例　一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m，周期为 4s，起始时刻物体在 $x = 0.04\text{m}$ 处，向 Ox 轴负方向运动. 试求

（1）$t = 1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；

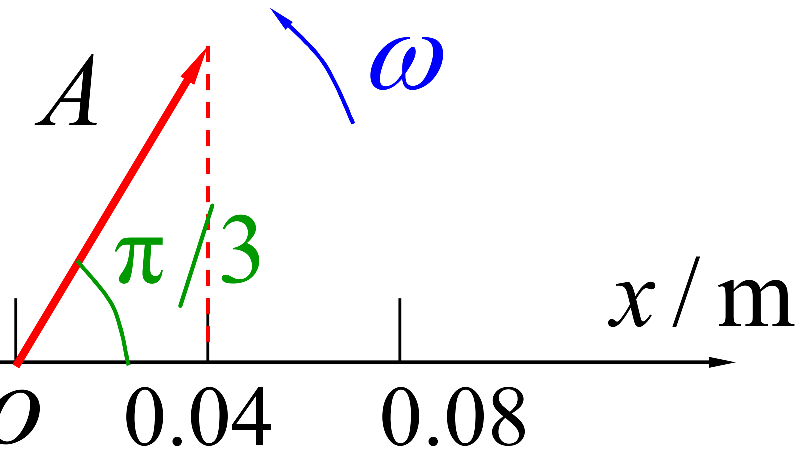
（2）由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.

解： $A = 0.08\text{m}$ $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

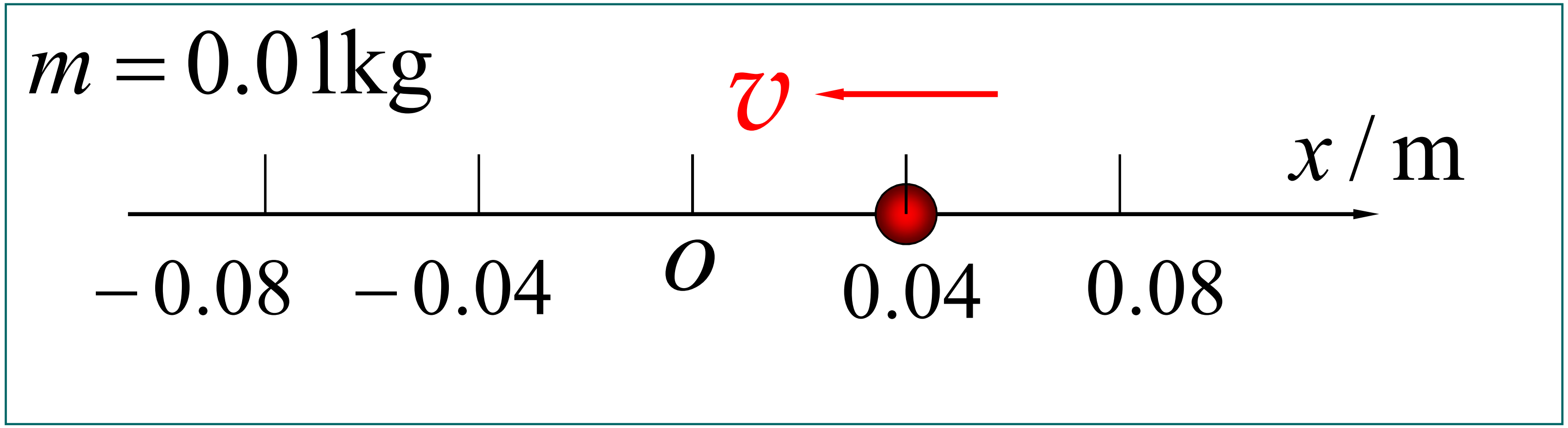
$t = 0, x = 0.04\text{m}$ $\quad$ 代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$0.04 = 0.08\cos\varphi$ $\quad \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \dfrac{\pi}{3}$



$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

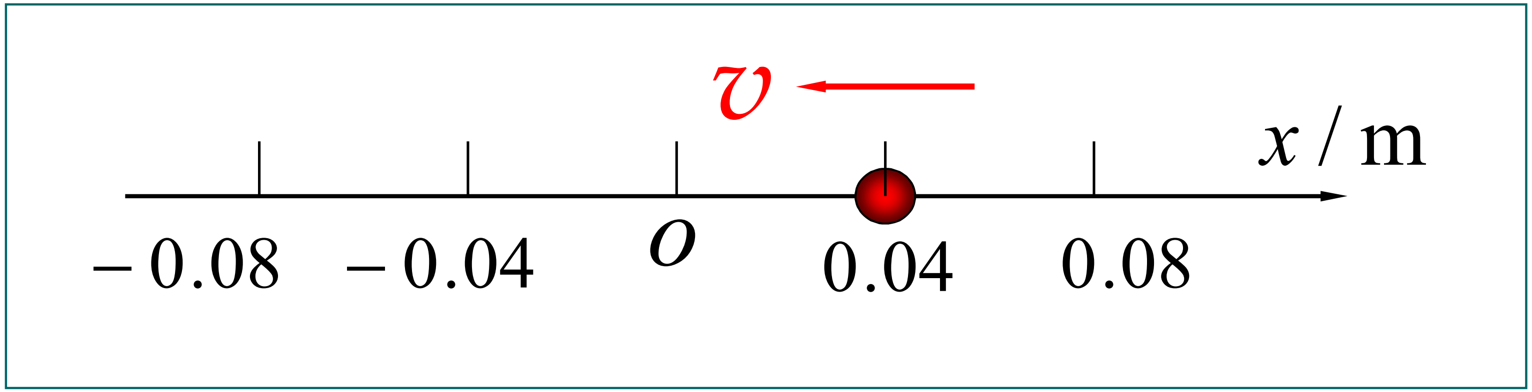


$$x = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$t = 1.0\text{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\text{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times10^{-3}\,\text{N}$$

（2）由起始位置运动到 $x=-0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.

