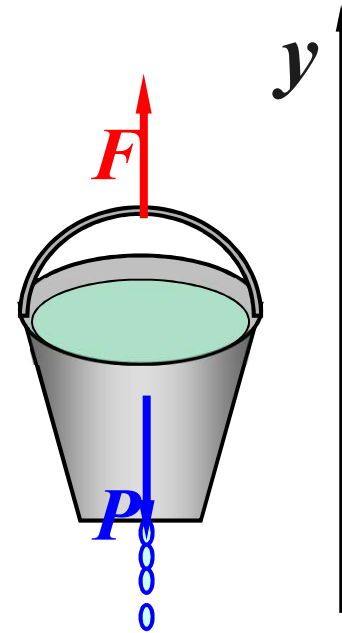
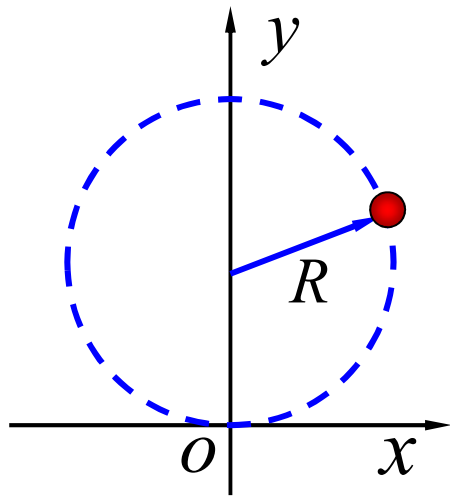


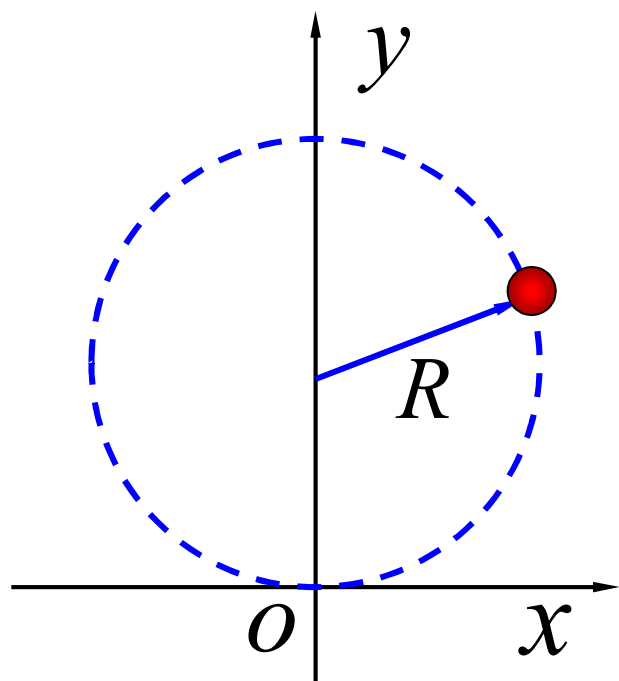
例 一质点在如图所示的坐标平面内作圆运动，有一力作用在质点上 $\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$ ，求质点从原点运动到 $(0, 2R)$ 位置过程中，力所做的功。



例 一人从10米深的井中提水，起始桶中装有10kg的水，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水，水桶被匀速的从井中提到井口，求人所做的功。

已知 $h = 10\text{m}$ $m = 10\text{kg}$ $\alpha = 0.2\text{kg/m}$

例 一质点在如图所示的坐标平面内作圆运动，有一力 $\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$ 作用在质点上，**求**质点从**原点**运动到 **(0, 2R)** 位置过程中，力所做的功。



解： $\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$W_x = \int_0^0 F_x dx = \int_0^0 F_0 x dx = 0$$

$$W_y = \int_0^{2R} F_0 y dy = 2F_0 R^2$$

$$W = W_x + W_y = 2F_0 R^2$$

例 一人从10米深的井中提水，起始桶中装有10kg的水，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水，水桶被匀速的从井中提到井口，求人所做的功。

已知 $h = 10\text{m}$ $m = 10\text{kg}$ $\alpha = 0.2\text{kg/m}$

解：水桶匀速上提，加速度 $a = 0$.

