全微分方程

一、全微分方程

二、积分因子法

一、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\boxed{\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y}$

则称

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

为全微分方程 (又叫做恰当方程) .

判别：P,Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

$$① \text{ 为全微分方程} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}},\quad (x,y)\in D$$

求解步骤:

1. 求原函数 $u\,(x,y)$

   方法1 凑微分法;

   方法2 利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathbf{d}\,\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ 知道:通解为 $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{C}$.

例如

$$xdx + ydy = 0,$$

$$\because u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$\therefore du(x, y) = xdx + ydy,$$ 所以是全微分方程.

全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

例1. 求解

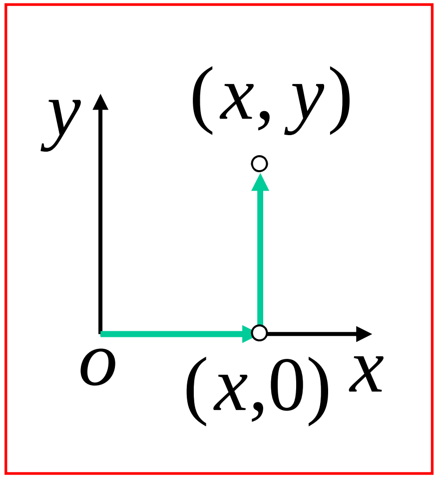
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

取 $x_0=0,\ y_0=0$, 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

例2. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

例3 求方程$\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 是全微分方程,

将左端重新组合 $\dfrac{1}{y^2}dy+(\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{3x^2}{y^4}dy)$

$$=d(-\frac{1}{y})+d(\frac{x^2}{y^3})=d(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}),$$

原方程的通解为 $-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C.$

思考: 如何解方程 $(x^3+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$?

这不是一个全微分方程, 但若在方程两边同乘 $\dfrac{1}{x^2}$, 就化成例2 的方程 .

二、积分因子法

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$为原方程的积分因子.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

常用微分倒推公式:

1) $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\ x \pm y\ )$

2) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ xy\ )$

3) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$

4) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}(\ \dfrac{x}{y}\ )$

5) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}(\ \dfrac{-y}{x}\ )$

6) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}(\ \ln\dfrac{x}{y}\ )$

7) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}(\ \arctan\dfrac{x}{y}\ )$

8) $\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathrm{d}(\ \sqrt{x^2 + y^2}\ )$

积分因子不一定唯一.

例如, 对 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

可取 $\mu = \dfrac{1}{y^2}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$,

$\mu = \dfrac{1}{xy}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

例4. 求解 $(1+xy)y\,\mathrm{d}x+(1-xy)x\,\mathrm{d}y=0$

解: 分项组合得 $(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+xy(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0$

即 $$\mathrm{d}(xy)+x^2y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)=0$$

选择积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2}$, 同乘方程两边, 得

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}=0$$

即 $$\mathrm{d}\left(\frac{-1}{xy}\right)+\mathrm{d}(\ln|x|)-\mathrm{d}(\ln|y|)=0$$

因此通解为 $\dfrac{-1}{xy}+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=\ln|C|$, 即 $\dfrac{x}{y}=Ce^{\frac{1}{xy}}$

因 $x=0$ 也是方程的解, 故 C 为任意常数.

积分因子公式法: $\because \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$,

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$ 两边同除μ,

$$Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$ 求解不容易!!

特殊地:

a.当μ只与x有关时; $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dx}$,

$$\therefore \frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$$

$$\therefore \mu(x)=e^{\int f(x)dx}.$$

$b.$ 当μ只与y有关时; $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{d\mu}{dy},$

$$\therefore \frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=g(y)$$

$$\therefore \mu(y)=e^{\int g(y)dy}.$$

例5 求微分方程

$$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$$的通解.

解 $\because \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{x},$

$$\therefore \mu(x)=e^{\int \frac{1}{x}dx}=x.$$

则原方程为

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0,$$

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0,$$

$$3x^2ydx+x^3dy+xy(ydx+xdy)$$

可积组合法

$$=d\left(yx^3+\frac{1}{2}(xy)^2\right)=0,$$

原方程的通解为

$$yx^3+\frac{1}{2}(xy)^2=C.$$ （公式法）

例6 求微分方程

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$$的通解.