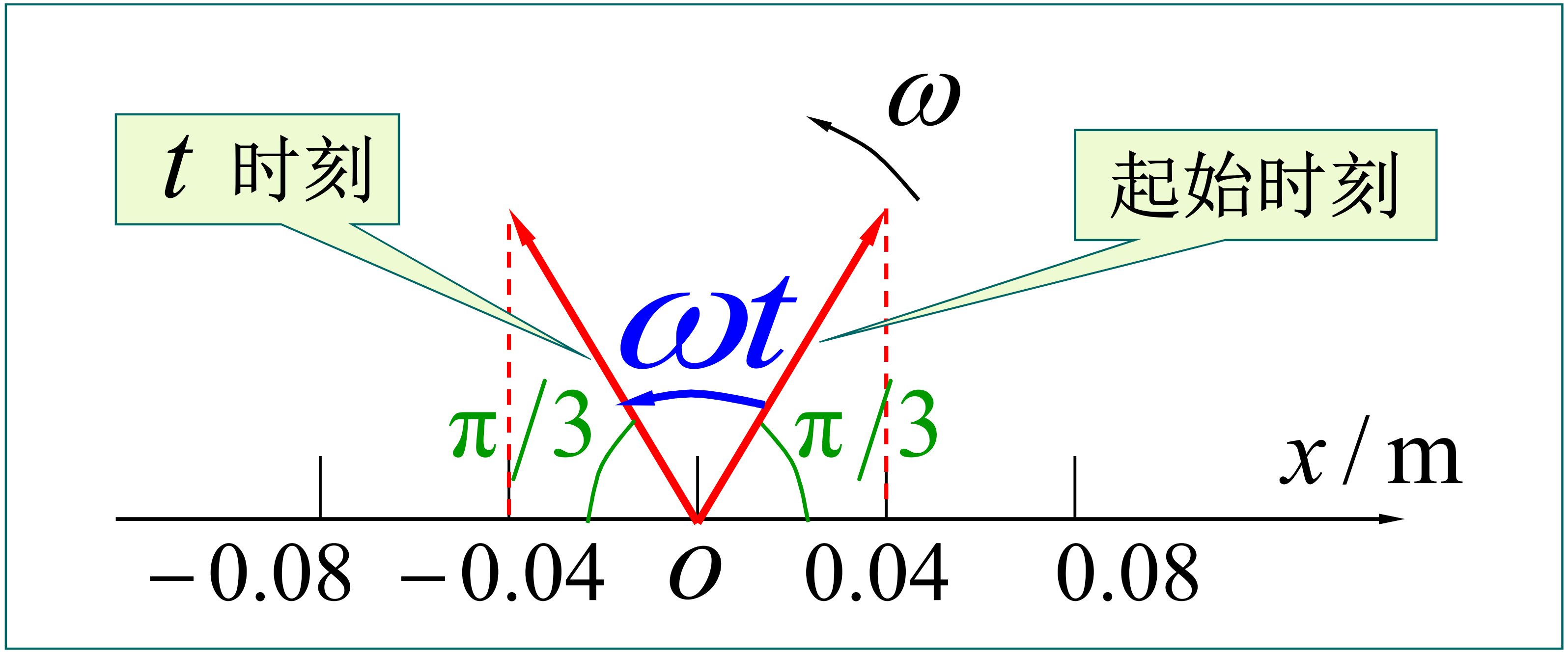


法一　设由起始位置运动到 $x=-0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间为 t

$$-0.04=0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$t=0.667\text{s}$$

解法二



$$\omega t=\frac{\pi}{3} \qquad \omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1} \qquad t=0.667\mathrm{s}$$

6-3 简谐运动的能量

◆ 以弹簧振子为例

$$F=-kx \quad \begin{cases} x=A\cos(\omega t+\varphi) \\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

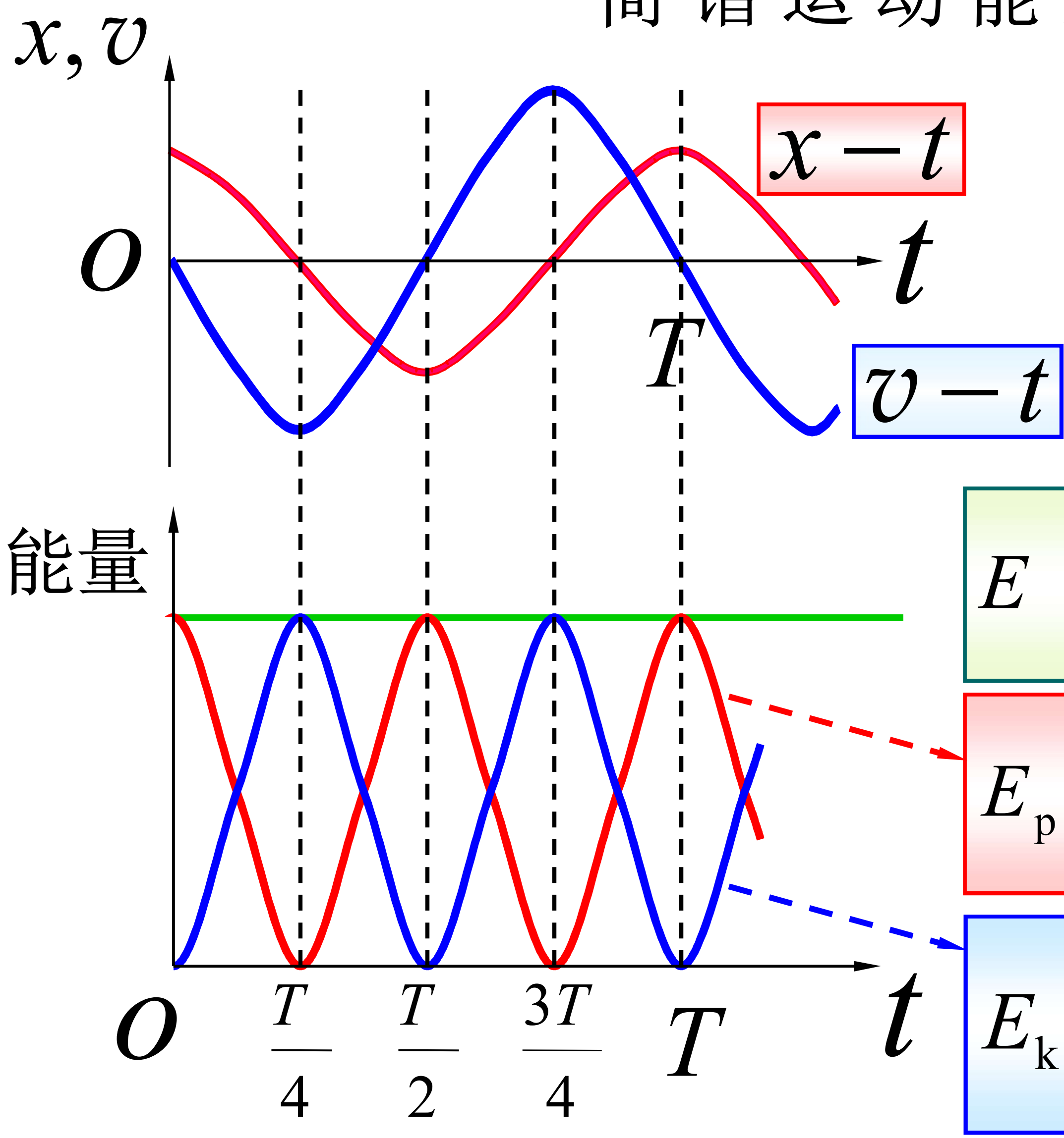
$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2=k/m$$

