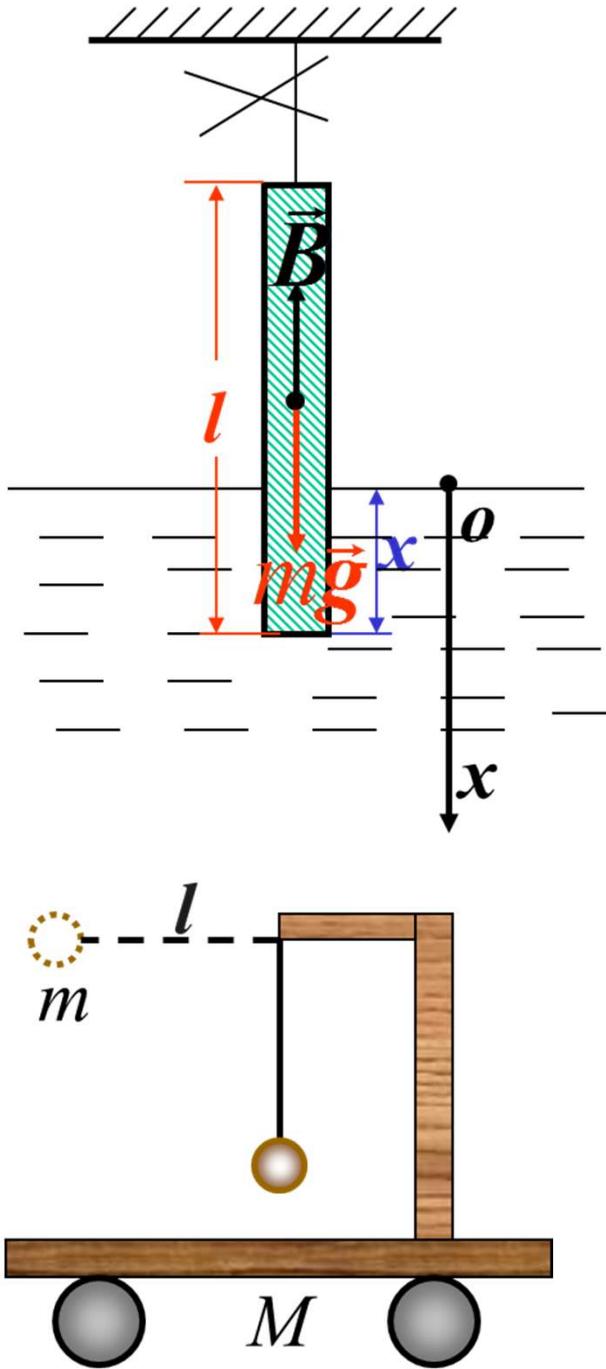


例 有一密度为 ρ 的细棒，长度为 l ，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面。现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。

例 静止于光滑水平面上的一质量为 M 的车上悬挂一长为 l ，质量为 m 的小球，初始时摆线水平，摆球静止，后突然放手，当摆球运动到摆线呈铅直位置的瞬间，摆球相对地面的速度为多大？



例 有一密度为 ρ 的细棒，长度为 l ，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面。现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。

解：以棒为研究对象，受力如图：

距离为 x 时，浮力大小为： $B = \rho'xg$

合外力为： $F = mg - \rho'xg = g(\rho l - \rho'x)$

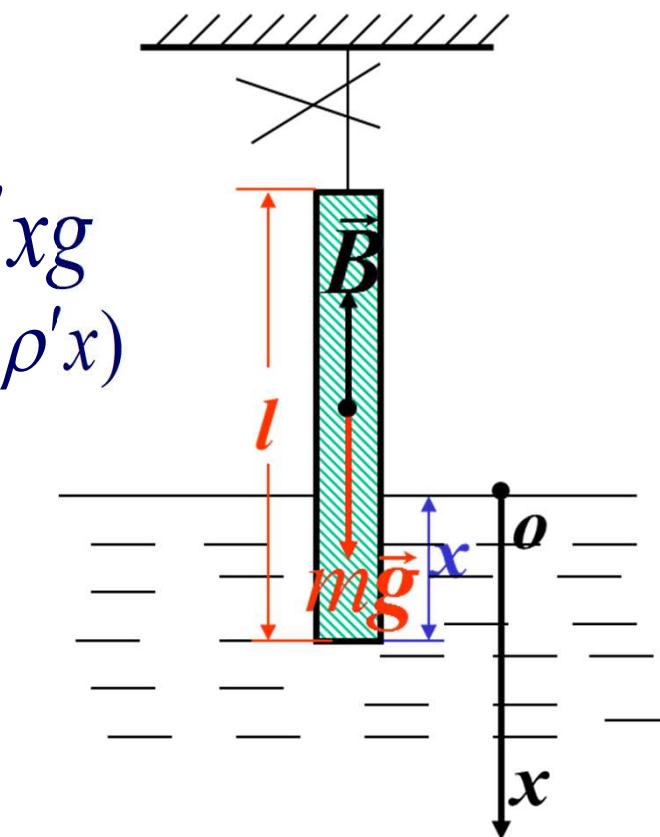
运动方程： $m\frac{dv}{dt} = g(\rho l - \rho'x)$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt}dx = g(\rho l - \rho'x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^v \rho lv dv = \int_0^l g(\rho l - \rho'x) dx$$

