傅里叶级数(续)

一、正弦级数与余弦级数

二、以$2l$为周期的函数的傅里叶展开

三、习题课

一、正弦级数和余弦级数

1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

定理. 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数,它的傅里叶系数为

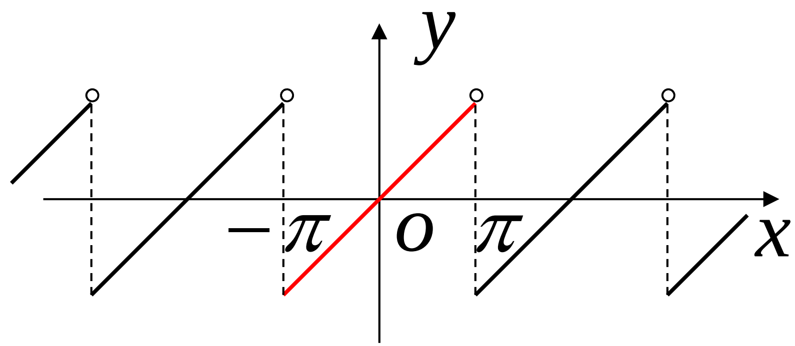
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例1. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$,将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



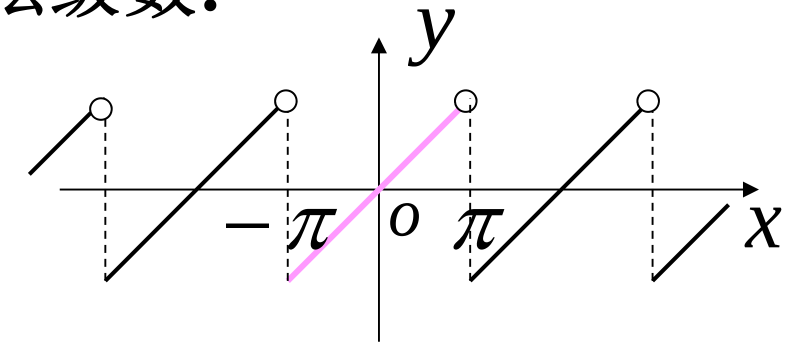
$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 ***f*** **(*x*)** 的正弦级数:



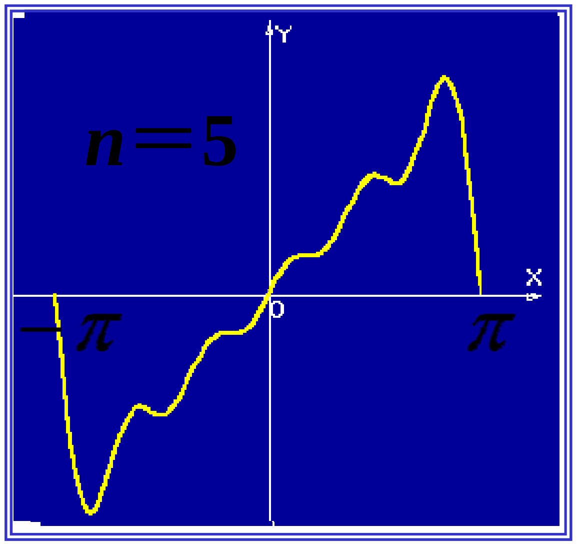
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

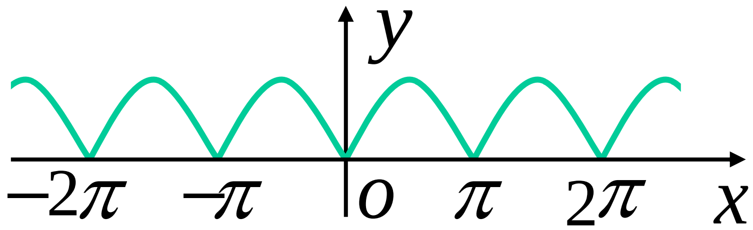
$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \cdots)$$

在$[-\pi, \pi)$上级数的部分和

逼近 ***f*** **(*x*)** 的情况见右图.



例2. 将周期函数 $u(t)=|\sin t|$ 展成傅里叶级数.