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2\propto A^2$$（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

例　质量为 0.10kg 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求：

（1）振动的周期；　（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；（4）物体在何处其动能和势能相等？

解：

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\,\mathrm{s}$$

$$E_{\mathrm{k,max}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$

$$T = 0.314\ \mathrm{s} \qquad E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（**3**）总能量；

$$E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（**4**）物体在何处其动能和势能相等？

$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}} = 1.0\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \qquad x = \pm 0.707\ \mathrm{cm}$$

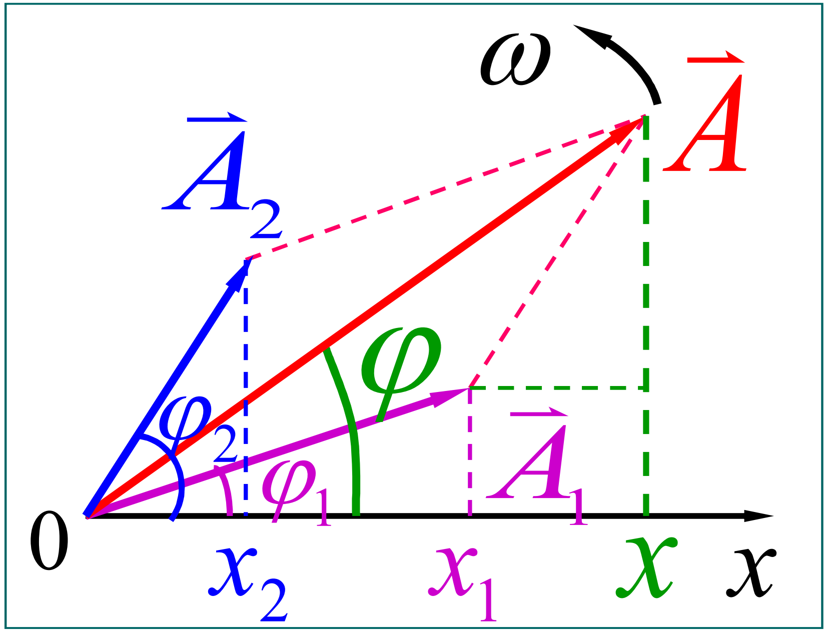
6-4 简谐运动的合成

一　两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

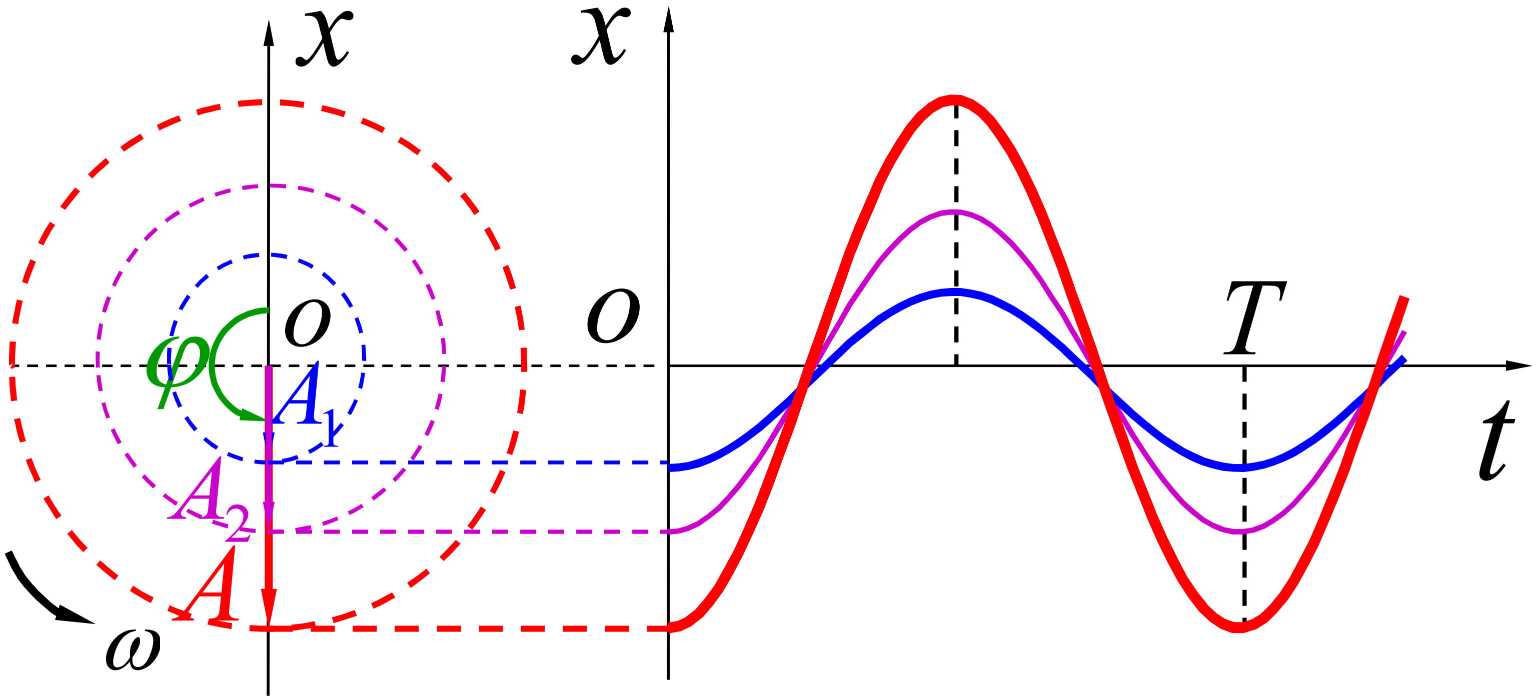


$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

讨论 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

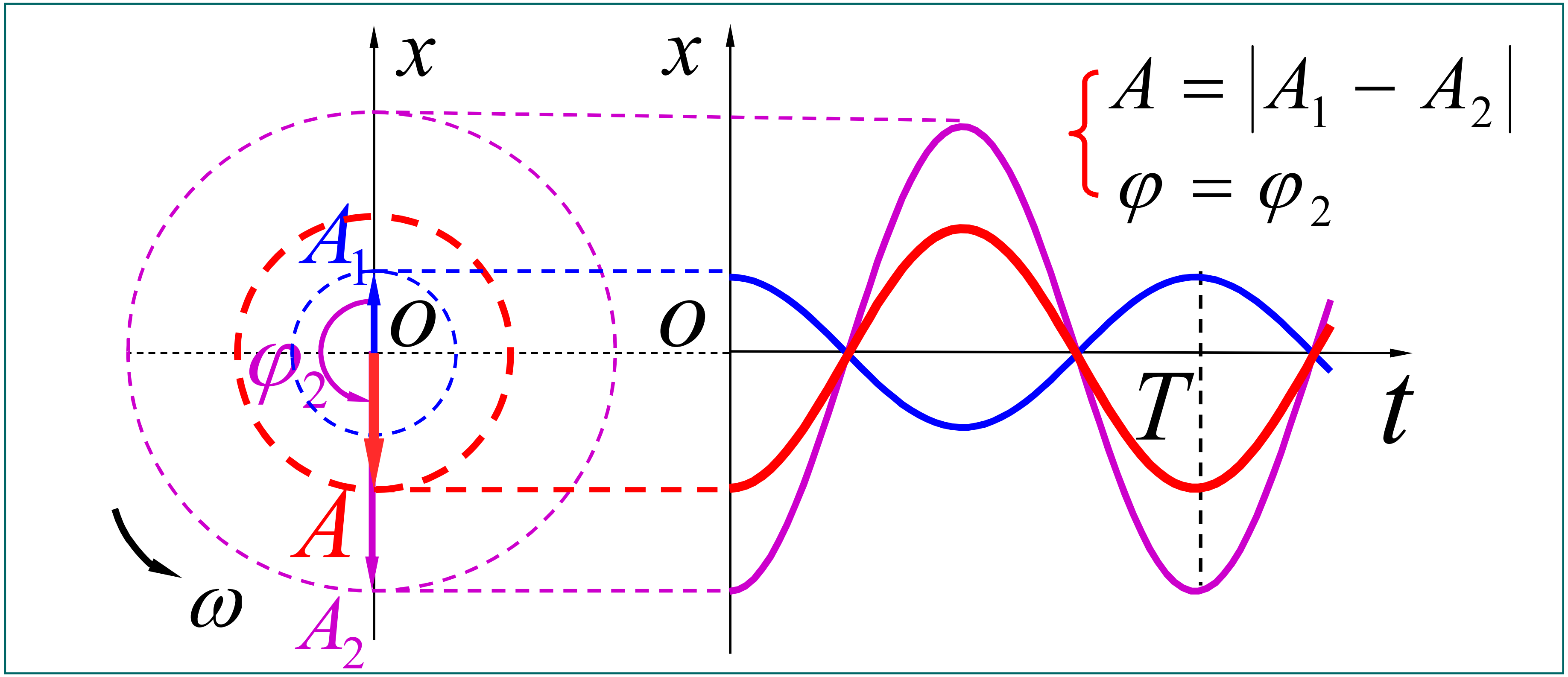
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0\,,\pm1,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\ \omega t \\ x_2 = A_2\cos(\ \omega t+\pi\ ) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