积分得到

$$\rho lv^2 = 2\rho gl^2 - \rho'gl^2$$



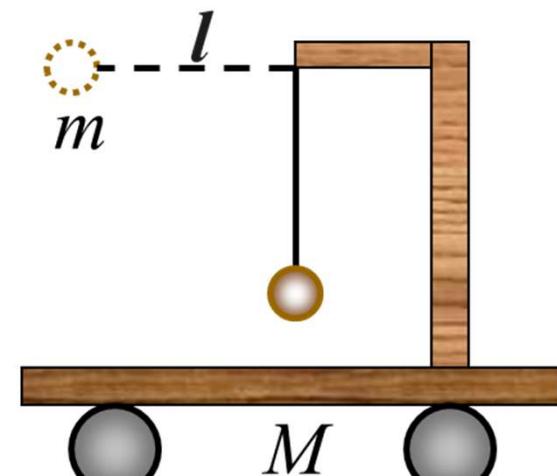
$$v = \sqrt{\frac{2\rho gl - \rho'gl}{\rho}}$$

例 静止于光滑水平面上的一质量为 M 的车上悬挂一长为 l , 质量为 m 的小球, 初始时, 摆线水平, 摆球静止, 后突然放手, 当摆球运动到摆线呈铅直位置的瞬间, 摆球相对地面的速度为多大?

解 设摆球和车相对地面的速度分别为 v_m, v_M .

以车和摆球为系统, 机械能守恒, 水平方向动量守恒.

$$\left\{ \begin{array}{l} mv_m + Mv_M = 0 \\ mgl = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \end{array} \right.$$



$$v_m = \sqrt{\frac{2gl}{1+m/M}}$$

试说明此过程为什么机械能守恒?

第四章 动量和角动量

4-1 动量 冲量 动量定理

力的累积效应 $\begin{cases} \vec{F} \text{ 对时间的积累} \rightarrow \vec{p}, \vec{I} \\ \vec{F} \text{ 对空间的积累} \rightarrow W, E \end{cases}$

一 冲量 质点的动量定理

◆ 动量

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \vec{F} dt = d\vec{p} = d(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

◆ 冲量 力对时间的积分 (矢量) $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

动量定理 在给定的时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在此时间内动量的增量。

问：冲量是矢量，它的方向就是力的方向吗？

◆ 分量形式

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k} \left\{ \begin{array}{l} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{2x} - m v_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m v_{2y} - m v_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = m v_{2z} - m v_{1z} \end{array} \right.$$

二 质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) dt = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) dt = m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_{20}$$

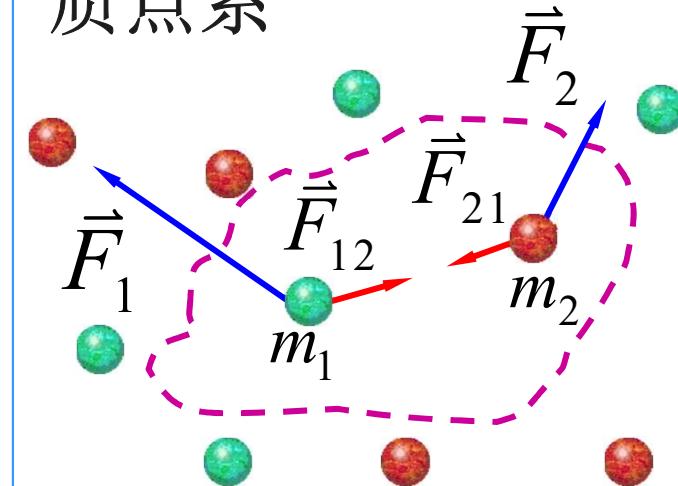
因为内力 $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, 故

