

第六章 机械振动

6-1 简谐运动



◆ 任一物理量在某一定值附近往复变化均称为**振动**.

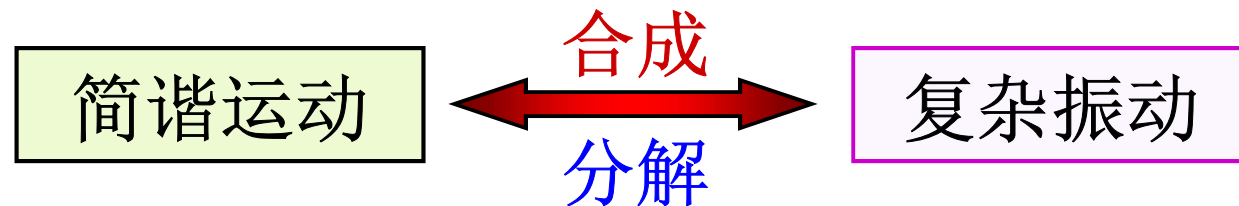
◆ **机械振动** 物体围绕一固定位置往复运动.

运动形式: 直线、平面和空间振动.

例如一切发声体、心脏、海浪起伏、地震以及晶体中原子的振动等.

◆ 周期和非周期振动

◆ **简谐运动** 最简单、最基本的振动.

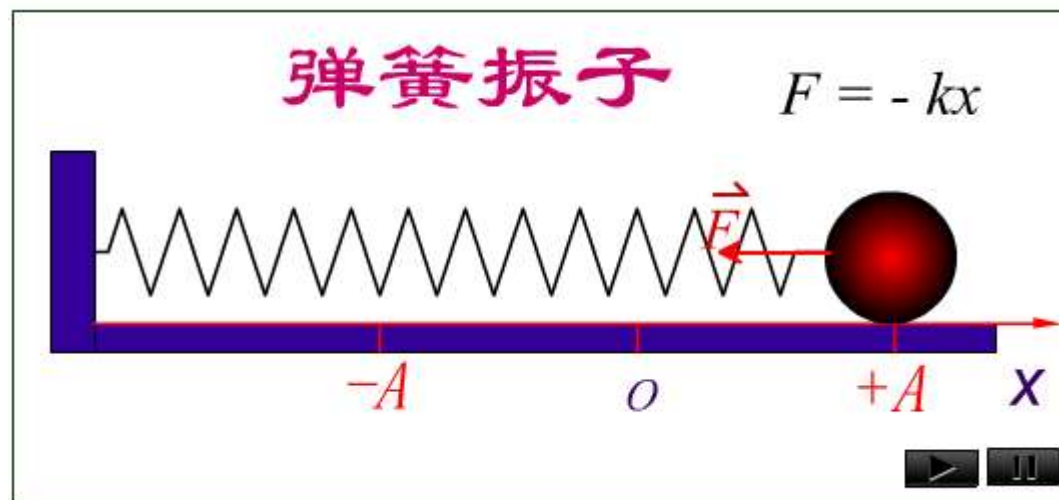
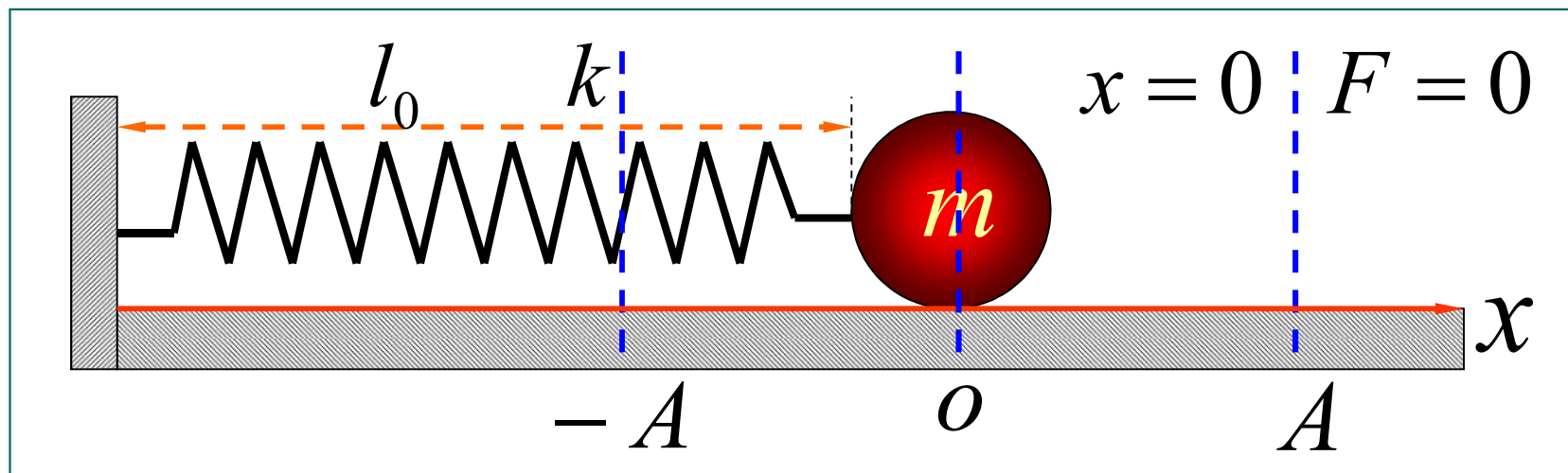


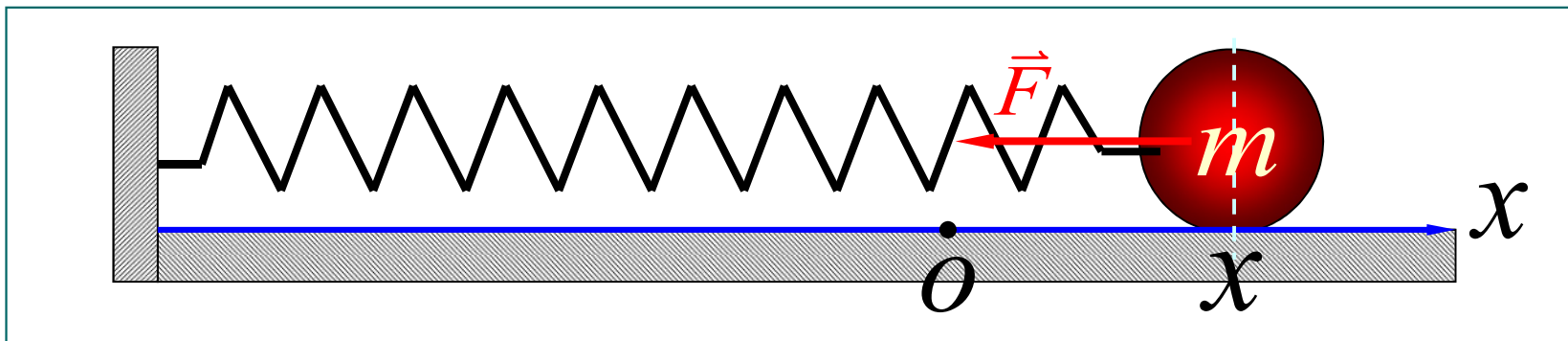
◆ **谐振子**: 作简谐运动的物体.



