上海大学 2012 ～2013 学年 秋 季学期试卷

成绩	

课程名：线性代数 A 卷参考答案 课程号：01014104 学分：3

应试人声明：

题号	一	二	三	四	五
得分					

得分	评卷人

一、选择题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

1. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维列向量。如果 $|A|=2$，则 $|\alpha_1,2\alpha_2+3\alpha_1+\alpha_3,-3\alpha_3|=$（ B ）

$\begin{pmatrix}1&3&0\\8&2&0\\&1&-3\end{pmatrix}$

(A) -36 (B) -12 (C) 12 (D) 36 .

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，则下列结论正确的是（ C ）

(A) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$；

(C) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(D) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

3. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的（C ）.

（A）充分必要条件； （B）必要而非充分条件；

（C）充分而非必要条件； （D）即非充分也非必要条件.

4. 设 α,β,γ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则该方程组的一个基础解系可以是（D）

(A) $\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma,\gamma$ (B) $\alpha-\beta,\alpha-\beta+\gamma,\gamma$

(C) $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma-\alpha$ (D) $\alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma$.

5. 设 A,B 分别为 $n\times m,m\times n$ 矩阵，如果 $AB=I_n$（I_n 表示 n 阶单位矩阵，下同），则下列结论正确的是（B）

(A) $BA=I_m$； (B) $r(A)=r(B)=n$； （C） $r(A)=r(B)=m$； (D) $r(A),r(B)>n$.

得分	评卷人

二、填空题：（每小题 3 分，5 题共 15 分）

$|A||B|$

6. 设 A,B,C 为 3 阶矩阵，且 $|A|=2,B=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}A&C\\0&B\end{vmatrix}=$ $\underline{-8}$ ；

7. 如果齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=\underline{-1}$；

8. 如果矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&3&2\\1&-4&k&1\\7&8&12&7\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则 $k\neq\underline{0}$；

9. 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$；

10. 设矩阵 A 与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\3&4&3\end{pmatrix}$ 相似，且 A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|=$ $\underline{216}$ 36.

得分	评卷人

三、是非题：（每小题 2 分，5 题共 10 分）

11. 矩阵乘法满足左、右消去律. √ （×）
12. 行列式值为零，则行列式列向量线性相关 √ （√）
13. n阶可逆矩阵的秩为 n . √ （√）
14. 矩阵$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$不可对角化 √ （√）
15. 设矩阵 A,B 满足 $AB=0$，则 A,B 中必有一个矩阵为零矩阵 × （×）

得分	评卷人

四、计算题：（本大题 5 题，共 53 分）

16. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $(A,I)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ （2 分）

作初等行变换，得

$$(A,I)\to\left(I,\begin{matrix}-2&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{matrix}\right)$$ （6 分）

所以 $A(0)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$ （2 分）

17. （8 分）求行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&1&3\\2&3&4&5\\4&5&6&7\end{vmatrix}$的第一行代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&3\\2&3&4&5\\4&5&6&7\end{vmatrix}=0$ （4 分+4 分）

18. （12 分）已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\2x_1+3x_2+4x_3-x_4=-1,\\ax_1+4x_2+5x_3+bx_4=-2.\end{cases}$$

有解，而且对应的齐次线性方程组有两个线性无关的解. 求 a,b 的值及方程组的通解。

解 如果系数矩阵 A 的秩 $r(A)>2$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 基础解系至多含有 4-3=1 个线性无关解，矛盾。所以 $r(A)=2$ （2 分）

由于方程组前两个方程系数不成比例，所以这两个方程无关，则第三个方程可由前两个方程表示，得

$$[a,4,5,b]=[2,3,4,-1]+[1,1,1,1]$$

即有 a=3, b=0. （2 分）

方程组系数矩阵行变换为（不要第三个方程）：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\2&3&4&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&2&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&4&-2\\0&1&2&-3&1\end{bmatrix}$$ （2 分+2 分）

基础解系为：

$\xi_1=(1,-2,1,0)^T,\xi_2=(-4,3,0,1)^T$， （2 分）

$\eta=(-2,1,0,0)^T$， （1 分）

通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$ （1 分）

19．（10 分）确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$，$\beta_2=(-2,a,4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

$=k\beta_1$

1, 1, -2　　-2, -2, 4　　-2 -2 -2

解 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 β_1,β_2,β_3 一定可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示（因为此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维空间的基），　　（3 分）

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，得

$$a=1, \text{或者 } a=-2 \qquad (3\text{ 分}).$$

如果 $a=-2$，可知 $\alpha_1=(1,4,0)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性无关，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示　　（2 分）

所以只有当 $a=1$ 时满足条件，可以验证此时结论成立。　　（2 分）

20．（13 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+5x_3^2$ 对应的实对称矩阵 A 的行列式值为 72.

(1) (4 分) 求二次型对应的实对称矩阵 A；

(2) (9 分) 求一个正交变换 X=PY 把二次型化为标准形。

解 (1) $A=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&a&1\\1&1&5\end{bmatrix}$　　（1 分）

因为 $|A|=72$，得 $a=4$，　　（2 分）

所以 $A=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&4&1\\1&1&5\end{bmatrix}$　　（1 分）

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-1\\0&\lambda-4&-1\\-1&-1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-6)$，所以特征值为 3，4，6　（3 分）

当 $\lambda=3$ 时，有特征向量 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$　　（2 分）

当 $\lambda=4$ 时，有特征向量 $\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$　　（1 分）

当 $\lambda=6$ 时，有特征向量 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$　　（2 分）

所以 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$　　（1 分）

得分	评卷人

五、证明题：（2 题，每题 6 分共 12 分）

21.（6 分）设 α 为 n 维实列向量，且 $\alpha^T\alpha=2$， 求证 $A=I-\alpha\alpha^T$ 为正交矩阵.

证 因为

$$AA^T=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)^T=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T) \qquad (2\text{ 分})$$

$$=I-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T \qquad (1\text{ 分})$$

$$=I-2\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T=I \qquad (2\text{ 分})$$

所以 A 为正交矩阵. （1 分）

22.（6 分）设 A 为复方阵，如果 $A=-\overline{A^T}$，则称 A 为反厄米特矩阵．求证反厄米特矩阵 A 的特征值都是纯虚数或者零.

证 设 $A\alpha=\lambda\alpha,\lambda\in C,\alpha\in C^n$，且非零，有

$$\overline{\alpha}^T A\alpha=\lambda\overline{\alpha}^T\alpha \qquad (2\text{ 分})$$

由于 $\overline{\alpha}^T A\alpha=(\overline{A^T\alpha})^T\alpha$，且 A 是反厄米特矩阵，所以

$$\overline{\alpha}^T A\alpha=(\overline{-A\alpha})^T\alpha=-\overline{\lambda\alpha}^T\alpha=-\overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha \qquad (2\text{ 分})$$

得 $(\overline{\lambda}+\lambda)\overline{\alpha}^T\alpha=0$，因为 $\alpha\neq0$，所以 $\overline{\alpha}^T\alpha\neq0$ （1 分）

有 $\overline{\lambda}=-\lambda$，即 λ 为纯虚数或者零，得证。 （1 分）