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) dt = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) - (m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20})$$

- ◆ **质点系动量定理** 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}} dt = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i0}$$

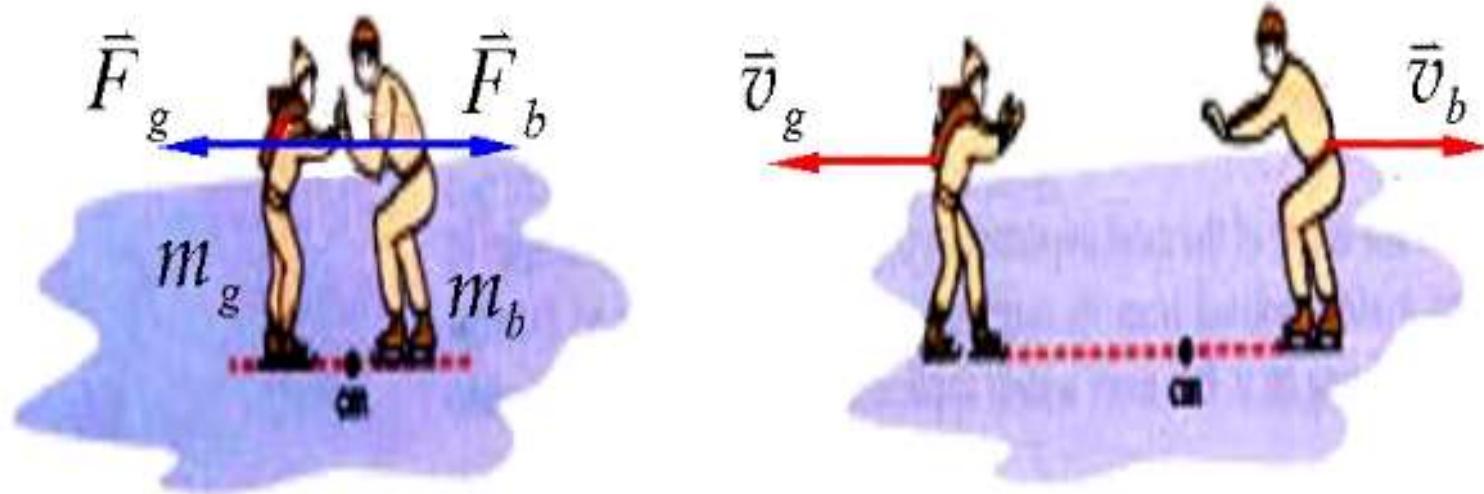
质点系



$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$



内力不改变质点系的动量



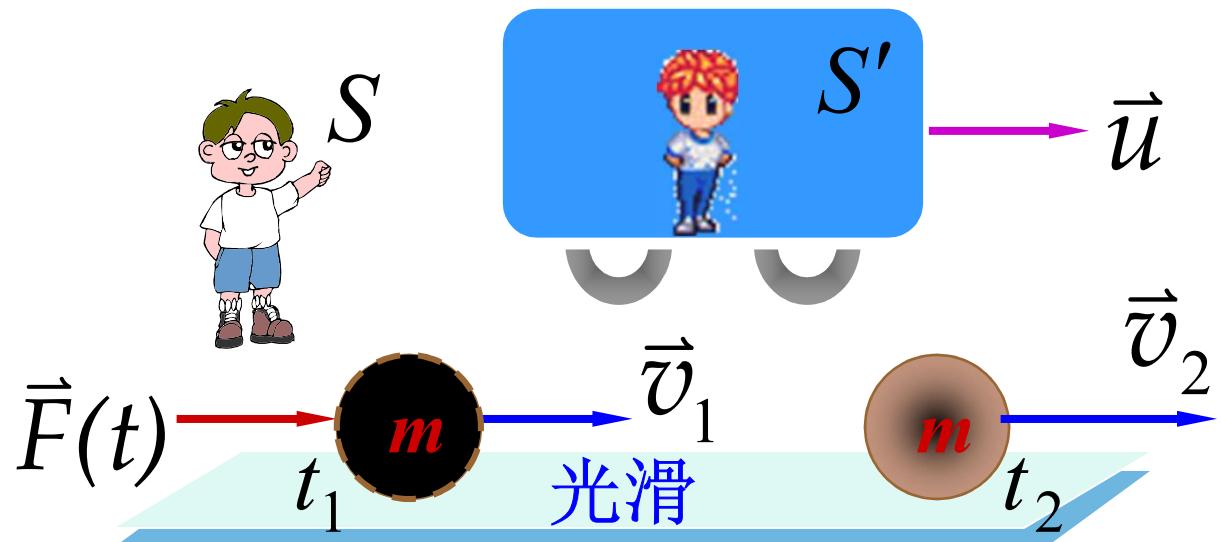
初始速度 $v_{g0} = v_{b0} = 0$ $m_b = 2m_g$ 则 $\vec{p}_0 = 0$

