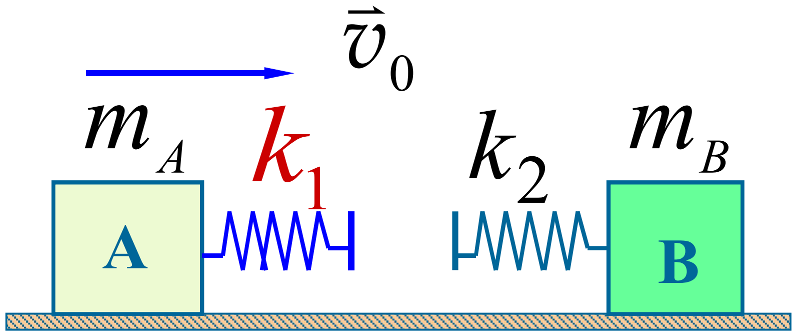
例 一质量为m的小球, 以速率为v_0、与水平面夹角为60°的仰角作斜抛运动，不计空气阻力，小球从抛出点到最高点这一过程中所受合外力的冲量大小为_______________，冲量的方向是____________________.

例 已知A初始速度 $\vec{v}_0$，B静止，k_1, k_2, m_A, m_B 所有摩擦均无，求 A，B 碰后，具有相同速度时，二者的相互作用力.



例　一质量为m的小球, 以速率为v_0、与水平面夹角为60°的仰角作斜抛运动，不计空气阻力，小球从抛出点到最高点这一过程中所受合外力的冲量大小为$\underline{\sqrt{3}mv_0/2}$，冲量的方向是$\underline{\text{沿 } y \text{ 轴负方向}}$.

解:

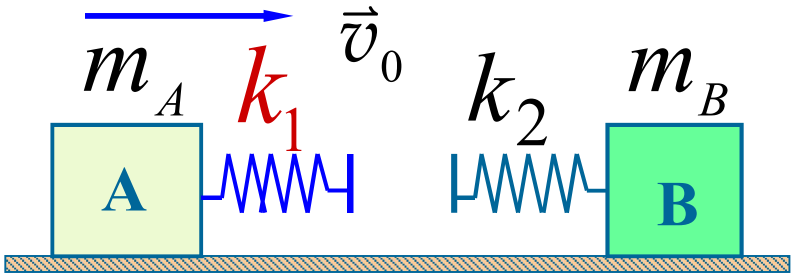
$$\vec{I} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

$$= m\frac{1}{2}v_0\vec{i} - m(\frac{1}{2}v_0\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\vec{j})$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}mv_0\vec{j}$$

冲量大小: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}mv_0$, 方向沿 y 轴负方向.

例 已知A初始速度 $\vec{v}_0$，B静止，k_1, k_2, m_A, m_B 所有摩擦均无，求 A，B 碰后，具有相同速度时，二者的相互作用力.



解： 以**A**、**B** 和弹簧为系统，在碰撞过程中动量和机械能均守恒. **设** 二者速度相同时，两弹簧的压缩分别为 x_1, x_2 .

$$\frac{1}{2}m_A v_0^2 = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 + \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2$$

$$m_A v_0 = (m_A + m_B)V \qquad k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1^2 + k_1 k_2}}\, v_0$$

