Fourier 级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

一、问题的提出

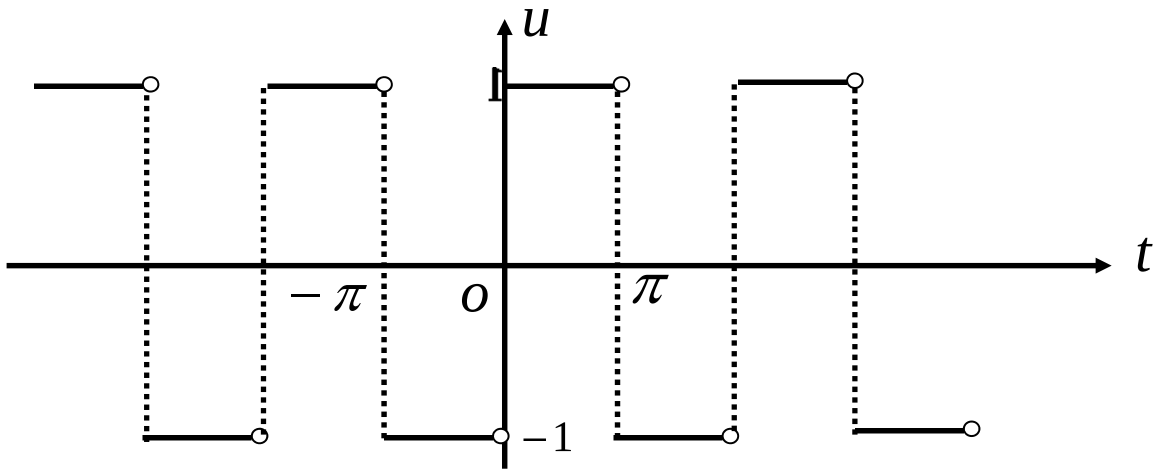
在自然科学与工程技术问题中，常会遇到周期现象具有周期现象的量，每经过时间 T 后所取的值就重复出现，这样的量在数学上可表示成时间 t 的周期函数 $f(t+T)=f(t)$

正弦函数是一类比较简单的周期函数，而且是应用十分广泛的一类周期函数。如在简谐振动和正弦电路电流分析中常遇到正弦型函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

但是在实际问题中，除了正弦函数外，还会遇到非正弦周期函数，它们反映了较复杂的周期运动。

非正弦型周期函数：巨形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & 当-\pi\le t<0\\ 1, & 当0\le t<\pi\end{cases}$



如何深入地研究非正弦型周期函数呢？联系到前面介绍过的用函数的幂级数展开式表示和讨论函数，我们也想将周期函数展开成简单的周期函数如正弦函数组成的级数.

以电路计算为例，往往将以 **T** 为周期的函数化成一系列不同频率的正弦量之和。

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

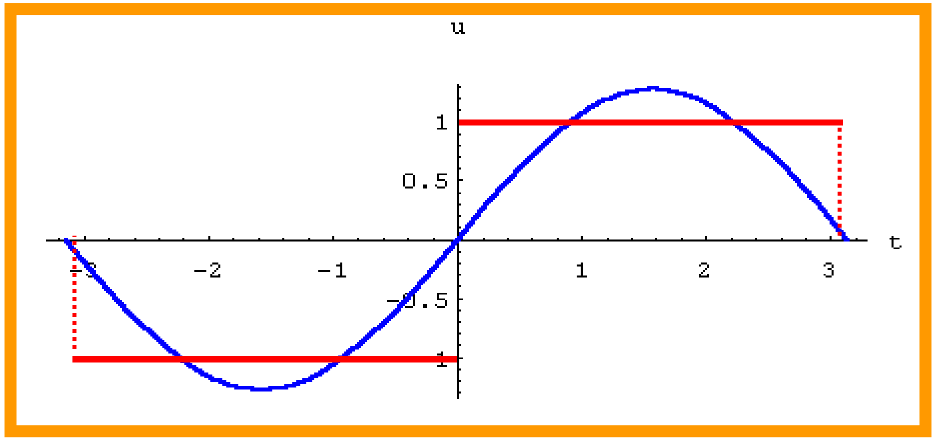
将周期函数按上述方式展开，其物理意义是很明确的，这就是把一个比较复杂的周期运动看成一系列不同频率的简谐振动的叠加.