推开后速度 $v_g = 2v_b$ 且方向相反 则 $\vec{p} = 0$

推开前后系统动量不变 $\vec{p} = \vec{p}_0$

讨论

- 动量的相对性和动量定理的不变性



参考系	t_1 时刻	t_2 时刻	动量定理
S 系	$m\vec{v}_1$	$m\vec{v}_2$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$
S' 系	$m(\vec{v}_1 - \vec{u})$	$m(\vec{v}_2 - \vec{u})$	

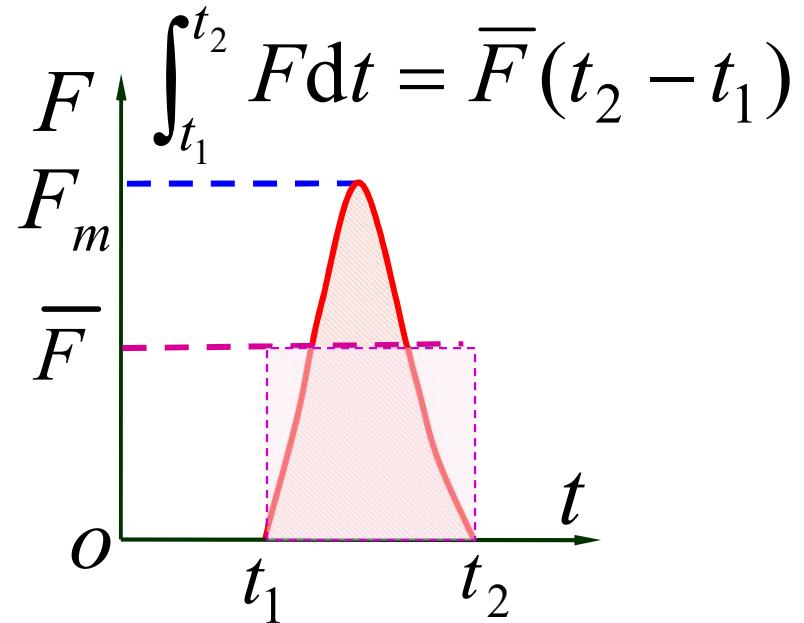
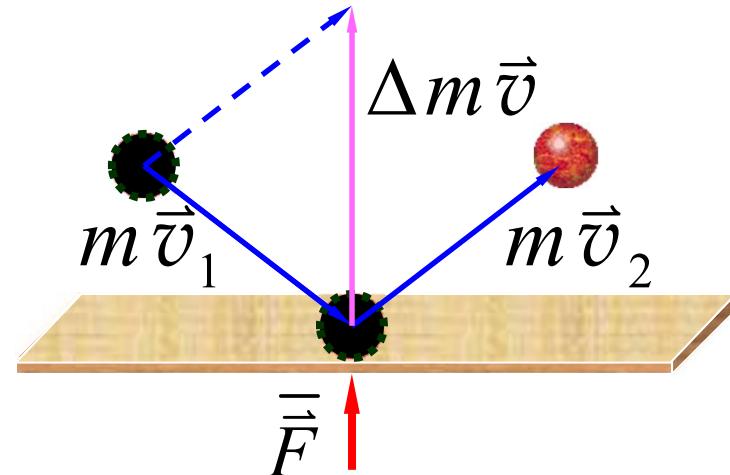
动量定理常应用于碰撞问题

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



注意

在 $\Delta\vec{p}$ 一定时
 Δt 越小，则 \bar{F} 越大。
 例如人从高处跳下、飞
 机与鸟相撞、打桩等碰撞事
 件中，作用时间很短，冲力
 很大。