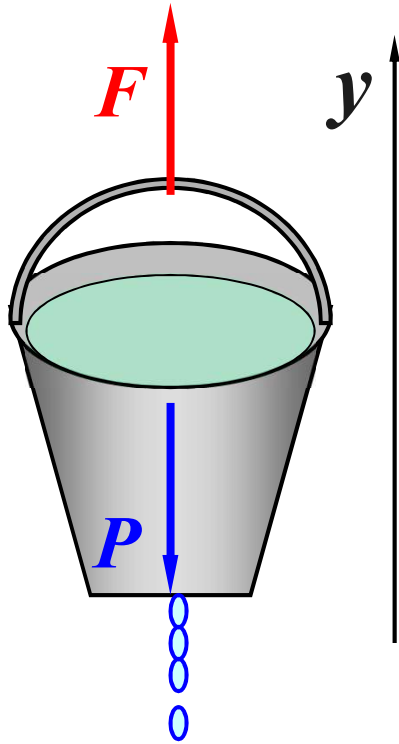
$$\vec{F} + \vec{P} = 0$$

重力随位置的变化关系

$$p = -(mg - \alpha gy)$$

$$W = \int_0^h F dy = \int_0^h (mg - \alpha gy) dy$$

$$= mgh - \frac{1}{2} \alpha gh^2 = 882 \text{ J}$$



3-3 保守力与非保守力 势能

一 万有引力、重力、弹性力做功的特点

1) 万有引力做功

以 m' 为参考系, m 的位置矢量为 \vec{r} .

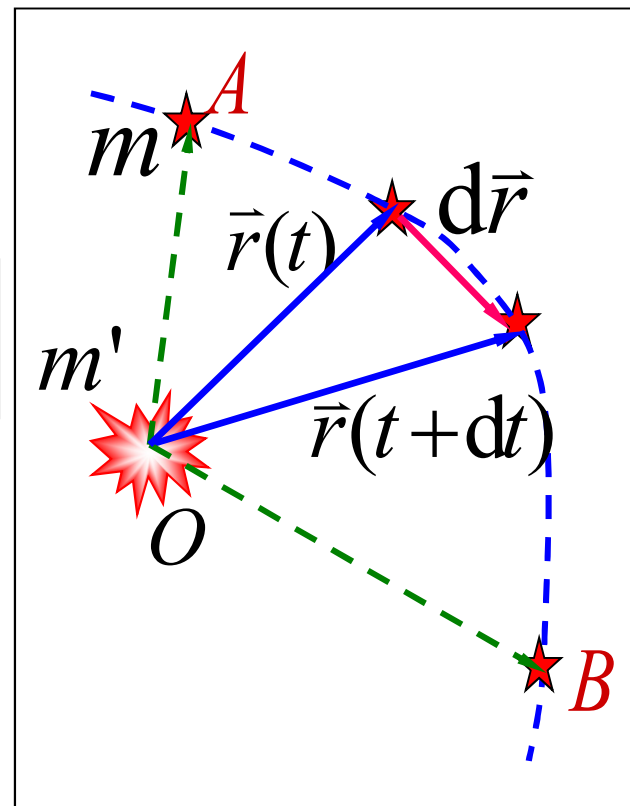
m' 对 m 的万有引力为

$$\vec{F} = -G \frac{m' m}{r^2} \vec{e}_r$$

r 方向单位矢量

m 移动 $d\vec{r}$ 时, \vec{F} 做元功为

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m' m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

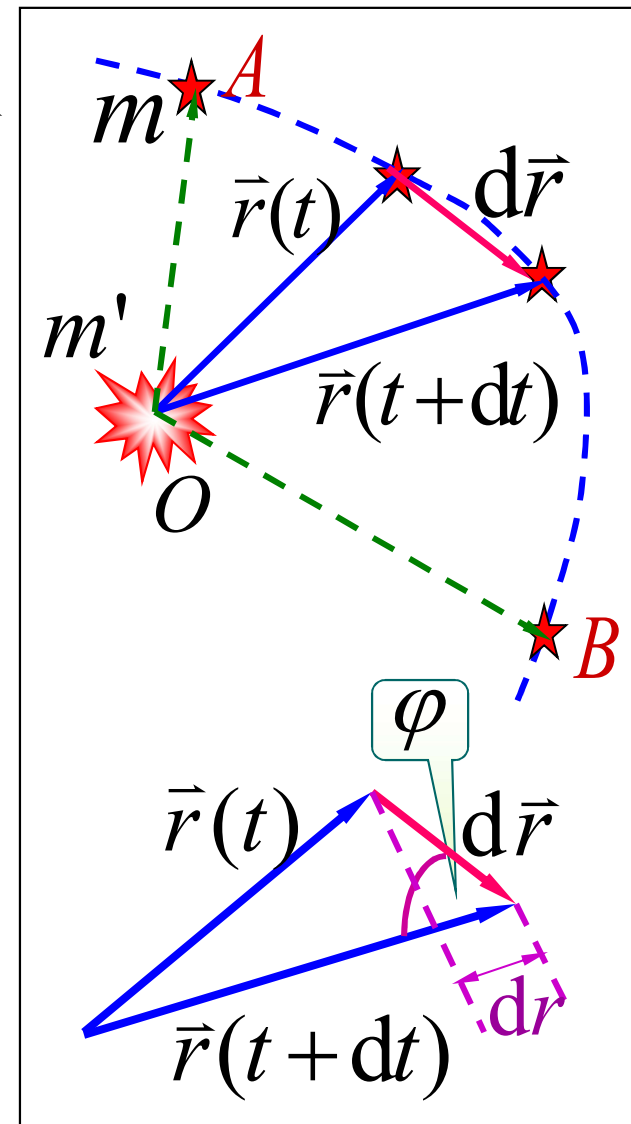


$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -G \frac{m' m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = |\vec{e}_r| \cdot |d\vec{r}| \cos \varphi = dr$$

$$W = \int_{r_A}^{r_B} -G \frac{m' m}{r^2} dr$$

$$W = - \left[\left(-G \frac{m' m}{r_B} \right) - \left(-G \frac{m' m}{r_A} \right) \right]$$