物理学的实验已经表明：任何简单的周期性振动，都可以看成是由频率成整数倍的简谐振动合成的。从数学的角度来看，即一个复杂的周期函数可以被若干个简单的正弦或余弦函数来表示。

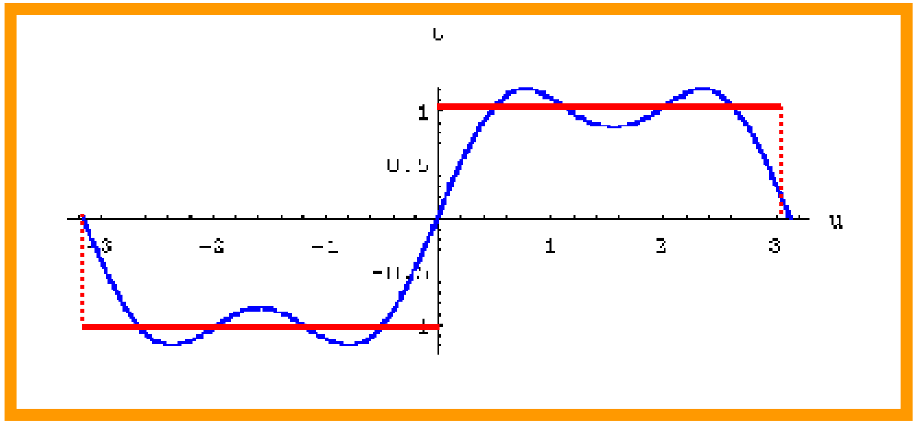
不同频率的正弦波逐个叠加

$$\frac{\pi}{4}\sin t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\ \cdots$$