$$F = k_1 x_1 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}\, v_0$$

4-3 火箭飞行原理

问： 火箭是如何将地球气象卫星、载人航天飞船、深空宇宙探测器等航天飞行器送上太空的？

- 火箭飞行原理简介

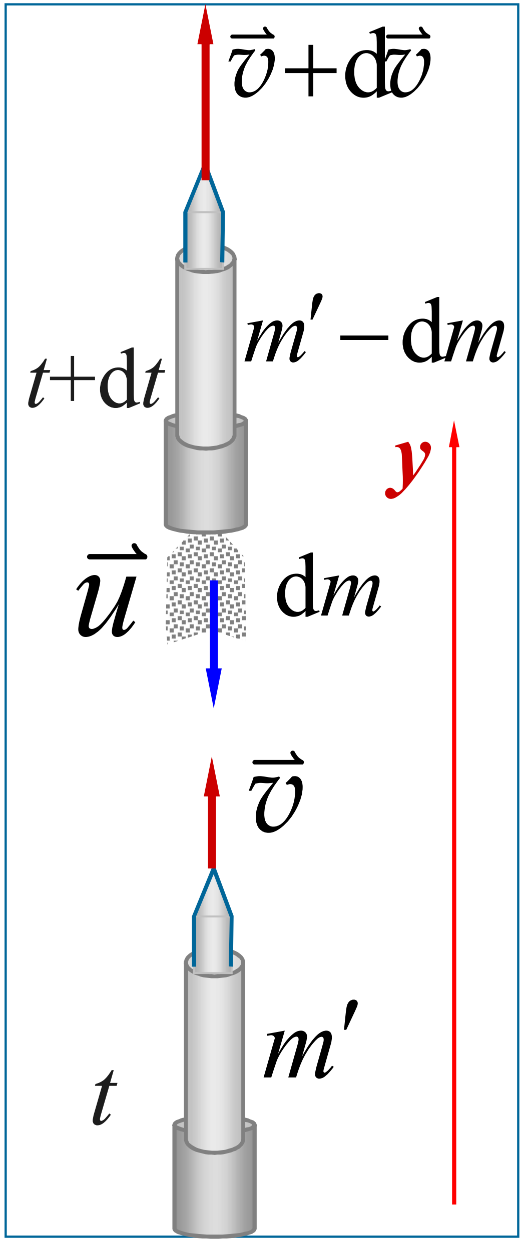
以地为参考系，时刻 t，系统的动量为

$$p = m'v$$

时刻 $t+\mathrm{d}t$，系统的动量为

$$p' = (m' - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(v + \mathrm{d}v - u)$$

略去重力，系统总动量守恒 $p = p'$



$$p = m'v$$

$$p' = (m' - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(v + \mathrm{d}v - u)$$

系统总动量守恒 $p = p'$

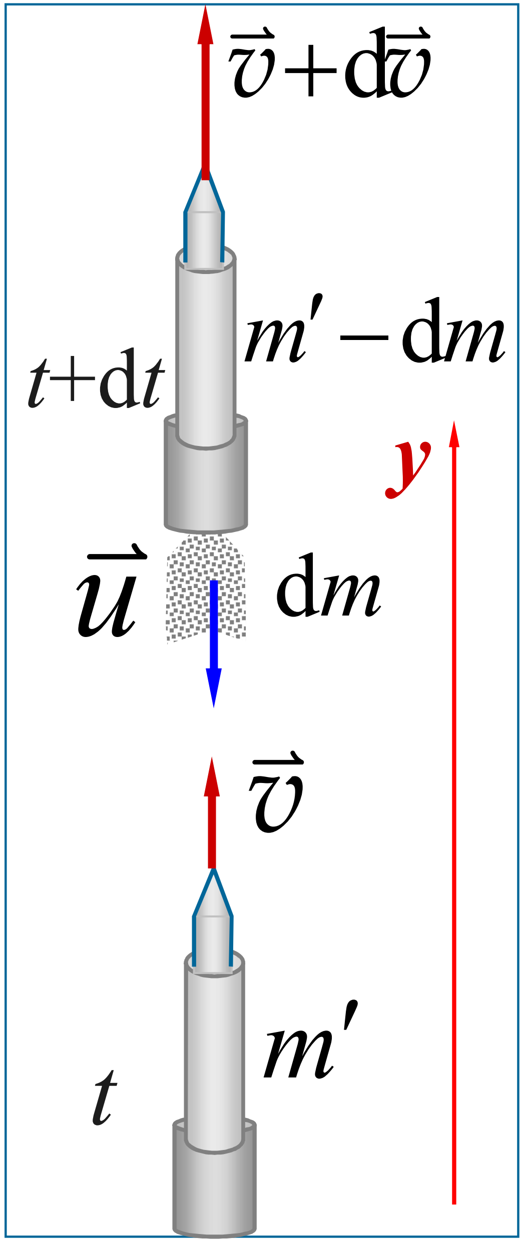
略去二阶微分量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$, 整理得

$$m'\mathrm{d}v - u\mathrm{d}m = 0$$

$$\because \quad -\mathrm{d}m' = \mathrm{d}m \quad \therefore \quad \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m'}{m'}$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{m'_0}^{m'} -u\frac{\mathrm{d}m'}{m'}$$

$$v = v_0 + u\ln\frac{m'_0}{m'}$$



$$v = v_0 + u \ln \frac{m'_0}{m'} = u \ln N$$

- 质量比 $N = m'_0 / m_0$

为了提高火箭的速度，通常采用多级火箭

$$v_1 = u \ln N_1$$

$$v_2 = v_1 + u \ln N_2$$

$$v_3 = v_2 + u \ln N_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$v = \sum_i u \ln N_i = u \ln (N_1 N_2 N_3 \cdots)$$

钱学森

钱学森，1911.12.11－2009.10.31，生于上海，祖籍浙江省杭州市临安。世界著名科学家，空气动力学家，中国载人航天奠基人，中国科学院及中国工程院院士，中国两弹一星功勋奖章获得者，被誉为“中国航天之父”“中国导弹之父”“中国自动化控制之父”和“火箭之王”，由于钱学森回国效力，中国导弹、原子弹的发射向前推进了至少20年。

1934年，毕业于国立交通大学机械与动力工程学院，曾任美国麻省理工学院和加州理工学院教授。1955年，在毛泽东主席和周恩来总理的争取下回到中国。

4-4 碰 撞

碰撞 两物体互相接触时间极短而作用力较大的相互作用． $\because \vec{F}^{\mathrm{ex}} << \vec{F}^{\mathrm{in}} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$