2) 重力做功

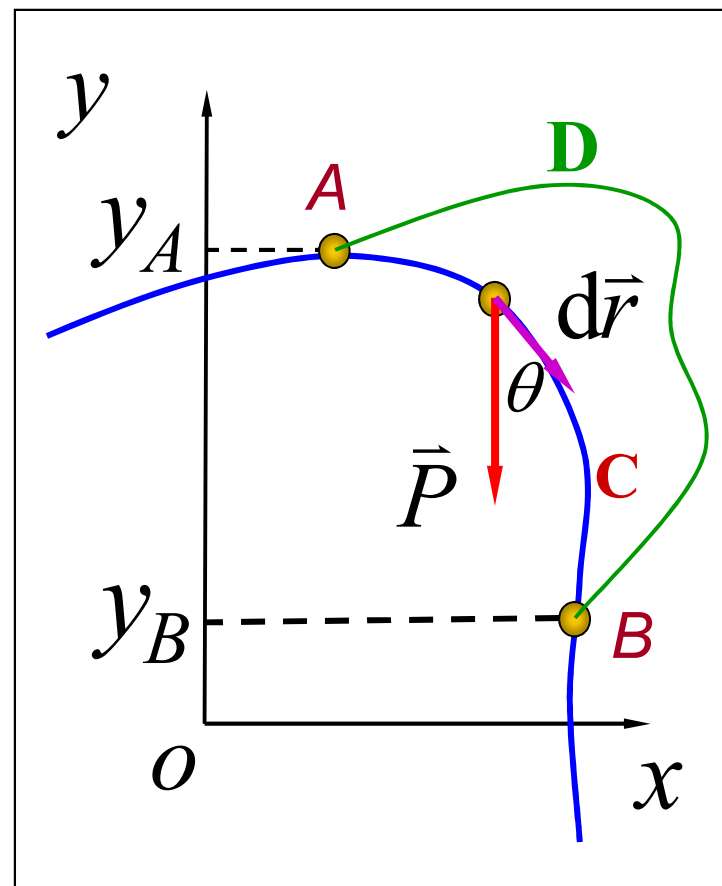
$$\vec{P} = -mg \vec{j}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

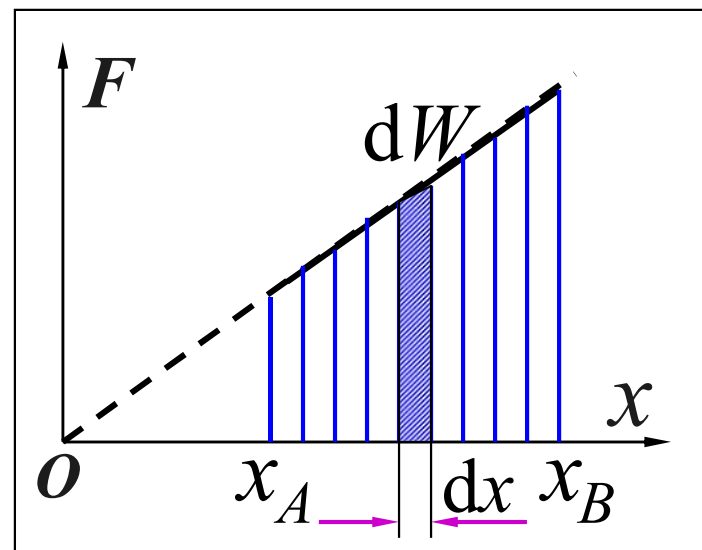
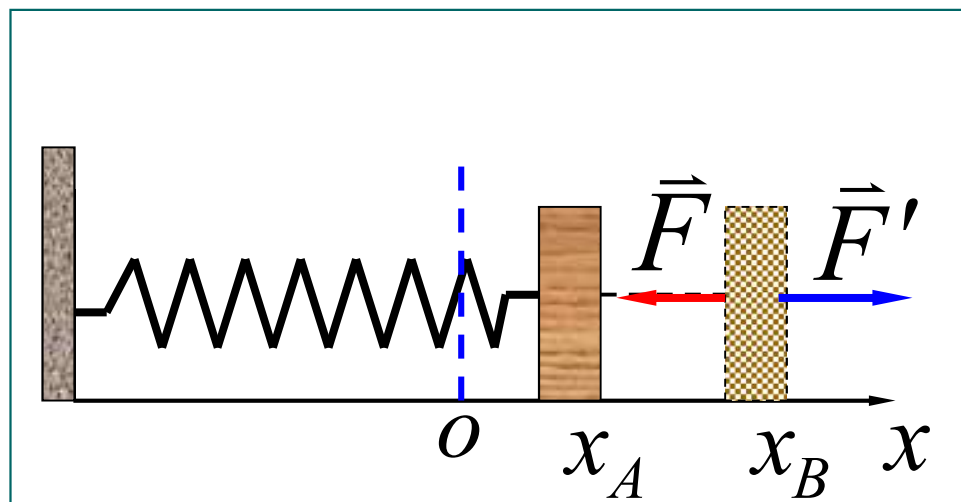
$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{y_A}^{y_B} -mg dy$$

