

常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$ 型

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解 非齐次方程特解

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数。

一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

λ 为实数, $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

设特解为 $y^* = e^{\lambda x} \underline{Q(x)}$, 其中 $Q(x)$ 为待定多项式,

$$y^{*'} = e^{\lambda x} [\underline{\lambda Q(x)} + \underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*''} = e^{\lambda x} [\underline{\lambda^2 Q(x)} + \underline{2\lambda Q'(x)} + \underline{Q''(x)}]$$

代入原方程, 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根, 即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$, 从而得到特解形式为 $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$.

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(2) 若 λ 是特征方程的单根, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p \neq 0,$$

则 $Q'(x)$ 为 m 次多项式, 故特解形式为 $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p = 0,$$

则 $Q''(x)$ 是 m 次多项式, 故特解形式为 $y^* = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①, 当 λ 是特征方程的 k 重根时, 可设

特解 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程.

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda = 0$, 而特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

$\lambda = 0$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^* = b_0x + b_1$, 代入方程:

$$-3b_0x - 3b_1 - 2b_0 = 3x + 1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -2b_0 - 3b_1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} b_0 = -1, \quad b_1 = \frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^* = -x + \frac{1}{3}$.

例2. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = \underline{x}e^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 2}, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(b_0 x + b_1) e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得 $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

因此特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$.

例3. 求解定解问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = \underline{1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题 $\lambda = 0$, 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 0}, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = bx$, 代入方程得 $2b = 1$, 故

$y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{3}{4} \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

于是所求解为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x}) \end{aligned}$$

二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$ 型

分析思路：

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x) = P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\lambda x} \left[P_l(x) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + \tilde{P}_n(x) \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right] \\
 &= \left[\frac{P_l(x)}{2} + \frac{\tilde{P}_n(x)}{2i} \right] e^{(\lambda+i\omega)x} \\
 &\quad + \left[\frac{P_l(x)}{2} - \frac{\tilde{P}_n(x)}{2i} \right] e^{(\lambda-i\omega)x}
 \end{aligned}$$

令 $m = \max\{n, l\}$, 则

$$\begin{aligned}
 f(x) &= P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x)} e^{(\lambda-i\omega)x} \\
 &= P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x)} e^{(\lambda+i\omega)x}
 \end{aligned}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad ②$$

$$\overline{y'' + py' + qy} = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \quad ③$$

设 $\lambda + i\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则 ② 有
特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x) \text{ 为 } m \text{ 次多项式})$$

故 $(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$

等式两边取共轭:

$$\overline{y_1^*}'' + p \overline{y_1^*}' + q \overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解.

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} \left[P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x \right]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解:

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\ &= x^k e^{\lambda x} [Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m} e^{-i\omega x}] \\ &= x^k e^{\lambda x} [Q_m (\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ &\quad + \overline{Q_m} (\cos \omega x - i \sin \omega x)] \\ &= x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x] \end{aligned}$$

其中 R_m, \tilde{R}_m 均为 m 次多项式.

第四步 分析 y^* 的特点

$$\begin{aligned}y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\&= x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x]\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}\overline{y^*} &= \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}} \\&= \overline{y_1^*} + y_1^* \\&= y^*\end{aligned}$$

所以 y^* 本质上为实函数，因此 R_m, \tilde{R}_m 均为 m 次实多项式。

小结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x] \\ (p, q \text{ 为常数})$$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x]$$

$$\text{其中 } m = \max\{n, l\}$$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例4. 求方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda = 0$, $\omega = 2$, $P_l(x) = x$, $\tilde{P}_n(x) = 0$,

$$\text{特征方程} \quad r^2 + 1 = 0$$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x \cos 2x$$

比较系数, 得
$$\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases} \quad \therefore a = \frac{-1}{3}, \quad d = \frac{4}{9}$$
$$b = c = 0$$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$.

例5. 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$\pm 3i$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a \cos 3x + b \sin 3x)$$

代入方程: $6b \cos 3x$ $- 6a \sin 3x$ = $18 \cos 3x$ $- 30 \sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5$, $b = 3$,

因此特解为 $y^* = x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$$

例6. 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$$

$$(2) \quad y^{(4)} + y'' = \underline{x} + \underline{e^x} + \underline{3\sin x}$$

解: (1) 特征方程 $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, 即 $(r^2 + 1)^2 = 0$,
有二重根 $r = \pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(a \cos x + b \sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4 + r^2 = 0$, 即 $r^2(r^2 + 1) = 0$ 有根

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i$$

利用叠加原理, 可设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(ax + b) + x(d \cos x + k \sin x)$$

内容小结

$$1. y'' + p y' + q y = P_m(x) e^{\lambda x}$$

λ 为特征方程的 $k (=0, 1, 2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$2. y'' + p y' + q y = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 $k (=0, 1)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m(x) \cos \omega x + \tilde{R}_m(x) \sin \omega x]$$

$$m = \max\{l, n\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.