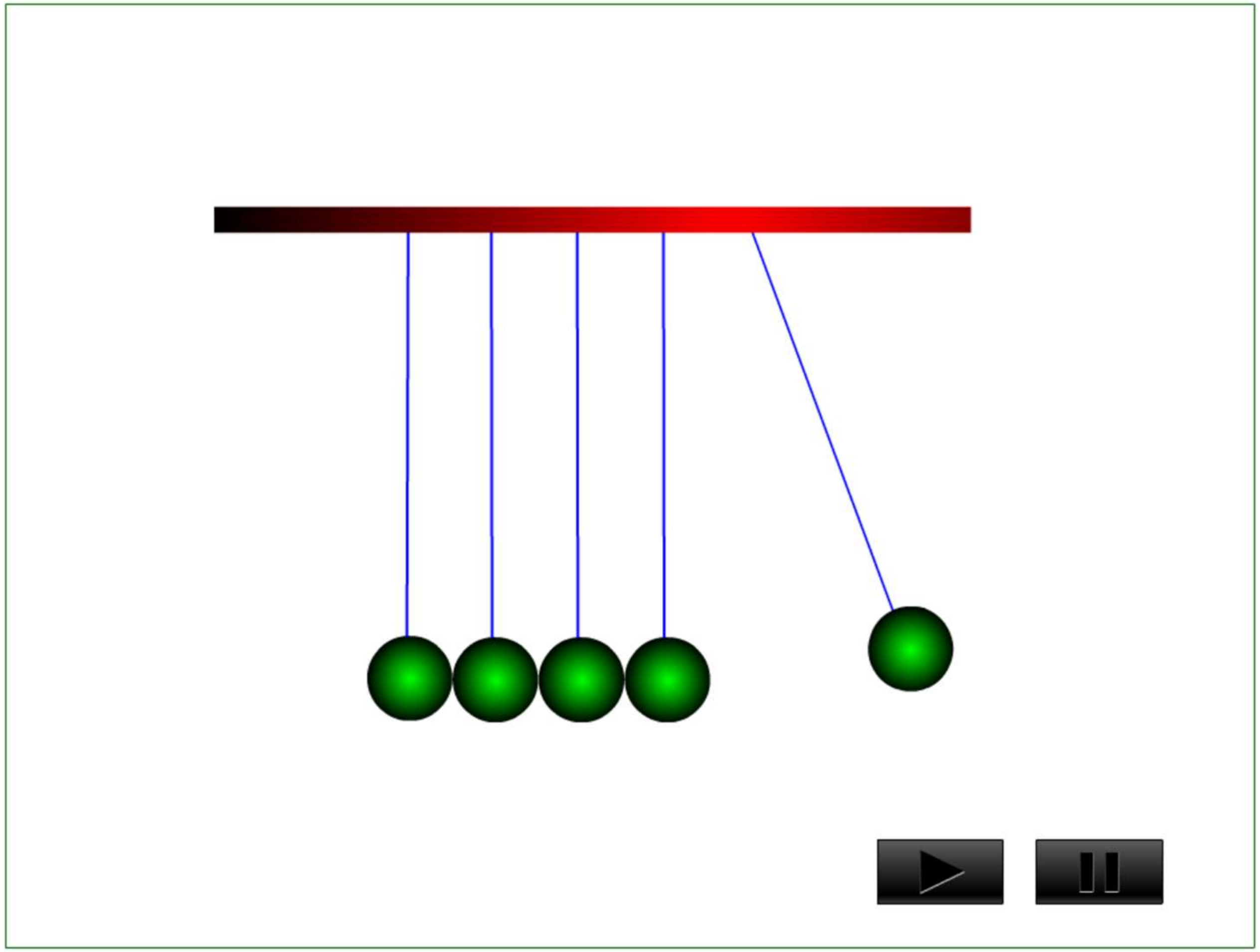
完全弹性碰撞 两物体碰撞之后，它们的动能之和不变．

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = C$$

非弹性碰撞 由于非保守力的作用，两物体碰撞后，使机械能转换为热能、声能，化学能等其他形式的能量．

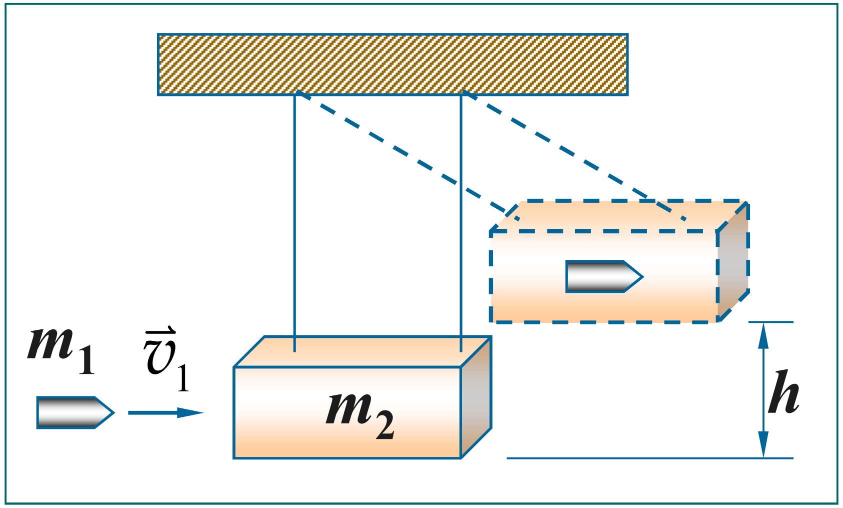
完全非弹性碰撞 两物体碰撞后,以同一速度运动．

完全弹性碰撞



（五个小球质量全同）

例1　冲击摆是一种测定子弹速率的装置．木块的质量为 $\boldsymbol{m_2}$，被悬挂在细绳的下端．有一质量为 $\boldsymbol{m_1}$ 的子弹以速率 $\boldsymbol{v_1}$ 沿水平方向射入木块中后，子弹与木块将一起摆至高度为 $\boldsymbol{h}$ 处．试求此子弹射入木块前的速率．



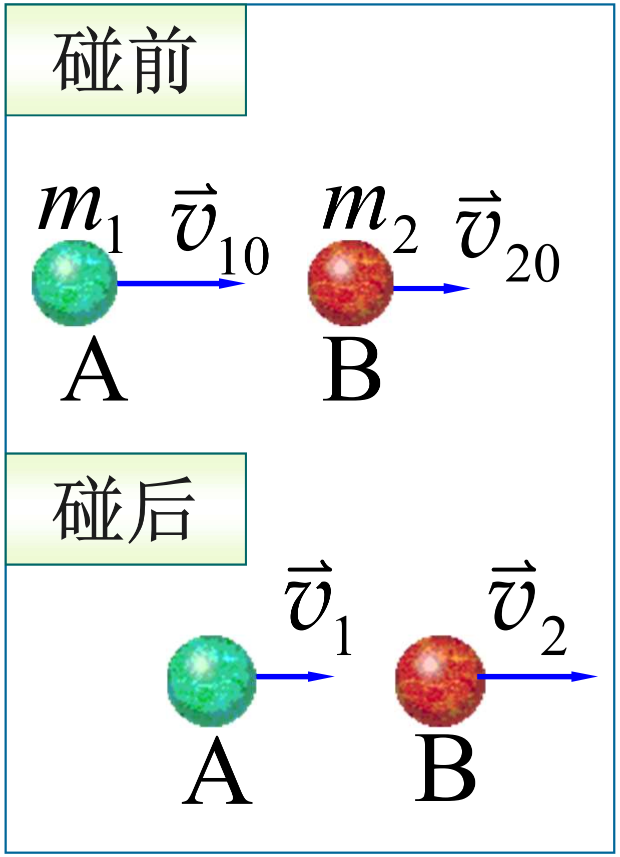
解　第一过程子弹与木块碰撞动量守恒

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