$$= -(mgy_B - mgy_A)$$

$$W = \oint -mg dy = 0$$



3) 弹性力做功



$$\vec{F} = -kx \vec{i}$$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx$$

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W = \oint -kx dx = 0$$

二 保守力和非保守力

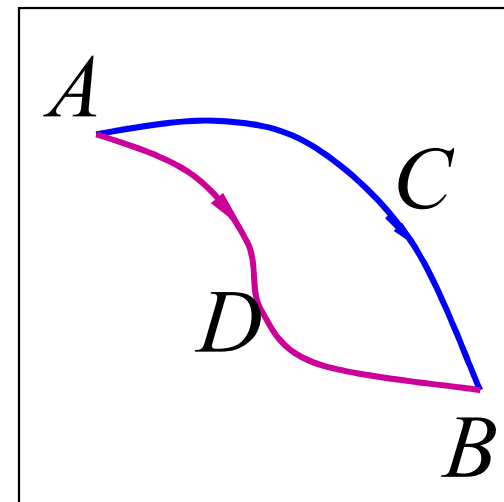
► 保守力：力所做的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的始末相对位置。

$$\text{引力功} \quad W = - \left[\left(-G \frac{m' m}{r_B} \right) - \left(-G \frac{m' m}{r_A} \right) \right]$$

$$\text{重力功} \quad W = -(mgy_B - mgy_A)$$

$$\text{弹力功} \quad W = - \left(\frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2 \right)$$

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

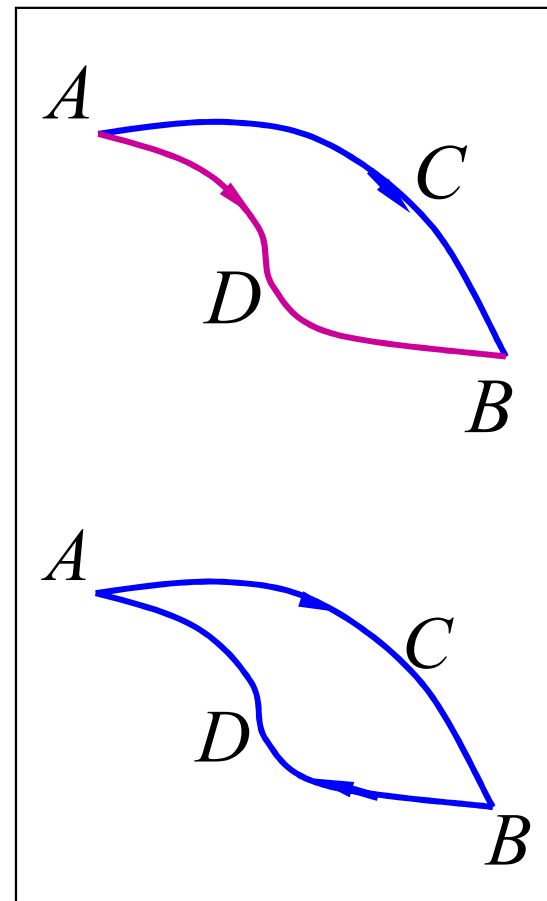


$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

物体沿闭合路径运动一周时，
保守力对它所做的功等于零。



➤ 非保守力：力所做的功与路径有关。（例如摩擦力）

讨论 对功的概念有以下几种说法:

(1) 保守力做正功时, 系统内相应的势能增加.

(2) 质点运动经一闭合路径, 保守力对质点做的功为零.

(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反, 两者所做功的代数和必为零. **(C)**

(A) (1)、(2) 是正确的

(B) (2)、(3) 是正确的

★ (C) 只有 (2) 是正确的

(D) 只有 (3) 是正确的

分析: (1) 错. (保守力做正功时, 系统相应的势能减少).

(3) 错. (作用力和反作用力虽然大小相等、方向相反, 但两者所做功的代数和不一定为零; 而等于力与两者相对位移的乘积.)

