2022~2023学年冬季学期大学物理1复习

第一章 质点运动学

●位移、速度、加速度的相互关系

三者的关系为导数与积分关系:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \overline{v_0}t + \int_0^t \vec{a}dt \qquad \vec{r} = \overline{r_0} + \int_0^t \vec{v}dt$$

●位移、速度、加速度在直角坐标系中的表示

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

速度的方向 $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{v} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2 + \boldsymbol{a}_z^2}$$

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \qquad v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y dt \qquad v_z = v_{0z} + \int_0^t a_z dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt \qquad y = y_0 + \int_0^t v_y dt \qquad z = z_0 + \int_0^t v_z dt$$

- 抛体运动

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad x = v_0 t \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt \qquad y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

- 圆周运动

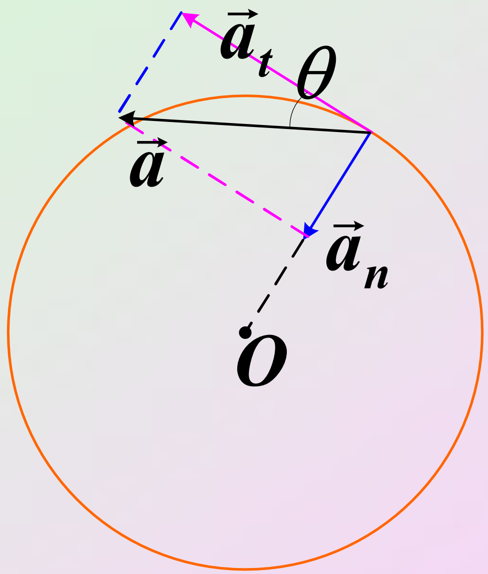
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \left|\vec{v}\right| = \omega R$$

切向加速度$\vec{a}_t$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t$$

法向加速度$\vec{a}_n$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$



总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

距河岸（看成直线）**500m** 处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速为 $n=1\,\mathrm{r/min}$ 转动。当光束与岸边成**60°**角（如图 **1-A-4** 所示）时，光束沿岸边移动的速度大小。

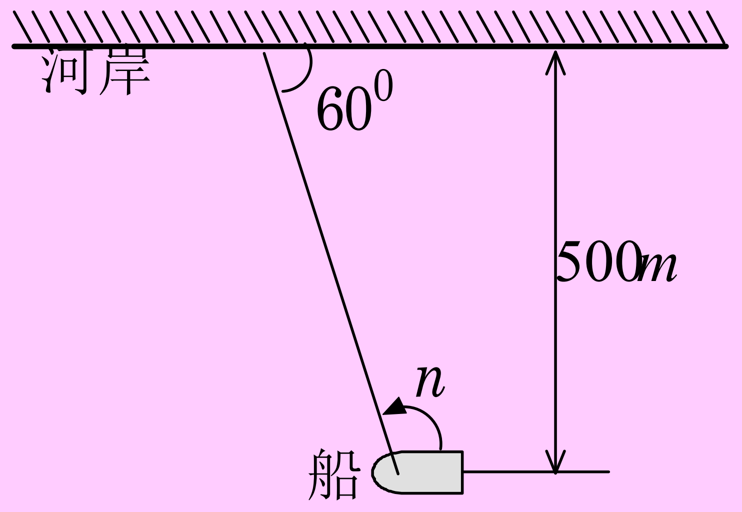


图 1-A-4

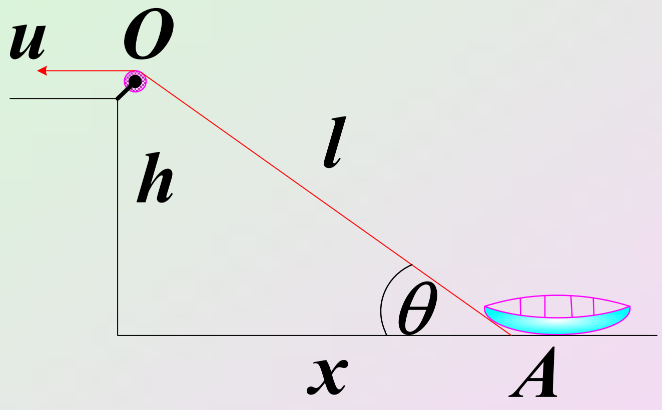
解：

$$\theta=\omega t=2\pi nt=\frac{\pi}{30}t$$

$$x=500\tan\theta=500\tan\frac{\pi}{30}t$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{50\pi}{3}\sec^2\theta=69.8\mathrm{m/s}(\theta=30^{\circ})$$

在离水面高度为h的岸上，一人用绳索跨过定滑轮拉船靠岸。人以恒定速率u拉绳。求当绳与水面成θ角时船的速度与加速度。



解：设 A 点离岸为x，此时 OA 的长为l，则有

$$l^2 = h^2 + x^2$$

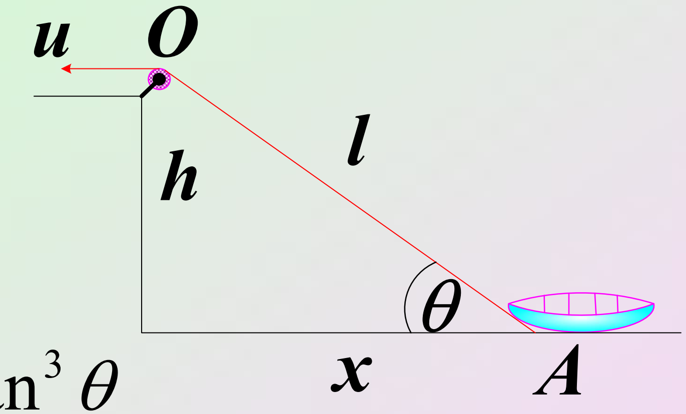
两边求t的导数，有

$$2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

显然，$\frac{dl}{dt}$为人拉绳的速率，$\frac{dx}{dt}$为船的速度，即

$$v = u\frac{l}{x} = \frac{u}{\cos\theta}$$

对上式再求一次t的导数即得船的加速度



$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(u\frac{l}{x}\right)=-\frac{u^2v^2}{x^3}=-\frac{u^2}{h}\tan^3\theta$$

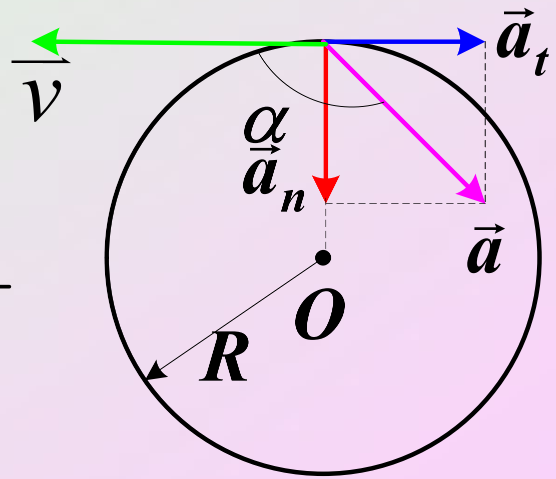
一飞轮边缘上一点所经过的路程与时间的关系为$s=v_0t-bt^2/2$，v_0、b 都是正常数。（1）求该点在时刻 t 的加速度。（2）t 为何值时，该点的切向加速度与法向加速度的大小相等？已知飞轮的半径为 R。