一 简谐运动

◆ 弹簧振子的振动





$$F = -kx = ma$$

$$\text{令 } \omega^2 = k/m$$

$$a = -\omega^2 x$$

a 与 x 方向相反

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

积分常数，根据初始条件确定

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

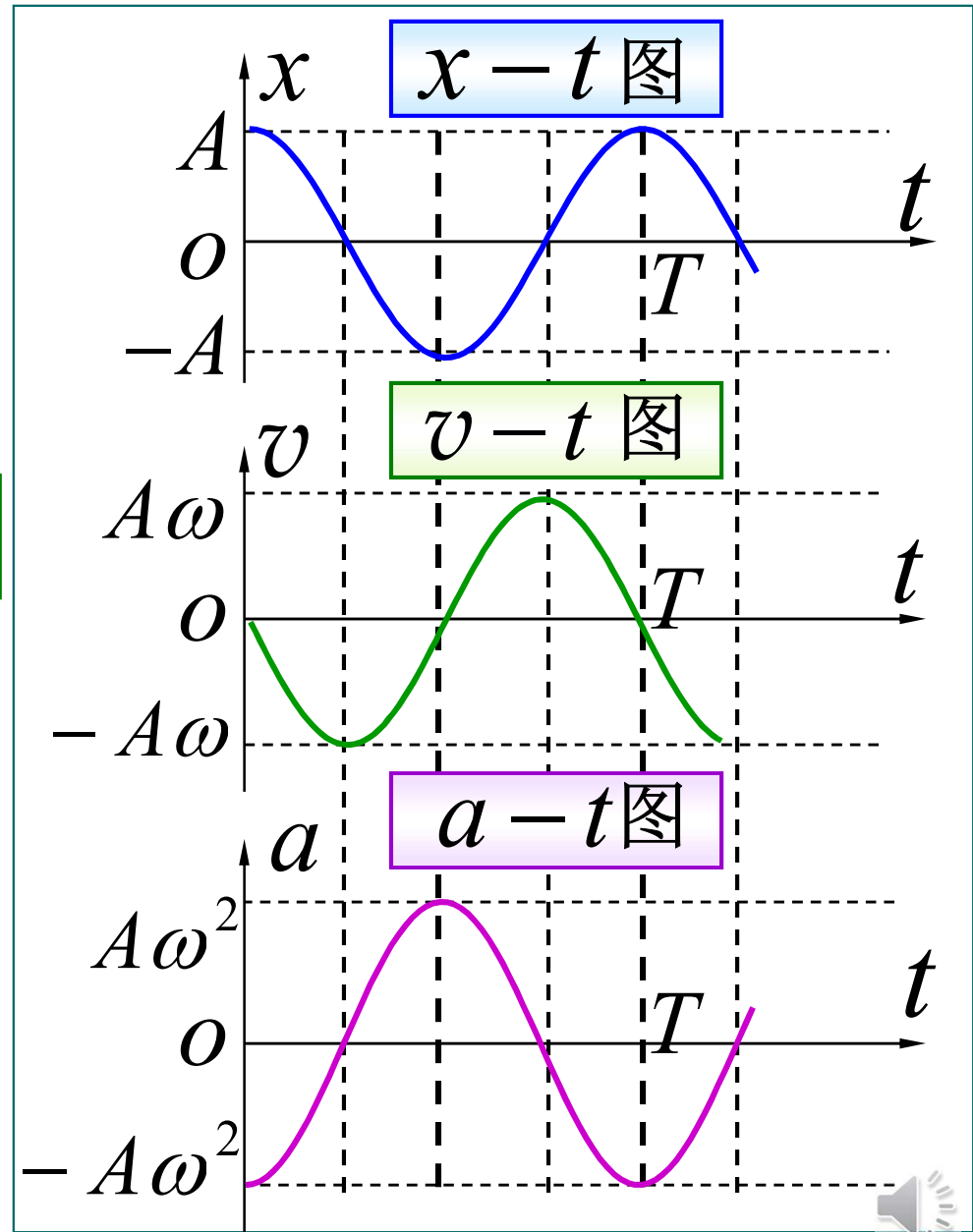
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{取 } \varphi = 0$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



二 振幅

$$A = |x_{\max}|$$

三 周期、频率

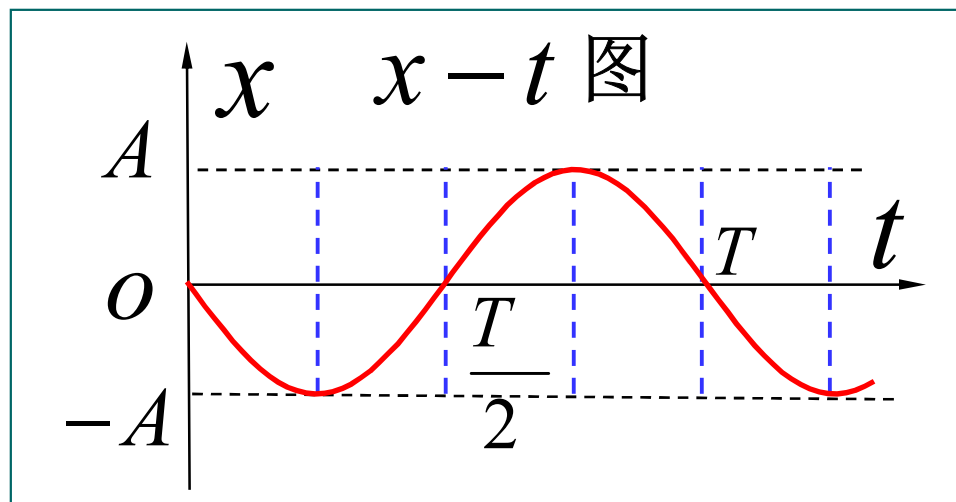
$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A \cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

◆ 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

◆ 频率 $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

◆ 圆频率 $\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$



注意

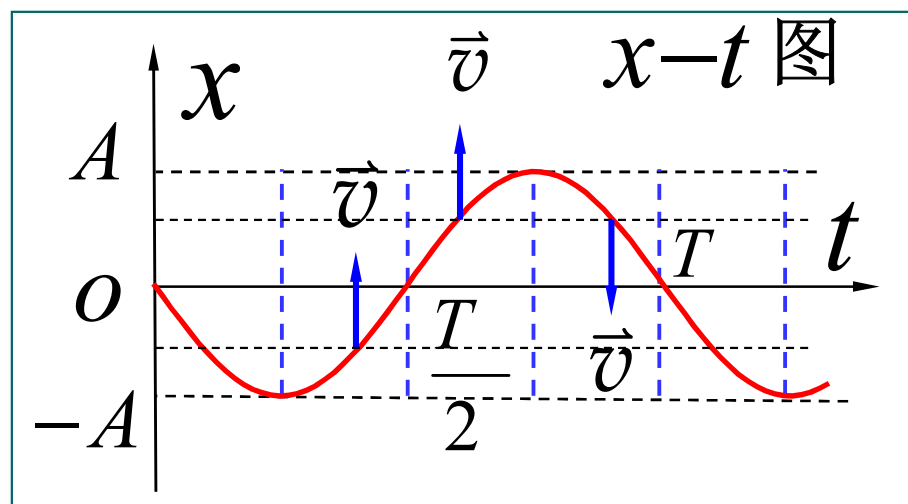
弹簧振子周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关

简谐运动中， x 和 v 间不存在一一对应的关系。

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



四 相位 $\omega t + \varphi$

- 1) $\omega t + \varphi \rightarrow (x, v)$ 存在一一对应的关系;
- 2) 相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；
相差 $2n\pi$ (n 为整数)质点运动状态全同。(周期性)
- 3) 初相位 $\varphi(t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态。
(φ 取 $[-\pi \rightarrow \pi]$ 或 $[0 \rightarrow 2\pi]$)



五 常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0$ $x = x_0$ $v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases}$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，
振幅和初相由初始条件决定。



讨论

已知 $t = 0, x = 0, v < 0$ 求 φ

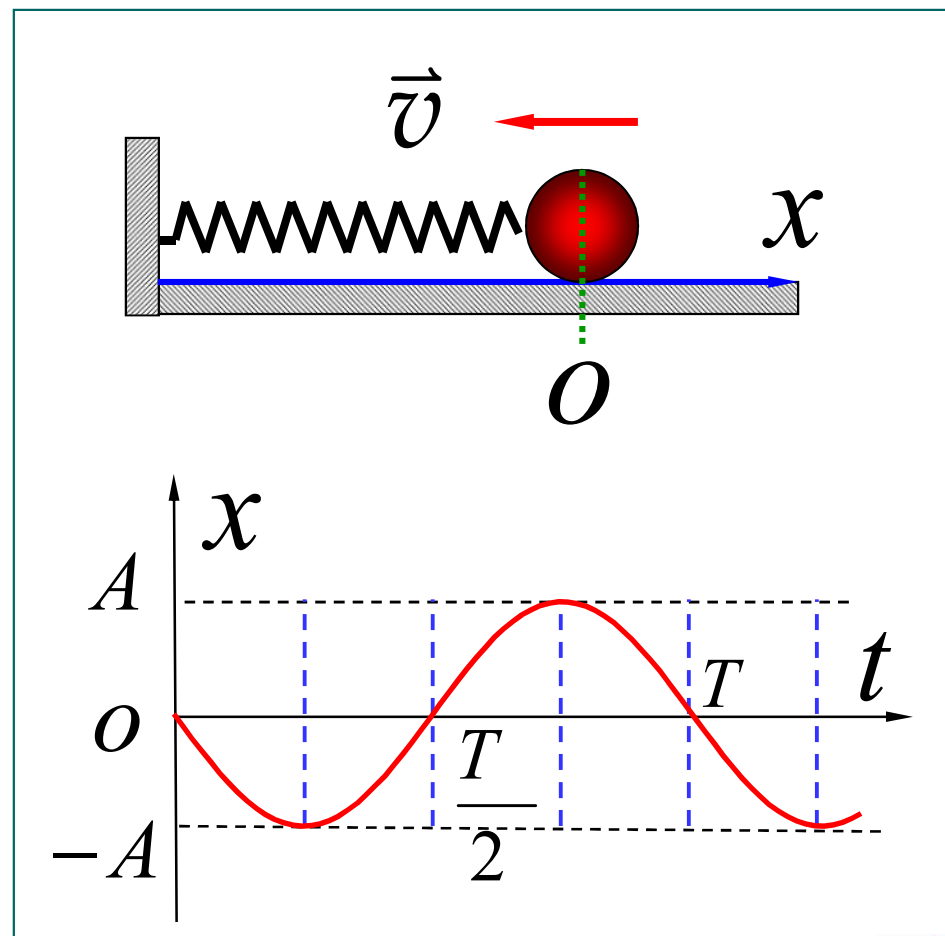
$$0 = A \cos \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega \sin \phi < 0$$

