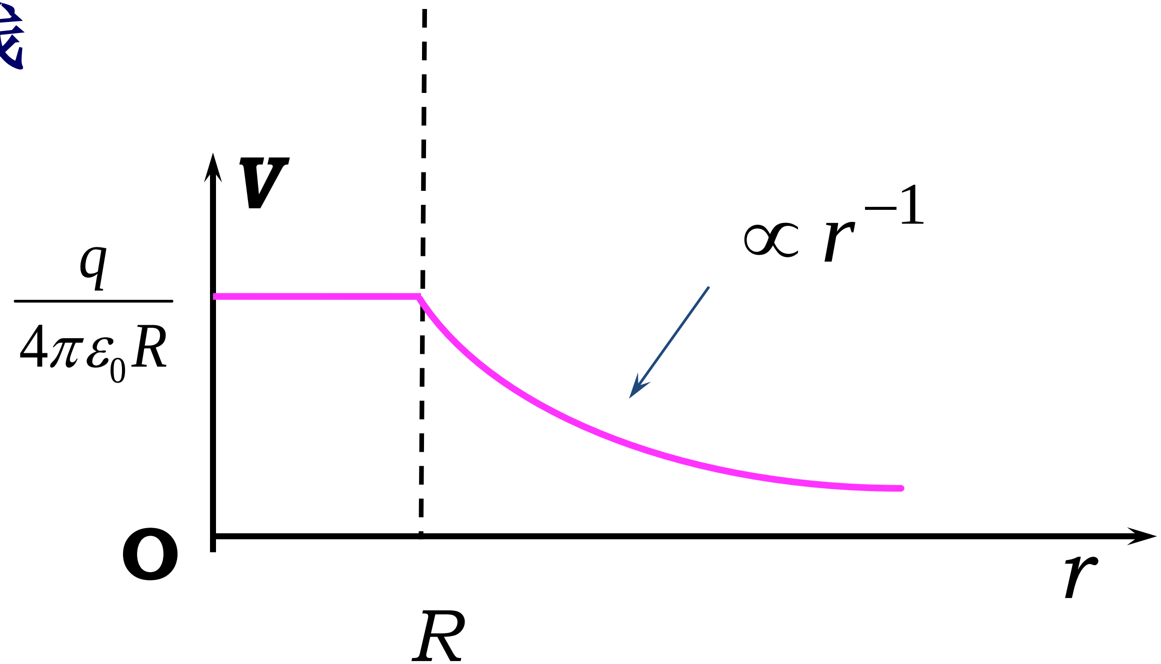
电势分布曲线

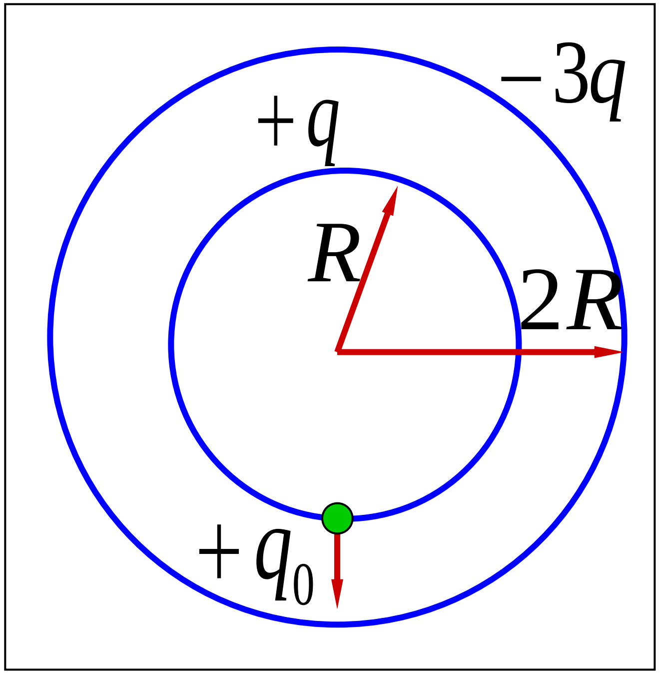


结论： 均匀带电球面，球内的电势等于球表面的电势，球外的电势等效于将电荷集中于球心的点电荷的电势。

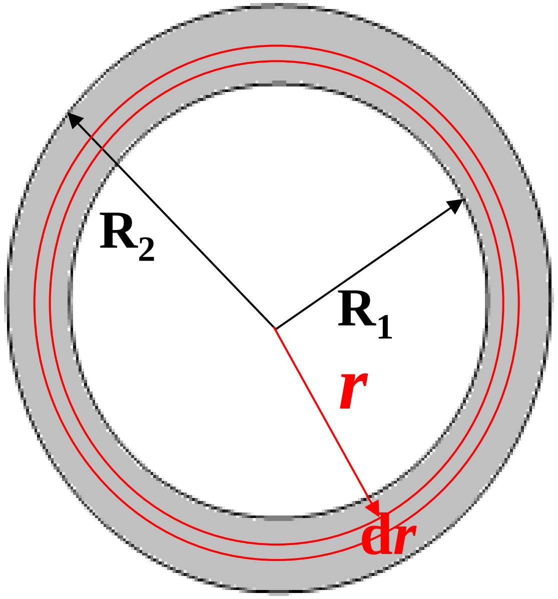
4　在真空中半径分别为R和$2R$的两个同心球面，其上分别均匀地带有电量$+q$和$-3q$. 今将一电量为$+q_0$的带电粒子从内球面处由静止释放，则粒子到达外球面时的动能为：（ ）