解 （1）由题意，该点的速率为

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v_0t-\frac{1}{2}bt^2\right)=v_0-bt$$

该点作匀变速圆周运动。切向加速度为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 - bt\right) = -b$$



$a_t < 0$说明飞轮作减速运动。

法向加速度为 $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(v_0 - bt\right)^2}{R}$$

总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(-b\right)^2 + \left[\frac{\left(v_0 - bt\right)^2}{R}\right]^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 b^2 + \left(v_0 - bt\right)^4}$$

加速度的方向由它和速度间的夹角确定 $$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{\left(v_0 - bt\right)^2}{-Rb}\right]$$

（2）令$\boldsymbol{a}_n = |\boldsymbol{a}_t|$，解得

$$t = \frac{\left(v_0 - \sqrt{bR}\right)}{b}$$

●相对运动

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$$

绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和。

第二章 牛顿定律

●隔离物体法

1）选定研究对象，将其与其他物体“隔离”出来；

2）分析每一被隔离物体的受力及运动情况，将力、加速度等在隔离体图上标出；

3）选择恰当的坐标系；

4）根据每一物体的受力及运动，列出其牛顿第二定律方程及在坐标系中的分量方程；

5）解方程并讨论结果。

●非惯性系与惯性系

牛顿运动定律适用的参考系称作惯性参考系。

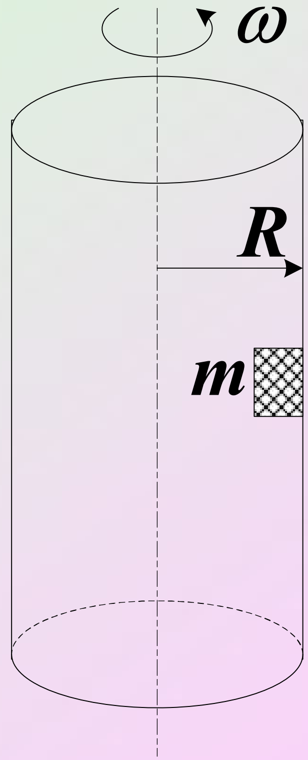
牛顿运动定律不能适用的参考系称作非惯性参考系。

在非惯性参照系考虑力学问题时，有

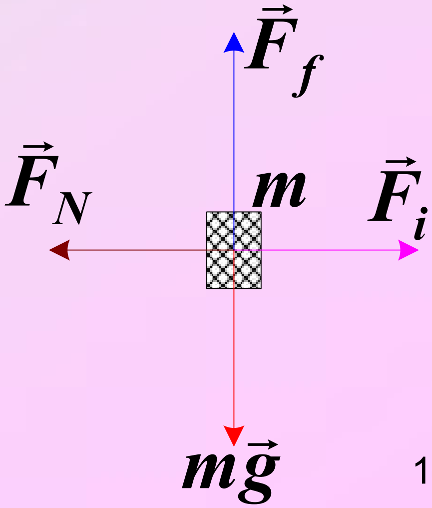
$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}'$$

$\vec{F}_i = -m\vec{a}_f$称惯性力。

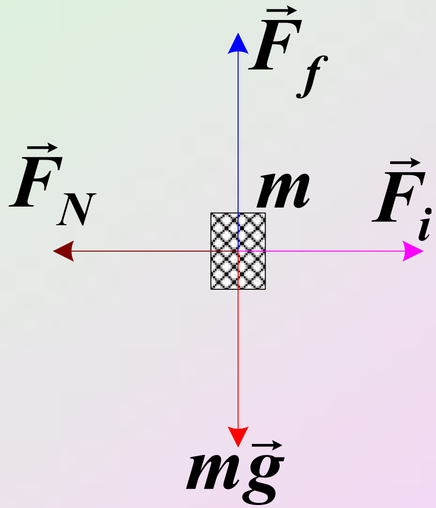
一内半径为R的圆筒可绕竖直轴线旋转，质量为m的物体与圆筒的摩擦系数为μ。要使物体保持与圆筒一起旋转，圆筒的旋转角速度ω至少为多少？