第二过程子弹、木块一块运动机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = (m_1 + m_2) gh \qquad v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}(2gh)^{1/2}$$

例 2 设有两个质量分别为 m_1 和 m_2，速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$ 的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同. 若碰撞是完全弹性的, 求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$.



解 取速度方向为正向，由动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

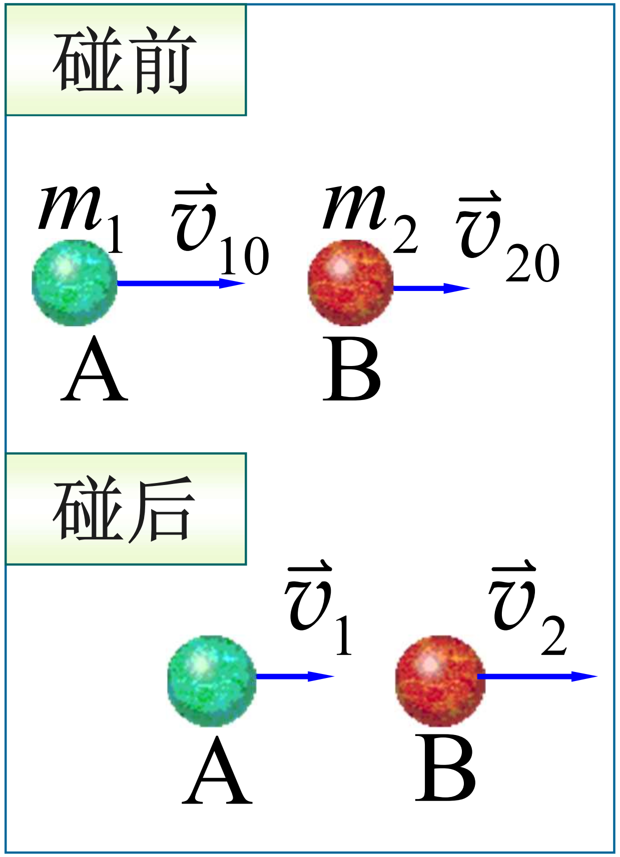
$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})$$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20})$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$