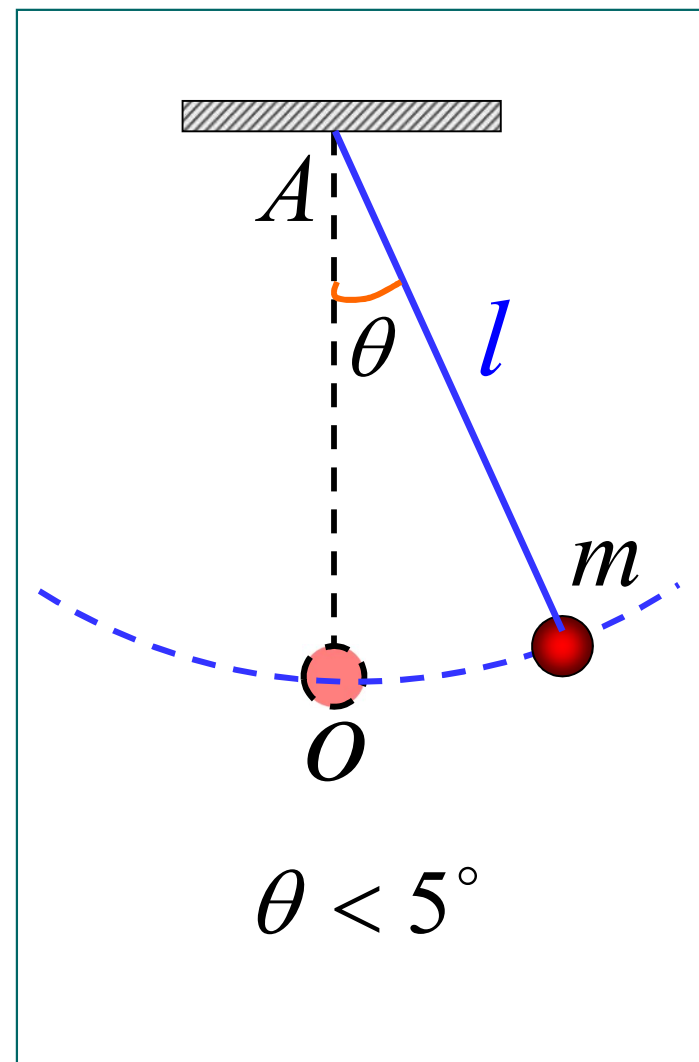
$$\therefore \sin \varphi > 0 \text{ 取 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



例1 如图所示系统（细线的质量和伸长可忽略不计），细线静止地处于铅直位置，重物位于 O 点时为平衡位置。

若把重物从平衡位置 O 略微移开后放手，重物就在平衡位置附近往复的运动。这一振动系统叫做**单摆**。求单摆小角度振动时的周期。



解 $\theta < 5^\circ$ 时, $\sin\theta \approx \theta$

$$M = -mgl \sin\theta \approx -mgl\theta$$

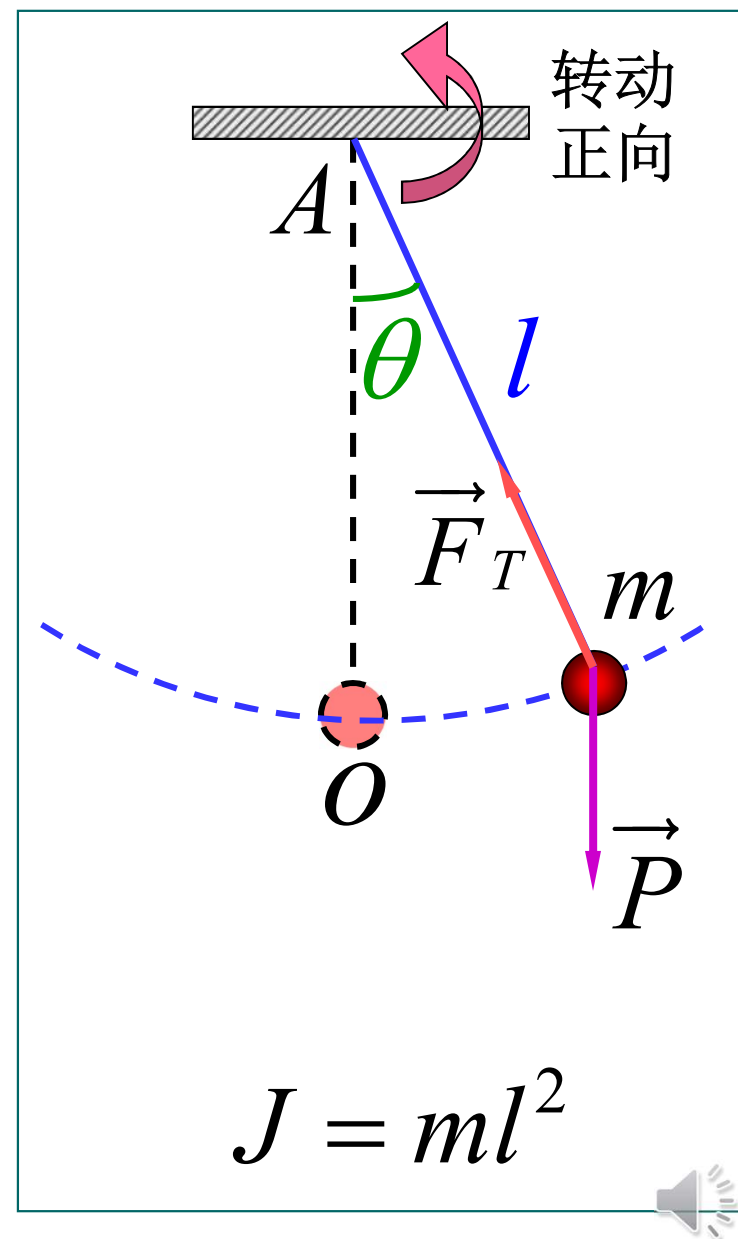
$$-mgl\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad \text{令 } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$



➤ 简谐运动的判断（满足其中一条即可）

1) 物体受线性回复力作用 $F = -kx$ 平衡位置 $x = 0$

2) 简谐运动的动力学描述

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

3) 简谐运动的运动学描述

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

（在无外驱动力的情况下）

$$v = -A \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ 简谐运动的特征 $a = -\omega^2 x$