三 势能 势能曲线

◆ 势能 与物体间相互作用及相对位置有关的能量。

重力功

$$W = -(mgy_B - mgy_A)$$

引力功

$$W = - \left[\left(-G \frac{m'm}{r_B} \right) - \left(-G \frac{m'm}{r_A} \right) \right]$$

弹力功

$$W = - \left(\frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2 \right)$$

重力势能

$$E_p = mgz$$

引力势能

$$E_p = -G \frac{m'm}{r}$$

弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

◆ 保守力的功

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

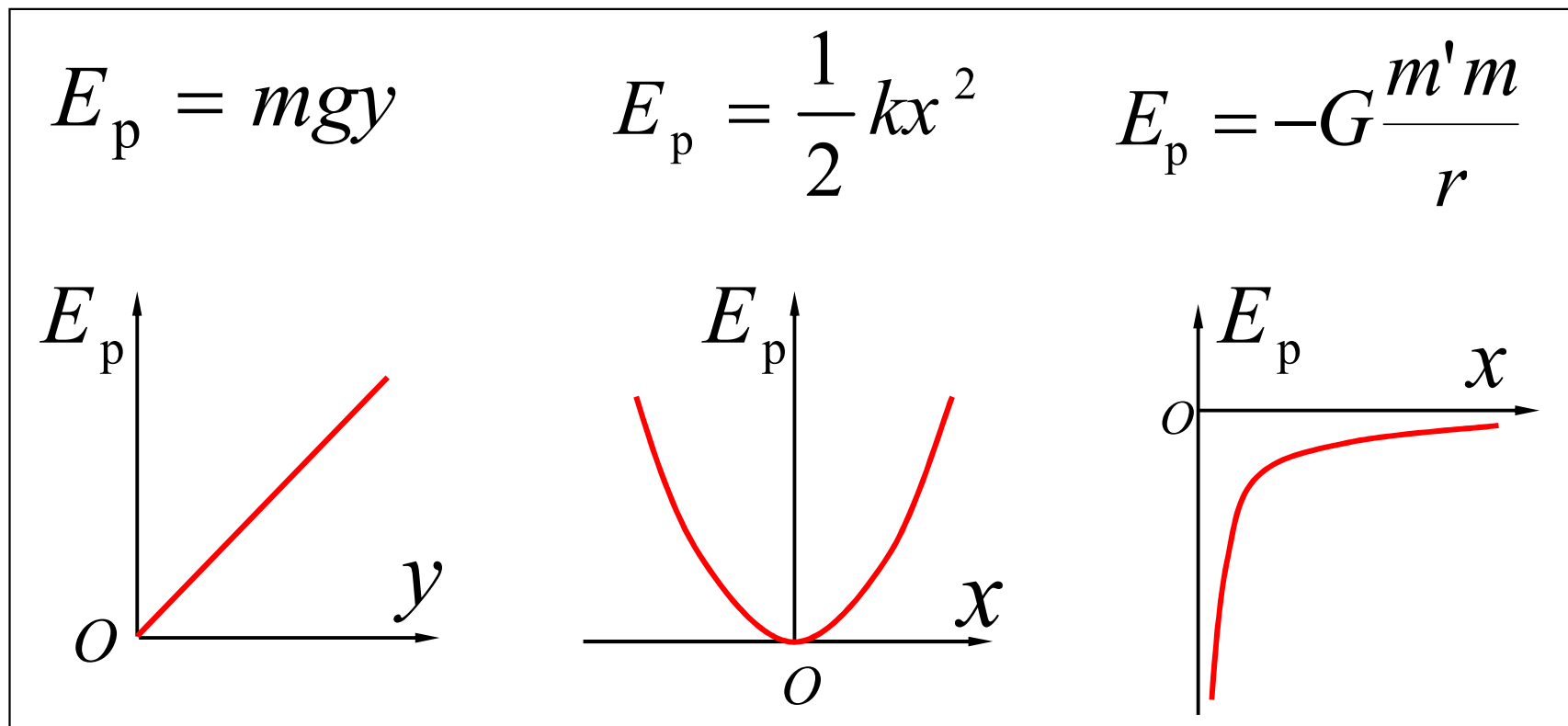
讨论

- ◆ 势能是状态函数 $E_p = E_p(x, y, z)$
- ◆ 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关。
- ◆ 势能是属于系统的。
- ◆ 势能计算 $W = -(E_p - E_{p0}) = -\Delta E_p$

若令 $E_{p0}(x_0, y_0, z_0) = 0$

$$E_p(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x_0, y_0, z_0)} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

➤ **势能曲线:**由势能函数确定的势能随坐标变化的曲线.