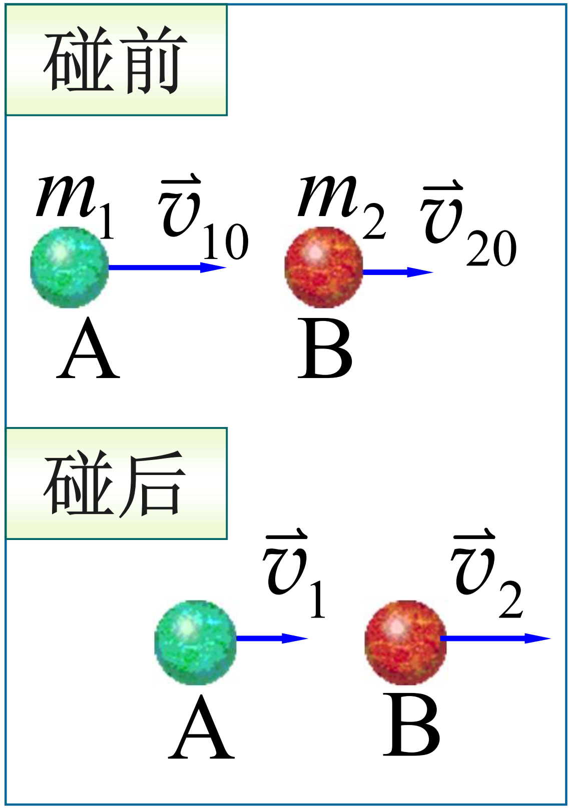
$$m_1(v_{10}^2-v_1^2)=m_2(v_2^2-v_{20}^2)$$

解得

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2},\quad v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2}$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$



讨 论

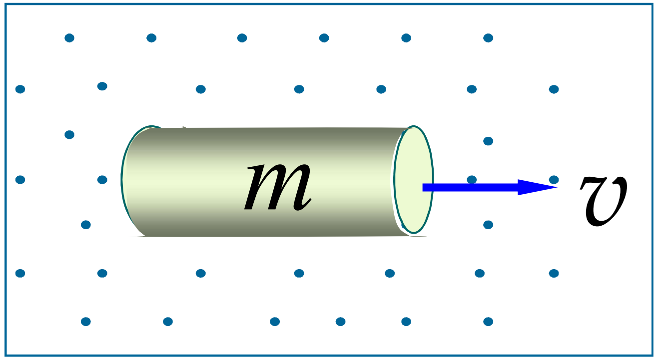
（**1**）若 $m_1 = m_2$ 则 $v_1 = v_{20}$ ，$v_2 = v_{10}$

（**2**）若 $m_2 >> m_1$ 且 $v_{20} = 0$ 则 $v_1 \approx -v_{10}$ ，$v_2 \approx 0$

（**3**）若 $m_2 << m_1$ 且 $v_{20} = 0$ 则 $v_1 \approx v_{10}$ ，$v_2 \approx 2v_{10}$