➢ 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

1）相位差 $\Delta\varphi=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

$\boxed{\text{相互加强}}$

2）相位差 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

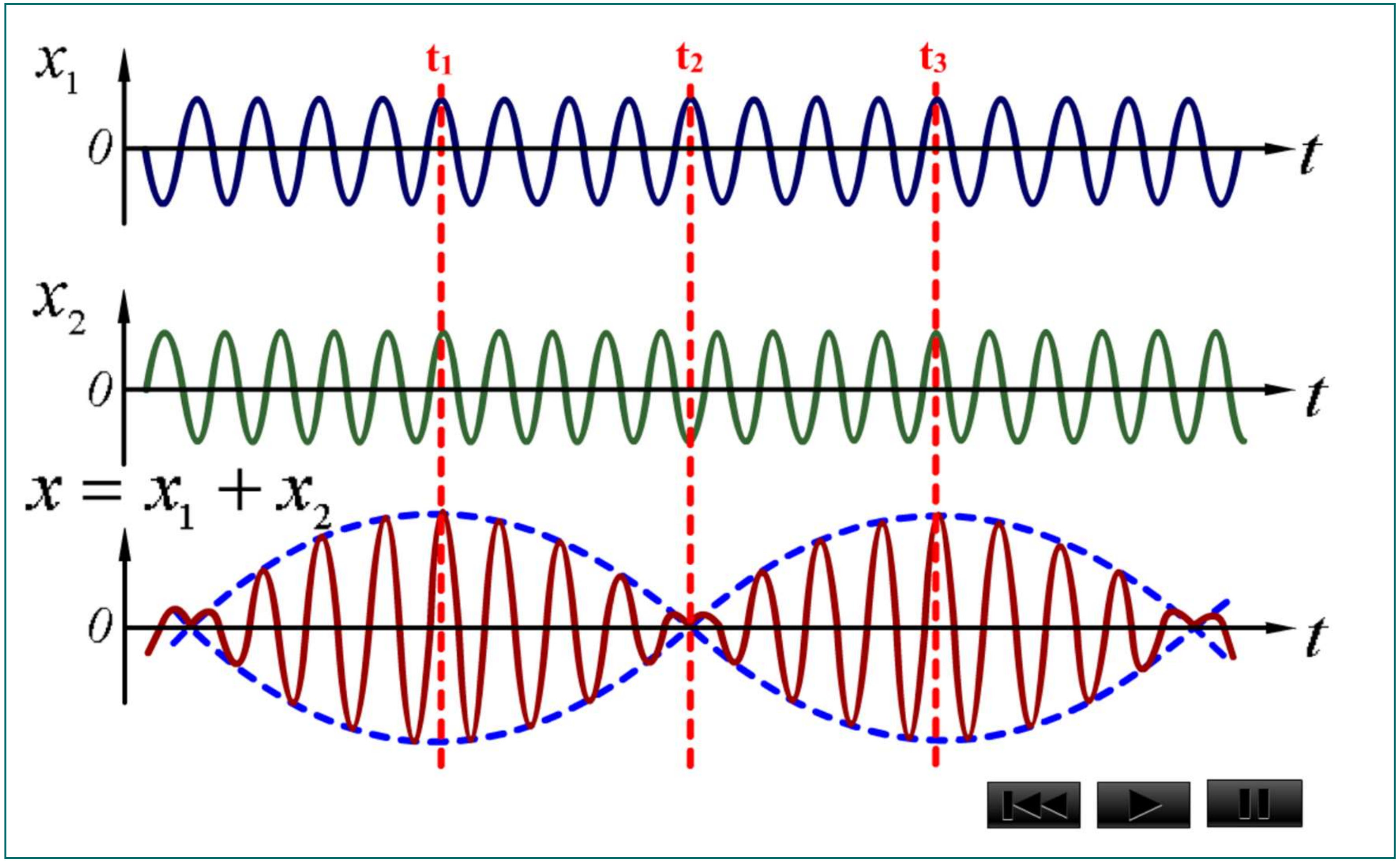
$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

$\boxed{\text{相互削弱}}$

3）一般情况

$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

二 两个同方向不同频率简谐运动的合成 拍现象



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$，$\left|\nu_2 - \nu_1\right| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t$$

$$x = \underbrace{\boxed{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\boxed{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}}_{\text{合振动频率}} t$$

$$x = \underbrace{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

$$\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T = \pi \qquad T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

拍频（振幅变化的频率）

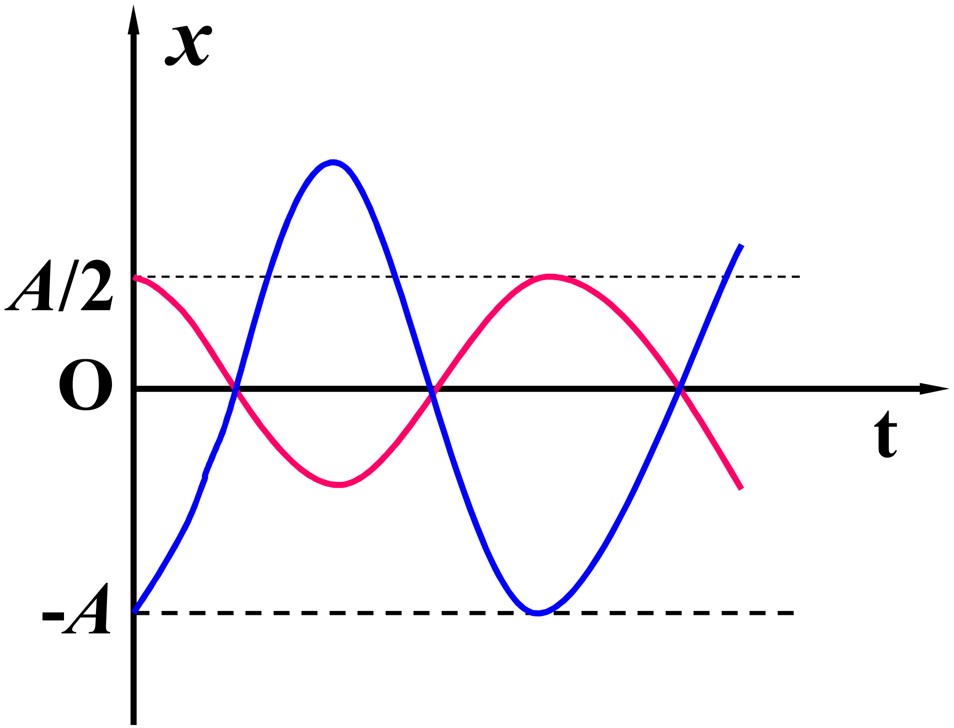
例1 图中所画的是两个简谐振动的振动曲线．若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

（1） $3\pi/2$

（2） π

（3） $\pi/2$

（4） 0



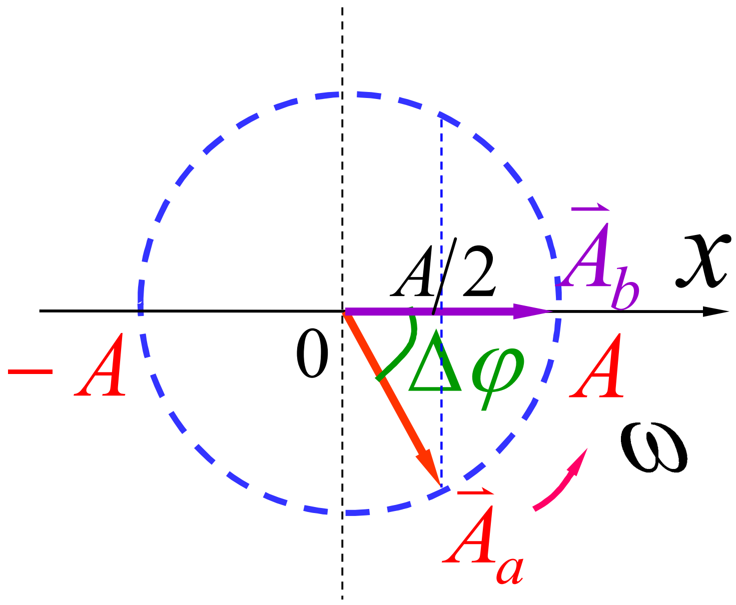
例2　一质点作谐振动，周期为T，当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的时间为