解 以旋转圆筒为参考系，它是一个非惯性参考系。以物体为研究对象，除受真实力外还受惯性力$\vec{F}_i$作用并相对圆筒静止。



列出牛顿第二定律分量方程



$$F_i - F_N = 0$$

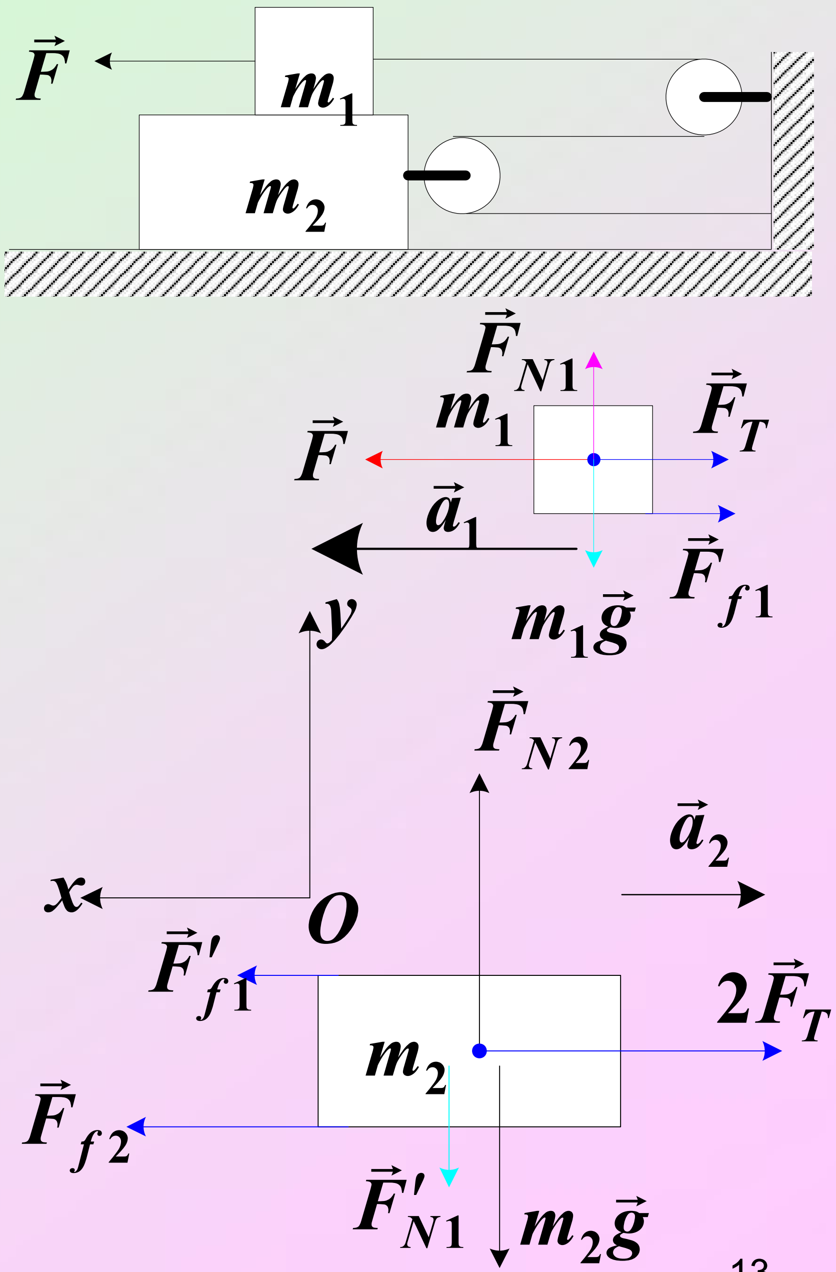
$$F_f - mg = 0$$

其中 $F_f = \mu F_N$ $\quad F_i = ma_n$

$$a_n = \omega^2 R$$

由以上各式可求出最小旋转角速度。

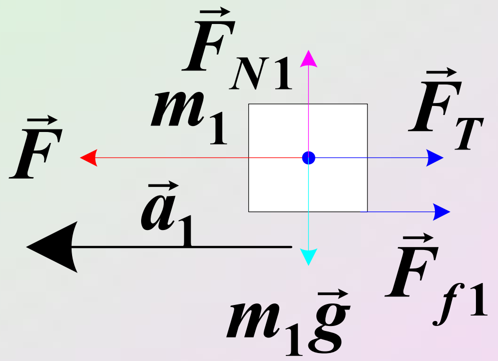
如图，质量m_1和m_2的物体间及m_2与水平面间的摩擦系数均为μ，当m_1上受水平外力$\vec{F}$作用时，其加速度为$\vec{a}_1$，求绳中张力$\vec{F}_T$及m_2的加速度$\vec{a}_2$的值。



解　受力及运动分析如图。在如图的坐标系中，牛顿第二定律的分量为

m_1:
$$F - F_{f1} - F_T = m_1 a_1$$

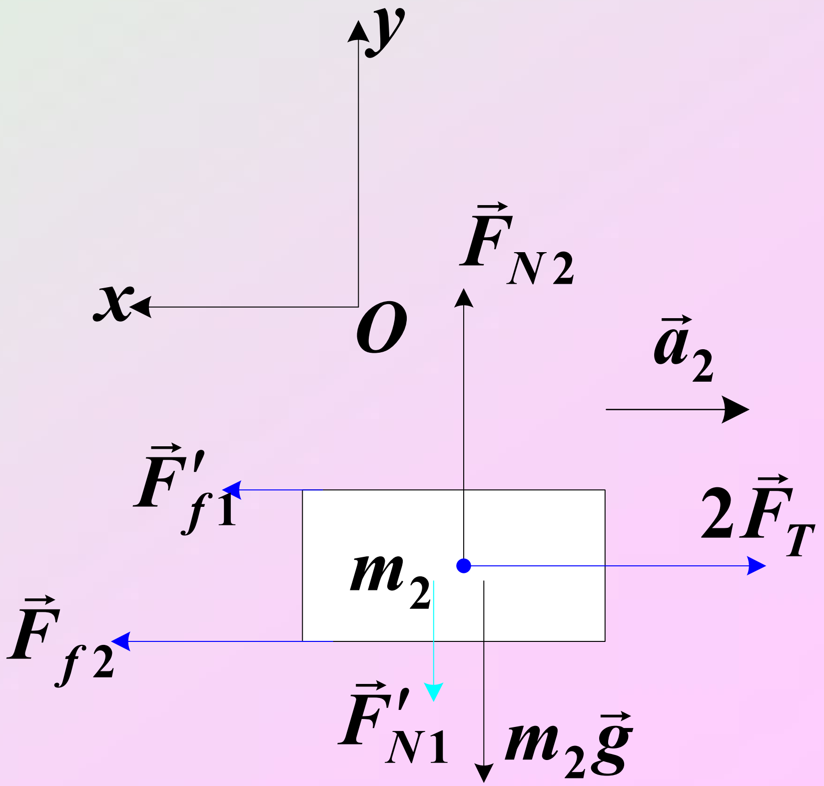
$$F_{N1} - m_1 g = 0$$



m_2:
$$F_{f1} + F_{f2} - 2F_T = -m_2 a_2$$

$$F_{N2} - F_{N1} - m_2 g = 0$$

摩擦力：
$$F_{f1} = \mu F_{N1}$$
$$F_{f2} = \mu F_{N2}$$



约束关系： $a_1 = 2a_2$

由以上各式可求出绳中张力$\vec{F}_T$及m_2的加速度$\vec{a}_2$的值。

第三章 动量

- 质点动量定理

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0$$

质点所受的冲量等于其动量的增量。上式称之为动量定理。

应用动量定理时，应使用其分量形式

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt=\overline{F}_x\left(t_2-t_1\right)=mv_{2x}-mv_{1x}$$

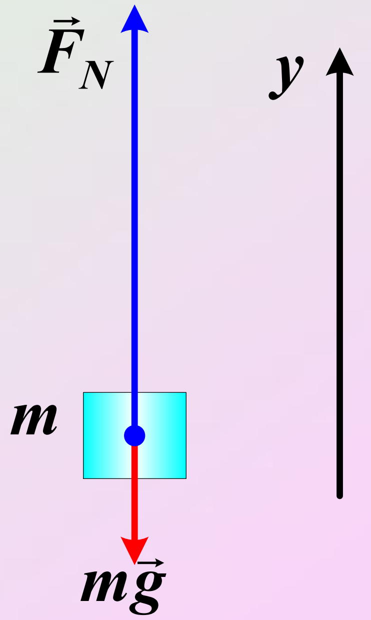
$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt=\overline{F}_y\left(t_2-t_1\right)=mv_{2y}-mv_{1y}$$

$$I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z dt=\overline{F}_z\left(t_2-t_1\right)=mv_{2z}-mv_{1z}$$

