Taylor公式的建立

多项式函数

用简单的、熟悉的函数来近似代替复杂函数.

用多项式近似表示函数 — 应用 $\begin{cases}\text{理论分析}\\ \text{近似计算}\end{cases}$

特点 **(1)**易计算函数值;

(2)导数与积分仍为多项式;

(3)多项式由它的系数完全确定, 而其系数又由它在一点的函数值及导数值确定.

用怎样的多项式去逼近给定的函数

误差又如何呢

回想微分

若$f'(x_0)$存在, 在x_0附近有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

记 $x=x_0+\Delta x$

一次多项式

$$f(x)\approx \boxed{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

当$x\to x_0$时,其误差是比$(x-x_0)$高阶的无穷小.

一次多项式

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\approx f(x)$$

不足　1. 精确度不高；2. 误差不能定量的估计.

希望 在x_0附近用适当的高次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n\approx f(x)$$

问题 (1) 系数怎么定?

(2) 误差(如何估计)表达式是什么?

一. 带皮亚诺余项的泰勒公式

设 $f(x) \in C^k(\mathrm{U}(x_0)) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$,

$f^{(n)}(x_0)$ 存在，则在该邻域内有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underline{\mathrm{o}((x-x_0)^n)}$$

该公式称为n阶带皮亚诺余项的泰勒公式

带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k+\mathrm{o}(x^n)$$

$$=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\mathrm{o}(x^n)$$

就是 $x_0=0$ **时的泰勒公式.**

带皮亚诺余项的泰勒公式的产生

设 $f(x)$ 在 $\mathrm{U}(x_0)$ 内可微，则 $\Delta x = x - x_0$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

即 $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

如果我们希望提高精度，应怎么办？

$a_2 = ?$

令 $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$+ a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

由极限知识可知，此时应有

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-a_2(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

我们先假定以下运算均成立，计算完后再看需要补充什么条件。运用罗必达法则，得

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-2a_2(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}-a_2\right]$$

如果 $f''(x_0)$ 存在，则 $a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2}$

当 $f(x)$ 在 $\mathrm{U}(x_0)$ 内有定义，且 $f''(x_0)$ 存在，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\mathrm{o}((x-x_0)^2)$$

该公式称为带皮亚诺余项的二阶泰勒公式.

式中 $\mathrm{o}((x-x_0)^2)$ 称为二阶皮亚诺余项 .

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$\boxed{a_3=?}$$

$$a_3(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2-a_3(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}$$

$$=0$$

运用罗必达法则计算极限.

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-3a_3(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)-3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)}{3\cdot 2\cdot (x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f''(x)-f''(x_0)}{3\cdot 2\cdot (x-x_0)}-a_3\right]$$

若 $f'''(x_0)$ 存在，则 $a_3=\dfrac{f'''(x_0)}{3!}$.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

该公式称为带皮亚诺余项的三阶泰勒公式.

仿照以上的做法，继续进行下去，

即可得到一般的带皮亚诺余项的 n 阶

泰勒公式.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underline{o((x-x_0)^n)}$$

带皮亚诺余项的n阶泰勒公式

常用函数的Maclaurin公式

要熟记!

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

例 将多项式 $p(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 表示

为 $(x+1)$ 的幂的泰勒多项式.

解 令 $x_0=-1$, 则

$$p(-1)=5,\quad p'(-1)=-13,\quad p''(-1)=22,$$

$$p'''(-1)=-12,\quad p^{(k)}(-1)=0\quad(k\geq 4),$$

三次多项式

由泰勒公式, 得

$$p(x)=5-13(x+1)+\frac{22}{2!}(x+1)^2-\frac{12}{3!}(x+1)^3$$

$$=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

例 计算无理数 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

令 $x = 1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$，欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

解 $\because e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便！

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

例 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

解 $\text{原式}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}$$

错解 $\text{原式}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

和差不能等价代换理由: $x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$

例 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x - x\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

思考: 以上解答对否?原因何在?

1) 用L’Hospital法则计算本题.

2) 用Maclaurin公式计算本题.

3) 本题答案为1/3.