§1.4 初等变换与初等矩阵

一. 初等变换(起源于求解线性方程组)

为求解线性方程组，可对方程组作一系列等价的变形。

下面来看一下主要是哪几类等价变形，且这些变形分别对应了系数矩阵的哪些变换。

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=0 & ① \\ x_1+2x_2+2x_3=0 & ② \\ x_1-x_2-4x_3=0 & ③ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

r : row 行

$$\Big\downarrow \text{①与②交换} \qquad\qquad \Big\downarrow r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_1-x_2-4x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

两行交换称为换法变换： $r_i \leftrightarrow r_j$

(第1类初等变换)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & ① \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & ② \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 & ③ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \begin{matrix} ② - 2① \\ ③ - ① \end{matrix} \qquad\qquad \Big\downarrow \begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

j行的k倍加到i行称为消法变换：(第3类初等变换) $r_i + kr_j$ **(规定,写在前面的为变化行)**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & ① \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 & ② \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Big\downarrow ③ - ②$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & ① \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 & ② \\ 0x_2 - 0x_3 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Big\downarrow -1/3\ ②$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_2 - 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

倍法变换：$kr_i \quad (k \neq 0)$

(第2类初等变换)

对列也可作类似的变换:

$$c_i \leftrightarrow c_j \qquad\qquad c: column\ 列$$

$$kc_i \quad (k \neq 0)$$

$$c_i + kc_j$$

定义1.15 换法变换，倍法变换与消法变换统称为**初等变换**。

二. 初等阵

定义1.16 由单位矩阵 I 经一次初等变换得到的方阵称为**初等阵**.

$$I \xrightarrow{\text{一次初等变换}} \text{初等阵}$$

1. 换法阵 $P(i,j)$（对换 I 的 i, j 行，或对换 I 的 i, j 列即得）

$$I \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} P(i,j) \qquad\qquad I \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} P(i,j)$$

$$P(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \updownarrow \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

$$i \longleftrightarrow j$$

注1. 将$P(i,j)_{m\times m}$左乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作行变换$r_i\leftrightarrow r_j$。

将$P(i,j)_{n\times n}$右乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作列变换$c_i\leftrightarrow c_j$。

简称“左行右列”

$$A \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} P(i,j)A \qquad A \xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j} AP(i,j)$$

注2. $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$

2. 倍法阵 $P(i(k))$

以数 $k \neq 0$ 乘第 i 行， $I \xrightarrow{k \cdot r_i} P(i(k))$

或以数 $k \neq 0$ 乘第 i 列 $I \xrightarrow{k \cdot c_i} P(i(k))$

$$P(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

注. 将$P(i(k))_{m\times m}$左乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作行变换$k\cdot r_i$。

将$P(i(k))_{n\times n}$右乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作列变换$k\cdot c_i$。

$$A \xrightarrow{k\cdot r_i} P(i(k))A \qquad A \xrightarrow{k\cdot c_i} AP(i(k))$$

$$P(i(k))^{-1} = P(i(k^{-1}))$$

3. 消法阵 $P(i,j(k))$

变行应对　标首

$$I \xrightarrow[c_j+kc_i]{r_i+kr_j} P(i,j(k)) = \begin{array}{cl}
\begin{matrix} \quad & \quad & \text{第}i\text{列} & \quad & \text{第}j\text{列} & \quad & \quad \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

变列应对　标尾

注. 将$P(i,j(k))_{m\times m}$左乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作行变换r_i+kr_j。

将$P(i,j(k))_{n\times n}$右乘到$A_{m\times n}$，

相当于对$A_{m\times n}$作列变换c_j+kc_i。

“左行右列, 首尾为主”

$$A \xrightarrow{r_i+kr_j} P(i,j(k))A \qquad A \xrightarrow{c_j+kc_i} AP(i,j(k))$$

$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$$

性质1.4.1

初等矩阵均可逆，且其逆阵也为初等矩阵。

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

$$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}));$$

$$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))\ .$$

性质1.4.2

设A是一个$m\times n$ 矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于以相应的m阶初等矩阵左乘A；对A施行一次初等列变换，相当于以相应的n阶初等矩阵右乘A.

