上海大学 2020～2021 学年 冬 季学期试卷

成绩	

课程名：线性代数 **课程号：** 01014104 **学分：**3

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

题号	一	二	三	四
得分				

得分	评卷人

一、填空题：（每小题 4 分，5 题共 20 分）

1. 设 4 阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，$A=(\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 4 维列向量，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则 $|A+B|=$ __40__。

2. 设矩阵向量组 $A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则逆阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有特征值 6，2，2，则 $x=$ __-2__。

4. 矩阵 $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$ 的秩是 ____2____。

5. 已知 $\frac{2}{3}\begin{pmatrix}t&1&1\\1&t&-1\\1&-1&t\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则常数 t 的取值为 ________。

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

得分	评卷人

二、选择题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

6. 若方阵 A 满足 $A^2=A$，则下列结论一定正确的是(　　)

(A) $A=0$ (B) $A=I$ (C) $A=0$ 或 $A=I$ (D) A 可以对角化

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}+a_{31}&a_{12}+a_{32}&a_{13}+a_{33}\end{pmatrix}$，

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

则下列结论正确的是(　　)

(A) $AP_1P_2=B$ (B) $AP_2P_1=B$ (C) $P_1P_2A=B$ (D) $P_2P_1A=B$

8. 设 A 是 4×5 阶矩阵且秩为 2，矩阵 B 是 5 阶方阵，并且 B 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则矩阵 B 的秩 $r(B)$ 的最大值为（　　）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 以下叙述中，错误的是(　　)

(A)线性相关的向量组的任何部分组都线性相关

(B)含零向量的向量组必线性相关

(C)线性无关的向量组的任何部分组都线性无关

(D)一个向量组，向量的维数小于向量的个数时一定线性相关

10. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&a&2\\2&2&a\\a&2&2\end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^*\neq0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则(　　)。

(A) $a=2$ (B) $a=2$ 或 $a=-4$ (C) $a=-4$ (D) $a\neq2$ 且 $a\neq-4$

得分	评卷人

三、计算题：（本大题 6 题，共 60 分）

11.

解

15.（本题共 18 分）设 4 阶实方阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，4 维列向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，

1)（6 分）计算行列式 $|A|$；

2)（12 分）当实数 a 为何值时，方程组 $A\bar{x}=\beta$ 无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时，求其全部解。

得分	评卷人

四、证明题：（每题 6 分，2 题共 12 分）

16.（6 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3.$$

求证：向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

17.（6 分）设 3 阶实方阵 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，其中 α，β 是正交的 3 维实的列向量，且均为单位向量，求证：α，β 都是 A 的特征向量。

得分	评卷人

三、计算题：（本大题 5 题，共 58 分）

11.（8 分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & x+1 \end{vmatrix}_n$

12.(10 分) 已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求满足$AB=A+B$的矩阵$B$。

13.（10 分）设$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$求此向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

14.（12 分）已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量，并判断$A$能否相似对角化。