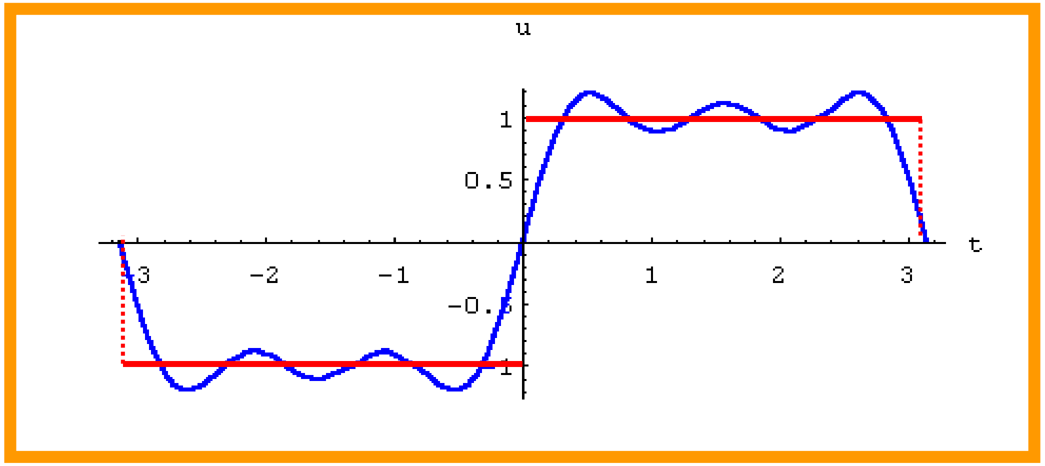
$$u=\frac{4}{\pi}\sin t$$



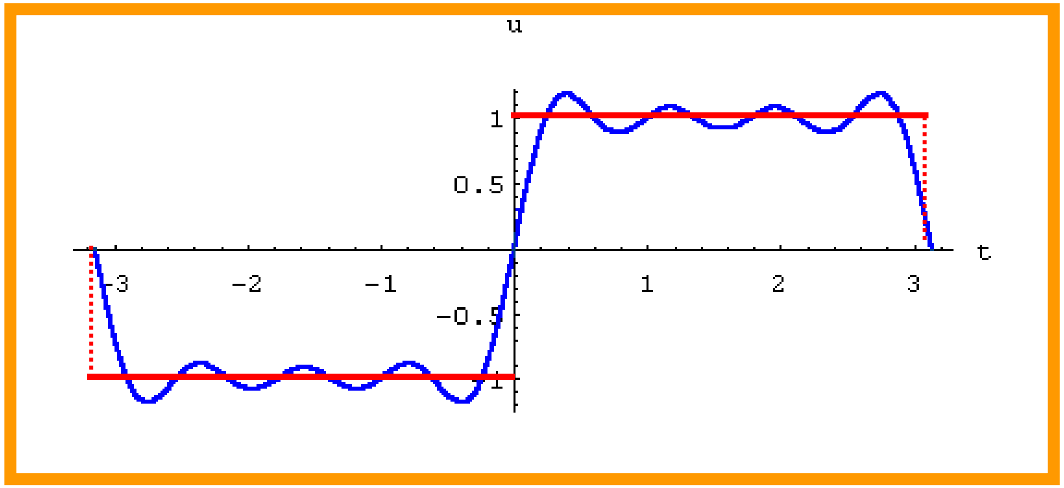
$$u=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t\right)$$



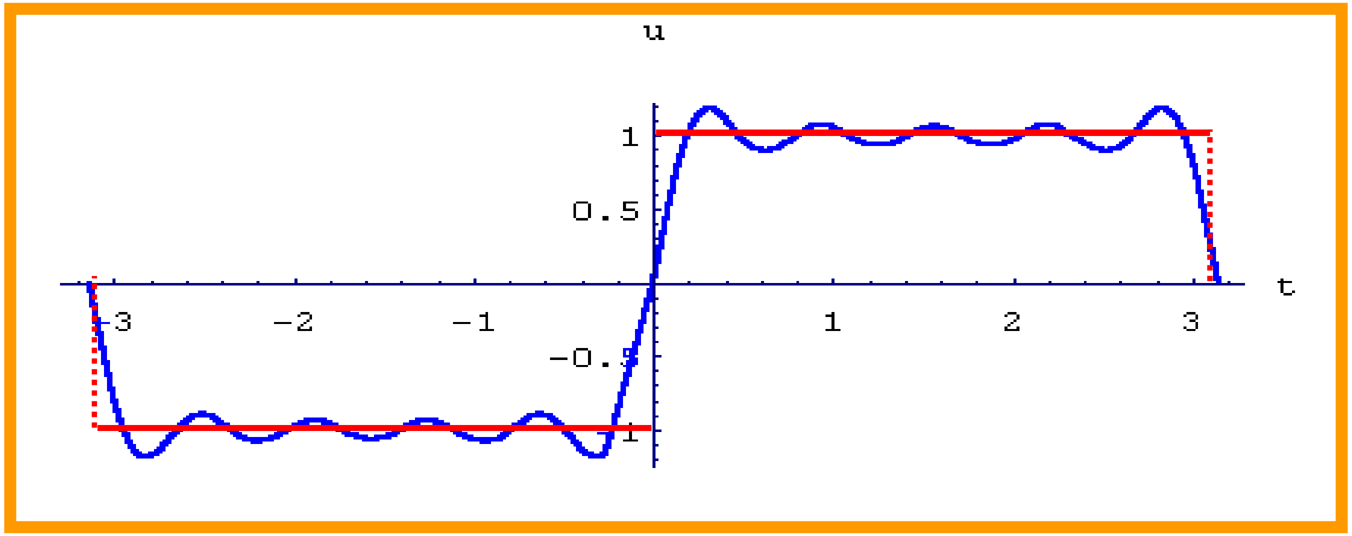
$$u = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t\right)$$



$$u = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t\right)$$



$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \cdots)$$

二、三角级数 三角函数系的正交性

1. 三角级数

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{谐波分析}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t)$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0$， $a_n = A_n \sin\varphi_n$， $b_n = A_n \cos\varphi_n$， $\omega t = x$，