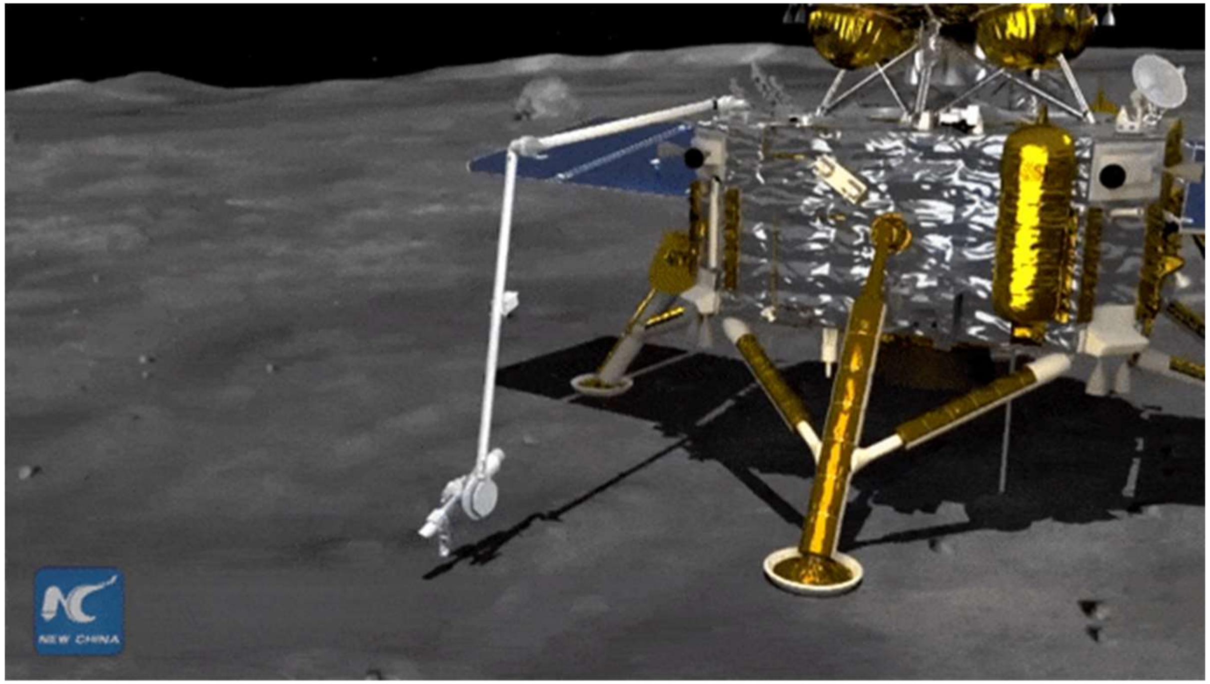
例 3 在宇宙中有密度为 ρ 的尘埃，这些尘埃相对惯性参考系是静止的. 有一质量为 $\boldsymbol{m_0}$ 的航天器以 初速 $\boldsymbol{v_0}$ 穿过宇宙尘埃， 由于尘埃粘贴到航天器上， 致使航天器的速度发生改变. 求航天器的速度与其在尘埃中飞 行时间的关系 .（设想航天器的外形是面积为 $\boldsymbol{S}$ 的圆柱体）

解： 尘埃与航天器作完全非弹性碰撞， 则动量守恒 . $m_0 v_0 = mv$



$$\mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v = \rho S v \mathrm{d}t$$

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \therefore v = \left(\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}\right)^{1/2} v_0$$



2020年12月中国发射的“嫦娥五号” 月球探测器收集月表土壤的想象图

4-5 质心 质心运动定律

一 质心

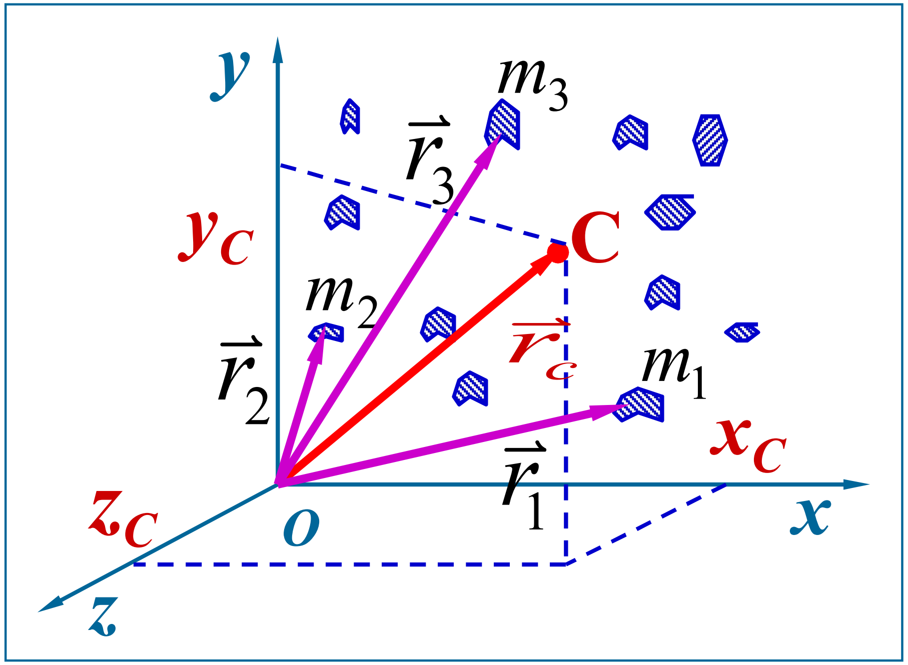
手榴弹质心（红点）的运动轨迹是抛物线

- 其余质点的运动 质心的平动 + 绕质心的转动

只有外力才能改变质心的运动状态。质点系的内力不能改变质心的运动状态。

1　质心的概念

质心可看作整个质点系的代表点，系统的全部质量 m，动量 $\vec{p}$ 都集中在它上面.