定义1.17 若A通过若干初等变换化为B，则称A与B**相抵**。

矩阵相抵的性质：

1） 自反性：A与A相抵

2）对称性：若A与B相抵，则B与A相抵

3）传递性：若A与B相抵，B与C相抵，则A与C相抵

推论1 设 A,B 均为$m\times n$阵。

1）若 A 经若干次初等行(列)变换化为 B，则存在 $m(n)$阶可逆阵 $P(Q)$，使

$$PA=B \quad (AQ=B)$$

2）若A,B相抵，则存在 m阶可逆阵P与 n阶可逆阵Q，使

$$PAQ=B$$

三. 矩阵的相抵标准形

回顾之前的例子：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对任意 $A\neq 0$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \begin{cases} \text{1）0行位于最下方} \\ \text{2）非0行首个非零元列标随行标增大严格增大。} \end{cases}$$

定义1.18

满足条件1）2）的矩阵称为**行阶梯矩阵**。

对行阶梯矩阵继续作行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B 满足：

1）非零行的首个非零元为1

2）1）中的1所在列其余元素全为零。

定义1.19 满足1）2）的行阶梯矩阵称为**行最简矩阵**。

即非零行首个非零元所在列为单位列向量。

对任意 $A \neq 0$

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} \text{行最简矩阵}$$

对行最简矩阵继续用列初等变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - 2c_2]{c_3 + 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相抵标准形

定理1.4.1 任一矩阵$A_{m\times n}$可经初等变换化为如下形式：
$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$
其中 r 为整数，满足：$0\le r\le \min(m,n)$.

注1. $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为 A 的相抵标准形

注2. 对任一矩阵 A，存在可逆阵 P 与可逆阵 Q，使
$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注3. $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中的0行与0列不是必须的。

也可形如：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I_r.$$

例1 将下面的矩阵化为行阶梯阵，行最简矩阵与相抵标准形.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行初等变换化矩阵为行阶梯阵的流程：

1. 将行按以下优先级靠前排列：

全零行调至最下面

左起首个非零元列标小的行优先，

列标相同时，首个非零元数字简单的行优先，

首个非零元数字都复杂，可用行变换简化。

2. 按优先级排好行后，从最上面一行开始，

依次用该行首个非零元将其正下方所有非零元消为零。

3. 从下一行开始，回到步骤1

4. 直到所有非零行的首个非零元下方全部为零。

行初等变换化行阶梯阵为行最简矩阵：

1. 将每行左起的首个非零元化为1。

2. 从左至右检查1中的首个非零元1所在的每一列，
   用首个非零元1，将其所在列其余非零元消为0.

四. 可逆阵与初等阵的关系

定理1.4.1 设 A 为 n 阶方阵, 则以下命题等价:

(1) A 是可逆的($AB=BA=I$);

(2) A 的相抵标准形是 I_n;

(3) A 可以表示为若干初等阵的乘积;

(4) 存在 n 阶阵 B, 使 $AB=I$（或 $BA=I$）.

证明思路: $(1)\Leftrightarrow(2)$ $(1)\Leftrightarrow(3)$ $(1)\Leftrightarrow(4)$

(1) A 是可逆的($AB=BA=I$)；

(2) A 的相抵标准形是 I_n；

证明:(1)⇒(2) 设 A 的相抵标准形中 $r<n$

即 存在可逆阵P,Q, 使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

则

$$PAQ\vec{e}_{r+1}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{e}_{r+1}=\vec{0}$$

$\because P,A,Q$均可逆 $\therefore \vec{e}_{r+1}=\vec{0}$ 矛盾！$\therefore r=n.$

(2)⇒(1) $\because PAQ=I,$ P,Q可逆 $\therefore A=P^{-1}Q^{-1}$可逆

(1) A 是可逆的$(AB=BA=I)$；

(2) A 的相抵标准形是 I_n；

(3) A 可以表示为若干初等阵的乘积;

---

(1)$\Rightarrow$(3) (1)$\Rightarrow$(2) A的相抵标准形为I

即 $P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=I\Rightarrow A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$

(3)$\Rightarrow$(1) 显然

(1) A 是可逆的($AB=BA=I$)；

(2) A 的相抵标准形是 I_n；

(3) A 可以表示为若干初等阵的乘积；

(4) 存在 n 阶阵 B，使 $AB=I$（或 $BA=I$）.

(1)⇒(4) 显然 (4)⇒(1) 只需证 (4)⇒(2)

反证，设 A 的相抵标准形中 $r<n$

即 存在可逆阵 P,Q，使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\vec{e}_{r+1}^{\,T}PAQ=\vec{e}_{r+1}^{\,T}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\vec{0}^T$

$\therefore \vec{e}_{r+1}^{\,T}PAQQ^{-1}B=\vec{0}^T$ $\therefore \vec{e}_{r+1}^{\,T}P=\vec{0}^T$ $\therefore \vec{e}_{r+1}^{\,T}=\vec{0}^T$

矛盾！ $\therefore r=n.$