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{三角级数}$$

2. 三角函数系的正交性

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

正交：任意两个不同函数在 $[-\pi, \pi]$上的积分等于零.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \boxed{\pi, \quad m = n} \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \boxed{\pi, \quad m = n} \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \quad (\text{其中} m, n = 1, 2, \cdots)$$

三、函数展开成傅里叶级数

问题：1.若能展开，a_i, b_i是什么？

2.展开的条件是什么？

1. 傅里叶系数

若有 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

(1) 求a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx dx \quad = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(2) 求a_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx]$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx \quad = a_n \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

(3) 求b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx dx] = b_n\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, & (n = \boxed{0},1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

问题:

$$f(x) \underline{\underline{\text{条件?}}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

以上我们是在$f(x)$可以展开成三角级数并可以逐项积分的前提下讨论问题的，下面我们撇开这个前提对一般的以2π为周期的函数 $f(x)$

只要公式中的积分都存在，就可以定出系数

$$a_n \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad b_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

并可唯一地写出 $f(x)$ 的 F ---级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

至于这个级数是否收敛，如收敛是否收敛到$f(x)$的问题，有以下定理：

2. 狄利克雷(Dirichlet)充分条件(收敛定理)

设 $f(x)$是以2π为周期的周期函数. 如果它满足条件:在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点并且至多只有有限个极值点, 则 $f(x)$的傅里叶级数收敛, 并且

(1) 当x是$f(x)$的连续点时, 级数收敛于$f(x)$;

(2) 当x是$f(x)$的$\boxed{\text{间断点}}$时, 收敛于$\boxed{\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}}$;

(3) 当x为端点$x=\pm\pi$时, 收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

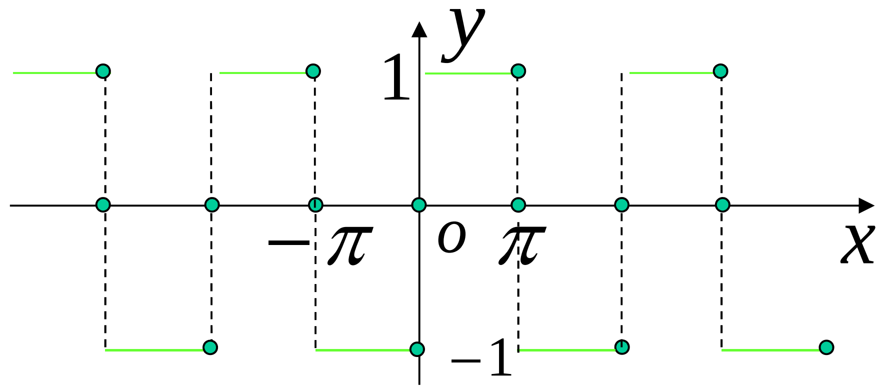
傅里叶的工作标志着人们从函数可展开为泰勒级数的函数中解放出来，一个傅里叶级数在一段区间上表示一个函数，而一个泰勒级数仅仅在函数是解析的点附近表示一个函数。

人们乐于采用三角级数来表示函数的主要原因在于：与函数展开为幂级数首先要求该函数具有任意阶导数的条件相比，函数展开为傅里叶级数的条件是很弱的，并且敛散性的确定十分简便；此外，如果研究的是一个周期函数，那么用一个各项仍具有周期性的三角级数来表示，显然要比各项都是幂函数的幂级数表示更方便一些。