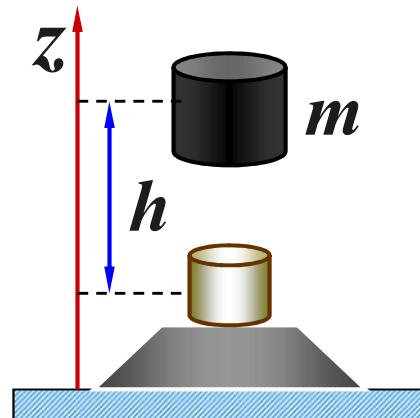
问：为什么迅速地把盖在杯上的薄板从侧面打去，鸡蛋就掉在杯中；慢慢地将薄板拉开，鸡蛋就会和薄板一起移动？



答：因为鸡蛋和薄板间的摩擦力有限，若棒打击时间很短， $\because \vec{F}_f \Delta t \rightarrow 0, \therefore \Delta \vec{P}_{\text{蛋}} \rightarrow 0$ 所以鸡蛋就掉在杯中。

讨论：一重锤从高度 $h = 1.5\text{m}$ 处自静止下落，锤与工件碰撞后，速度为零。对于不同的打击时间 Δt ，计算平均冲力和重力之比。

解：撞前锤速 $v_0 = -\sqrt{2gh}$ ，撞后锤速零。



$$\int_0^{\Delta t} (N - mg) dt = mv_z - mv_0 = m\sqrt{2gh}$$

$$\bar{N}\Delta t - mg\Delta t = m\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\bar{N}}{mg} = 1 + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1 + \frac{0.55}{\Delta t}$$

$\Delta t/\text{s}$	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
\bar{N}/mg	6.5	56	5.5×10^2	5.5×10^3

在碰撞或打击瞬间常忽略重力作用

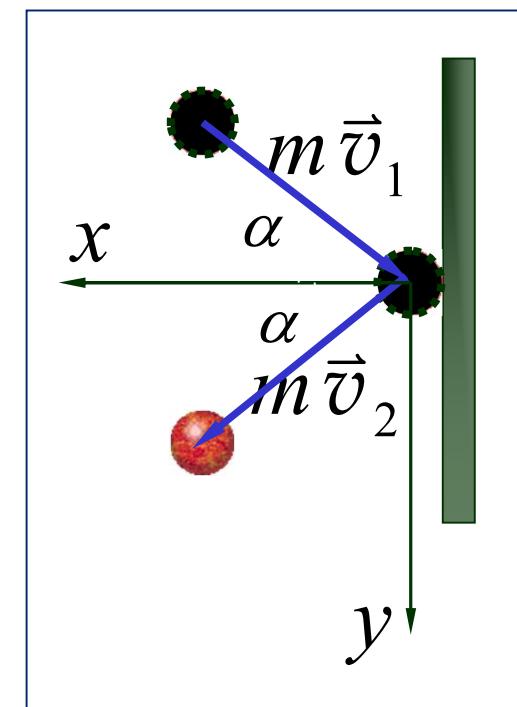
例 1 质量为 0.05kg 、速率为 $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的钢球，以与钢板法线呈 45° 角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来。设碰撞时间为 0.05s 。求在此时间内钢板所受到的平均冲力 \bar{F} 。

解 建立如图坐标系，由动量定理得

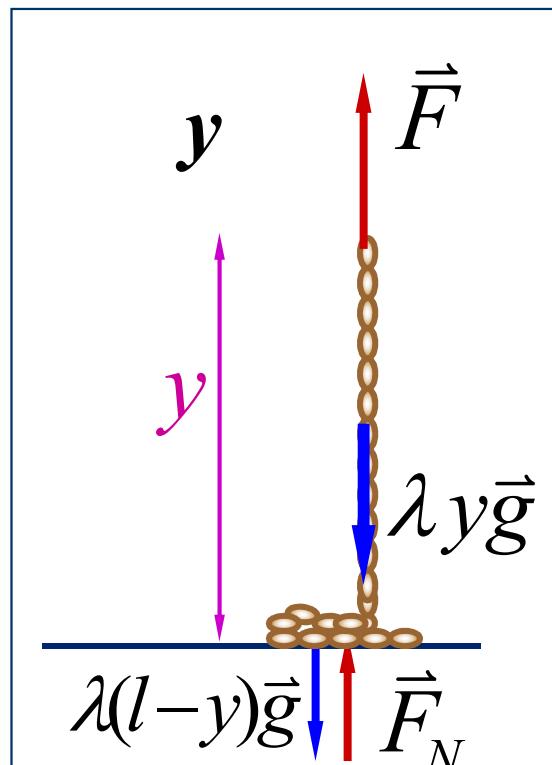
$$\begin{aligned}\bar{F}_x \Delta t &= m v_{2x} - m v_{1x} \\&= m v \cos \alpha - (-m v \cos \alpha) \\&= 2 m v \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_y \Delta t &= m v_{2y} - m v_{1y} \\&= m v \sin \alpha - m v \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