2　质心的位置

有 n 个质点组成的质点系，其质心的位置：

$$\vec{r}_C=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots\ldots+m_i\vec{r}_i+\ldots\ldots}{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_i+\ldots\ldots}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m}$$

- 对质量离散分布的体系：

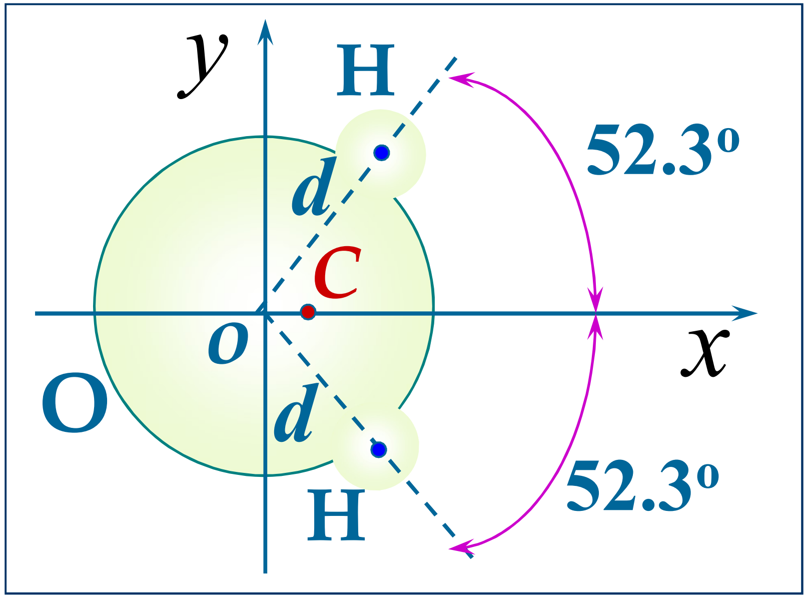
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

- 对质量连续分布的物体：

$$x_C = \frac{1}{m}\int x\mathrm{d}m \qquad y_C = \frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m \qquad z_C = \frac{1}{m}\int z\mathrm{d}m$$

说明　对密度均匀、形状对称的物体，其质心在其几何中心.

例1 水分子 H_2O 的结构如图. 每个氢原子和氧原子之间距离均为 $d = 1.0\times10^{-10}$ m, 氢原子 和氧原子 两条连线间的夹角为$\theta = 104.6^\circ$. 求水分子的质心.

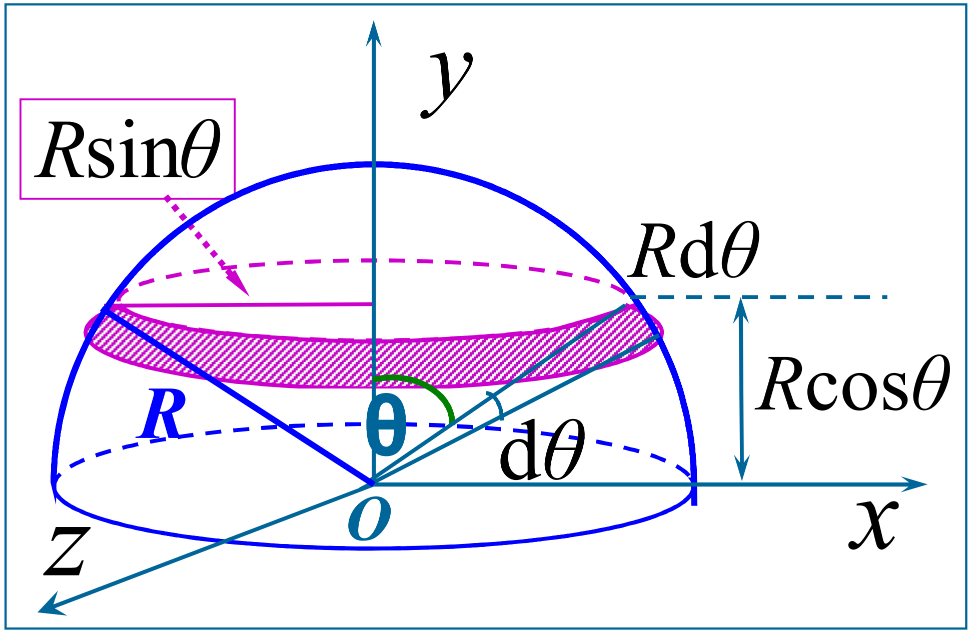


解: 由于氢原子对 x 轴对称, 故 $y_C = 0$.

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_H d \sin 37.7^\circ + m_O \times 0 + m_H d \sin 37.7^\circ}{m_H + m_O + m_H}$$

代入数据 $x_C = 6.8\times10^{-12}$ m $\qquad \vec{r}_C = 6.8\times10^{-12}\,\mathrm{m}\,\vec{i}$

例2 求半径为 $\boldsymbol{R}$ 的匀质半薄球壳的质心.