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

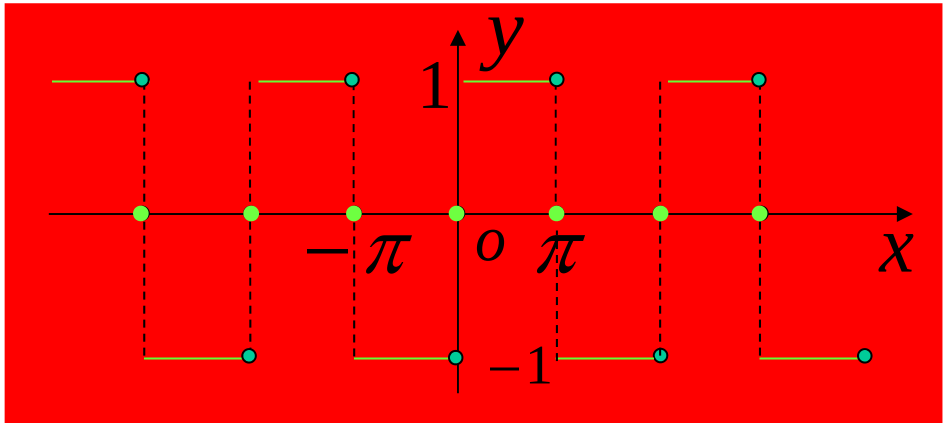
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\underline{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

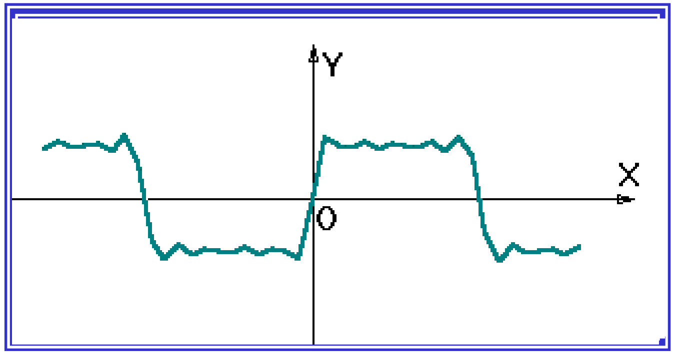


说明:

1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

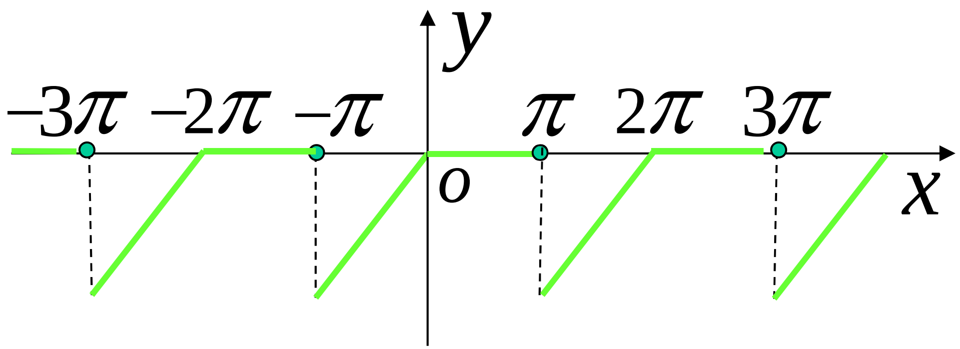


2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ **时, 级数收敛于** $\dfrac{0+(-\pi)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

定义在$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$的傅氏级数展开法

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

$\Big\downarrow$ 周期延拓

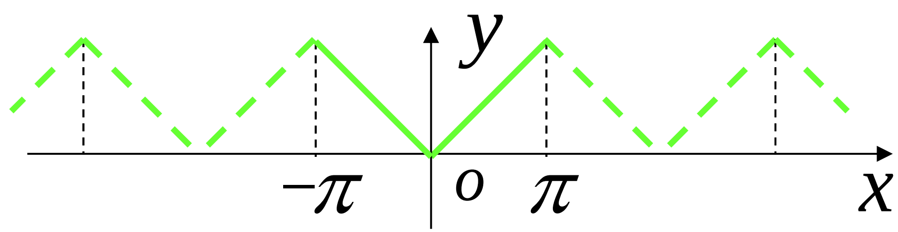
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x-2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ **展成傅里叶级数 .**