（1）$T/4$　　（2）$T/12$

★（3）$T/6$　　（4）$T/8$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\pi/3}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}$$

$$\Delta t = T/6$$



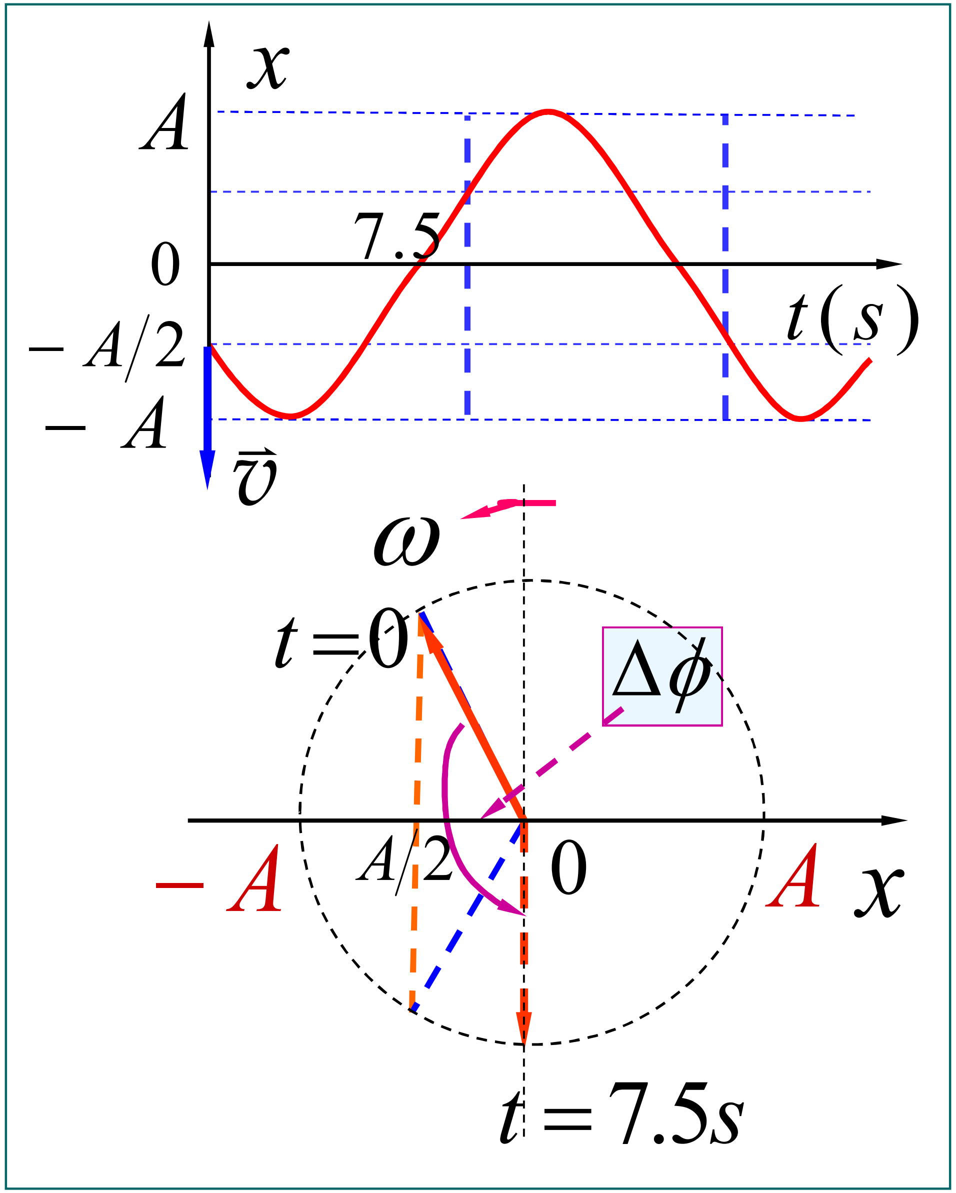
例3　已知两个同方向的简谐振动：

$$x_1 = 0.04\cos(10t + \pi/3),$$

$$x_2 = 0.03\cos(10t + \varphi)$$

则（1） $x_1 + x_2$ 为最大时，φ 为 $\underline{\ 2k\pi + \pi/3\ }$

（2） $x_1 + x_2$ 为最小时，φ 为 $\underline{\ 2k\pi + 4\pi/3\ }$



例4 一简谐运动的运动曲线如图所示，**求**振动周期．

$$t=0 \quad x=-\frac{A}{2} \quad v<0$$

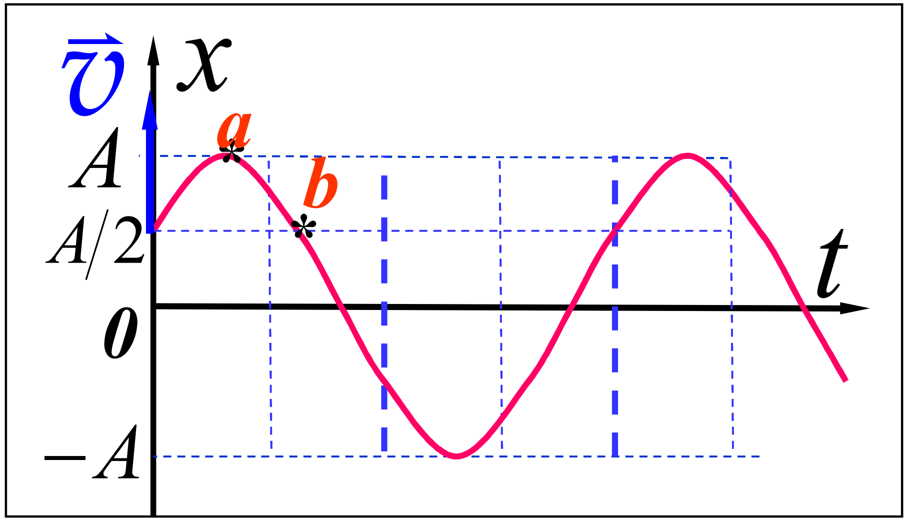
$$t=7.5\mathrm{s} \quad x=0 \quad v>0$$

$$\Delta\phi=5\pi/6$$

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}=\frac{7.5}{T}$$

$$T=18\,\mathrm{s}$$

例5 已知谐振动的 A 、T ， 求 1）如图简谐运动方程，2）到达 a、b 点运动状态的时间 .