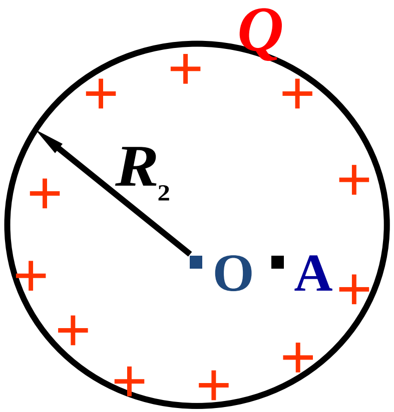
(1) $\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R}$　(2) $\dfrac{q_0 q}{2\pi\varepsilon_0 R}$

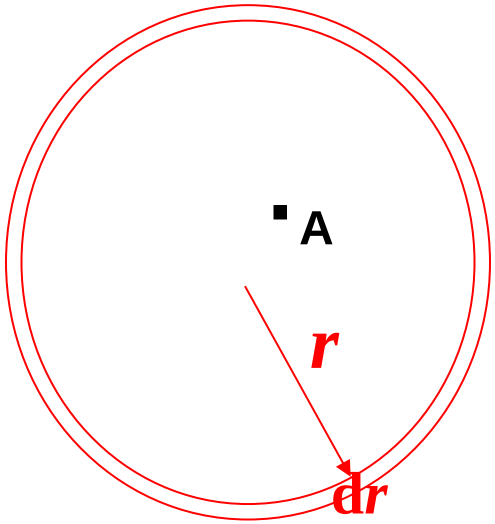
★(3) $\dfrac{q_0 q}{8\pi\varepsilon_0 R}$　(4) $\dfrac{3q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 R}$



变题3、 有厚度均匀带电球面的电势分布，电荷体密度为ρ，球壳内表面半径为R_1，外表面半径为R_2。设无穷远为电势零点，求空腔内任一点的电势。







$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

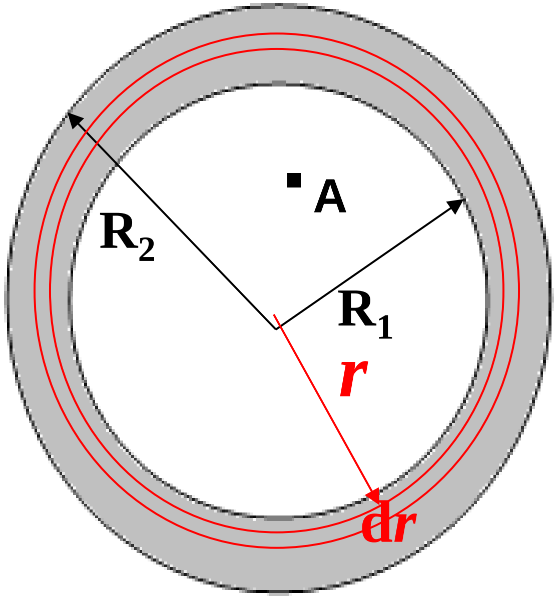
$$=\frac{\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int \mathrm{d}V$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

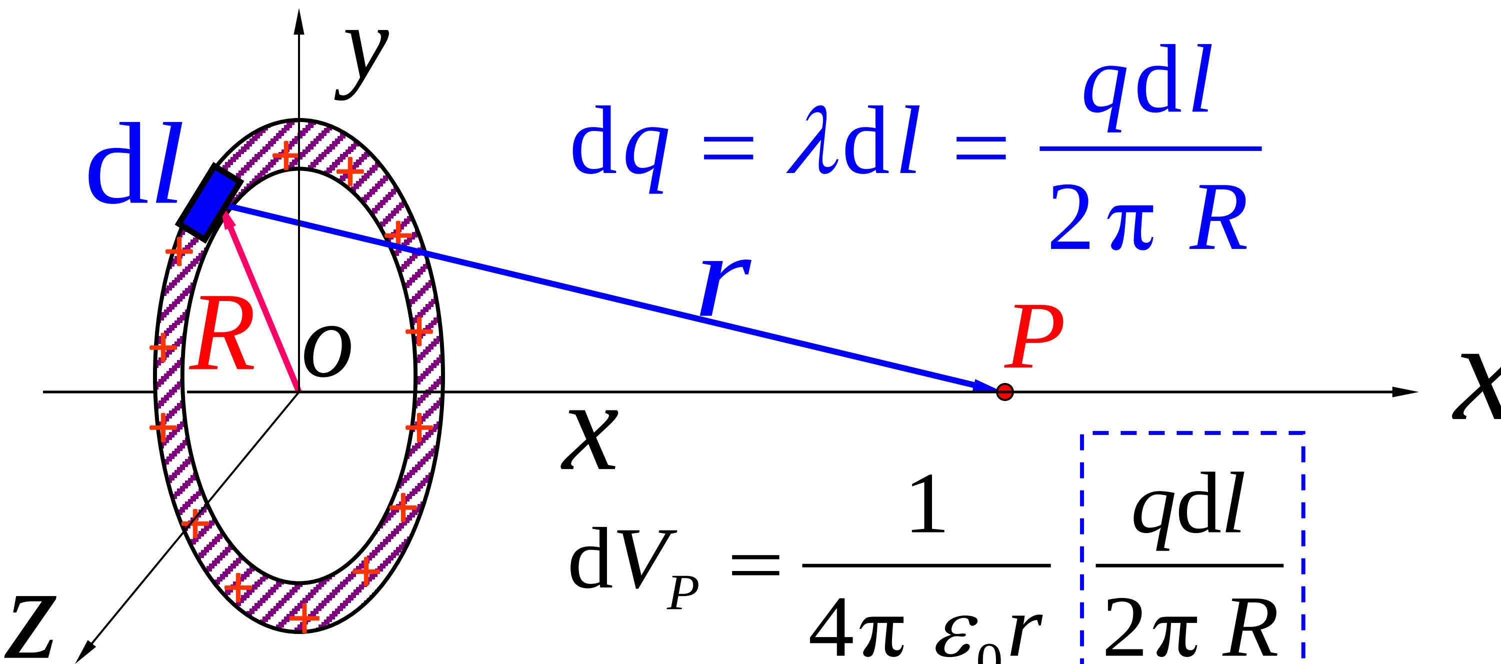
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho r \mathrm{d}r}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$



利用 $V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 求电势

例2 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势.