某一方向的冲量只改变该方向的动量。

由于冲量与动量均为矢量，解题时的方法也应使用**隔离物体法**。

蒸汽锤质量$m = 1500$ kg，自$h = 1$ m高处自由落下，打在锻件上，在10^{-4}秒时间内完全停止，试求：（1）汽锤所受的冲量；（2）锻件所受汽锤给予的平均冲力。



解 （1）以蒸汽锤作为研究对象。蒸汽锤受力：重力$m\vec{g}$及锻件的反作用力$\vec{F}_N$。

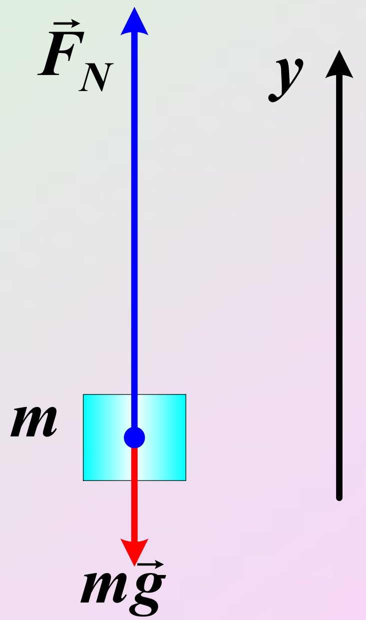
碰撞前汽锤的速率为$v_0 = \sqrt{2gh}$，方向向下；碰撞后的速率为零。

碰撞前汽锤的速率为$v_0=\sqrt{2gh}$，方向向下；碰撞后的速率为零。

由动量定理

$$I_y=\Delta p_y=mv-mv_0=0-\left(-m\sqrt{2gh}\right)$$

$$=m\sqrt{2gh}=6.64\times10^3 \qquad N\cdot s$$



因为$\boldsymbol{I_y>0}$，汽锤所受的合力的冲量向上。

（**2**）汽锤所受的冲力与锻件所受冲力是一对作用与反作用力，计算汽锤的受力。

$$\boldsymbol{I_y=\left(\overline{F}_N-mg\right)\Delta t}$$

$$\bar{F}=\frac{I_y}{\Delta t}+mg=\frac{6.64\times10^3}{10^{-4}}+1500\times9.8=6.64\times10^7+1.47\times10^4$$

$$=6.6415\times10^7\ N$$

锻件受力等值反向，方向向下。

由数值可见，当作用时间很小时，$\bar{F}>>mg$，因此重力可忽略不计。

●动量守恒定律

如果系统所受合外力$\vec{F}_{ex}=0$，则$\Delta\vec{p}=0$，系统的动量守恒，即有

$$\vec{p}=\vec{p}_0=\text{常矢量}$$

或 $$m_1\vec{v}'_1+m_2\vec{v}'_2\ldots+m_n\vec{v}'_n=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\ldots+m_n\vec{v}_n$$

动量定理的分量形式

当某个方向系统所受的合外力为零时，则在该方向上系统的动量守恒，即有

$$m_1v'_{1x}+m_2v'_{2x}\ldots+m_nv'_{nx}=m_1v_{1x}+m_2v_{2x}\ldots+m_nv_{nx}$$

$$m_1v'_{1y}+m_2v'_{2y}\ldots+m_nv'_{ny}=m_1v_{1y}+m_2v_{2y}\ldots+m_nv_{ny}$$

$$m_1v'_{1z}+m_2v'_{2z}\ldots+m_nv'_{nz}=m_1v_{1z}+m_2v_{2z}\ldots+m_nv_{nz}$$

若某个方向合外力不为零，则该方向按动量原理处理。

2. 几点说明

（**1**）定律中的各物体的速度均是对同一惯性参照系而言的；

（**2**）碰撞瞬间，内力>>外力，可忽略外力，将系统按动量守恒处理；

（**3**）内力不改变系统的总动量，但使系统内部各物体的运动状态发生改变；

（**4**）某方向外力的矢量和不为零时，该方向上用动量原理处置；

（**5**）动量守恒定理对低速宏观物体及高速微观物体均适用。

质量为**m = 50 kg** 的渔人在湖中静止的渔船上从船尾走到船首，船长**4**米，人船总重**200kg** ,问渔人相对湖岸走了多少米？水的阻力不计。

解 本题涉及相对运动的概念，$\vec{V}_{船岸}$为牵连速度，

$\vec{u}_{人船}$为相对速度，$\vec{V}_{人岸}$为绝对速度。

以人船为一系统，两者的作用力为内力，因而系统总动量守恒，但守恒时，要求各物的速度均为同一惯性参照系的速度。

取湖岸为惯性参照系，任一时刻有

$$m\vec{V}_{人岸}+(M-m)\vec{V}_{船岸}=0$$

由相对运动，有

$$\vec{V}_{人岸} = \vec{u}_{人船} + \vec{V}_{船岸}$$

$$\vec{V}_{船岸} = \vec{V}_{人岸} - \vec{u}_{人船}$$

代入动量守恒式后有

$$m\vec{V}_{人岸} + (M-m)\left(\vec{V}_{人岸} - \vec{u}_{人船}\right)$$

$$= M\vec{V}_{人岸} - (M-m)\vec{u}_{人船} = 0$$

$$\vec{V}_{人岸} = \frac{M-m}{M}\vec{u}_{人船}$$

因为 $\dfrac{\boldsymbol{M-m}}{\boldsymbol{M}} > \mathbf{0}$

所以$\vec{\boldsymbol{u}}_{人船}$与$\vec{V}_{人岸}$同向。

可得

$$s_{人岸} = \int_{t_1}^{t_2} V_{人岸} dt = \frac{M-m}{M}\int_{t_1}^{t_2} u_{人船} dt = \frac{200-50}{200} \times 4 = 3米$$