解法一

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

从图上可知

$$t = 0, x = \frac{A}{2}, v > 0$$

$$\frac{A}{2} = A\cos\varphi$$

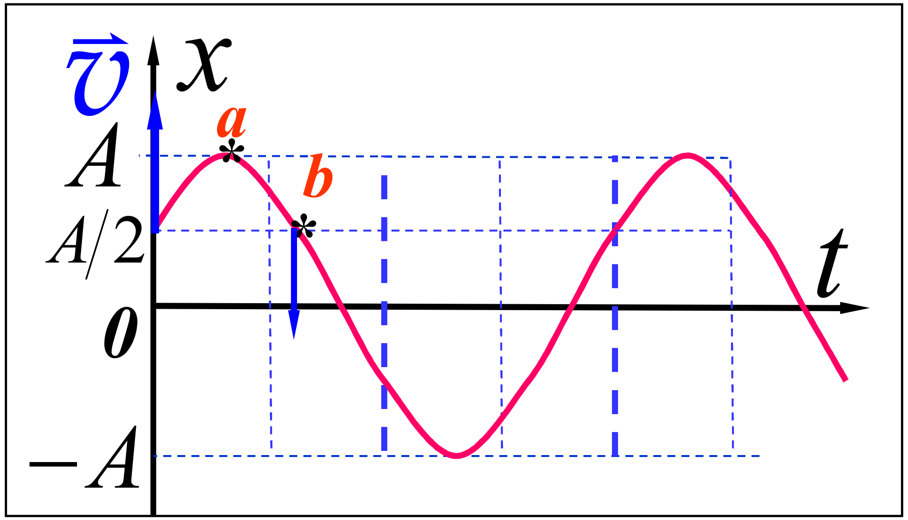
$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3} \text{ 或 } (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$$

$$\because v_0 > 0, \sin\varphi < 0$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$



$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$A = A\cos(\omega t_a - \pi/3)$$

$$\omega t_a - \frac{\pi}{3} = 0, 2\pi, 4\pi \cdots$$

$$\because (\omega t_a - \frac{\pi}{3}) - \varphi < 2\pi$$

$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t_b - \pi/3)$$

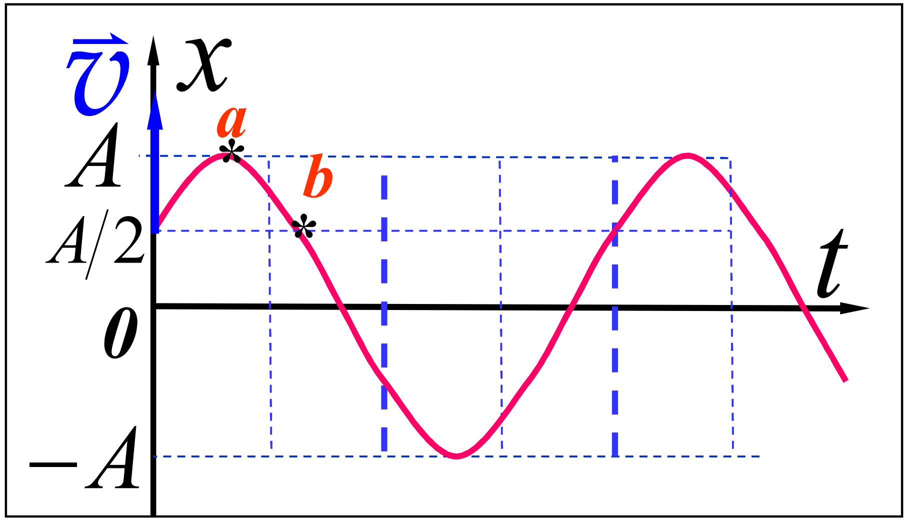
$$\omega t_b - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \cdots$$

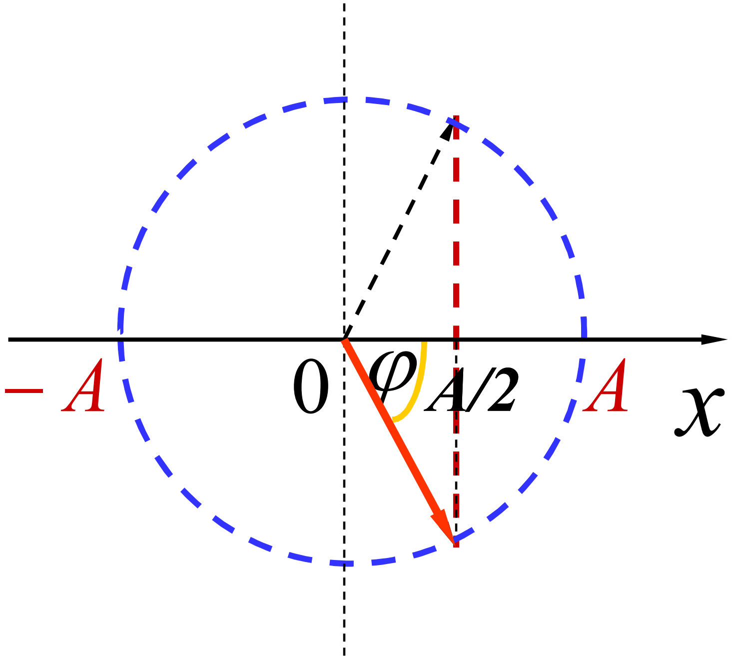
$$\therefore \frac{2\pi}{T} t_a - \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\boxed{t_a = \frac{T}{6}}$$

$$\because (\omega t_b - \frac{\pi}{3}) - \varphi < 2\pi \quad \therefore \frac{2\pi}{T} t_b - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{t_b = T/3}$$