重力势能曲线

$$y = 0, E_p = 0$$

弹性势能曲线

$$x = 0, E_p = 0$$

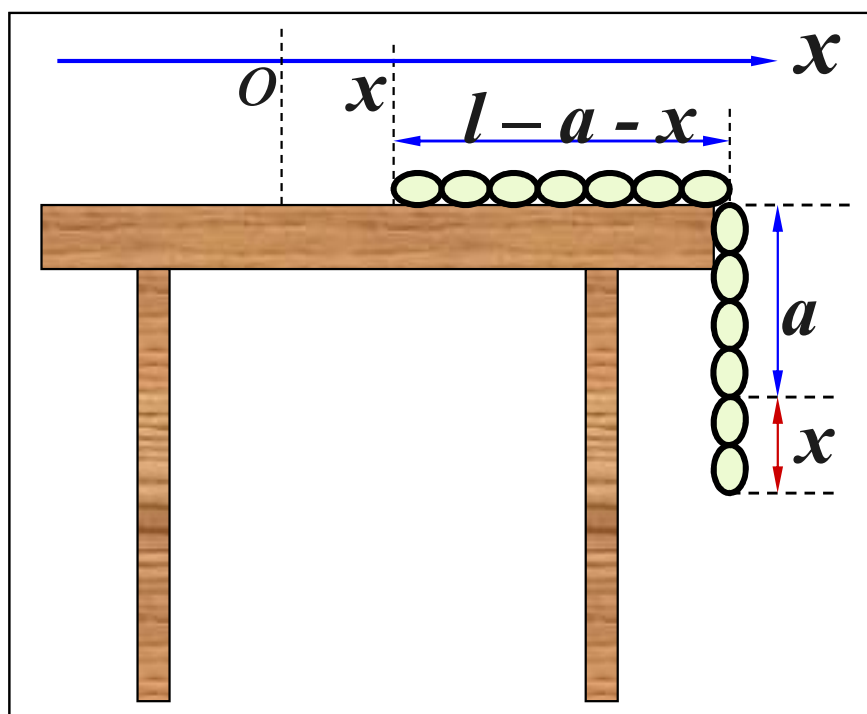
引力势能曲线

$$x \rightarrow \infty, E_p = 0$$

例2 一质量为 m ，长为 l 的链条置于桌边，一端下垂长度为 a ，若链条与桌面摩擦系数为 μ ，则：

(1) 链条由开始到完全离开桌面的过程中，摩擦力做的功多少？

(2) 链条开始离开桌面的速度为多大？

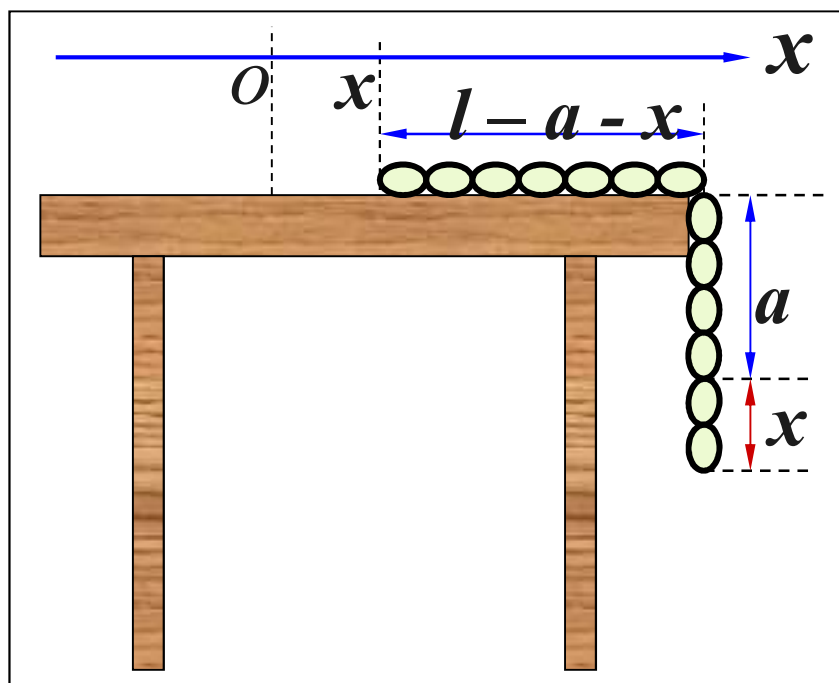


解 选坐标如图

$$\text{摩擦力 } F_f = \mu \frac{mg}{l} (l - a - x)$$

$$dW_f = -F_f dx$$

$$W_f = -\mu \frac{mg}{l} \int_0^{l-a} (l - a - x) dx$$



$$W_f = -\mu \frac{mg}{l} \int_0^{l-a} (l-a-x) dx$$

$$= -\frac{\mu mg (l-a)^2}{2l}$$

求 (2) 链条开始离开桌面的速度为多大?