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$$

$$\mathrm{d}V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \boxed{\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}}$$

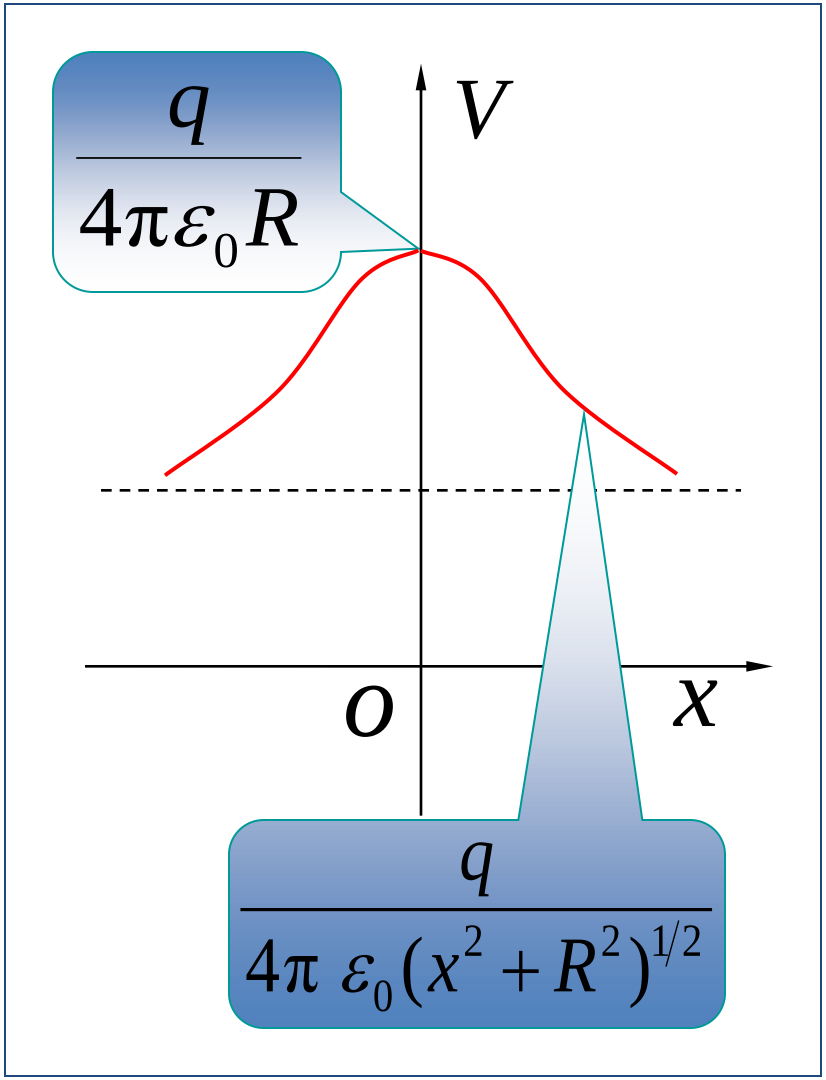
$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

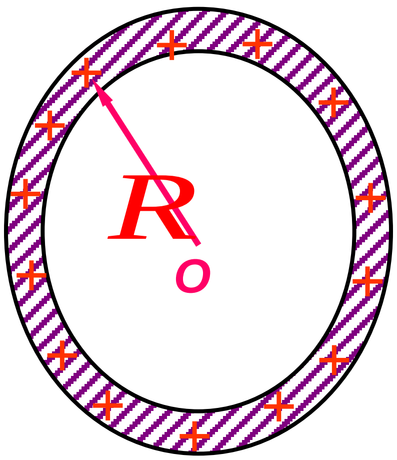
$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

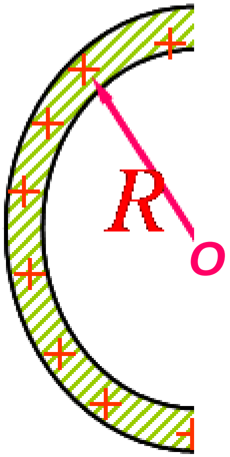
讨 论

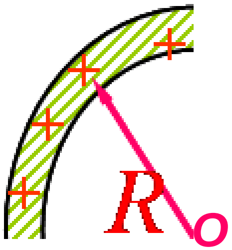
$$x = 0, \quad V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$x >> R, \quad V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$