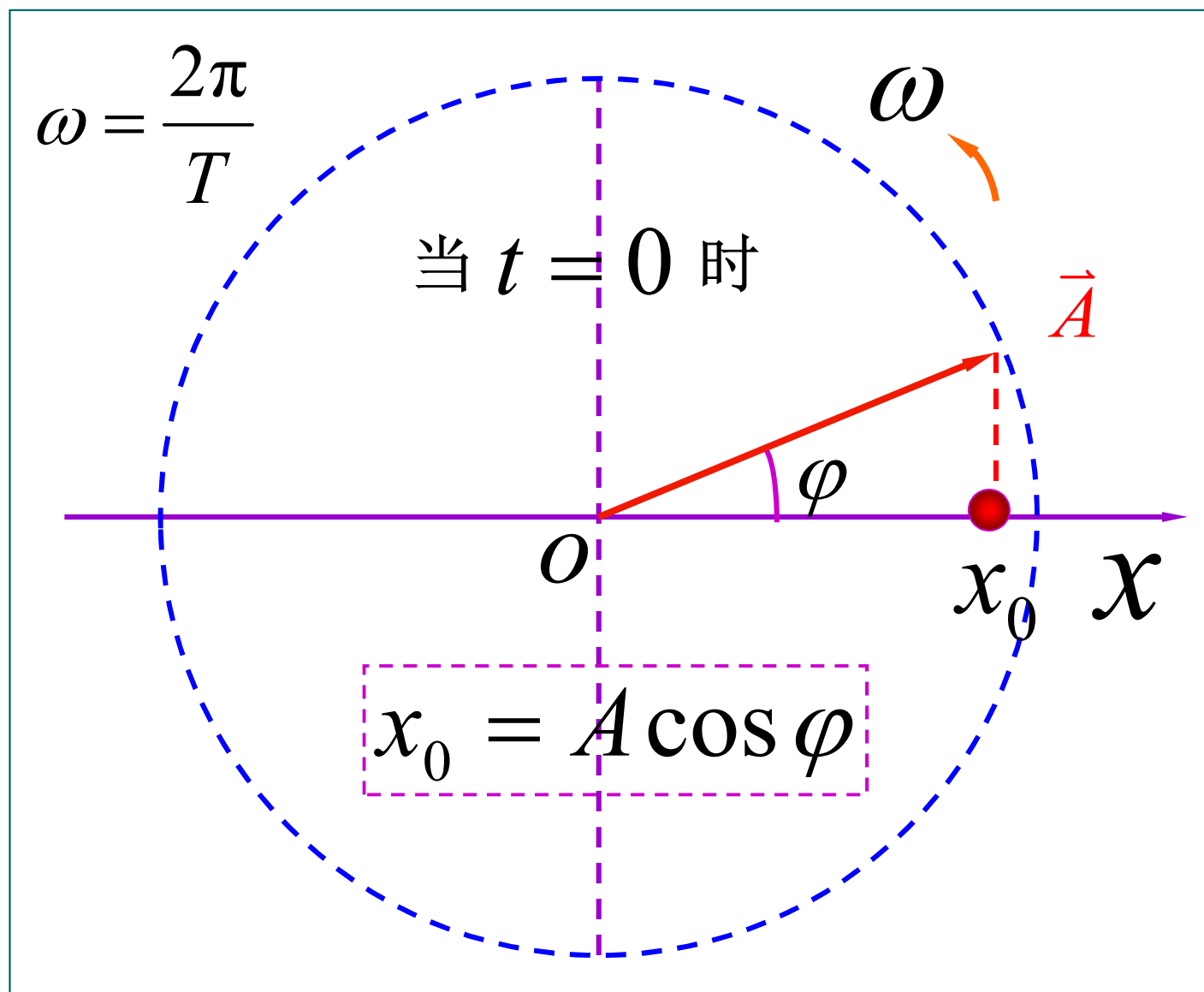
弹簧振子 $\omega = \sqrt{k/m}$

单摆 $\omega = \sqrt{g/l}$

（由振动系统本身性质决定）

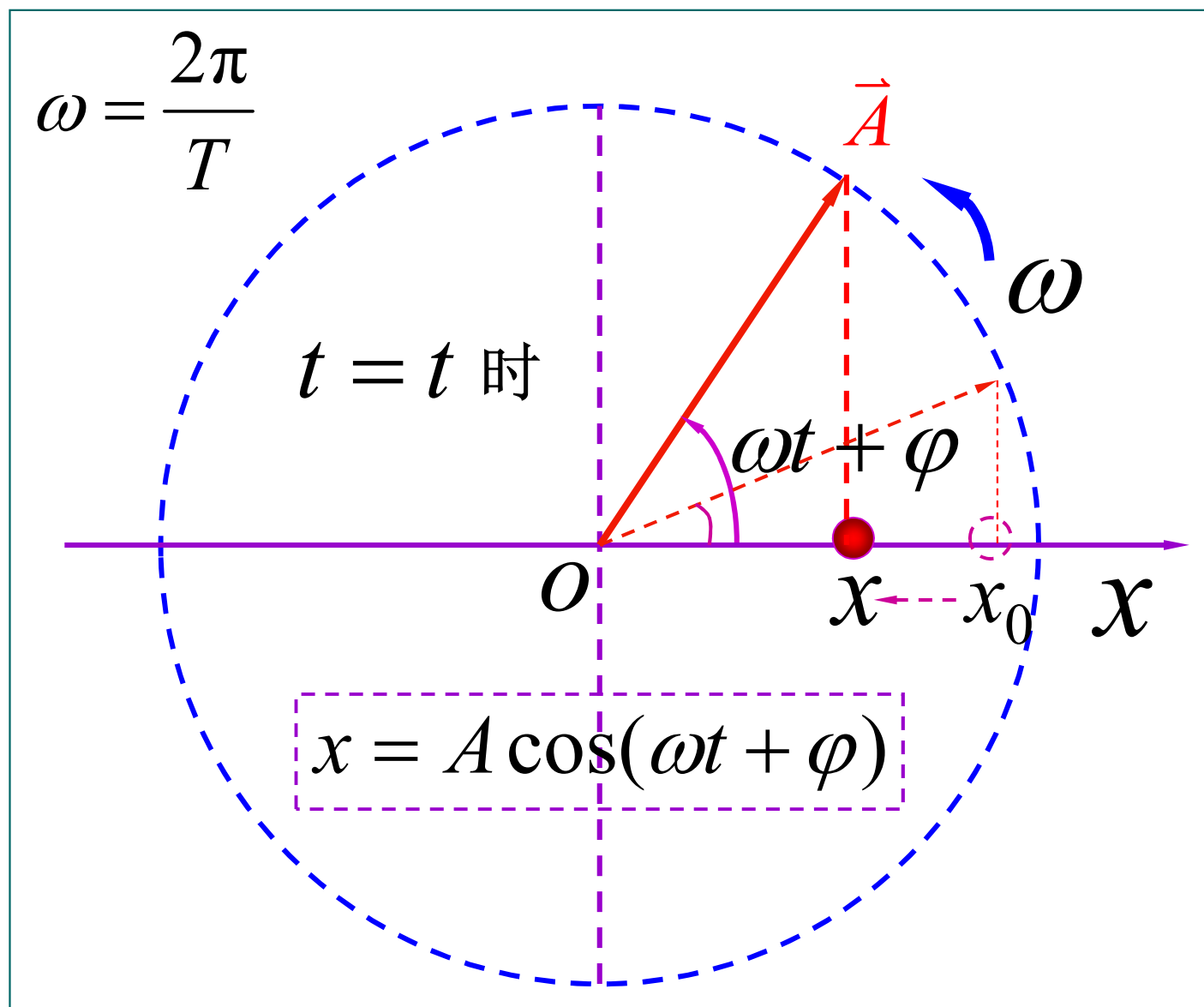


6-2 旋转矢量



以 O 为
原点旋转矢
量 \vec{A} 的端点
在 x 轴上的
投影点的运
动为简谐运
动.