以桌面为重力势能零点, 根据功能原理 $W_f = \Delta E$ 有

$$-\frac{\mu mg (l-a)^2}{2l} = \left(\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mgl \right) - \left(0 - \frac{a}{l} mg \frac{a}{2} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} [(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2]}$$

3-4 功能原理 机械能守恒定律

一 质点系的动能定理

◆ 对第 i 个质点，有

$$W_i^{\text{ex}} + W_i^{\text{in}} = E_{ki} - E_{ki0}$$

外力功

内力功

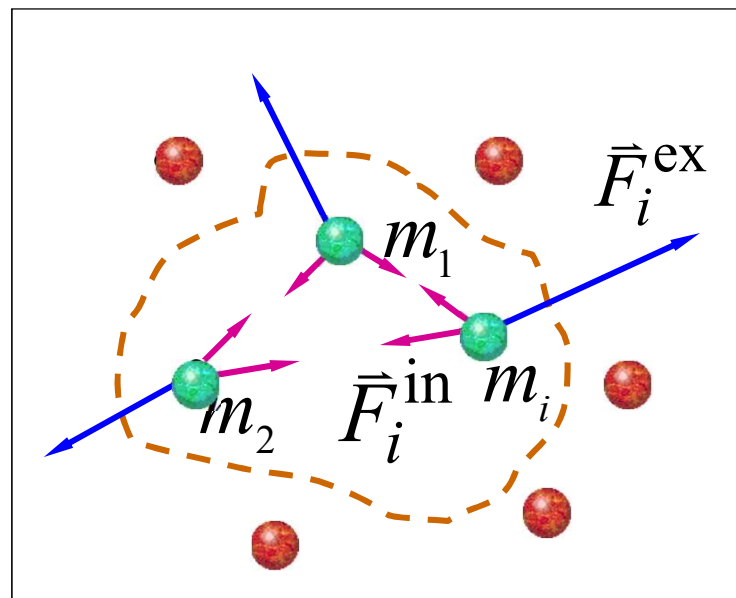
对质点系，有

$$\sum_i W_i^{\text{ex}} + \sum_i W_i^{\text{in}} = \sum_i E_{ki} - \sum_i E_{ki0} = E_k - E_{k0}$$

◆ 质点系动能定理 $W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_k - E_{k0}$



内力可以改变质点系的动能



二 质点系的功能原理

质点系动能定理

$$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

$$W^{\text{in}} = \sum_i W_i^{\text{in}} = W_{\text{c}}^{\text{in}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}}$$

非保守力的功

$$W_{\text{c}}^{\text{in}} = -\left(\sum_i E_{\text{pi}} - \sum_i E_{\text{pi}0}\right) = -(E_{\text{p}} - E_{\text{p}0})$$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0})$$

机械能 $E = E_{\text{k}} + E_{\text{p}}$

$$W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = E - E_0$$

◆ 质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力做功之和。

三 机械能守恒定律

◆ 功能原理 $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0})$

当 $W^{\text{ex}} + W_{\text{nc}}^{\text{in}} = 0$ 时, 有 $E = E_0$

◆ **机械能守恒定律** 只有保守内力做功的情况下, 质点系的机械能保持不变。

$$E_{\text{k}} - E_{\text{k}0} = -(E_{\text{p}} - E_{\text{p}0})$$

$$\Delta E_{\text{k}} = -\Delta E_{\text{p}}$$

◆ 守恒定律的**意义**

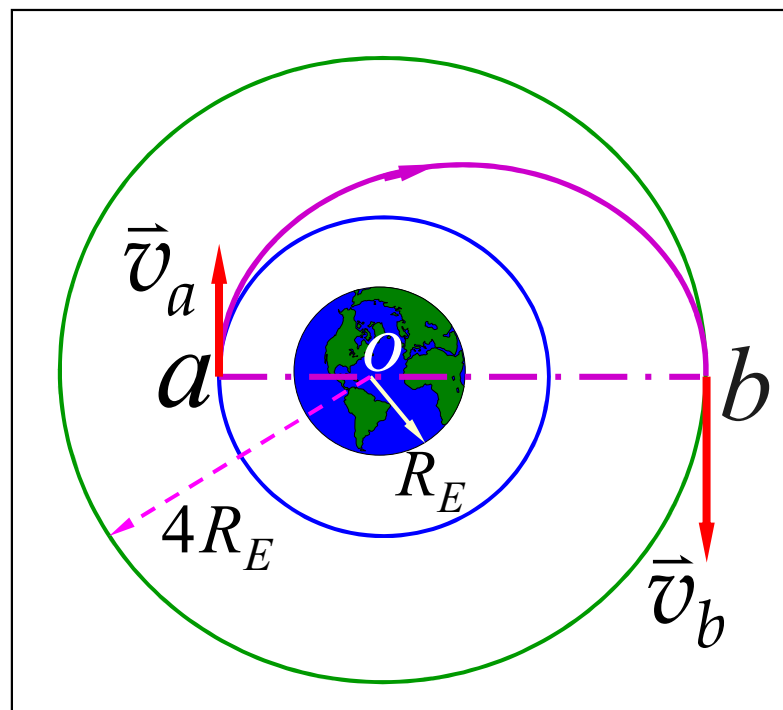
不究过程细节而能对系统的状态下结论, 这是各个守恒定律的特点和优点。

例3 已知地球的半径为 $R_E \approx 6.4 \times 10^3 \text{ km}$ ，今有质量为 $m = 3.0 \times 10^3 \text{ kg}$ 的人造地球卫星从半径为 $2R_E$ 的圆形轨道上，经如图所示的半椭圆形轨道上的点 a 变轨至半径为 $4R_E$ 的另一个圆形轨道点 b 上。点 a 和点 b 处的椭圆轨道与圆轨道的切线相切。