解 在半球壳上取一圆环，其质量

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}s = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

由于球壳关于 $\boldsymbol{y}$ 轴对称，故 $\boldsymbol{x_C = z_C = 0}$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m = \frac{\int R\cos\theta\cdot\sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

$$\boldsymbol{y_C} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}R \qquad \vec{r}_C = \frac{R}{2}\vec{j}$$

二　质心运动定律

$$m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

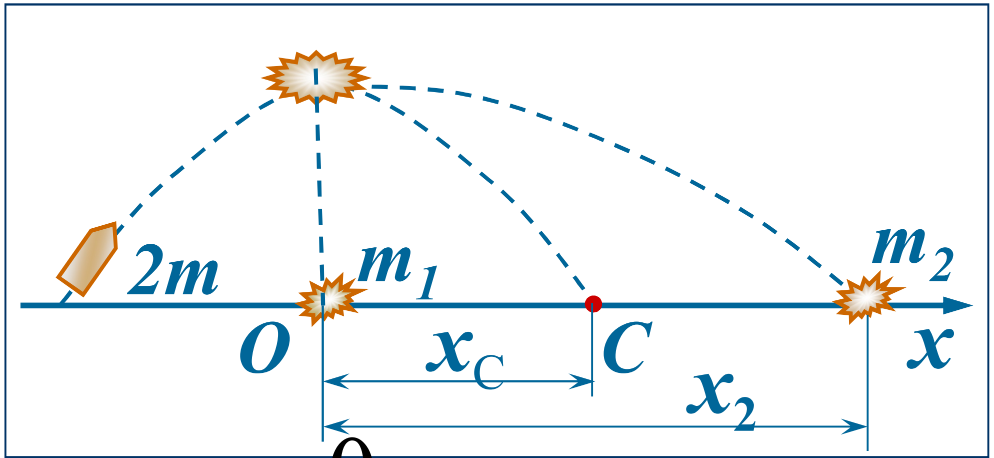
➢　系统内各质点的动量的矢量和等于系统质心的速度乘以系统的质量

质点系内 $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{in} = 0$

$$\boxed{\vec{F}^{ex} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C}$$

➢　**质心运动定律：**作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度

例3　设有一质量为 **2*m*** 的弹丸,从地面斜抛出去,它的落地点为x_c .如它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个竖直自由下落, 另一个水平抛出, 它们同时落地．试问第二个碎片落地点在何处?



解　选弹丸为一系统,爆炸前、后质心运动轨迹不变. 建立坐标系,

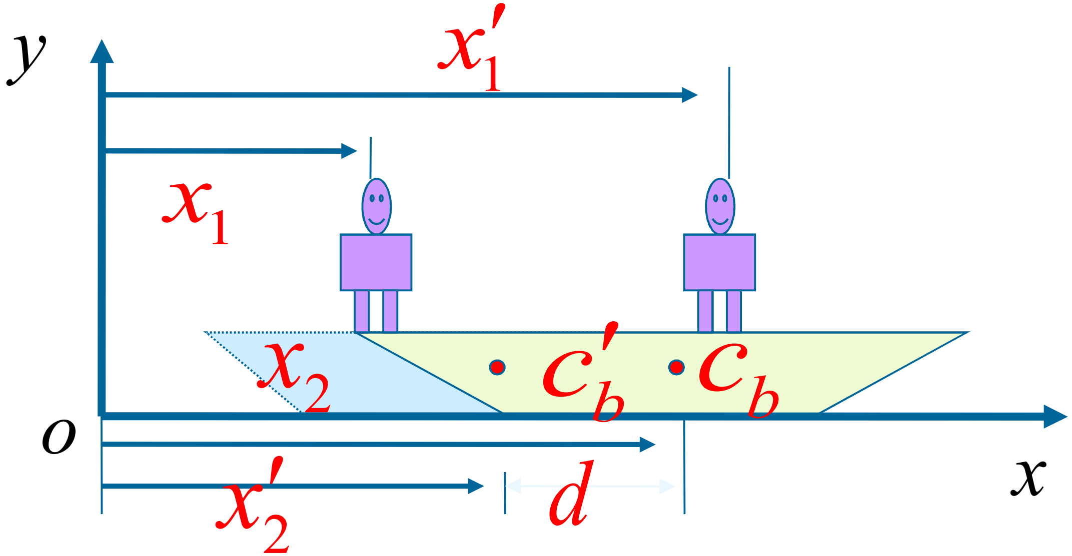
$$m_1 = m_2 = m \qquad x_1 = 0$$

已知弹丸落地时质心离原点的距离为 x_C

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad x_2 = 2x_C$$

例4　一质量m_1=50kg人站在一条质量为m_2=200kg，长度l=4m的船的船头上。开始时船静止，试求当人走到船尾时船移动的距离。（假定水的阻力不计。）

解：　设 c_b表示船本身的质心



当人站在船的左端时

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

当人站在船的右端时

$$x_c' = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m_1 + m_2}$$

$$x_c = x_c'$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2'$$

$$m_1(x_1' - x_1) = m_2(x_2 - x_2')$$

$$d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l = 0.8(m)$$