第五节
函数幂级数展开式的应用

一、近似计算
二、计算定积分
三、Euler公式

一、近似计算

$$\because \quad A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$\therefore \quad A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

误差 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$

两类问题:

1.给定项数,求近似值并估计精度;

2.给出精度,确定项数.

关键:通过估计<u>余项,</u>确定精度或项数.

常用方法:

1.若余项是交错级数,则可用余和的首项来解决;

2.若不是交错级数,则放大余和中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

例1 计算e的近似值,使其误差不超过10^{-5}.

解 $$\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

令 $x = 1$, 得 $$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

余和:

$$r_n \approx \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots) = \frac{1}{n \cdot n!}$$

欲使 $r_n \leq 10^{-5}$, 只要 $\dfrac{1}{n \cdot n!} \leq 10^{-5}$,

即 $n \cdot n! \geq 10^5$, 而 $8 \cdot 8! = 322560 > 10^5$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828$$

例2　利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$计算$\sin 9^0$的近似值，并估计误差.

解　$$\sin 9^0 = \sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3,$$

$$|r_2| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{300000} < 10^{-5},$$

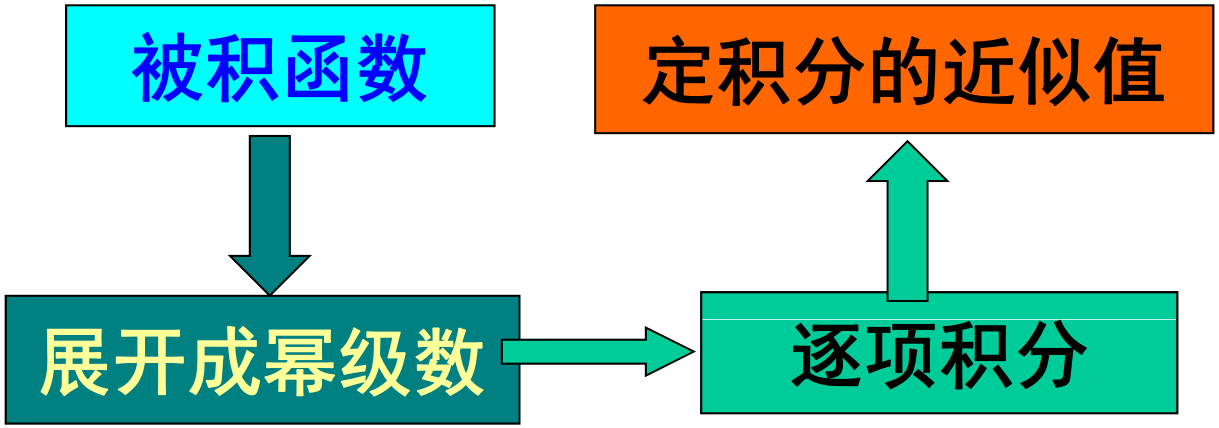
$$\therefore \sin 9^0 \approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

其误差不超过10^{-5}.

二、计算定积分

例如函数 e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1}{\ln x}$, 原函数不能用初等函数表示, 难以计算其定积分.

解法



例3 计算$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$的近似值，精确到$10^{-4}$.

解 $\because \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{3000} < 10^{-4}$,

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461$$

三、Euler公式

复数项级数:

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots + (u_n + iv_n) + \cdots$$

其中$u_n, v_n (n = 1,2,3,\cdots)$为实常数或实函数.

若$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n)$收敛，且其和为 $u + iv$.

复数项级数绝对收敛的概念

若 $\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots$ 收敛，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，称复数项级数绝对收敛.

三个基本展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

由e^x的幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$ 把x用ix代替

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)}_{\cos x}$$

$$+ i\underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)}_{\sin x}$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

$$\because \underline{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

$$\text{又} \because e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\therefore \underline{\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}}$$

欧拉公式

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

揭示了三角函数和复变量指数函数之间的一种关系.

对于 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，若令 $x=\pi$，即得到著名的欧拉公式：$e^{i\pi}+1=0$.这个公式被认为是数学领域中最优美的结果之一，很多人认为它具有不亚于神的力量，因为它在一个简单的方程里，把算术基本常数（0和1），几何基本常数（π），分析常数（e）和复数（i）联系在一起。