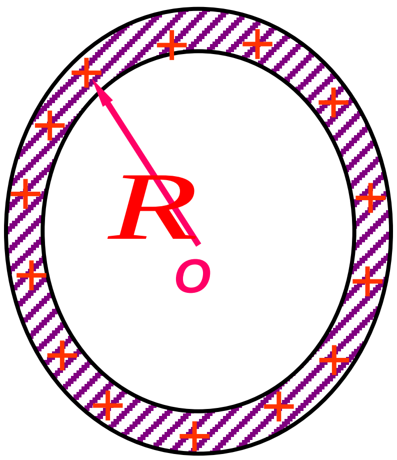


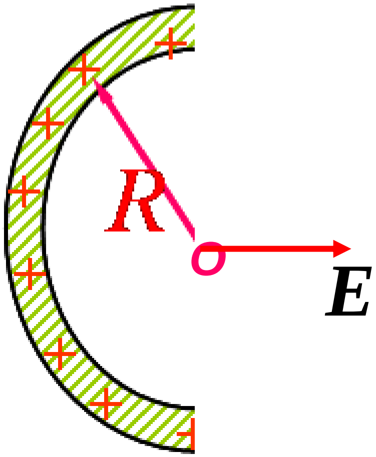


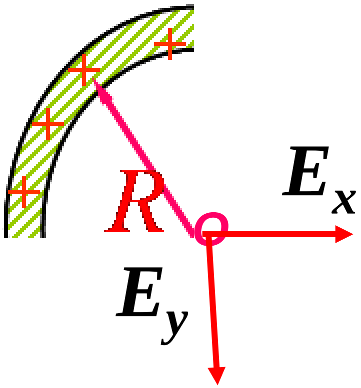
$$V_O = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

$$V_O = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

$$V_O = \frac{\lambda}{8\varepsilon_0}$$







$$E_O = 0$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$$

随堂小议

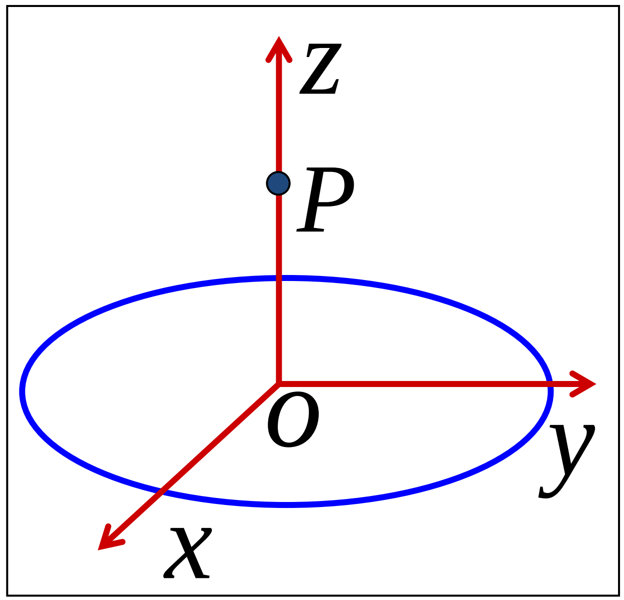
有 N 个电荷均为 q 的点电荷，以两种方式分布在相同半径的圆周上：一种时无规则地分布，另一种是均匀分布. 比较这两种情况下在过圆心 O 并垂直于平面的 z 轴上任一点 P（如图所示）的场强与电势, 则有（）

(1) 场强相等，电势相等.

(2) 场强不等，电势不等.

★(3) 场强分量 E_z 相等，电势相等.

(4) 场强分量 E_z 相等，电势不等.



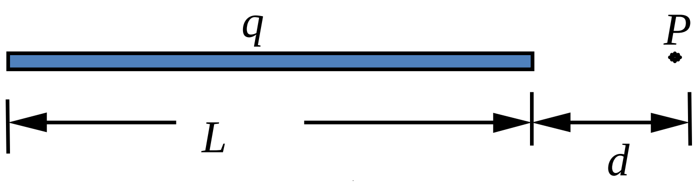
例题3 长为L的均匀带电细直杆，总电荷为q，在直杆延长线上距杆的一端距离为d的P点的电势

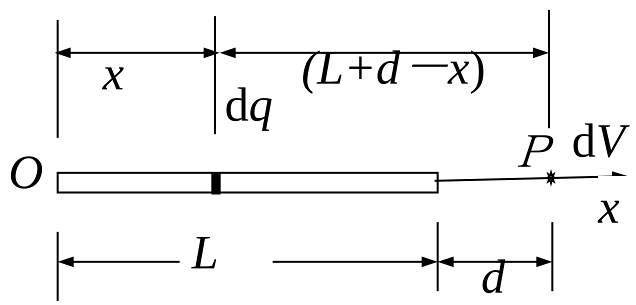
$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(L+d-x)}$$

$$=\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(L+d-x)}$$

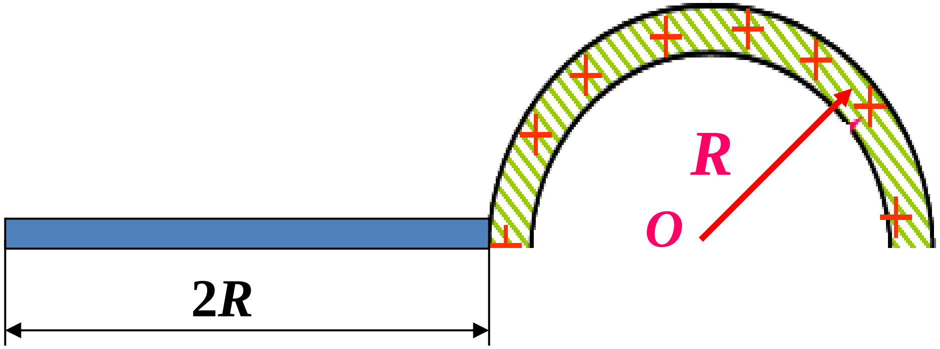
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{(L+d-x)}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{(L+d)}{d}$$