解 $$2xdx+2x\sqrt{x^2-y}dx-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2)-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

将方程左端重新组合,有

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2-y)=0,$$

原方程的通解为 $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$

例7 求微分方程

$$2xy\ln y dx+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})dy=0$$的通解.

解 将方程左端重新组合,有

$$(\mathbf{2xy\ln y dx+x^2dy)+y^2\sqrt{1+y^2}dy=0},$$

易知 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{y}$,

则 $(2x\ln y dx+\dfrac{x^2}{y}dy)+y\sqrt{1+y^2}dy=0$,

即 $d(x^2\ln y)+\dfrac{1}{3}d(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=0.$

可积组合法

原方程的通解为 $\mathbf{x^2\ln y+\dfrac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=C}.$

例8 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + x^3 + y}{1+x}$ 的通解.

解1 整理得 $$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x} y = -x^2,$$

A ~~常数~~变易法: 对应齐方通解 $y = \dfrac{C}{1+x}$.

设 $y = \dfrac{C(x)}{1+x}$. $\quad C(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + C.$

B 公式法: $$y = e^{-\int \frac{1}{1+x}dx}\left[\int -x^2 e^{\int \frac{1}{1+x}dx} dx + C\right],$$

通解为 $$y + xy + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = C.$$

解2　整理得 $(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0$,

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \therefore \text{是全微分方程.}$$

A 用曲线积分法:

$$u(x,y)=\int_0^x (x^2+x^3+y)dx+\int_0^y dy,$$

B 凑微分法:

$$dy+(xdy+ydx)+x^2dx+x^3dx=0,$$

$$dy+d(xy)+d\frac{x^3}{3}+d\frac{x^4}{4}=0,$$

$$d(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})=0.$$

C 不定积分法: $\because \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + y,$

$$\therefore \int (x^2 + x^3 + y)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y), \quad 又 \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$$

$$\therefore x + C'(y) = 1 + x, \quad C'(y) = 1, \quad C(y) = y,$$

原方程的通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$

三、一阶微分方程小结

- 一阶微分方程
  - 分离变量法
  - 常数变易法
  - 全微分方程

练 习 题

一、判别下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解：

1、$e^{y}dx+(xe^{y}-2y)dy=0$；

2、$(x^{2}+y^{2})dx+xydy=0$；

3、$(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$.

二、利用观察法求出下列方程的积分因子，并求其通解：

1、$ydx-xdy+y^{2}xdx=0$；

2、$xdx+ydy=(x^{2}+y^{2})dx$；

3、$(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$.

三、验证$\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$是微分方程

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$的积分因子, 并求方程

$y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0$的通解 .

四、已知$f(0)=\dfrac{1}{2}$, 试确定$f(x)$, 使

$[e^x+f(x)]ydx+f(x)dy=0$为全微分方程, 并求此全微分方程的通解 .

练习题答案

一、1、$xe^{y}-y^{2}=C$；　　2、不是全微分方程；

3、$\rho(e^{2\theta}+1)=C$.

二、1、$\frac{x}{y}+\frac{x^{2}}{2}=C$；　　2、$x^{2}+y^{2}=Ce^{2x}$；

3、$\frac{x}{y}=Ce^{\frac{1}{xy}}$.

三、$x=Cy^{2}e^{\frac{1}{x^{2}y^{2}}}$.（或$\ln\frac{x}{y^{2}}+1-\frac{1}{x^{2}y^{2}}=C$）

四、$f(x)=e^{x}(x+\frac{1}{2})$，$e^{x}(x+\frac{1}{2})y=C$.

备用题 解方程 $y\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=0.$

解法1 积分因子法. 原方程变形为

$$(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)+y\,\mathrm{d}y=0$$

取积分因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$

$$\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0$$

故通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$

此外, $y=0$ 也是方程的解.

解法2 化为齐次方程. 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{y-x}=\frac{y/x}{1-y/x}$$

令 $y=ux$, 则 $y'=u+xu'$,

$$u+xu'=\frac{u}{1-u} \longrightarrow \frac{(1-u)\,\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入， 得通解 $$\frac{x}{y}+\ln|y|=C$$

此外, $y=0$ 也是方程的解.

解法3 化为线性方程. 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=-1 \qquad \boxed{P=-\frac{1}{y},\ Q=-1}$$

其通解为

$$x=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(-1)\,e^{\int\frac{-1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=y\left[C-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right]=y\left[C-\ln|y|\right]$$

即
$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C$$

此外, $y=0$ 也是方程的解.