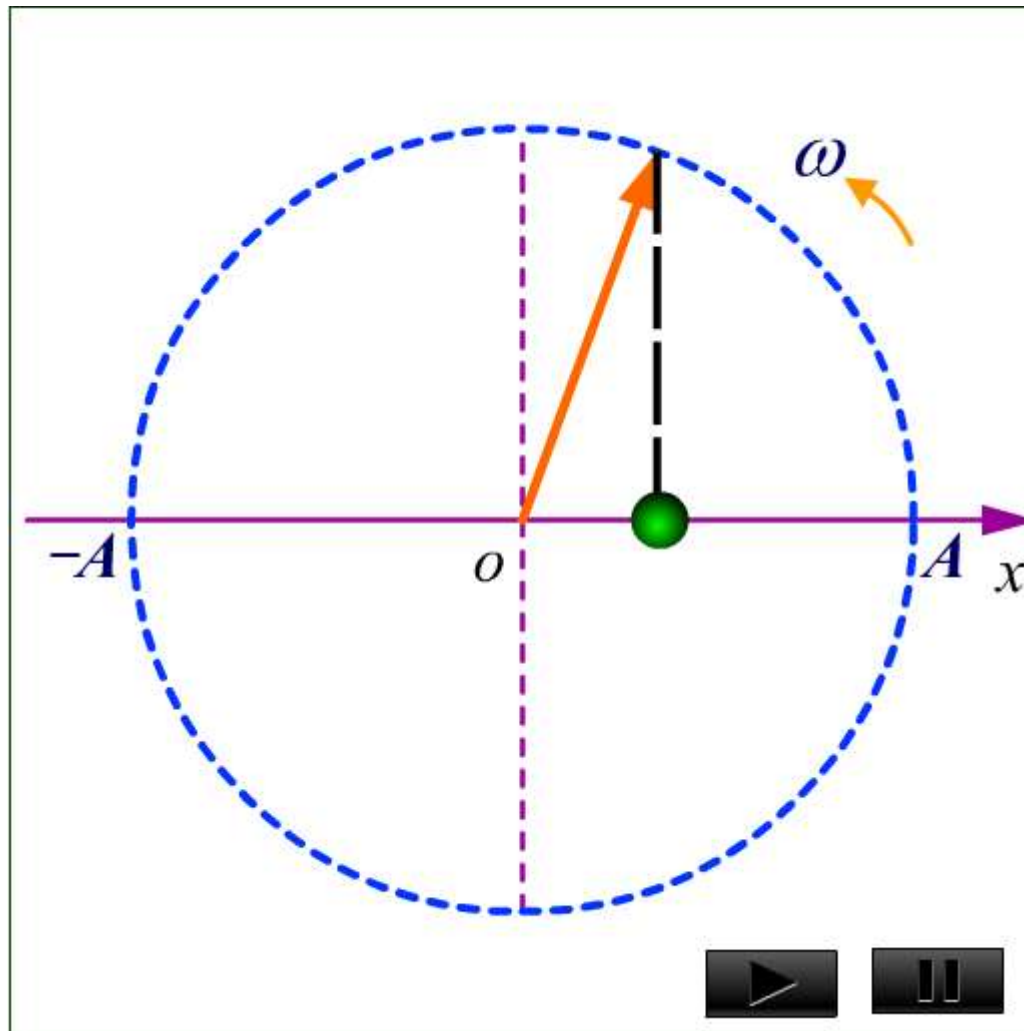


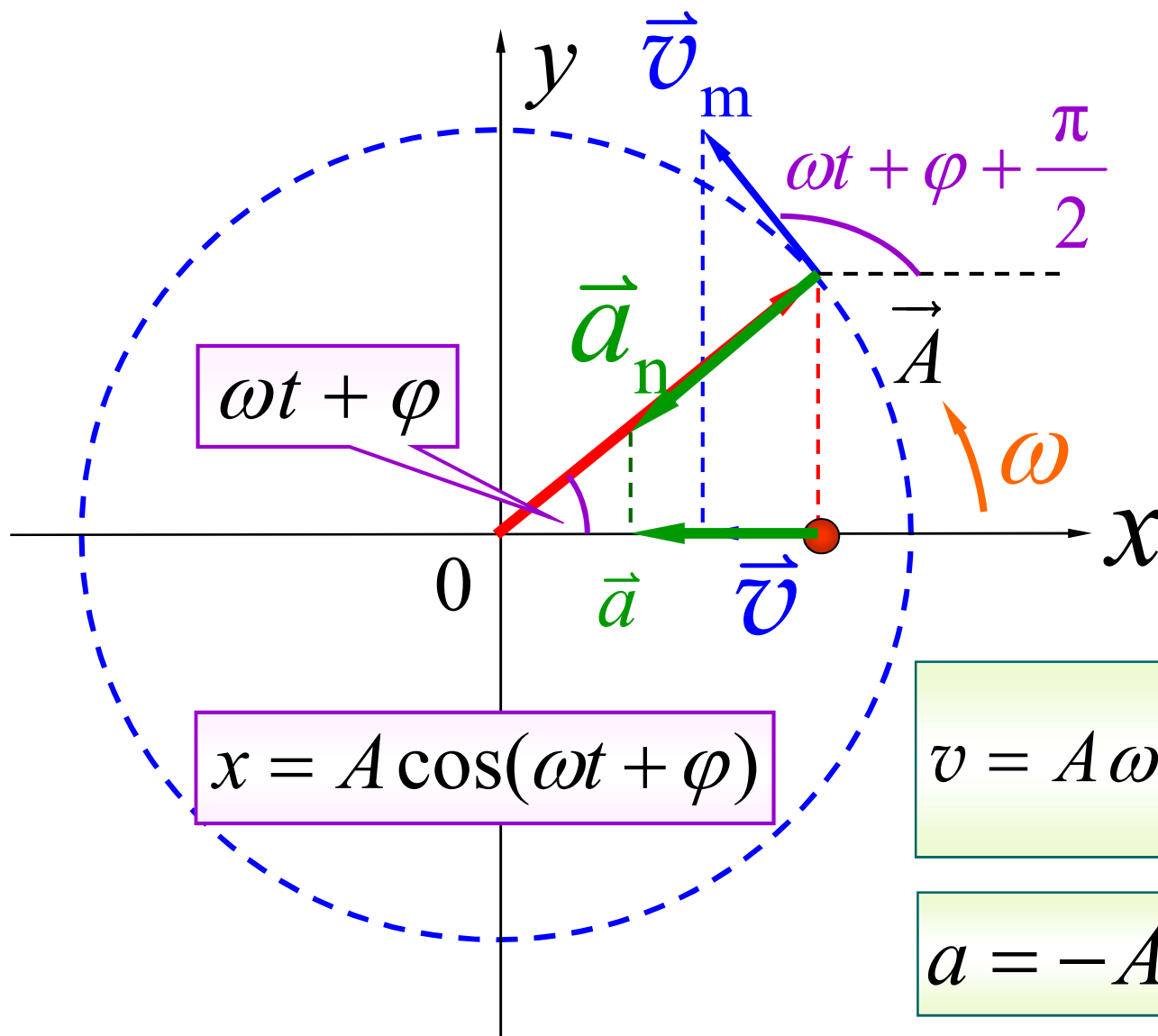
以 O 为
原点旋转矢
量 \vec{A} 的端点
在 x 轴上的
投影点的运
动为简谐运
动.



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

旋转
矢量 \vec{A} 的
端点在 x
轴上的投
影点的运
动为简谐
运动.





