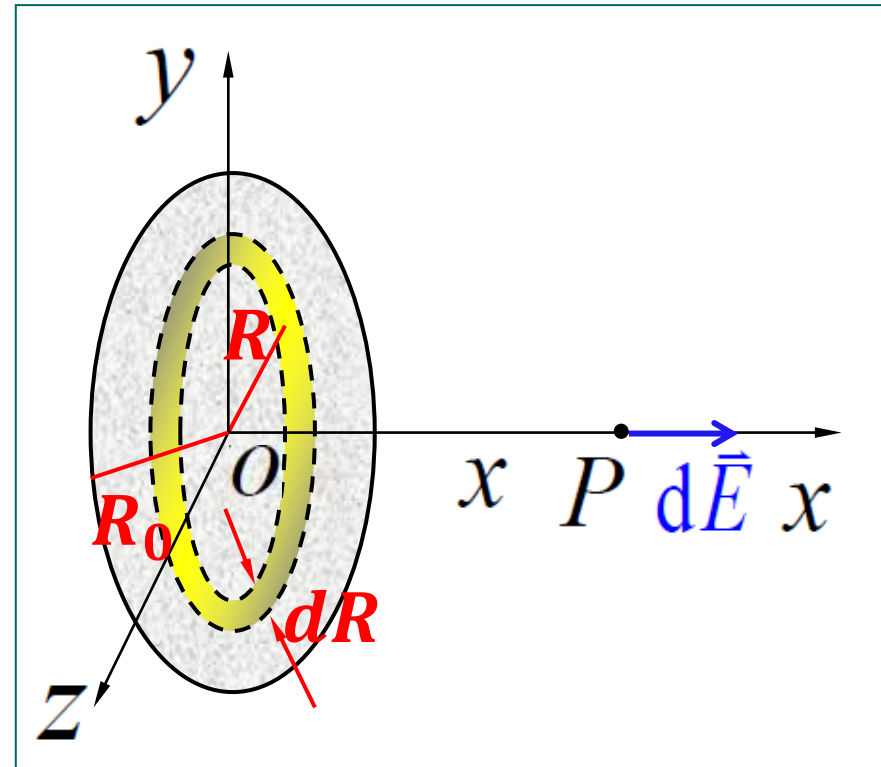


$$dE_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{xRdR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{RdR}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$



$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{x^2}}} \right)$$



### 讨论

$$(1) \quad x \ll R_0 \quad E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

当考察点很接近带电平面时 ( $x \ll R_0$ )，可以把带电平面近似看做无限大平面来处理。

$$(2) \quad x \gg R_0 \quad \left(1 + \frac{R_0^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{x^2} + \dots$$

泰勒级数  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{x^2}}} \right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \frac{R_0^2}{2x^2}$$

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad (\text{点电荷电场强度})$$