Fourier 级数　习题课

一、主要内容

1 . Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier 系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

2. 收敛定理（Dirichlet充分条件）

$f(x)$ 在一个周期内

①连续或只有有限个第一类间断点

②只有有限个极值点

则Fourier 级数收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{是连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{是间断点} \end{cases}$$

3. 周期为 2*L* 的函数展开为 Fourier 级数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),$$

若 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，则有简化的计算公式

偶函数 $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

奇函数 $$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,\cdots)$$

4. 非周期函数的展开

在 $[-l,l)$ 上有定义的函数 $f(x)$

先在整个数轴上作周期延拓，将延拓后的函数展开成 Fourier 级数，最后限制自变量的取值范围，即得 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式

在 $[0, l)$ 上有定义的函数 $f(x)$

奇延拓—— 展开成正弦级数

（收敛域一般不包含端点）

偶延拓——展开成余弦级数

（收敛域一定包含端点）

5. 强调几点

这部分内容所涉及到的问题，类型不多，有求函数的**Fourier** 级数展开式，讨论其和函数，证明三角等式，求某些数项级数的和 。解法也比较固定首先是求出**Fourier** 系数，写出**Fourier** 级数，然后根据 **Dirichlet** 充分条件讨论其和函数

(1)记住 **Fourier** 系数公式。 **Fourier** 系数的计算须不止一次地使用分部积分公式，要小心

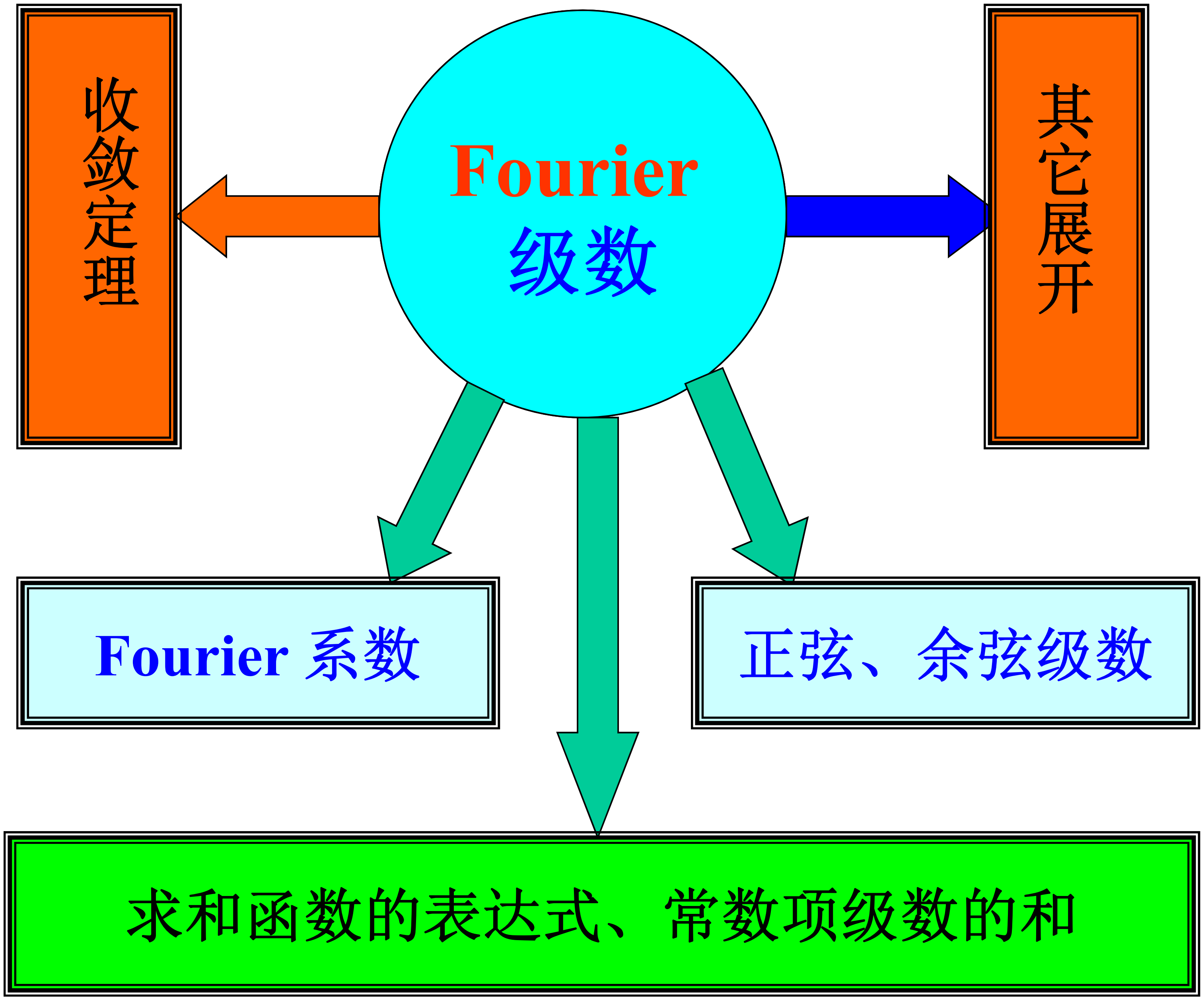
(2)掌握**Dirichlet** 收敛定理的内容

(3)求函数的**Fourier** 级数展开式，必须注明展开式的成立范围——即连续区间，也即只要去掉间断点

(4)注意函数的奇偶性、周期性

(5)注意函数的定义域，是否需要延拓

无论是奇延拓还是偶延拓，在计算展开式的系数时只用到 $f(x)$ 在$[0,l]$ 上的值，所以在解题过程中并不需要具体作出延拓函数 $F(x)$，而只须指明采用哪一种延拓方式即可。


Fourier 级数
收敛定理
其它展开
Fourier 系数
正弦、余弦级数
求和函数的表达式、常数项级数的和

二、典型例题

例1

设$f(x)$是以2π为周期的函数，a_n,b_n是其Fourier系数

试用a_n,b_n表示$f(x+h)$ (h为常数)的Fourier系数

解
$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

$$\left(\int_{a}^{a+2\pi}f(t)dt=\int_{0}^{2\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos(nt-nh)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos nh \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt dt + \frac{1}{\pi}\sin nh \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt dt$$

$$= \cos nh \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt + \sin nh \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt$$

$$= a_n \cos nh + b_n \sin nh$$

同理 $B_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$

例2　将$f(x)=\arcsin(\sin x)$展开为*Fourier*级数

解　　$f(x)$是以2π为周期的函数

关键是写出 $f(x)$ 在一个周期内的表达式

$$f(x)=\begin{cases} -\pi-x & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2} \\ x & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$$

易见$f(x)$ 是奇函数　　$a_n=0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nx dx]$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