$$\bar{F} = \bar{F}_x = \frac{2 m v \cos \alpha}{\Delta t} = 14.1 \text{N} \quad \text{方向沿 } x \text{ 轴反向}$$



例2 一长为 l 、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为 λ . 将其卷成一堆放在地面上. 若手提链条的一端，以匀速 v 将其上提. 当一端被提高离地面高度为 y 时，求手的提力.



解 取地面参考系，链条为系统.

在 t 时刻链条动量 $\vec{p}(t) = \lambda y v \vec{j}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lambda v \frac{dy}{dt} \vec{j} = \lambda v^2 \vec{j}$$

$$\vec{F} + \lambda y \vec{g} = (F - \lambda y g) \vec{j} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\text{可得 } F = \lambda v^2 + \lambda y g$$

4-2 动量守恒定律.

- 质点系动量定理 $\vec{I} = \int_{t_0}^t \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} dt = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$
- 动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ 保持不变 .

力的瞬时作用规律 $\vec{F}^{\text{ex}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{F}^{\text{ex}} = 0$, $\vec{P} = \vec{C}$

1) 系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系 .

2 守恒条件 合外力为零 $\vec{F}^{\text{ex}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} = 0$

当 $\vec{F}^{\text{ex}} \ll \vec{F}^{\text{in}}$ 时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒。例如在碰撞，打击，爆炸等问题中。

3 若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒。

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x^{\text{ex}} = 0, \quad p_x = \sum m_i v_{ix} = C_x \\ F_y^{\text{ex}} = 0, \quad p_y = \sum m_i v_{iy} = C_y \\ F_z^{\text{ex}} = 0, \quad p_z = \sum m_i v_{iz} = C_z \end{array} \right.$$

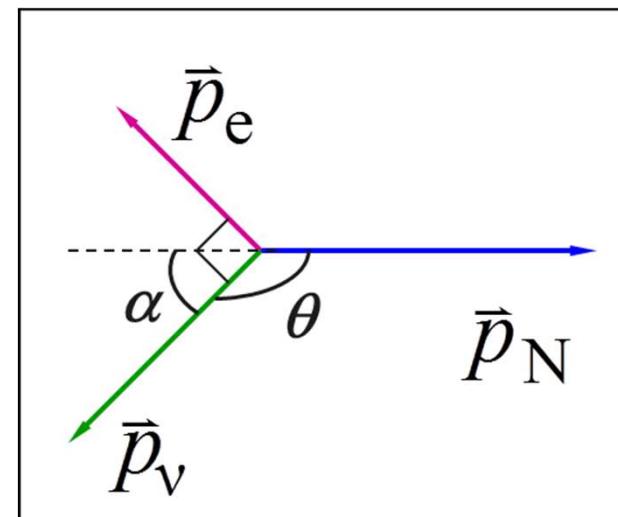
4 动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一。

例 1 设有一静止的原子核，衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核。已知电子和中微子的运动方向互相垂直，电子动量为 $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，中微子的动量为 $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。问新的原子核的动量的值和方向如何？

解 $\because \sum \vec{F}_i^{\text{ex}} \ll \sum \vec{F}_i^{\text{in}}$

$$\therefore \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

$$\vec{P}_e + \vec{P}_\nu + \vec{P}_N = 0$$



$$p_e = 1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p_\nu = 6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