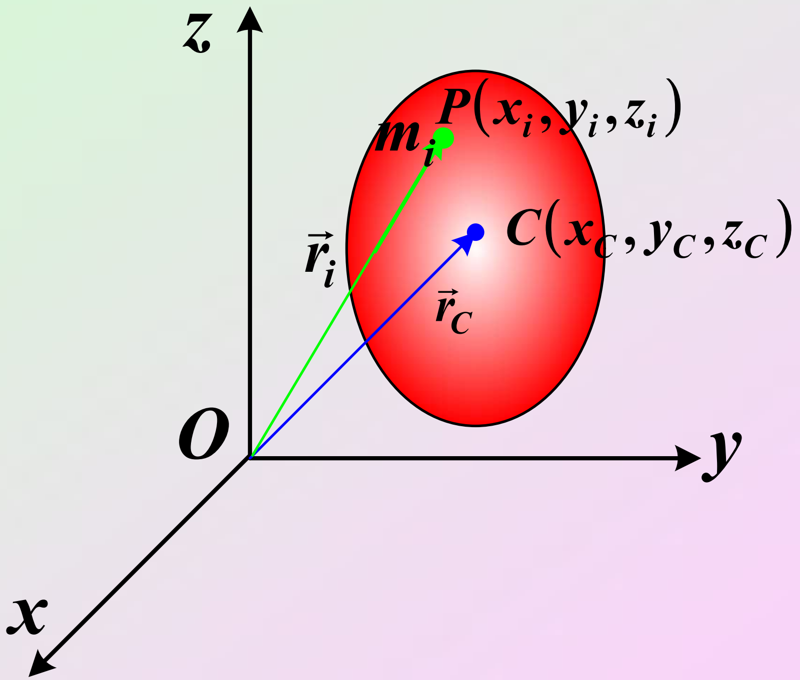
●质心和质心运动定律

定义质心的坐标为

$$x_C = \Sigma \frac{m_i x_i}{M}$$

$$y_C = \Sigma \frac{m_i y_i}{M}$$

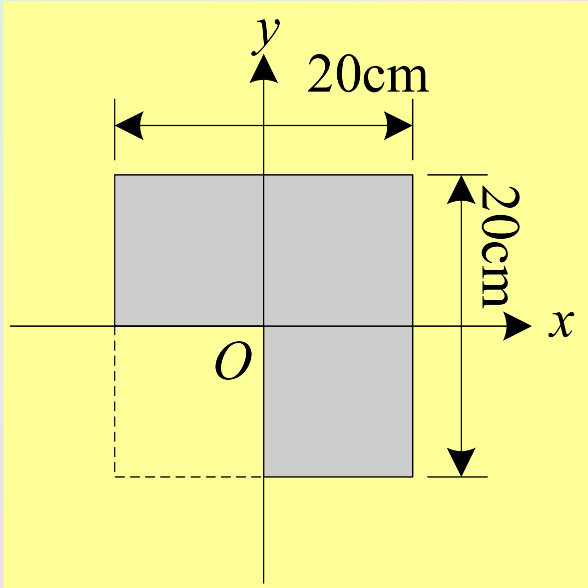
$$z_C = \Sigma \frac{m_i z_i}{M}$$



$$\vec{F}_{ex} = \Sigma \vec{F}_i = M\vec{a}_C$$

质心运动定理，质心运动规律如同将所有质量和外力全部集中在质心的情况一样，即质心的运动代表了质点系的平动。

如图所示，将一块边长为 **20cm** 的均质薄正方形木板截去边长 **10cm** 的正方形，求其在如图的坐标系中的质心坐标 x_C、y_C。



截去小正方形后的薄板可看成完整大正方形与质量为负的小正方形的叠加。它们各自的质心坐标为

$$x_{C+}=0 \qquad y_{C+}=0$$

$$x_{C-}=-0.05\text{m} \qquad y_{C-}=-0.05\text{m}$$

将两者看成质量集中于其各自质心的质点，薄板质心为

$$x_C = \frac{m_+ x_{C+} + m_- x_{C-}}{m_+ + m_-} = \frac{\sigma a^2 x_{C+} - \sigma \frac{a^2}{4} x_{C-}}{\sigma a^2 - \sigma \frac{a^2}{4}}$$

代入各量，得

$$x_C = \frac{5}{3} \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

同理

$$y_C = \frac{5}{3} \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

第四章 功与能

●变力的功 $W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b F dr\cos\theta$

功率 $P=\frac{dW}{dt}$ $P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\theta$

保守力作功只与其始末位置有关而与其路径无关。
不具有这种性质的力叫做非保守力。

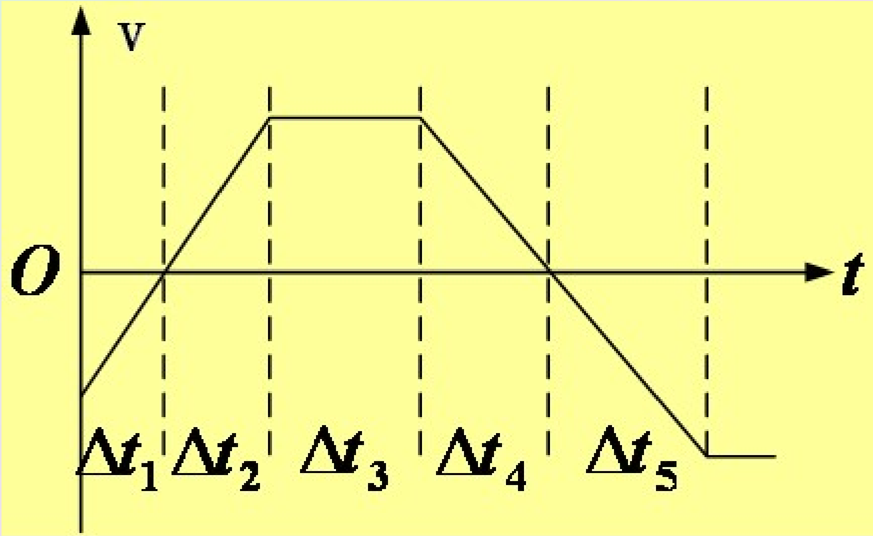
重力的功 $W=mg(y_a-y_b)$

万有引力的功 $W=-Gm'm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$

弹力的功 $W=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$

如图为一作直线运动质点的速度随时间的变化曲线，判断各时间段内合外力作功的正负。

*t*时刻的加速度正负由曲线上对应点的斜率决定，力的正负同加速度，位移的正负同速度的正负，力与位移乘积的正负决定作功的正负。



Δt_1 负　　Δt_2 正　　Δt_3 零

Δt_4 负　　Δt_5 正

● 质点动能定理

$$W = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

合外力对物体作功量等于物体动能的增量。

当$\mathbf{W} > \mathbf{0}$时，外力作正功， $E_k \uparrow \rightarrow |\vec{v}| \uparrow$

当$\mathbf{W} < \mathbf{0}$时，外力作负功， $E_k \downarrow \rightarrow |\vec{v}| \downarrow$

质量为m的质点沿x轴正向作直线运动。运动方程为$x = 12t + t^2$，求t_1到t_2时间内外力所作的功。

$$v_1 = 12 + 2t_1 \qquad v_2 = 12 + 2t_2$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

