高阶线性微分方程解的结构

一、线性齐次方程解的结构

二、线性非齐次方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

为~~二阶线性~~微分方程.

***n* 阶线性微分方程**的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程 ;} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习: 一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解: $y = \underbrace{C\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y} + \underbrace{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 } y^*}$

一、~~线性齐次~~方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)\,y = \boxed{0}$$

的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数)也是该方程的解. (叠加原理)

证: 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$[\,C_1 y_1'' + C_2 y_2''\,] + P(x)[\,C_1 y_1' + C_2 y_2'\,] + Q(x)[\,C_1 y_1 + C_2 y_2\,]$$

$$= C_1[\,y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1\,] + C_2[\,y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2\,] = 0$$

证毕

说明:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$$y_2(x) = 2y_1(x) \text{ 也是齐次方程的解}$$

但是 $$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2) y_1(x)$$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义：设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0,\ \ x\in I$$

则称这 n个函数在 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关.**

例如，$\mathbf{1}, \cos^2 x, \sin^2 x$，在$(-\infty, +\infty)$上都有

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x\equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都**线性相关**；

又如，$1, x, x^2$，若在某区间 I 上 $k_1+k_2x+k_3x^2\equiv 0$，则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0，故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 **线性无关.**

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件:**

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

$\boxed{(\text{无妨设 } k_1 \neq 0)}$

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

(证明略)

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$

必线性 <u>相关</u>

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数) 是该方程的通解. (自证)

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k\text{为任意常数})$$

二、线性非齐次方程解的结构

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \qquad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y'' + \underline{y^{*\prime\prime}}) + P(x)(Y' + \underline{y^{*\prime}}) + Q(x)(Y + \underline{y^*})$$

$$= (y^{*\prime\prime} + P(x)y^{*\prime} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y)$$

$$= f(x) + 0 = f(x)$$

故 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又 Y 中含有两个独立任意常数, 因而 ② 也是通解 . 证毕

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$

定理 4. 设 $y_k^*(x)$ $(k=1,2,,n)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x) \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

的特解, 则 $y=\sum_{k=1}^{n} y_k^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程之解的叠加原理)

定理3, 定理4 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.

定理 5. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y = \underline{C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例1. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

(B) $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

提示: (C) $\cancel{C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3}$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关 . (反证法可证)

例2. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$, 得 $C_1 = -1, C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.