解: $u(t)$ 是周期为2π 的周期偶函数, 因此

$$b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 0$$

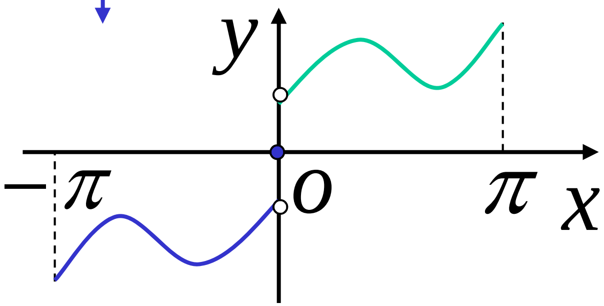
$$\therefore\ u(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

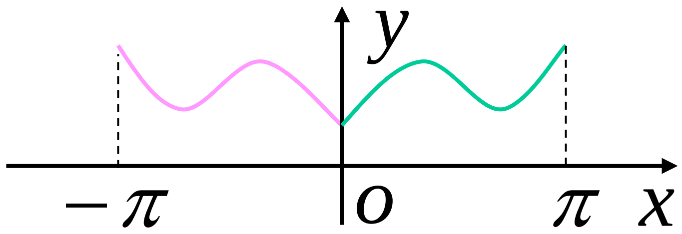
$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

2. 在[0, π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,\pi]$ 偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数

例3. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

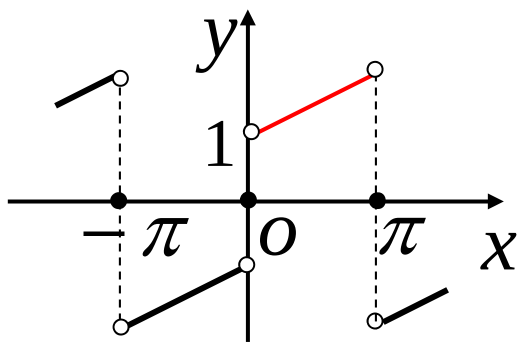
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

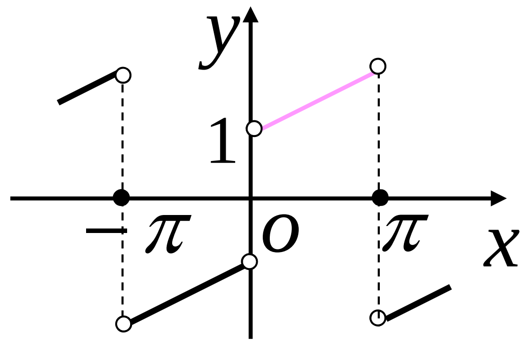
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



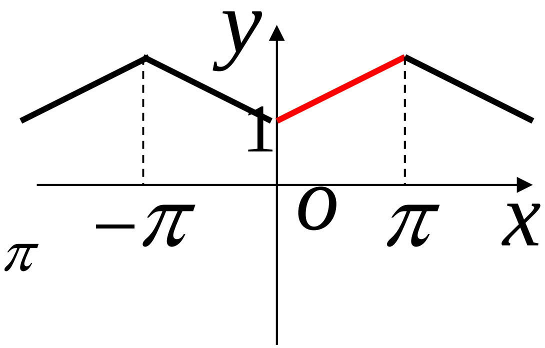
因此得

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]\quad(0<x<\pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 , 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

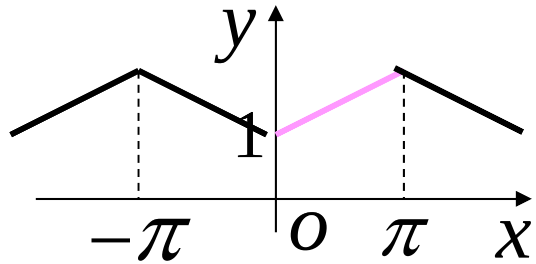
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le \pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

二、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开

周期为 $2l$ 函数 $f(x)$

$\Downarrow$ 变量代换 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 函数 $F(z)$

$\Downarrow$ 将 $F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理. 设周期为2*l* 的周期函数 *f* (*x*)满足收敛定理条件, 则它的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 *f* (*x*) 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: $\boxed{\text{令 } z=\frac{\pi x}{l}\text{，则 } x\in[-l,l]\text{ 变成 } z\in[-\pi,\pi]}$,