$$v_m = A\omega$$

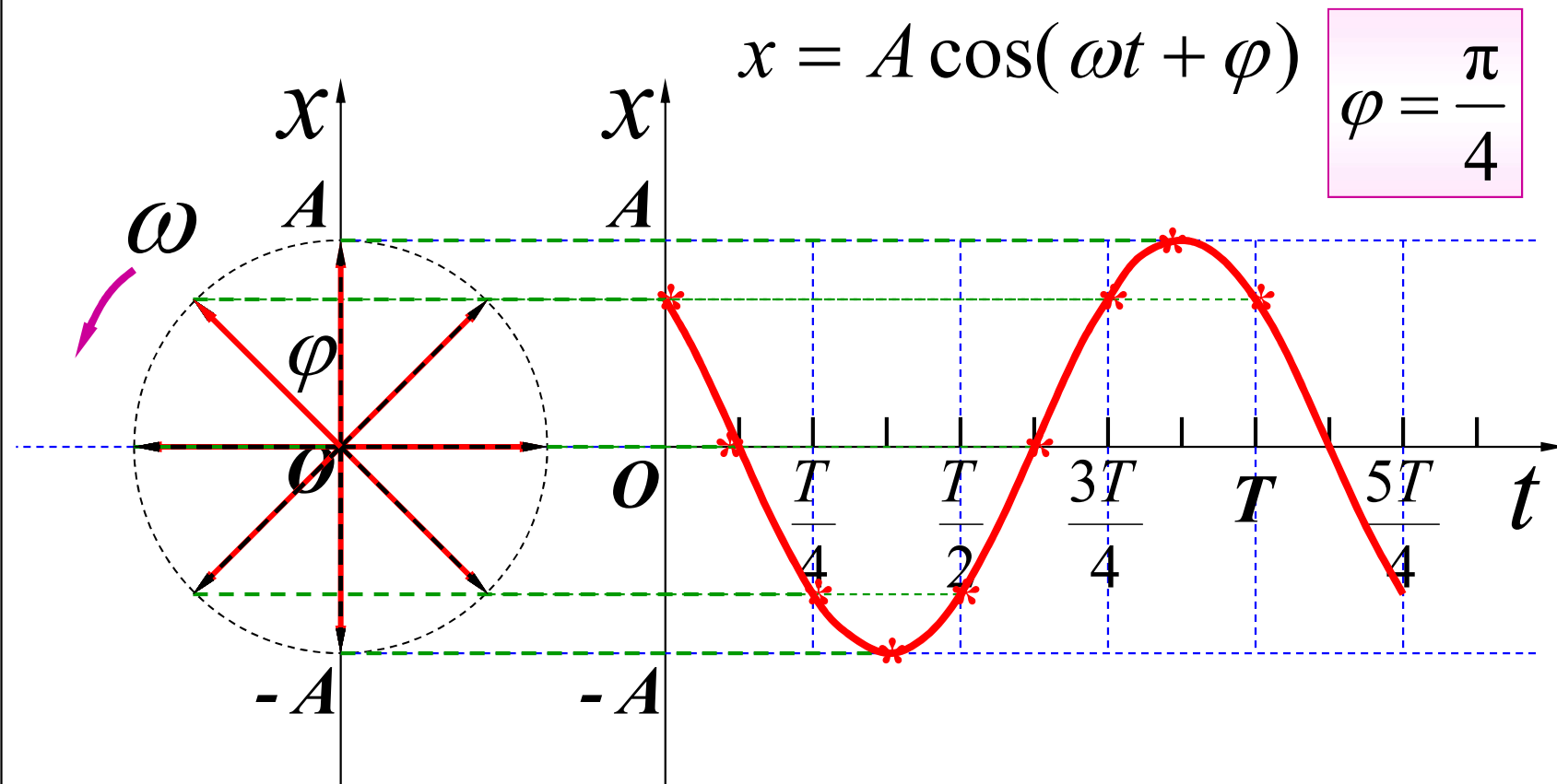
$$a_n = A\omega^2$$

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

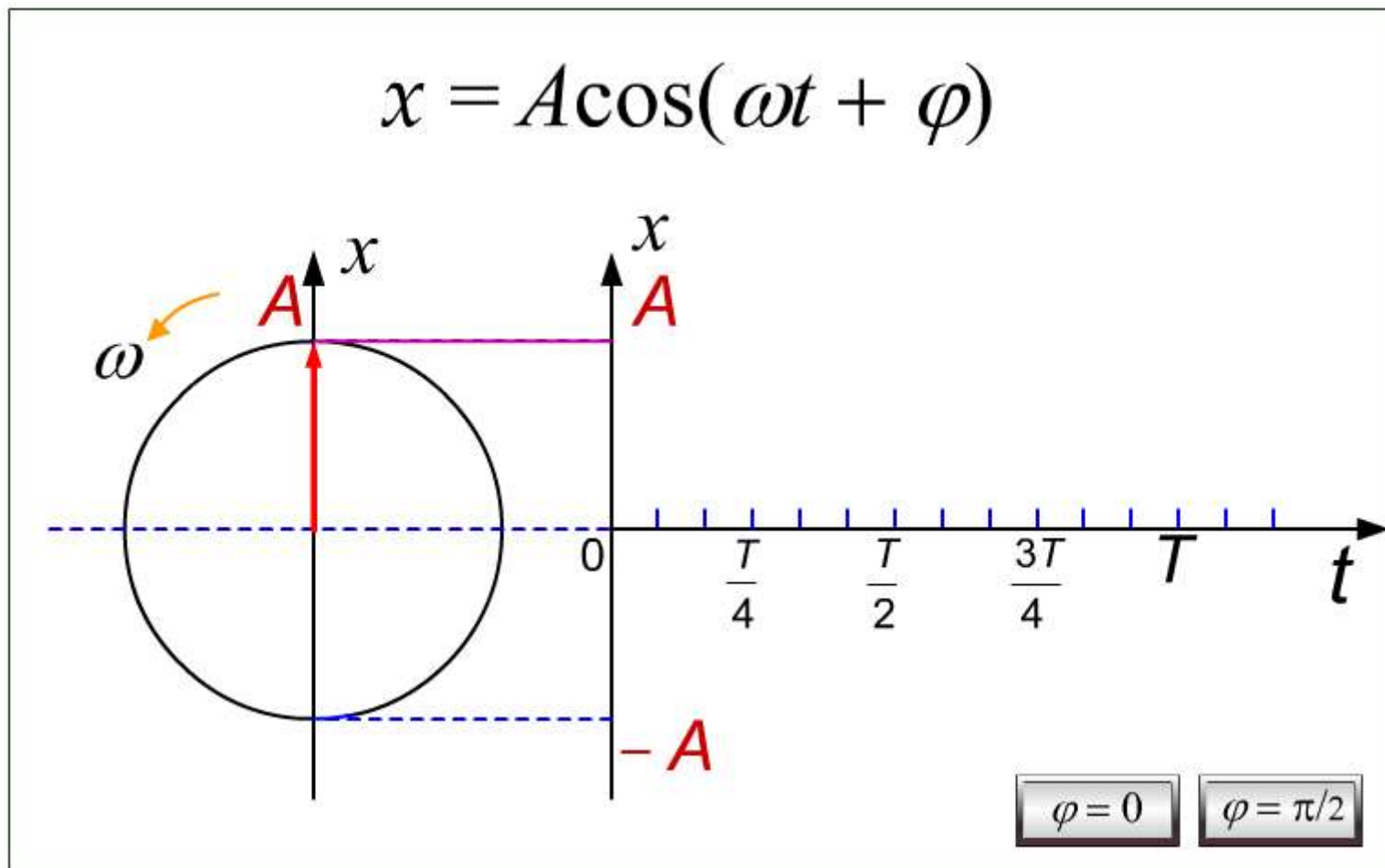


用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



$T = 2\pi / \omega$ (旋转矢量旋转一周所需的时间)

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



$T = 2\pi / \omega$ (旋转矢量旋转一周所需的时间)

讨论

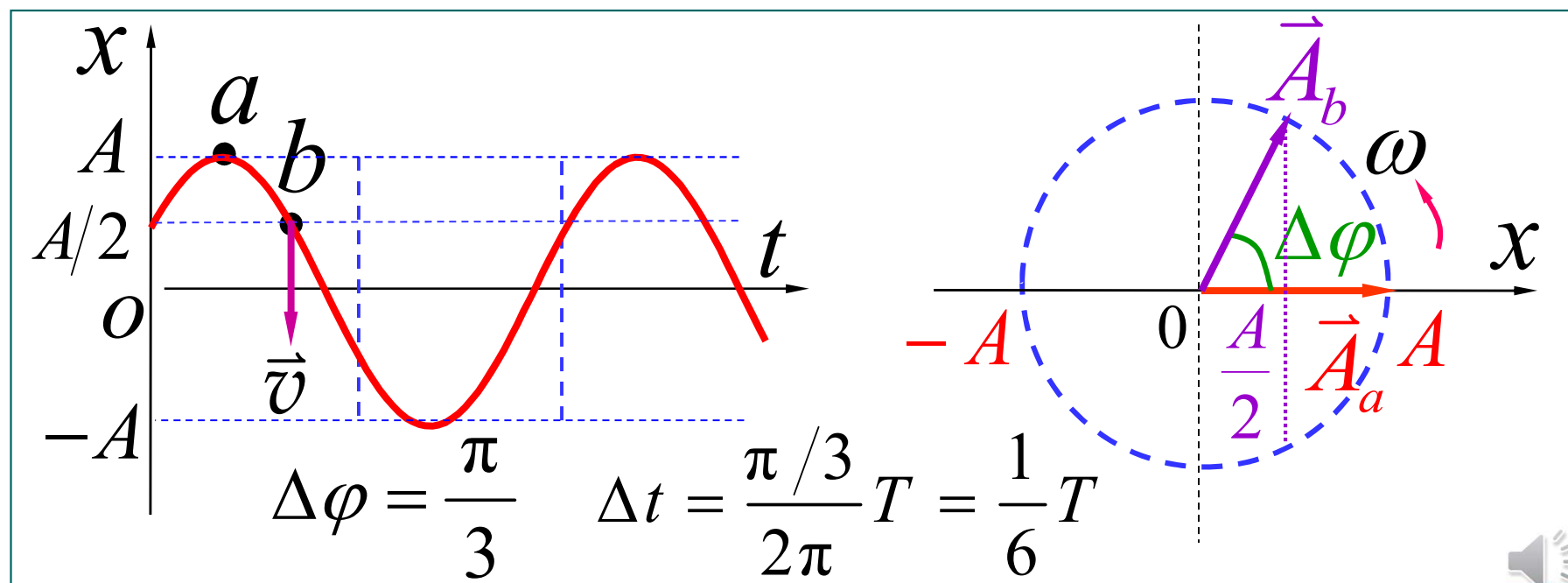
➤ 相位差：表示两个相位之差。

1) 对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$

$$x = A \cos(\omega t_1 + \varphi)$$

$$x = A \cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



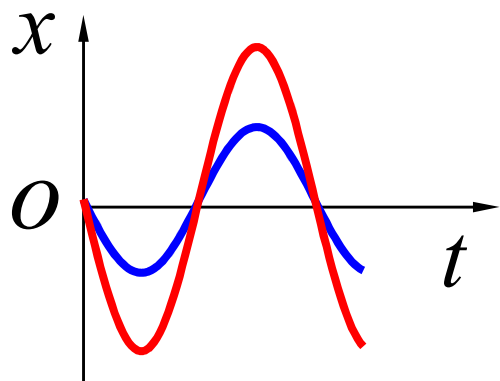
2) 对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。（解决振动合成问题）

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

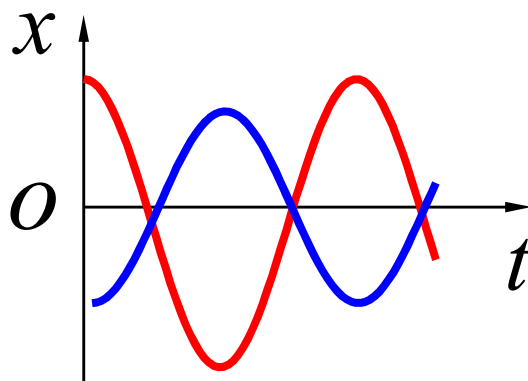
$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

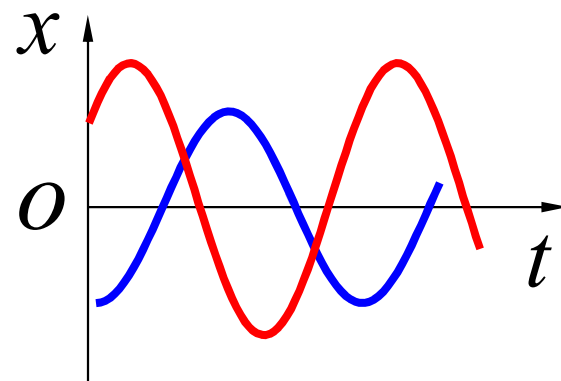
$$\Delta\varphi = 0 \text{ 同步}$$



$$\Delta\varphi = \pm\pi \text{ 反相}$$



$$\Delta\varphi \text{ 为其它 } \begin{cases} \text{超前} \\ \text{落后} \end{cases}$$

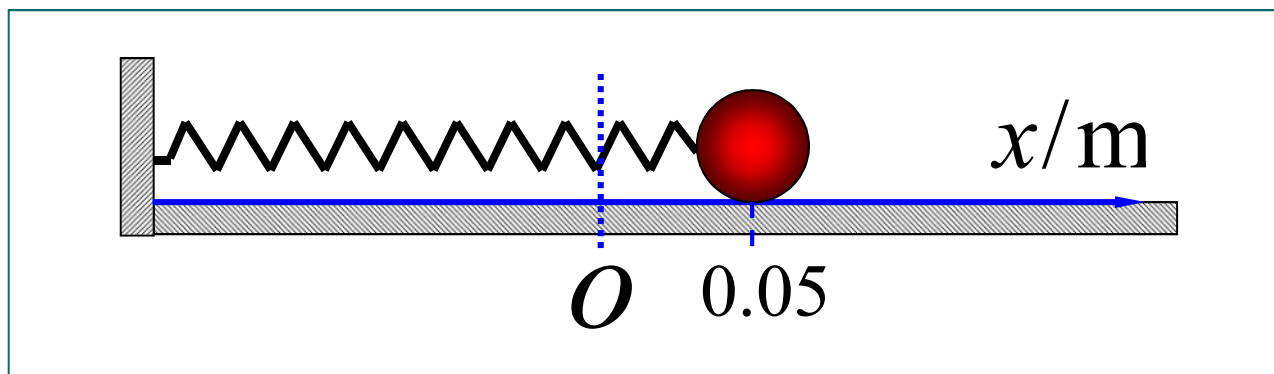


例1 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k = 0.72\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，物体的质量 $m = 20\text{g}$ 。