变题 均匀带电细直杆和半圆环，电荷线密度均为 λ，求半圆环中心处的电势



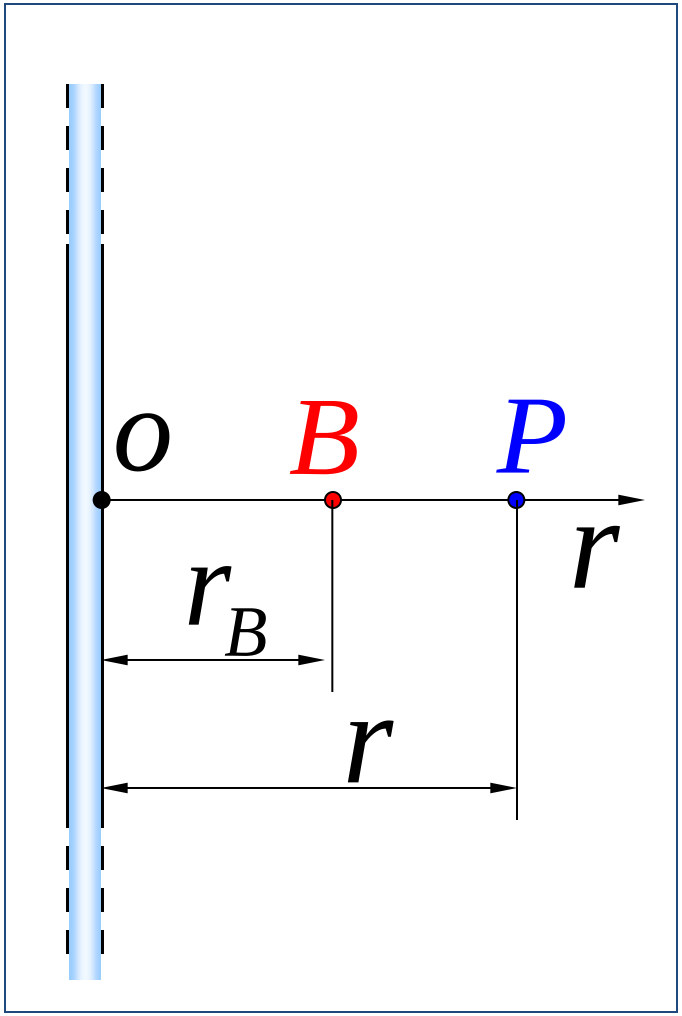
$$V_O = V_{直} + V_{半} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3 + \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

例4 “无限长”带电直导线的电势

解 令 $V_B = 0$

$$V_P = \int_r^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_B}{r}$$

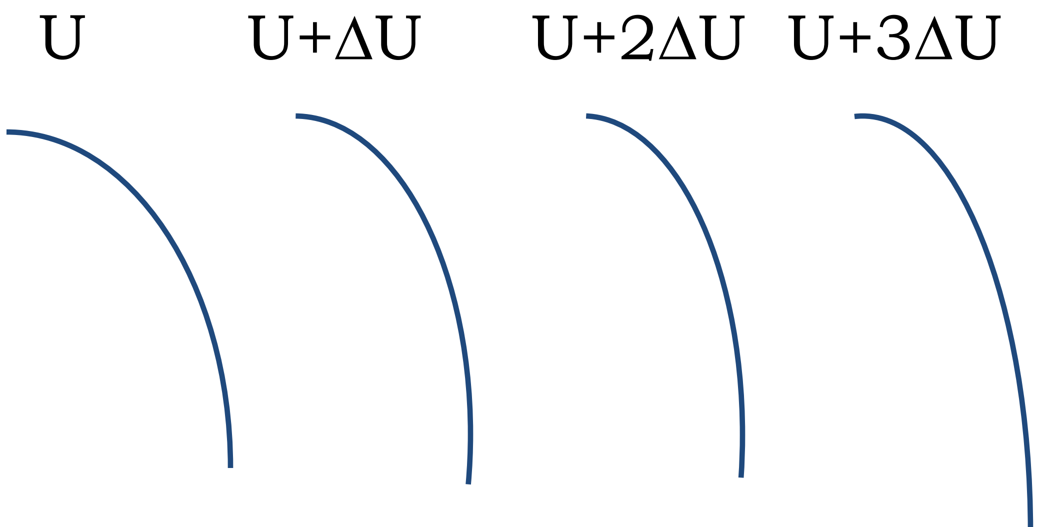


问：能否选 $V_\infty = 0$ ？

§8.10 等势面与电势梯度

一　等势面（电势图示法）

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面．为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等.