解法二

用旋转矢量法求初相位

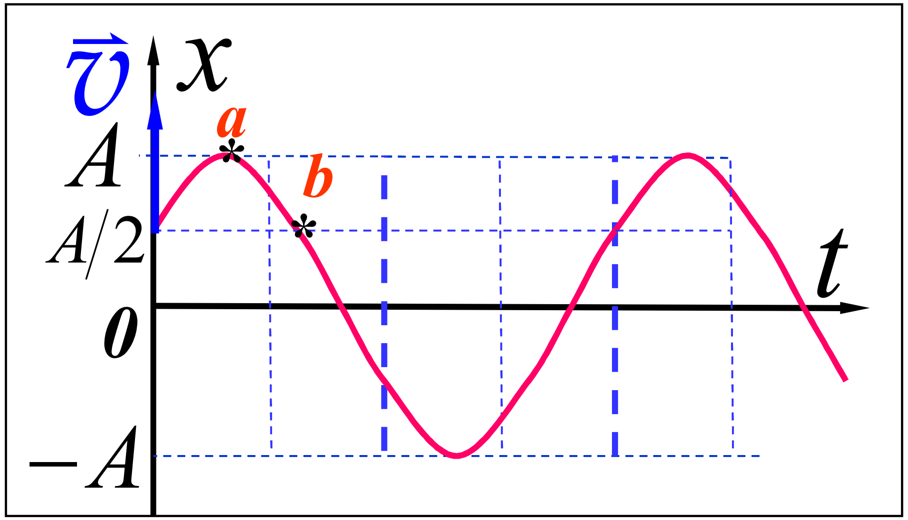
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

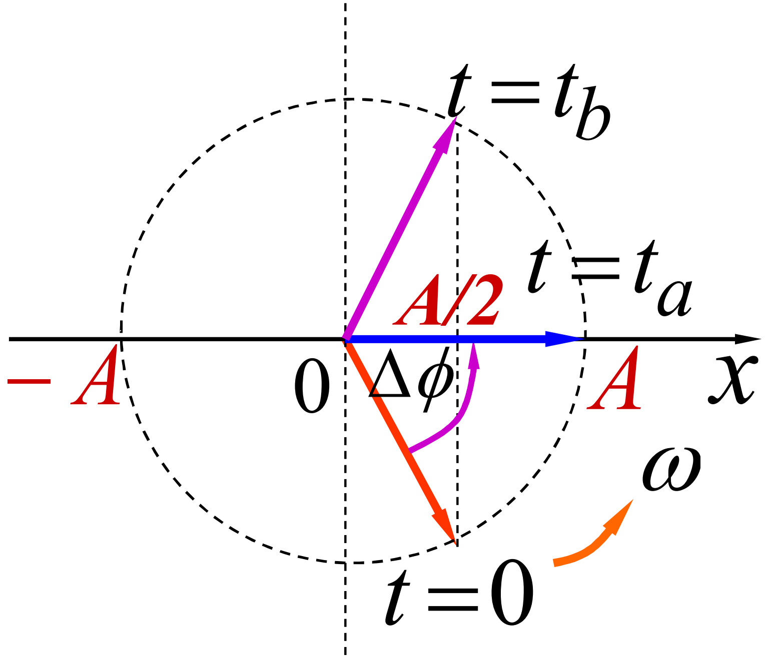
$$t = 0, x = \frac{A}{2}, v > 0$$

矢量位于x轴下方时 $v > 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$





$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$\Delta\phi = 0 - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_a = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = \frac{T}{6}$$

$$t_b = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = \frac{T}{3}$$

例6 求两个同方向同频率的简谐振动的合振幅

$$x_1 = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(\omega t - \pi/6)$$

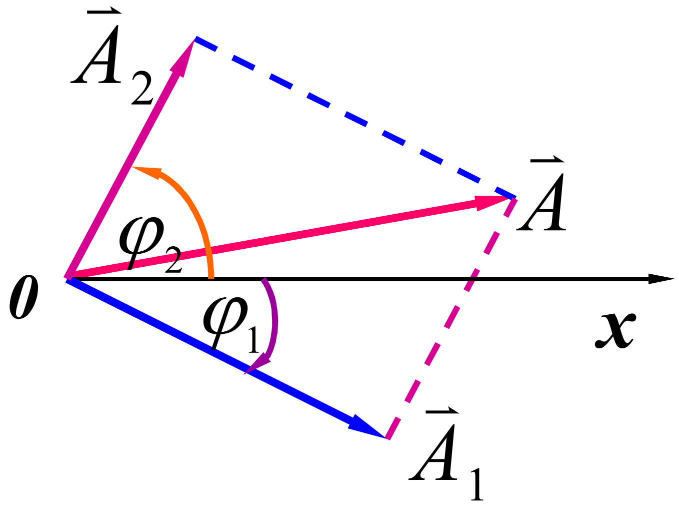
$$x_2 = (4\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(\omega t + \pi/3)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

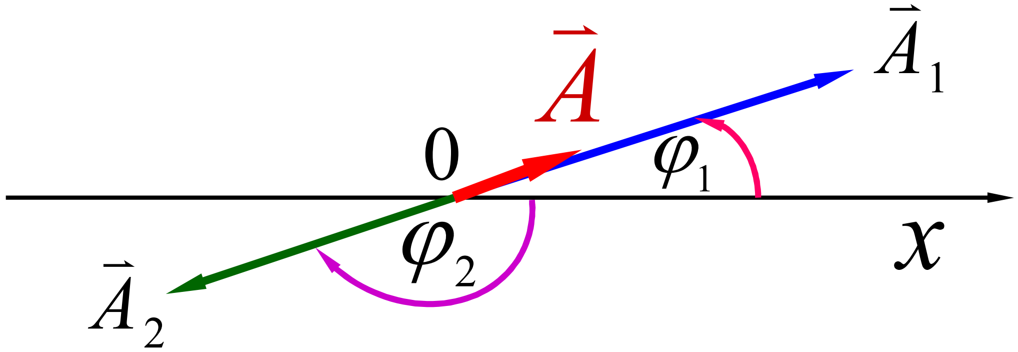
$$= 5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$



例7 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，求合振动的振幅和初相位。

$$x_1 = (4\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$

$$x_2 = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t - 5\pi/6)$$



$$\Delta\varphi = \pi \qquad A = 1\times10^{-2}\,\mathrm{m} \qquad \varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x = (1\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$