(1) 把物体从平衡位置向右拉到 $x = 0.05\text{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

(2) 求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

(3) 如果物体在 $x = 0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0 = 0.30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求其运动方程。



解 (1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.72 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{0.02 \text{ kg}}} = 6.0 \text{ s}^{-1}$

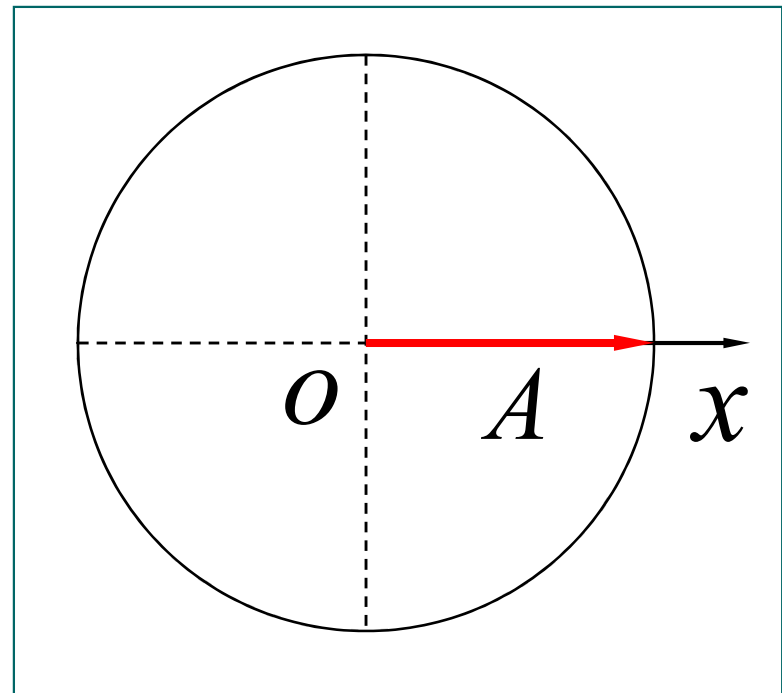
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.05 \text{ m}$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} = 0$$

$$\varphi = 0 \text{ 或 } \pi$$

由旋转矢量图可知 $\varphi = 0$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.05 \cos 6.0t \text{ m}$$



(2) 求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

解 $x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t)$

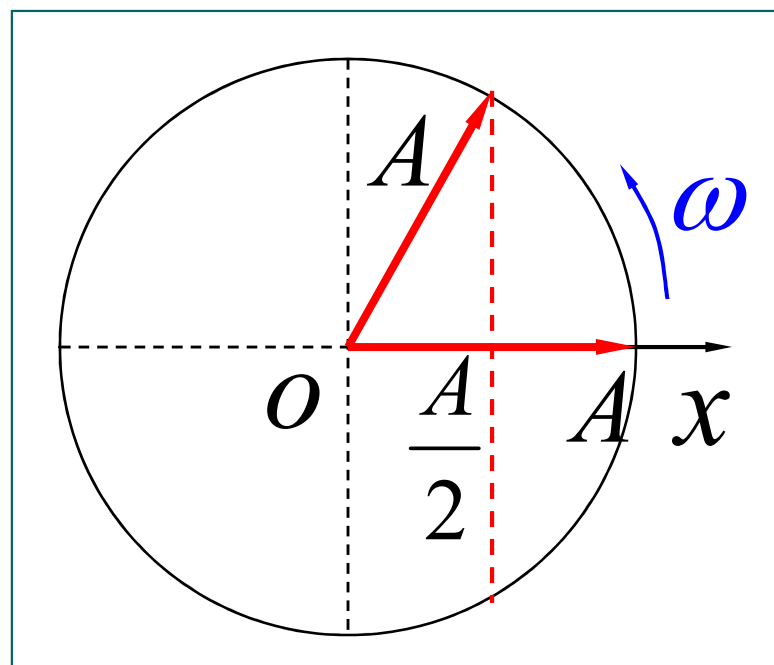
$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

$$= -0.26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{负号表示速度沿 } Ox \text{ 轴负方向})$$

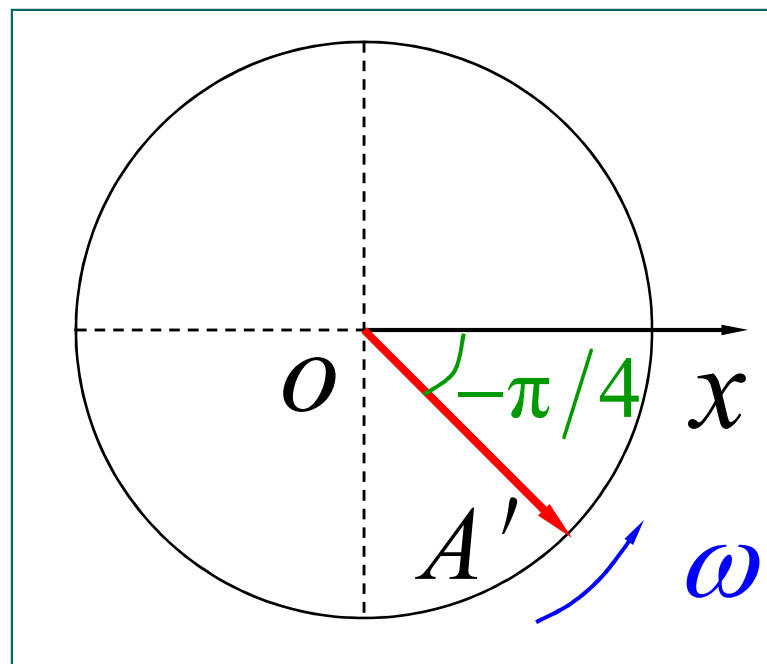


(3) 如果物体在 $x = 0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0 = 0.30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求其运动方程。

解 $A' = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.0707\text{m}$

$$\tan \varphi' = \frac{-v_0}{\omega x_0} = -1$$

$$\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$



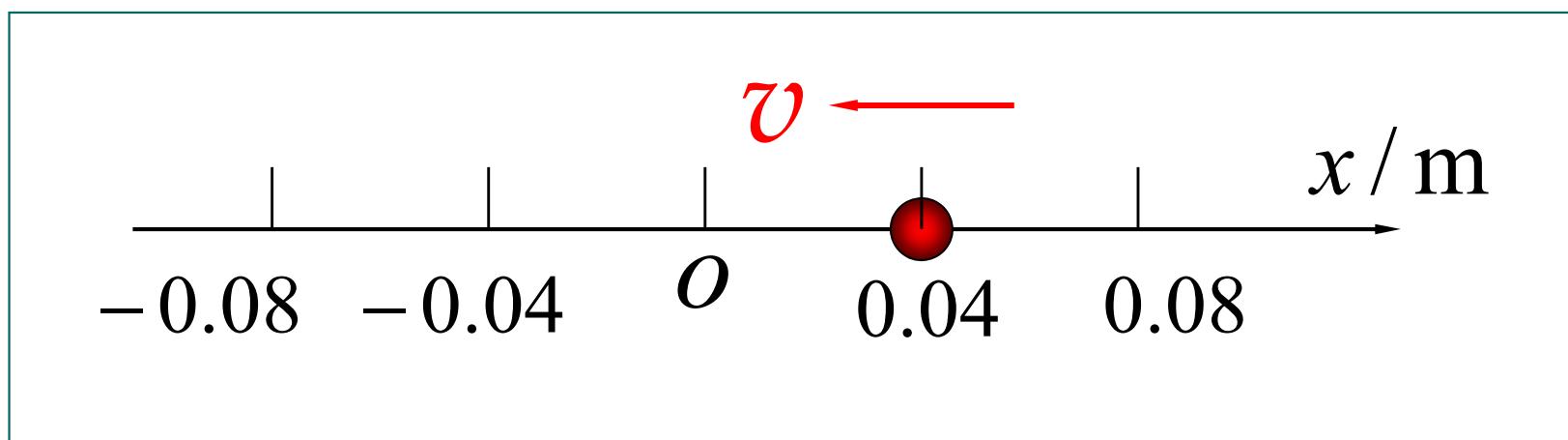
因为 $v_0 > 0$ ，由旋转矢量图可知 $\varphi' = -\pi/4$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.0707 \cos(6.0t - \frac{\pi}{4})$$



例2 一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m ，周期为 4s ，起始时刻物体在 $x = 0.04\text{m}$ 处，向 Ox 轴负方向运动（如图）. **试求**