●质点系的势能

离地y处质点的重力势能为 $E_P = mgy$

弹力势能 $E_P = \frac{1}{2}kx^2$

引力势能 $E_P = -\frac{Gm_0 m}{r}$

●机械能和机械能守恒定律

质点系功能原理 $W_{外} + W_{非保内} = E(b) - E(a)$

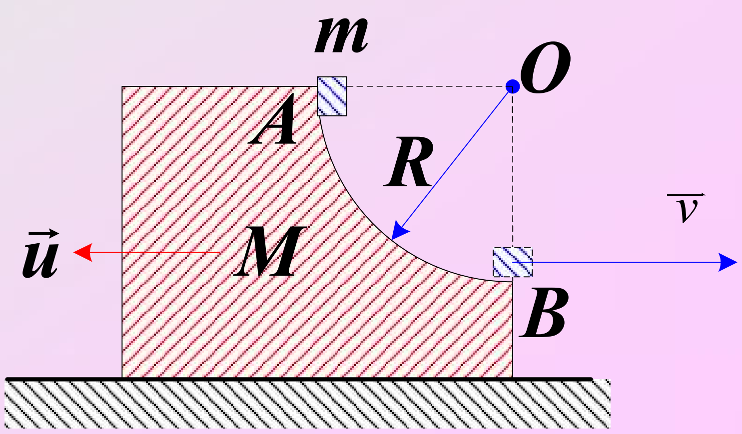
机械能守恒定律

当外力和非保守内力不作功或它们作功总和为零时

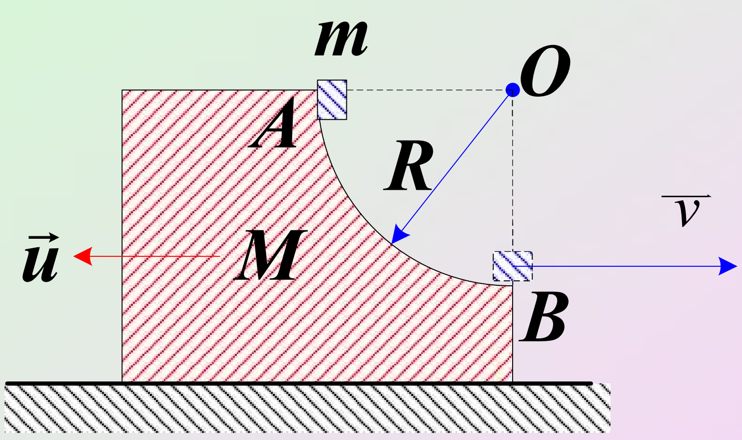
$$E_k + E_P = E_{k0} + E_{P0}$$

一半径R、质量M的光滑1/4圆弧放在光滑的水平面上，质量m的物体起始位置在图中 A 点处。两者保持静止然后释放物体m，求：

（1）当物体滑到图中 B 点时的对地速率v、对圆弧的速率v'及圆弧的速率u；（2）物体滑到圆弧底部 B 点时圆弧移动的距离l。



解：（1）物体与圆弧系统在x方向上动量守恒，地球、物体、圆弧系统的机械能守恒



$$mv = Mu \qquad mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2$$

$$v' = v + u$$

由以上各式可求出（1）的各量。

（2）系统水平方向不受外力作用，$a_{Cx} = 0$，x_C不变

$$Ml - m(R - l) = 0 \qquad l = \frac{m}{m + M}R$$

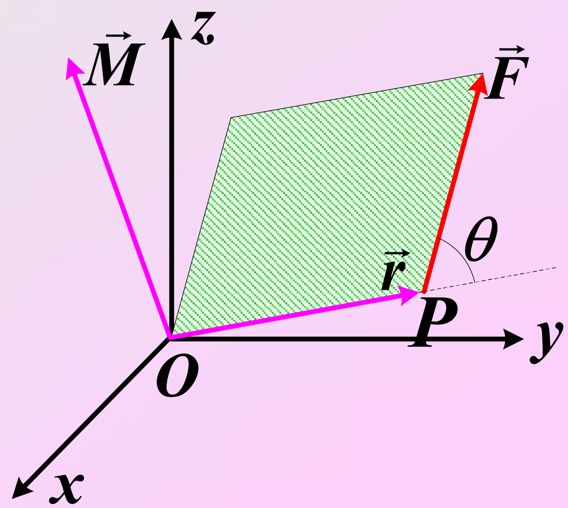
● 碰撞

在系统不受外力作用的情况下

完全弹性碰撞：动能与动量均守恒。

完全非弹性碰撞：仅动量守恒，机械能不守恒。

角动量



●力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

●质点角动量定理

角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

质点角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

质点对任一固定点的角动量的时间变化率等于外力对该点的力矩。

上式的积分式为 $\int_0^t \vec{M}dt=\vec{L}-\vec{L}_0$

质点角动量的增量等于外力的冲量矩。

质点角动量守恒定律

当质点受到的力矩为零，其角动量保持不变。即

当$\vec{M}=0$时，$\vec{L}=$常矢量

上述关系称为质点角动量守恒定律。

第五章 刚体力学

- 刚体定轴转动的运动方程

刚体定轴转动与质点直线运动的对照

定轴转动	直线运动
$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	$v = \dfrac{dx}{dt}$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$a = \dfrac{dv}{dt}$
$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha dt$	$v - v_0 = \int_0^t a dt$
$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \omega dt$	$x - x_0 = \int_0^t v dt$

匀变速定轴转动	匀变速直线运动
$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\varphi$	$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

