

函数展开成幂级数

一、泰勒（ Taylor ）级数

二、函数展开成幂级数

两类问题： 在收敛域内

$$\text{幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightleftharpoons[\boxed{\text{展 开}}]{\textcircled{\text{求 和}}} \text{和函数 } S(x)$$

由于幂级数在收敛域内确定了一个和函数，因此我们就有可能利用幂级数来表示函数。如果一个函数已经表示为幂级数，那末该函数的导数、积分等问题就迎刃而解。

一、泰勒（Taylor）级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n + 1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式, 其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为拉格朗日余项.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数.


当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数.

待解决的问题:

- 1) 对此级数, 它的收敛域是什么?
- 2) 在收敛域上, 和函数是否为 $f(x)$?

定理1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\cup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

证明:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in \cup(x_0)$$

 **令**
$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_{n+1}(x)] = 0, \quad x \in \cup(x_0)$$

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots; \quad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots; \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$$

.....

...

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots;$$

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

.....

...

显然结论成立.

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{直接展开法} \text{ — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法} \text{ — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{array} \right.$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知，函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R ；

第三步 判别在收敛区间 $(-R, R)$ 内 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$ 是否为0.

例1. 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1 \ (n = 0, 1, \dots)$, 故得级数

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

其收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} / \frac{1}{(n+1)!} = +\infty$

对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(ξ 在 0 与 x 之间)

故 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$, $x \in (-\infty, +\infty)$

例2. 将 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

得级数: $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$

其收敛半径为 $R = +\infty$, 对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

类似可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例3 将 $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$) 展开成 x 的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &\sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1, \quad \therefore R = 1.$$

对应 $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$
$$(-1 \leq x \leq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$
$$(-1 < x \leq 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$
$$(-1 < x < 1)$$



$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$
$$(-1 < x < 1)$$

2. 间接展开法

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分, 复合等方法, 求展开式.

例如 $\cos x = (\sin x)'$

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例4. 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$(-1 < x < 1)$

把 x 换成 x^2 , 得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$(-1 < x < 1)$

例5. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad -1 < x \leq 1$$

上式右端的幂级数在 $x = 1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x = 1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x = 1$ 也是成立的, 于是收敛区间为 $-1 < x \leq 1$.

利用此题可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$$

例6 将 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数. **重点例题**

解 $\because \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$
 $= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^n + \cdots$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1$

$$\begin{aligned} \therefore \arctan x &= \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1} \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

$$x \in [-1, 1]$$

再如: $f(x) = e^{-x^2}$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, (-\infty < x < \infty)$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$= x \cdot \frac{1}{1+x^2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}, (-1 < x < 1)$$

例7. 将 $\sin x$ 展成 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \dots \right) \right.$$

$$\left. + \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例8 将 $\frac{1}{3-x}$ 分别展开成 x 及 $x-1$ 的幂级数。

重点例题

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1}{3-x} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}, \quad (-3 < x < 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{1}{3-x} &= \frac{1}{2-(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}, \quad (-1 < x < 3) \end{aligned}$$

例9. 将 $\frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展成 $x - 1$ 的幂级数.

解: $\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)}$

$$= \frac{1}{4\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)} - \frac{1}{8\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)} \quad (|x-1| < 2)$$
$$= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} + \cdots \right]$$
$$- \frac{1}{8} \left[1 - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{4^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^n} + \cdots \right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3)$$

例 将 $f(x) = \sin x \cos 2x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x) = \sin x \cos 2x = \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x]$

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3^{2n+1} - 1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad -\infty < x < +\infty$$

补充例题

1. 将 $\ln(1+x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数并求收敛域

$$\begin{aligned}\ln(1+x-2x^2) &= \ln(1+2x)(1-x) = \ln(1+2x) + \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad |x| < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 对应常数项级数收敛;

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 对应常数项级数发散,

\therefore 级数的收敛域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ 展开为 $x - 5$ 的幂级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x-5)+2} - \frac{1}{(x-5)+3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-5)^n\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{x-5}{2} \right| < 1 \\ \left| \frac{x-5}{3} \right| < 1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < 7$$

当 $x = 3$ 时, 对应常数项级数发散;

当 $x = 7$ 时, 对应常数项级数发散,

\therefore 级数的收敛域为 $(3, 7)$.

3. 将 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$ 在 $x=1$ 处展开成泰勒级数
(展开成 $x-1$ 的幂级数) 并求 $f^{(n)}(1)$.

解 $\because \frac{1}{4-x} = \frac{1}{3-(x-1)} = \frac{1}{3(1-\frac{x-1}{3})},$

$$= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x-1}{3}\right)^n + \cdots \right] \quad |x-1| < 3$$
$$\therefore \frac{x-1}{4-x} = (x-1) \frac{1}{4-x}$$
$$= \frac{1}{3}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(x-1)^3}{3^3} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{3^n} + \cdots$$
$$\text{于是 } \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{3^n}, \quad \text{故 } f^{(n)}(1) = \frac{n!}{3^n}. \quad |x-1| < 3$$

4. 如何求 $y = \sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n}$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例 将 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x) = \ln \frac{1-x^3}{1-x}, \quad x \neq 1$

$$= \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$$

$$\left(\because \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1 \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x^3)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \quad -1 \leq x < 1.$$

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式；

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数。

2. 常用函数的幂级数展开式

- $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

- $$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$
$$x \in (-1, +1]$$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$
 $+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$