等势面与电场线的关系

- 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力做功

$$W_{ab}=q_0(V_a-V_b)=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

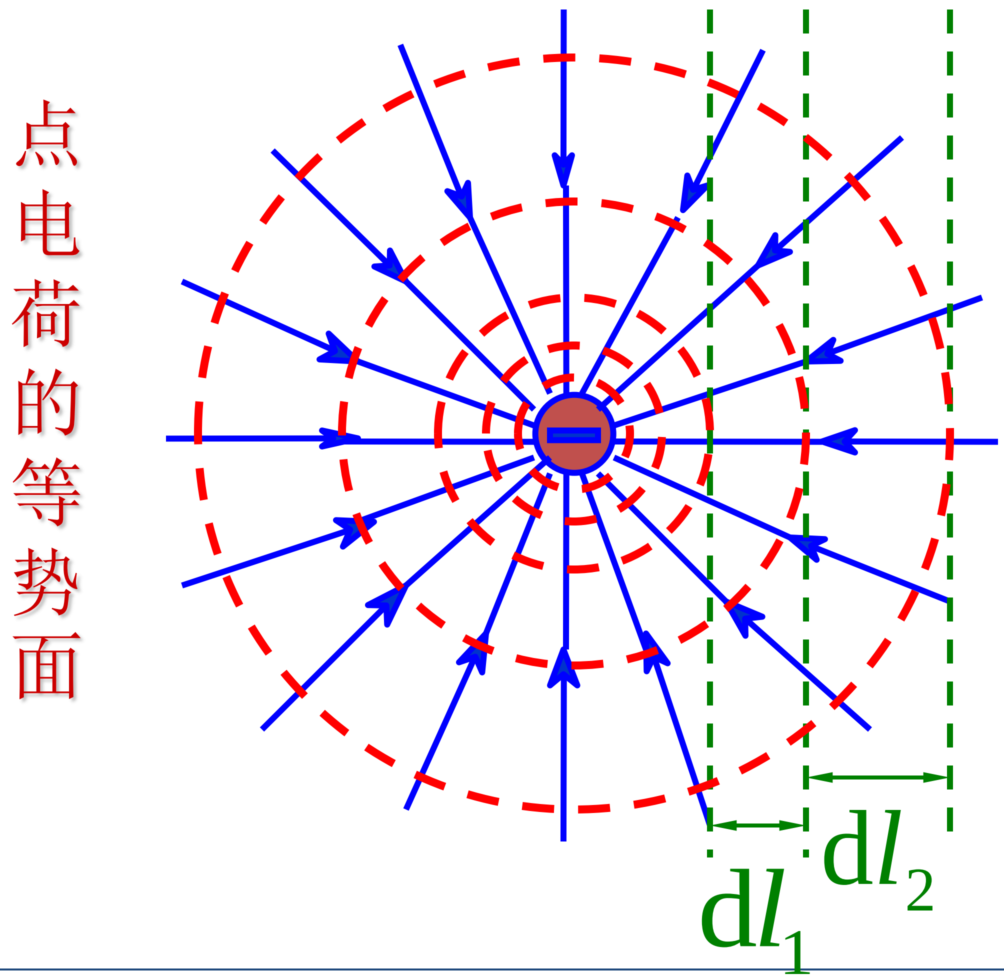
- 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇.

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$q_0\neq 0 \quad \vec{E}\neq 0 \quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

$$\therefore \quad \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{l}$$

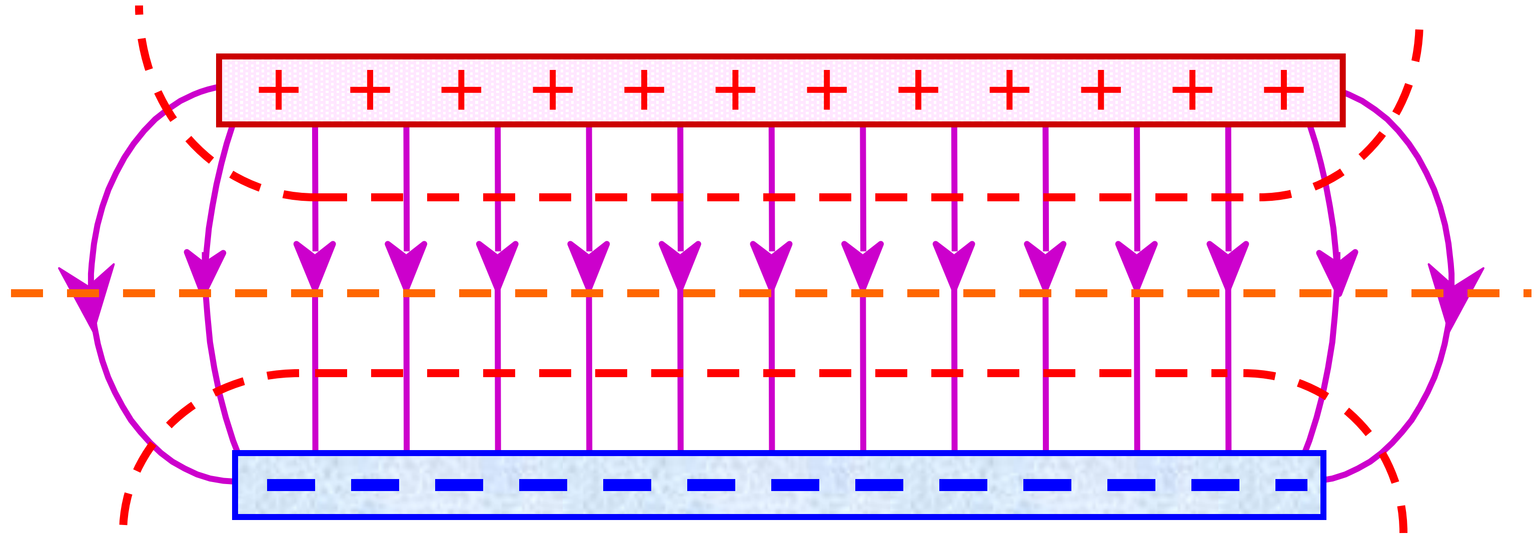
◆ 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小.