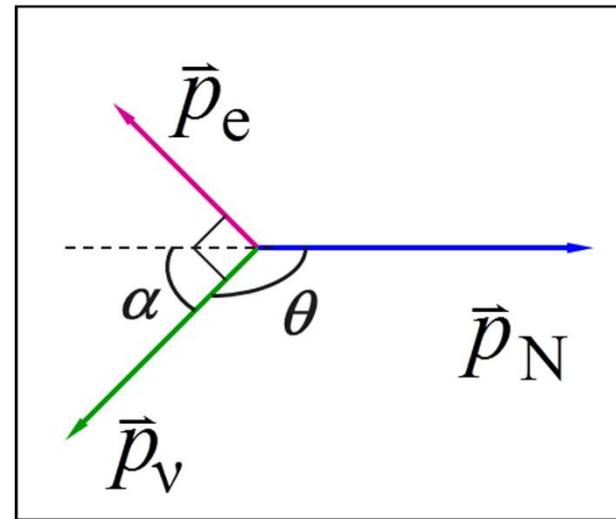
系统动量守恒，即

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0$$

又因为 $\vec{p}_e \perp \vec{p}_\nu$ $\therefore p_N = (p_e^2 + p_\nu^2)^{1/2}$

代入数据计算得 $p_N = 1.36 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\alpha = \arctan \frac{p_e}{p_\nu} = 61.9^\circ$$



例2 质量70kg的人在静止的船上匀速向前走了4米, 船的质量140kg, 水的阻力不计, 试求人相对湖面前进了多少?

解: $F_x = 0$ 水平方向动量守恒 $v - (-V) = v'$

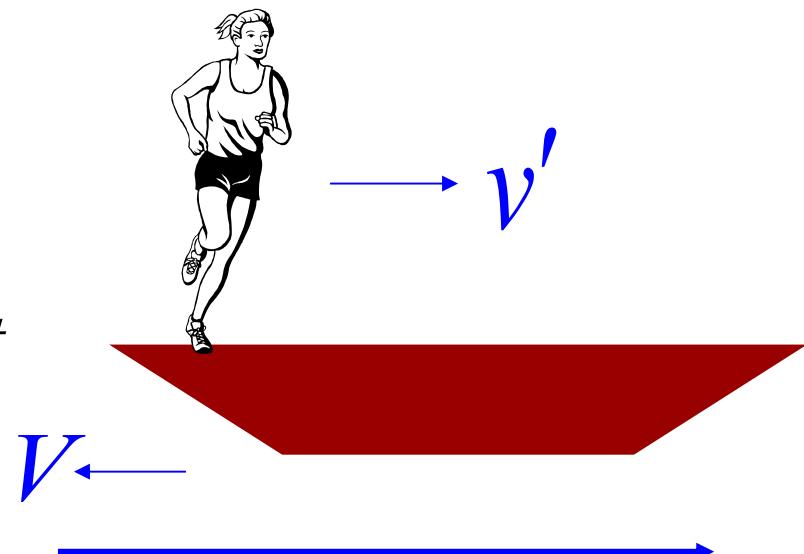
$$0 = mv + M(-V)$$

$$mv' = (m + M)V$$

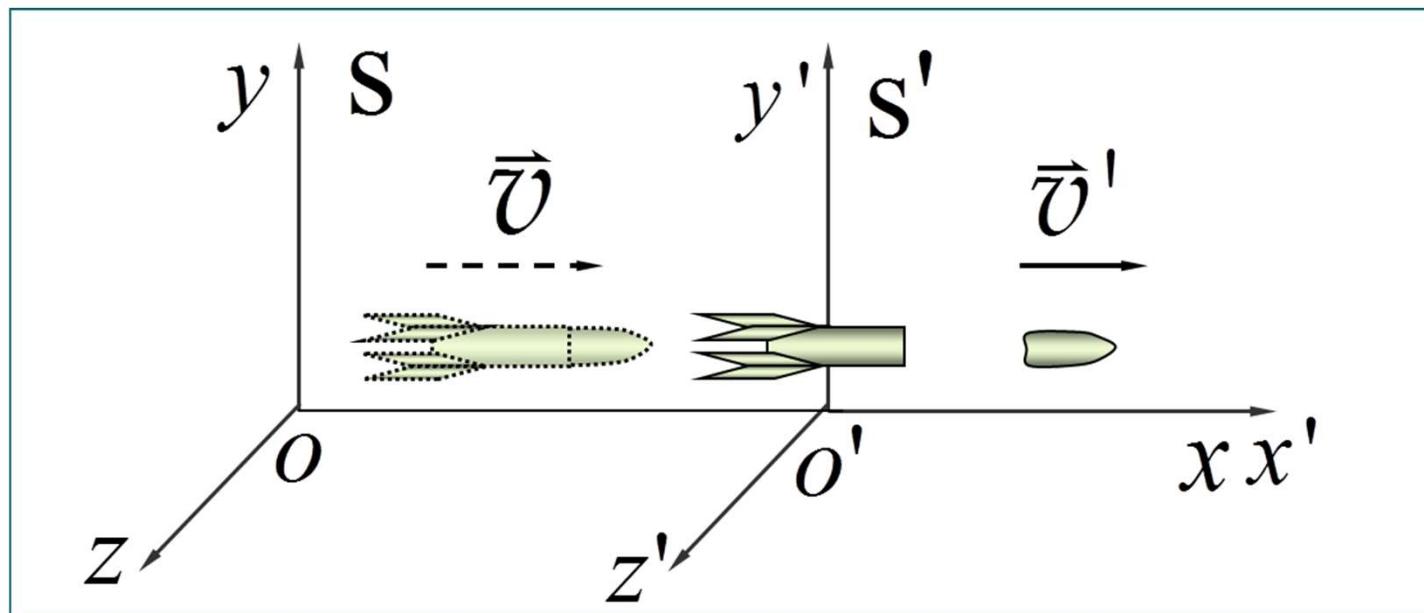
$$m \int_0^t v' dt = (m + M) \int_0^t V dt$$