试问：卫星完成了变轨过程后获得了多少能量？

解：由牛顿第二定律和万有引力定律

$$G \frac{m_E m}{(2R_E)^2} = m \frac{v_a^2}{2R_E}$$



已知: $R_E \approx 6.4 \times 10^3 \text{ km}$, $m = 3.0 \times 10^3 \text{ kg}$

$$G \frac{m_E m}{(2R_E)^2} = m \frac{v_a^2}{2R_E}$$

$$\therefore G m_E / R_E^2 = g$$

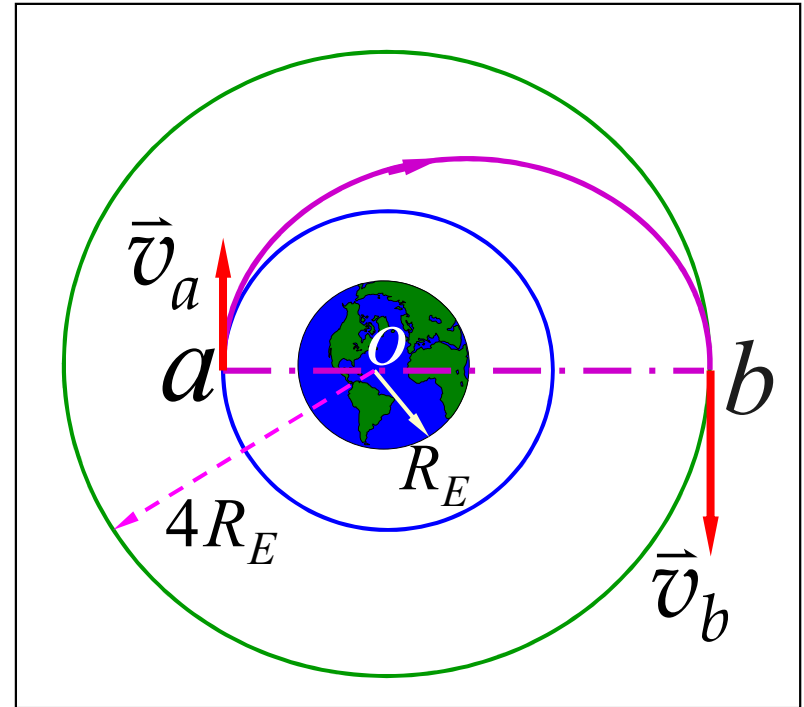
$$\therefore v_a = (gR_E / 2)^{1/2}$$

$$\text{同理 } v_b = (gR_E / 4)^{1/2}$$

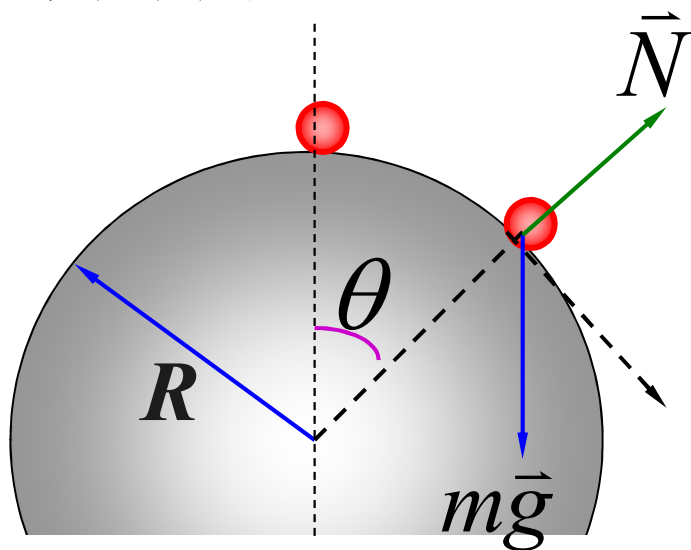
$$E_a = \frac{1}{2} m v_a^2 - G \frac{m_E m}{2R_E} = -\frac{1}{4} m g R_E$$

$$E_b = \frac{1}{2} m v_b^2 - G \frac{m_E m}{4R_E} = -\frac{1}{8} m g R_E$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{8} m g R_E \\ &= 2.35 \times 10^{10} \text{ J} \end{aligned}$$



例4 在半径为 R 的光滑球面的顶点处，一质点开始滑动，取初速度接近于零，试问质点滑到顶点以下何处时脱离球面？



解： 脱离时 $N = 0$ ，在此过程中机械能守恒。取球顶位置重力势能为零

$$\begin{cases} mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R} \\ 0 = \frac{1}{2} m v^2 - mgR(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$\because N = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2}{3} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{2}{3} \quad \text{时，小球脱离大球.}$$