令 $F(z)=f(x)=f(\frac{lz}{\pi})$，则

$$F(z+2\pi)=f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\frac{lz}{\pi}+2l)$$
$$=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$$

所以 $F(z)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且它满足收敛定理条件，将它展成傅里叶级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

(在 **F(z)** 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的 连续点处) 证毕

说明: 如果 **$f(x)$** 为奇函数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$ (在 $f(x)$ 的连续点处)

其中 $$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$$

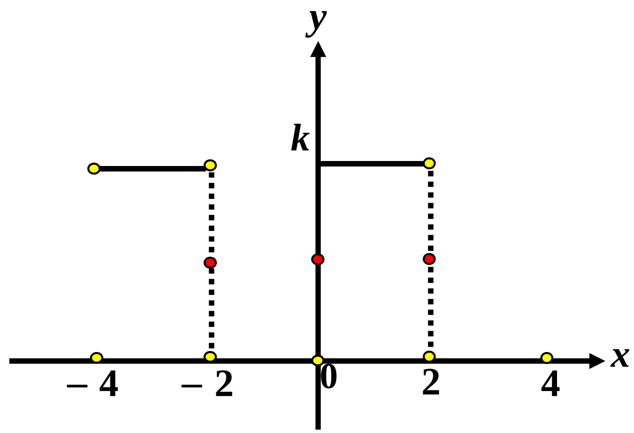
如果 **$f(x)$** 为偶函数, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$ (在 $f(x)$ 的连续点处)

其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

注: 无论哪种情况, 在 **$f(x)$** 的间断点 **x** 处, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例 1 设 $f(x)$是周期为 4 的周期函数,它在$[-2,2)$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$, 将其展成傅氏级数.



解 $\because l=2$, 满足狄氏充分条件.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx\ =k,$$

$$a_n=\ \frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}xdx\ =0,\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k \cdot \sin\frac{n\pi}{2}x dx \quad = \frac{k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi} & \text{当} n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{当} n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

$x = 2n$时级数收敛于 $\dfrac{k}{2}$

当函数定义在任意有限区间上时，其傅里叶展开方法:

方法1　$f(x),\ x\in[a,b]$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = z + \frac{b+a}{2},\ \text{即 } z = x - \frac{b+a}{2}$$

$$F(z) = f(x) = f(z + \frac{b+a}{2}),\ z\in[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$$

$$\Big\downarrow \text{周期延拓}$$

$F(z)$在$[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

$$\Big\downarrow \text{将 } z = x - \frac{b+a}{2} \text{ 代入展开式}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法2 $f(x)$, $x \in [a,b]$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = z + a\text{, 即 } z = x - a$$

$$F(z) = f(x) = f(z+a), \quad z \in [0, b-a]$$

$$\Big\downarrow \text{奇或偶式周期延拓}$$

$F(z)$ 在 $[0, b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$$\Big\downarrow \text{将 } z = x - a \text{ 代入展开式}$$

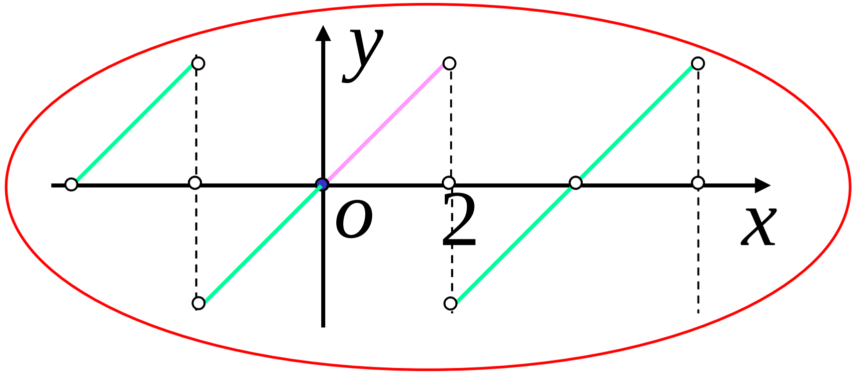
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例2. 把 $f(x)=x \quad (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数;　　(2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