$$S = \frac{m}{m + M} L$$

$$S = \frac{4}{3} m \quad S' = 4 - \frac{4}{3} = 2.67m$$



例 3 一枚返回式火箭以 $2.5 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率相对惯性系 S 沿 Ox 轴正向飞行. 设空气阻力不计. 现由控制系统使火箭分离为两部分, 前方部分是质量为 100kg 的仪器舱, 后方部分是质量为 200kg 的火箭容器. 若仪器舱相对火箭容器的水平速率为 $1.0 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 求仪器舱和火箭容器相对惯性系的速度.



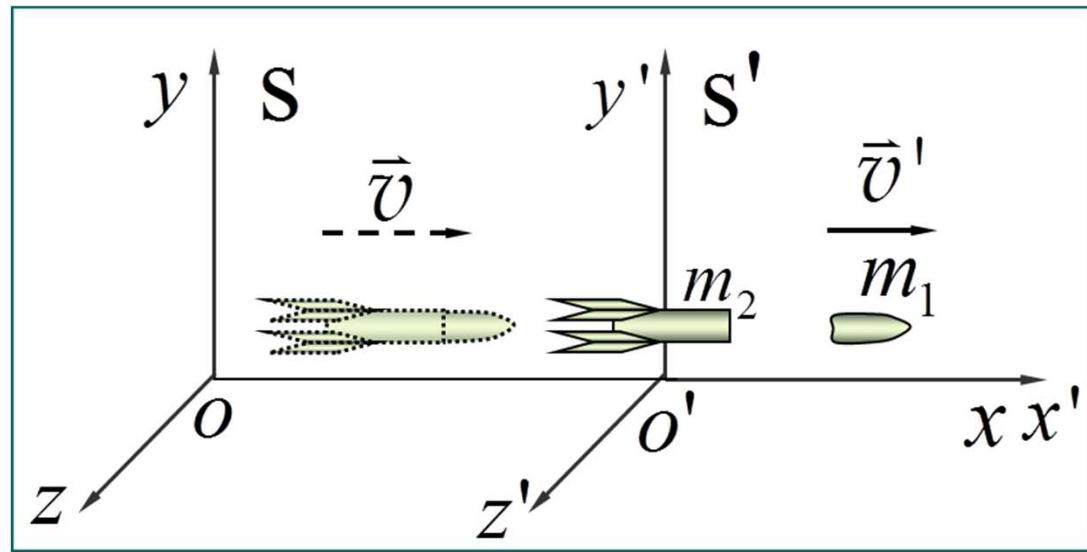
已知：

$$v = 2.5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v' = 1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_1 = 100 \text{ kg}$$

$$m_2 = 200 \text{ kg}$$



设：仪器舱和火箭容器分离后的速度分别为 \vec{v}_1 , \vec{v}_2 .

解： $v_1 = v_2 + v'$ 则 $v_2 = v - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v'$

$$\therefore \sum \vec{F}_{ix}^{\text{ex}} = 0$$

$$v_2 = 2.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\therefore (m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad v_1 = 3.17 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

我国长征系列火箭升空