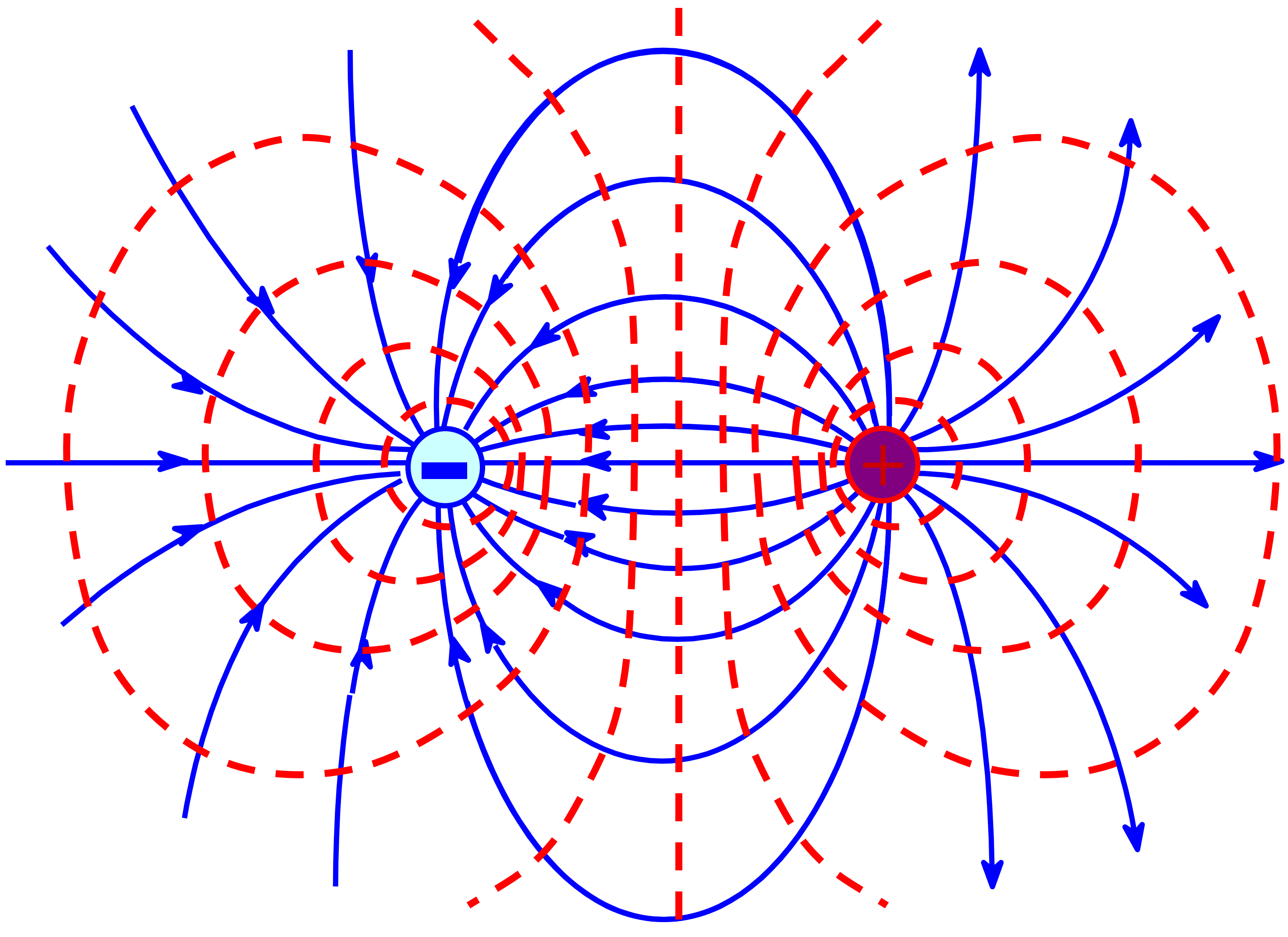
$$dl_2 > dl_1$$

$$E_2 < E_1$$

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



结论

1） 电场线与等势面处处正交.

（等势面上移动电荷，电场力不做功.）

2）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小.

随堂小议

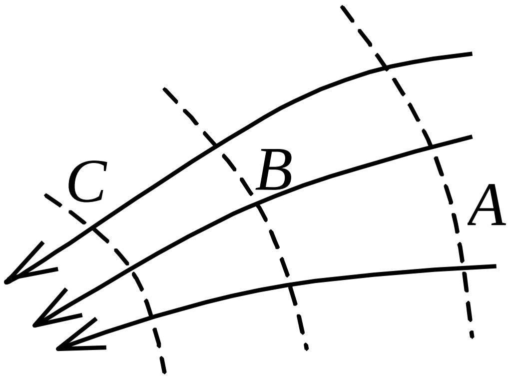
1. 图中实线为某电场中的电场线，虚线表示等势（位）面，由图可看出：

(A) $E_A > E_B > E_C$，$U_A > U_B > U_C$

(B) $E_A < E_B < E_C$，$U_A < U_B < U_C$

(C) $E_A > E_B > E_C$，$U_A < U_B < U_C$

(D) $E_A < E_B < E_C$，$U_A > U_B > U_C$



电场线指向电势降低的方向.

答案D

二　电场强度与电势梯度

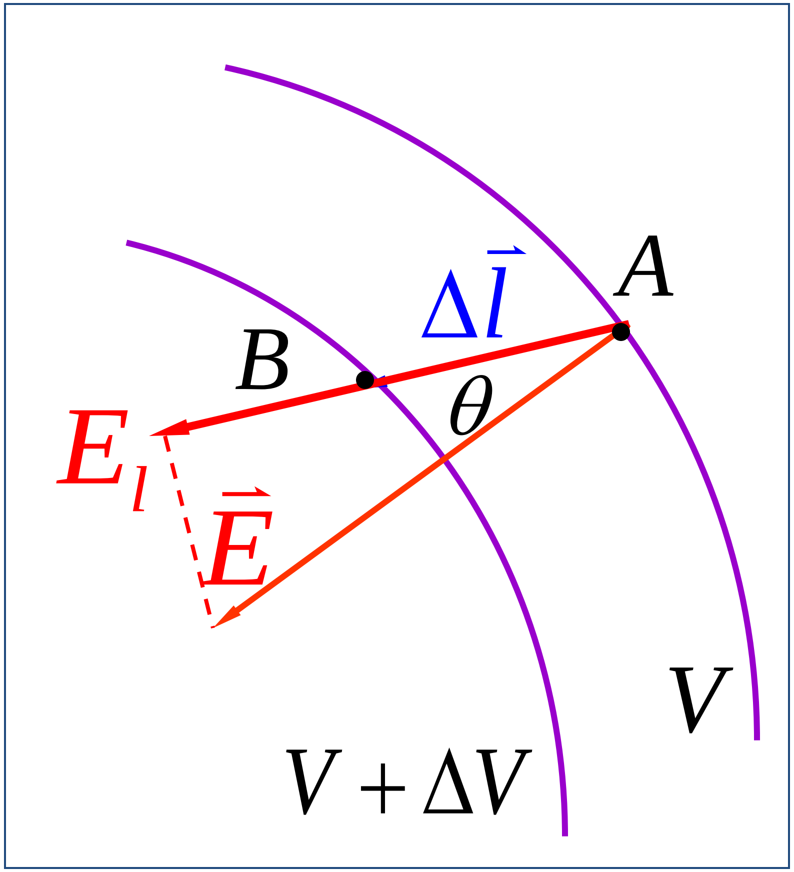
$$U_{AB}=-(V_B-V_A)=\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$$