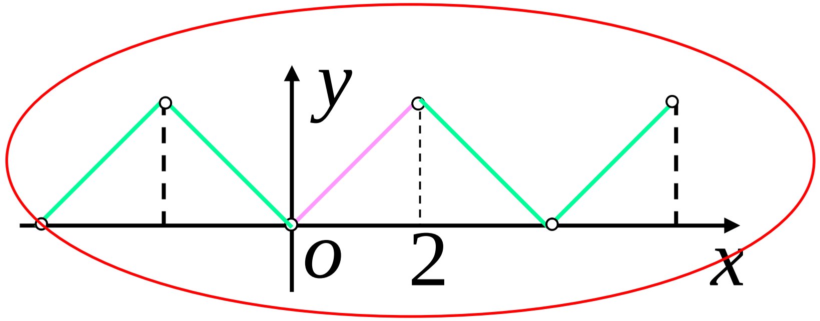
$$b_n = \frac{\boxed{2}}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0<x<2)$$

(2) 将$f(x)$作偶周期延拓, 则有



$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cdot \cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

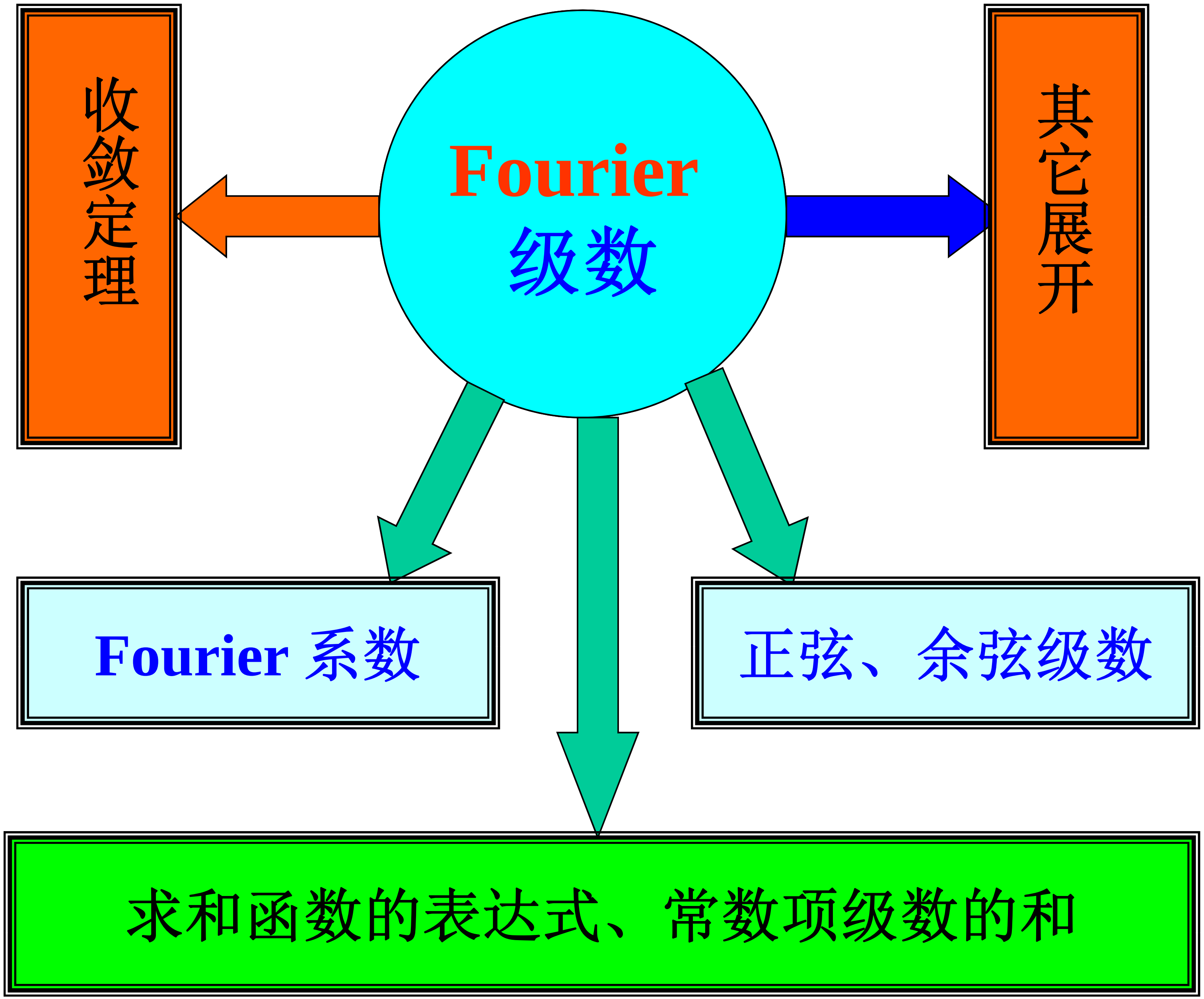
$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$