● 转动定律

转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

转动惯量 J 质点绕轴 $J = mr^2$

质点系 $J = \Sigma m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \cdots$

常见刚体的转动惯量

均质圆环绕过圆心与环面垂直轴的转动惯量

$$J = mR^2$$

均质薄圆板绕垂直于板面的圆心轴转动

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

均质细杆绕过中点的垂直轴的转动惯量

$$J = \frac{1}{12}ml^2$$

细杆绕端点转动 $$J = \frac{1}{3}ml^2$$

组合定理 $J=\Sigma J_i$

●定轴转动刚体的角动量

$$\vec{L}=J\vec{\omega}$$

●定轴转动刚体的角动量定理

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

●定轴转动刚体的角动量守恒定律

若刚体不受外力矩作用，则刚体的角动量保持不变，即

当 $\vec{M}=0$ $J\vec{\omega}=$常矢量

● 定轴转动刚体的动能与动能定理

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

力矩的功 $W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$

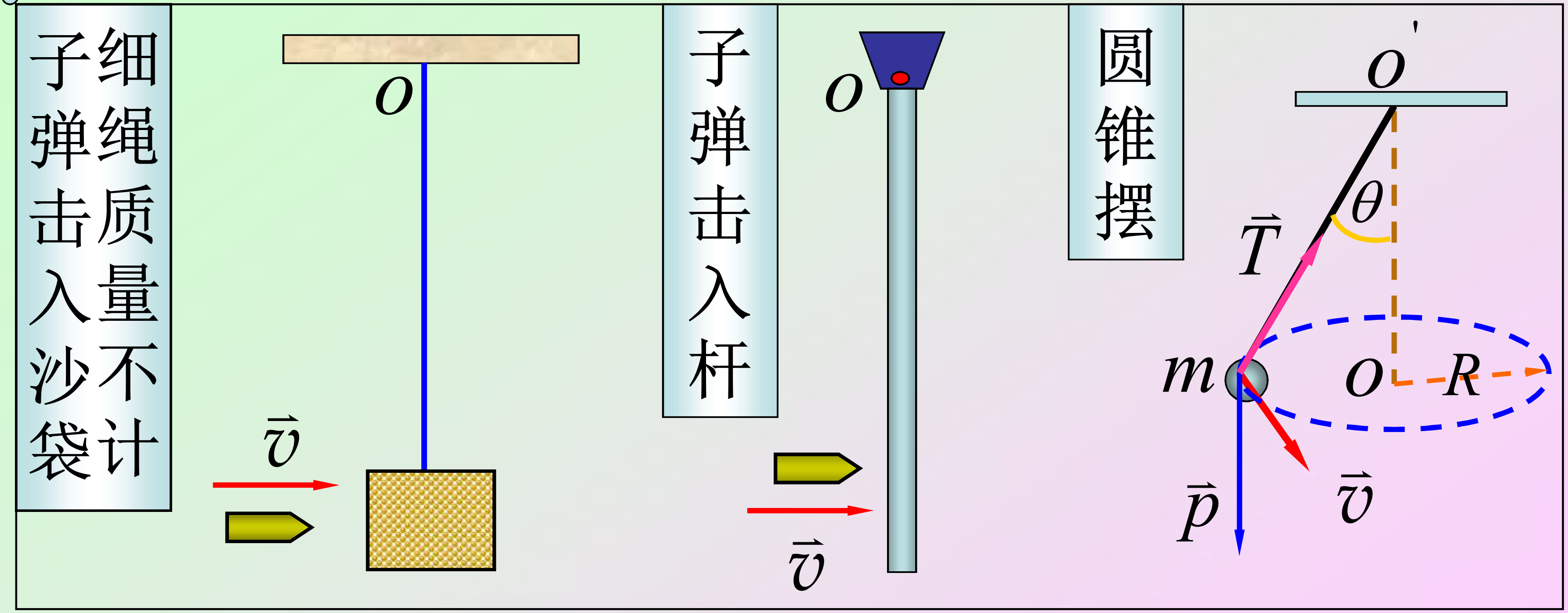
定轴转动刚体的动能定理

$$W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \Delta E_k$$

● 刚体的重力势能

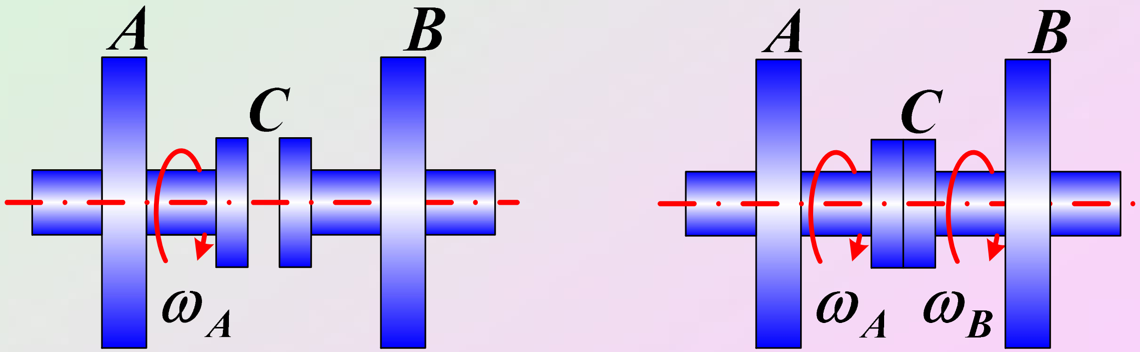
$$E_P = mgz_C$$

讨论



以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒；
机械能不守恒．	机械能不守恒．	机械能守恒．

例 4 工程上，两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动。如图 A 和 B 两飞轮的轴杆在同一中心线上，A 轮的转动惯量为$J_A = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$，B 轮的转动惯量为$J_B = 20\text{kg}\cdot\text{m}^2$。开始时 A 轮的转速为 600r/min，B 轮静止。C 为摩擦啮合器。求两轮啮合后的转速；在啮合过程中，两轮的机械能有何变化？



解 如将两飞轮作为一系统，它们的作用力矩属系统内力矩，系统的角动量守恒。

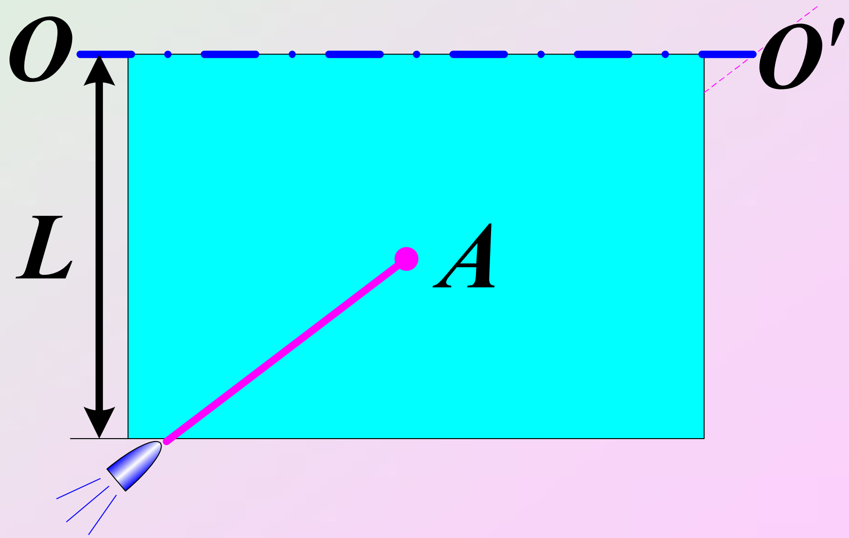
$$J_A\omega_A + J_B\omega_B = (J_A + J_B)\omega$$

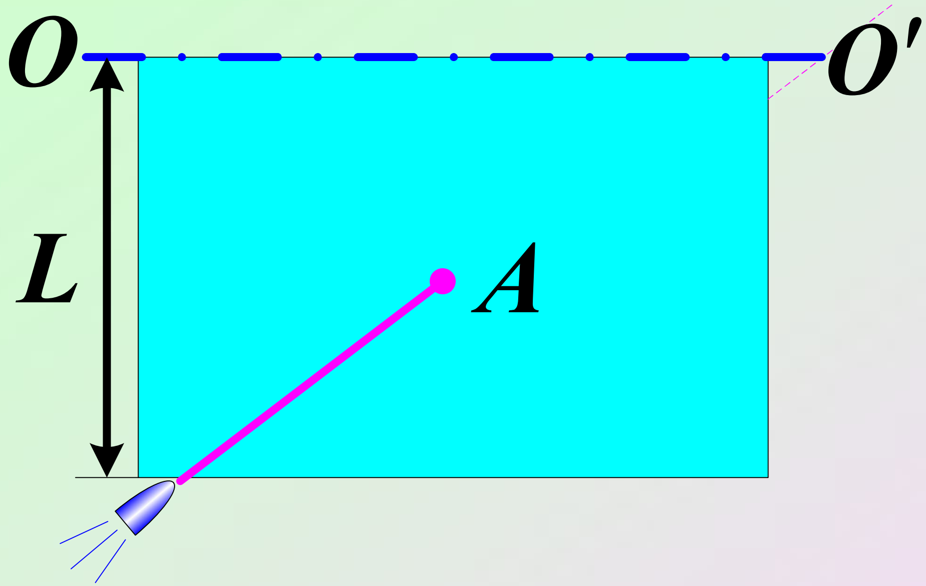
解得 $$\omega = \frac{J_A\omega_A + J_B\omega_B}{J_A + J_B} = 20.9\ \mathrm{rad/s}$$