例3　设$f(x)=x^2 \quad x\in(0,\pi)$的以$2\pi$为周期的正弦级数的和函数为$s(x)$,求$s(-\frac{\pi}{2}),s(-3\pi),s(\frac{\pi}{4}),s(4\pi)$

解　此题是定义在 $(0,\pi)$ 的函数展开成正弦级数

为此，首先对 $f(x)$ 作奇延拓在作正弦展开

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi \\ -f(-x) & -\pi\le x\le 0 \end{cases} \qquad s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

依收敛定理

当 x 是连续点时　$s(x)=f(x)$

当 x 是间断点时　$s(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

注意到 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内连续

只须注意端点处的情况

$$s(-\frac{\pi}{2}) = F(-\frac{\pi}{2}) = -f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$s(-3\pi) = \frac{1}{2}[F(-\pi) + F(\pi)] = 0$$

$$s(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16}$$

$$s(4\pi) = F(0) = 0$$

例4　将 $f(x)=x^3\ (0\le x\le \pi)$ 展开成余弦级数

并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

解　对 $f(x)$ 进行偶延拓　$b_n=0$　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3dx=\frac{\pi^3}{2}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nxdx=-\frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{12}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\pi^2\cos n\pi-\frac{12}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$

$$=(-1)^n\frac{6\pi}{n^2}-\frac{12}{\pi}\cdot\frac{1}{n^4}[(-1)^n-1]$$

$$x^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$+\frac{24}{\pi}[\cos x + \frac{1}{3^4}\cos 3x + \frac{1}{5^4}\cos 5x + \cdots\cdots]$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

令 $x = 0$ 得

$$0 = \frac{\pi^3}{4} - 6\pi(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots)$$

$$+\frac{24}{\pi}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots)$$

$$\frac{24}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)=-\frac{\pi^3}{4}+6\pi\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{\pi^3}{4}+6\pi\cdot\frac{\pi^2}{12} \quad =\frac{\pi^3}{4}$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96} \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots \quad =\frac{1}{16}\cdot\sigma=\frac{1}{16}(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$\sigma_2=\frac{1}{15}\cdot\sigma_1=\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad =\sigma_1+\sigma_2=\sigma \quad =\frac{\pi^4}{90}$$

例5 已知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$ 该级数的和函数为 $s(x)$

则 A $s(1)=1$ $s(2)=4$

B $s(1)=0.5$ $s(2)=4$

C $s(1)=0.5$ $s(2)=0$

D $s(1)=1$ $s(2)=0$