收敛定理
Fourier
级数
其它展开
Fourier 系数
正弦、余弦级数
求和函数的表达式、常数项级数的和

二、典型例题

例1

设$f(x)$是以2π为周期的函数，a_n, b_n是其*Fourier*系数

试用a_n, b_n表示$f(x+h)$ (h为常数)的*Fourier*系数

解
$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$\left(\int_{a}^{a+2\pi} f(t)dt=\int_{0}^{2\pi} f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right)$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)\cos(nt-nh)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos nh\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)\cos nt\,dt+\frac{1}{\pi}\sin nh\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)\sin nt\,dt$$

$$=\cos nh\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt+\sin nh\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh$$

同理 $\quad B_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$

例2　将$f(x)=\arcsin(\sin x)$展开为*Fourier*级数

解　$f(x)$是以2π为周期的函数

关键是写出 $f(x)$ 在一个周期内的表达式

$$f(x)=\begin{cases} -\pi-x & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2} \\ x & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$$

易见$f(x)$ 是奇函数　　$a_n=0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nx dx]$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

例3 设$f(x)=x^2$ $x\in(0,\pi)$的以2π为周期的正弦级数的和函数为$s(x)$,求$s(-\frac{\pi}{2}),s(-3\pi),s(\frac{\pi}{4}),s(4\pi)$

解 此题是定义在 $(0,\pi)$ 的函数展开成正弦级数

为此，首先对 $f(x)$ 作奇延拓在作正弦展开

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi \\ -f(-x) & -\pi\le x\le 0 \end{cases} \qquad s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

依收敛定理

当 x 是连续点时 $s(x)=f(x)$

当 x 是间断点时 $s(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

注意到 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内连续

只须注意端点处的情况

$$s(-\frac{\pi}{2})=F(-\frac{\pi}{2})=-f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi^2}{4}$$

$$s(-3\pi)=\frac{1}{2}[F(-\pi)+F(\pi)]=0$$

$$s(\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{16}$$

$$s(4\pi)=F(0)=0$$

例4　将 $f(x)=x^3\ (0\le x\le \pi)$ 展开成余弦级数

并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

解　对 $f(x)$ 进行偶延拓　$b_n=0$　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3dx=\frac{\pi^3}{2}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nxdx=-\frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{12}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\pi^2\cos n\pi-\frac{12}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$

$$=(-1)^n\frac{6\pi}{n^2}-\frac{12}{\pi}\cdot\frac{1}{n^4}[(-1)^n-1]$$

$$x^3 = \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$+ \frac{24}{\pi} [\cos x + \frac{1}{3^4} \cos 3x + \frac{1}{5^4} \cos 5x + \cdots\cdots]$$

$$0 \le x \le \pi$$

令 $x = 0$ 得

$$0 = \frac{\pi^3}{4} - 6\pi (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots)$$

$$+ \frac{24}{\pi} (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots)$$

$$\frac{24}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)=-\frac{\pi^3}{4}+6\pi\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{\pi^3}{4}+6\pi\cdot\frac{\pi^2}{12} \quad =\frac{\pi^3}{4}$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96} \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots \quad =\frac{1}{16}\cdot\sigma=\frac{1}{16}(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$\sigma_2=\frac{1}{15}\cdot\sigma_1=\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad =\sigma_1+\sigma_2=\sigma \quad =\frac{\pi^4}{90}$$