(1) $t = 1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；



解 $A = 0.08\text{m}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$



$$A = 0.08\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$

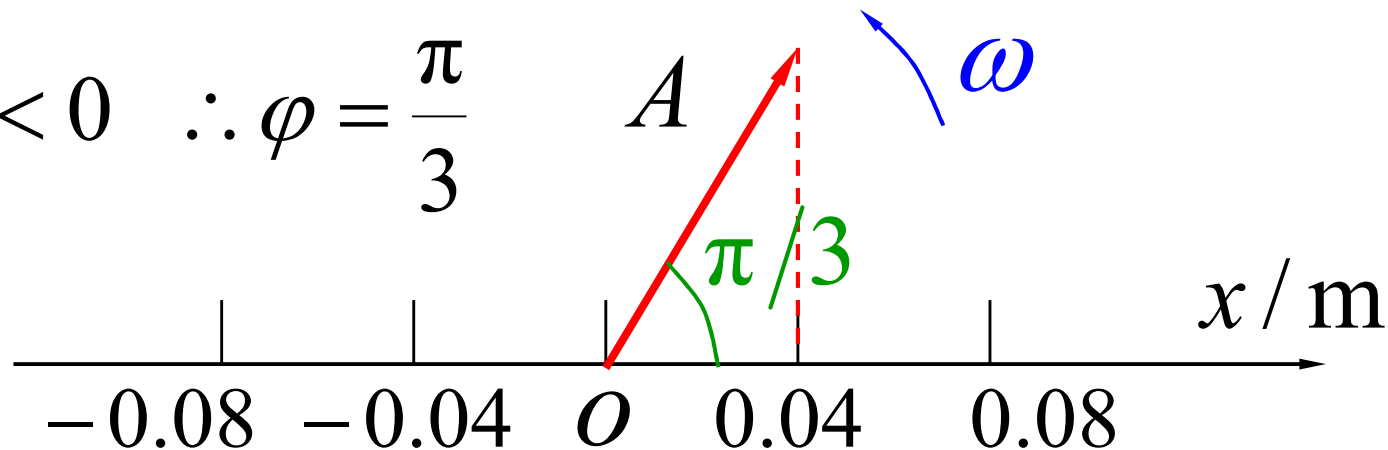
$$t = 0, x = 0.04\text{m}$$

$$\text{代入 } x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$0.04 = 0.08 \cos \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

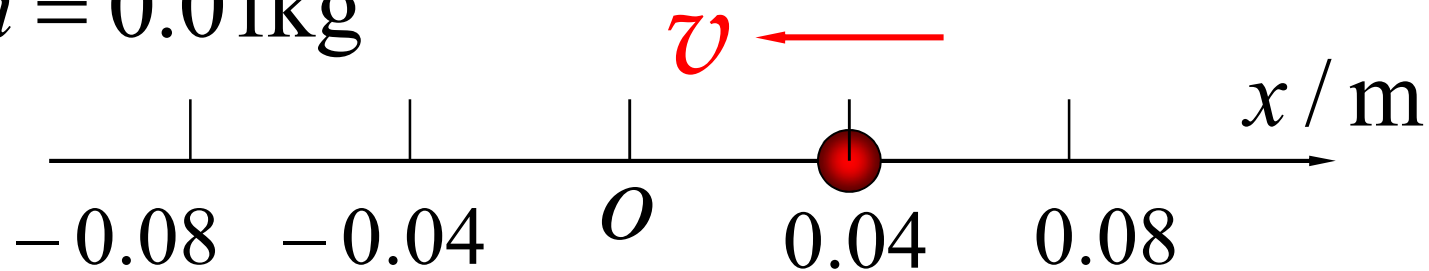
$$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$m = 0.01\text{kg}$$



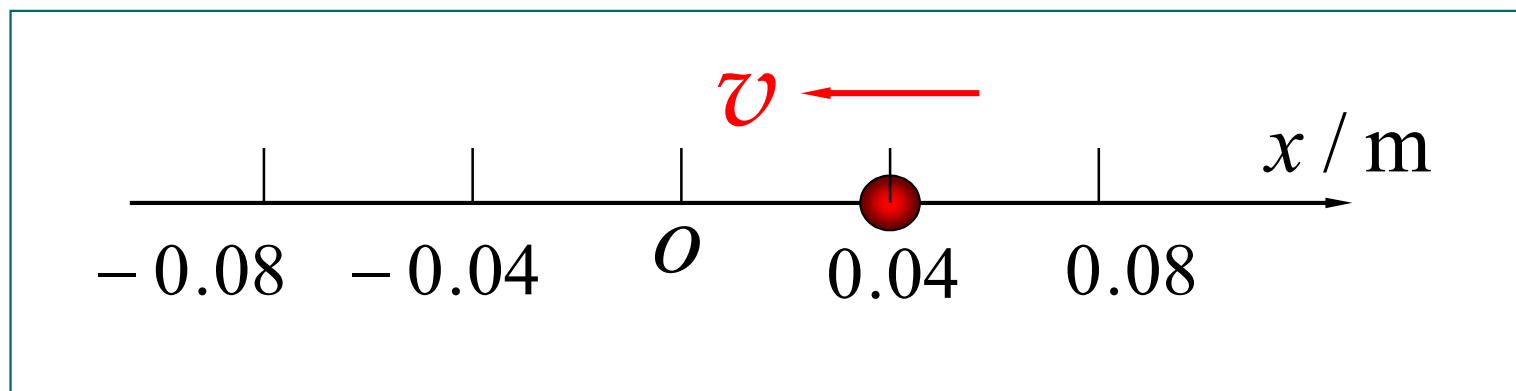
$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 1.0\text{s} \quad \text{代入上式得} \quad x = -0.069\text{m}$$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70 \times 10^{-3} \text{ N}$$



(2) 由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.



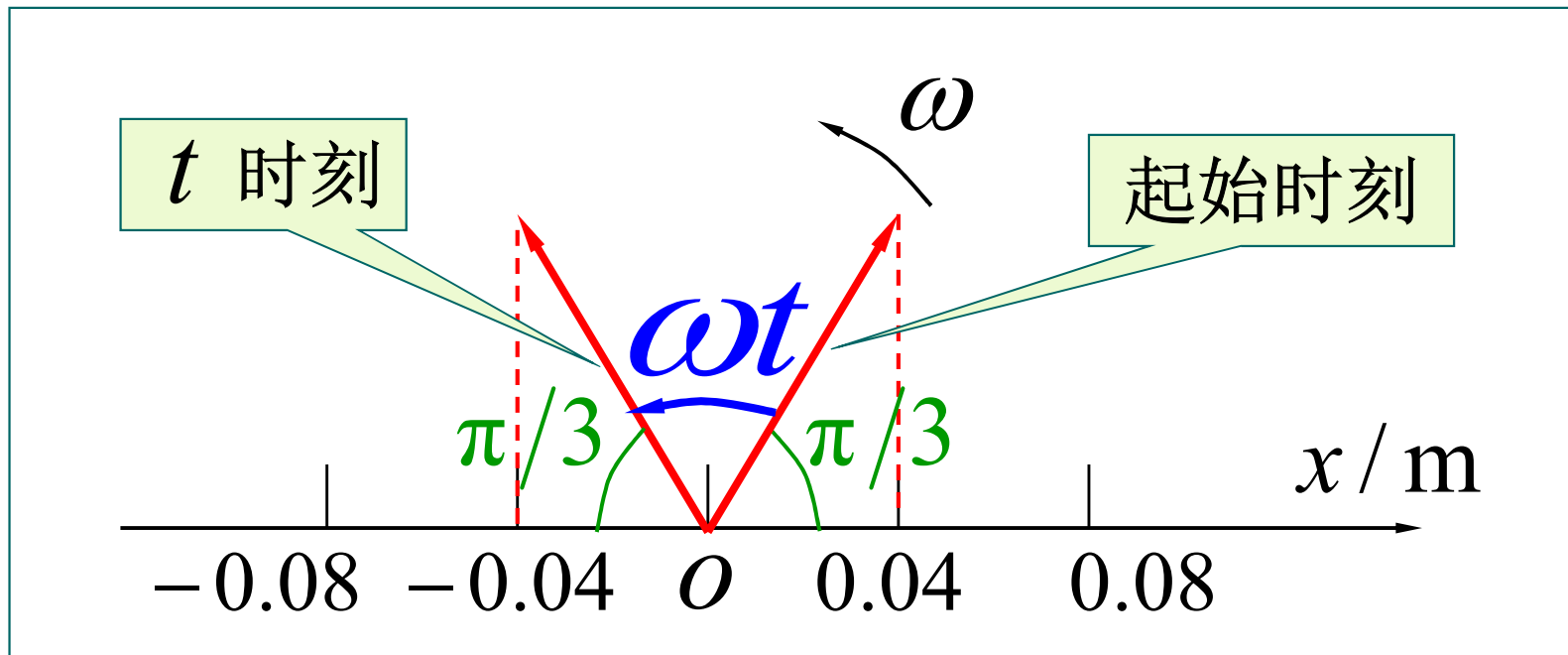
法一 设由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间为 t

$$-0.04 = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 0.667\text{s}$$



解法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$$

$$t = 0.667 \text{ s}$$