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $\boxed{F(x)}$,则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\boxed{F(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\boxed{F(x)}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0 \quad , & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boxed{F(x)} \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots \right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

说明：利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$\because \boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma}{4}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$, $\therefore \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3}$

又 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

展开步骤

①验证 $f(x)$ 满足 **Dirichlet** 条件，并确定$f(x)$的所有间断点，可作图，结合图形进行分析、判断

②根据公式计算**Fourier**系数

③写出**Fourier** 级数展开式，并注明展开式的成立范围

注 求**Fourier**系数一般要用分部积分法，有时甚至要多次分部积分，较麻烦且容易出错，此外，某些a_n，b_n 需要单独计算，容易忽略而导致错误

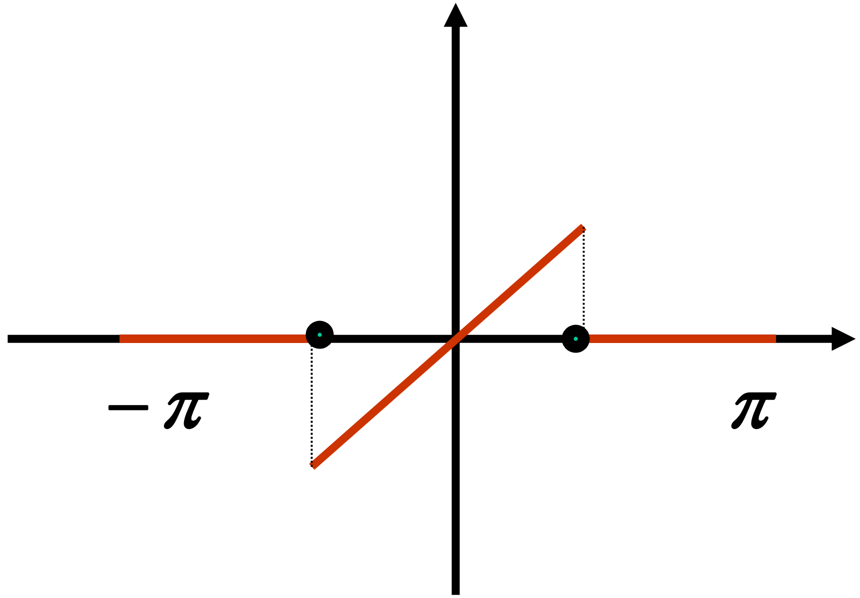
例4　设$s(x)$是以2π为周期的函数$f(x)$的$F-$级数的和函数

$f(x)$在一个周期内的表达式为: $f(x)=\begin{cases}0 & 2<|x|\le\pi \\ x & |x|\le 2\end{cases}$

写出$s(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式

解　$f(x)$如右图所示

满足收敛定理的条件



$$s(x)=\begin{cases} 0 & 2<|x|\le\pi \\ x & |x|<2 \\ \boxed{-1} & \boxed{x=-2} \\ \boxed{1} & \boxed{x=2} \end{cases}$$

例5　$s(x)$是以2π为周期的函数,

$$f(x)=\begin{cases}\pi x+x^2 & -\pi\le x<0\\ \pi x-x^2 & 0\le x<\pi\end{cases}$$

试求其Fourier级数的和函数

$s(x)$在 $x=\pi,\dfrac{3\pi}{2},-10$各点处的值

解　$s(x)$是以 2π为周期的函数

$f(x)$在整个数轴上连续，

其Fourier级数处处收敛于$f(x)$本身。

$$s(\pi)=0$$

$$s(\frac{3\pi}{2})=s(2\pi-\frac{\pi}{2}) \quad =s(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi^2}{4}$$

$$s(-10)=s(4\pi-10) \quad =(4\pi-10)\cdot(10-3\pi)$$