$$=E\Delta l\cos\theta$$

$$E\cos\theta=E_l$$

$$-\Delta V=E_l\Delta l\,,E_l=-\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

$$E_l=-\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$



电场中某一点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向单位长度上电势变化率的负值.

电势梯度矢量：　　$\mathrm{grad}\,V$　或　∇V

电势梯度的大小等于电势在该点最大空间变化率；方向沿等势面法向，指向电势增加的方向。

$$\boxed{\vec{E} = -\mathbf{grad}\,V = -\nabla V}$$

矢量式：　$$\mathrm{grad}\,V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

总结

物理意义

（1）空间某点电场强度的大小取决于该点领域内电势 V 的空间变化率.

（2）电场强度的方向恒指向电势降落的方向.

讨论

- 直角坐标系中

$$\vec{E} = -(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}) = -\mathrm{grad}\varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$ （电势梯度）

- 为求电场强度 $\vec{E}$ 提供了一种新的途径

求 $\vec{E}$ 的三种方法

- 利用电场强度叠加原理
- 利用高斯定理
- 利用电势与电场强度的关系

讨论

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

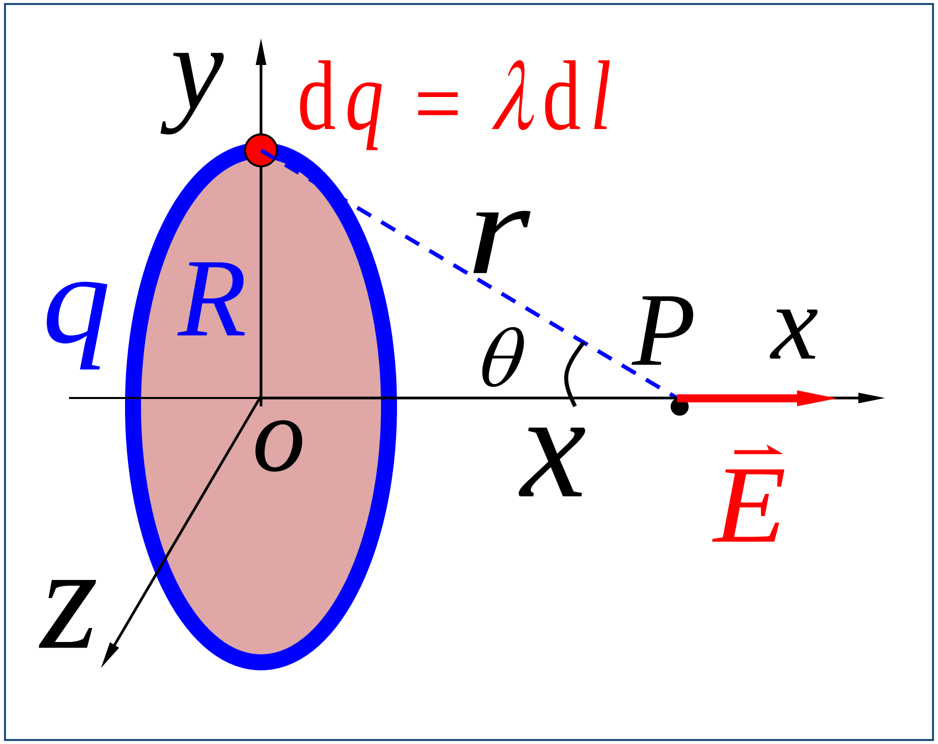
2） $V=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗 ？

3） $\vec{E}$ 相等的地方，V 一定相等吗？等势面上 $\vec{E}$ 一定相等吗 ？

例　求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度.

解

$$\vec{E} = -\nabla V$$



$$V = \frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\ \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

复　习

一　静电场的理论基础——两条基本定律

1、库仑定律：

$$\boxed{\vec{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}\ =-\vec{F}_{12}}$$

2、电场强度叠加原理：

$$\boxed{\vec{E}=\sum_i\vec{E}_i}$$

二　反映电场性质的两条基本定理

1、高斯定理：

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

有源场

2、环路定理：

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

保守力场

三　电场强度　电势

定义：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场线

$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

等势面

电场的求解方法

1、叠加：

$$\vec{E}=\int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\vec{e}_r}{r^2}\mathrm{d}V$$

2、高斯定理：

$$\Phi_\mathrm{e}=\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

3、利用电势梯度：

$$\vec{E}=-\mathbf{grad}\,V=-\nabla V$$

电势的求解方法

1、叠加：

$$V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}$$

条件$V_\infty = 0$，有限大带电体

2、定义：

$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电场分布已知或容易确定