折算为转速 $$n = \frac{60\omega}{2\pi} = 200\ r/\min$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}J_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2\right) - \frac{1}{2}(J_A + J_B)\omega^2 = 1.32\times 10^4\ \mathrm{J}$$

例 5　一块长 $L = 0.6\text{m}$，质量 $M = 1\text{kg}$ 的均质薄木板，可绕轴 OO' 无摩擦自由转动，当木板静止在平衡位置时，有一质量 $m = 10\times10^{-3}\text{kg}$ 的子弹垂直击中木板上 A 点，A 离转轴 OO' 距离 $l = 0.36\text{m}$，子弹击中木板前的速度为 500m/s，穿出木板后的速度 200m/s 求：（1）子弹给以木板的冲量；（2）木板获得的角速度。





解：子弹与木板构成的系统角动量守恒，击中前子弹对轴的角动量为 lmv_0

击中后系统的角动量为 $\frac{1}{3}ML^2\omega + mlv'$

故有

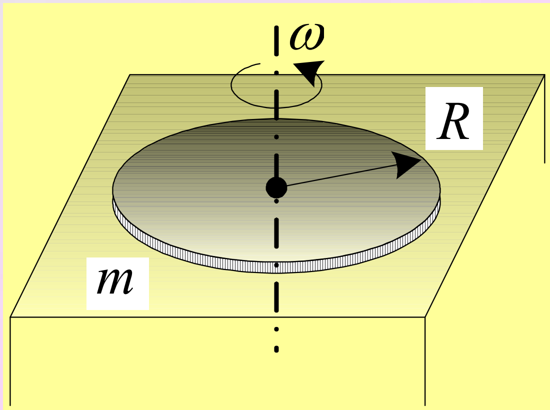
$$lmv_0 = \frac{1}{3}ML^2\omega + mlv'$$

$$\omega = \frac{mlv_0 - mlv'}{\frac{1}{3}ML^2} = 9\mathrm{rad/s}$$

子弹受木板的冲量 $I = mv' - mv_0 = -3\mathrm{N \cdot s}$

木板受子弹的冲量 $\boldsymbol{I' = -I = 3\mathrm{N \cdot s}}$

例 6 一半径为 $\boldsymbol{R}$，质量 $\boldsymbol{m}$ 的均质圆盘，平放在粗糙的水平桌面上。设盘与桌面间的摩擦系数为μ。圆盘最初以角速度ω_0绕通过中心且垂直盘面的轴旋转，求：



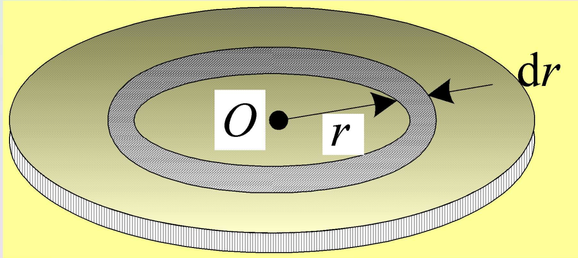
（**1**）作用在圆盘上的摩擦力矩值$\boldsymbol{M}$；

（**2**）圆盘的角加速度值α；

（3）到静止为止圆盘转过的圈数N；

（4）到静止为止摩擦力矩的作功值W。

解：（1）取半径r、宽$\mathrm{d}r$的园环，其质量$\mathrm{d}m=\dfrac{2\pi r\mathrm{d}r}{\pi R^2}m$，受到的阻力矩值为



$$\mathrm{d}M=r\mu g\mathrm{d}m=\mu mg\frac{2r^2\mathrm{d}r}{R^2}$$

$$M=\int\mathrm{d}M=\frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\mu mgR$$

（2）由$M=J\alpha$，$\alpha=\dfrac{M}{J}=\dfrac{\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=\dfrac{4\mu g}{3R}$

（3）由$\omega_0^2 = 2\alpha\varphi$，$\varphi = \dfrac{\omega_0^2}{2\alpha}$，

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\dfrac{4\mu g}{3R}} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

（4）

$$W = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = -\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2$$

第六章　振动

● 简谐振动

简谐振动的动力学特征

如果物体受力（力矩）与其位移（角位移）正比反向，则物体作简谐振动。——简谐振动的动力学判据。

简谐振动的运动学特征

简谐振动的加速度与位移正比反向——简谐振动的运动学判据

简谐振动的表达式 $$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}^{2}\cos(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\varphi})=-\boldsymbol{\omega}^{2}\boldsymbol{x}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}$$ 或 $$\cos\varphi=\frac{x_0}{A}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

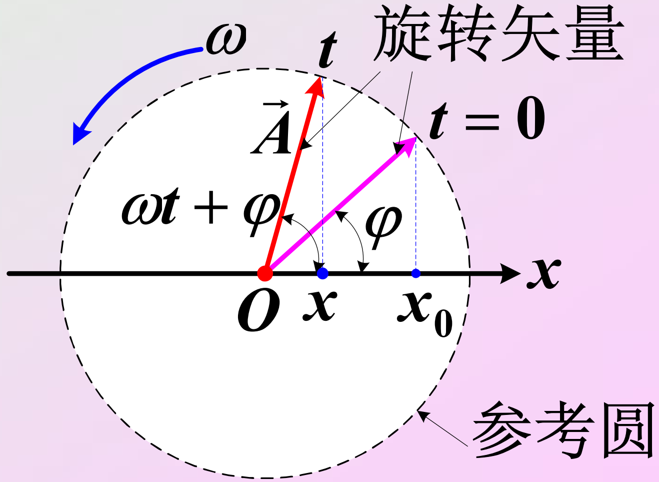
初相位应既满足位移的表达式同时又满足速度表达式。

φ的取值一般选择$-\pi<\alpha\leq\pi$。

T、ν、ω三者不独立，均反映简谐振动运动的周期性。

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

●简谐振动的表示法



$\vec{A}$的值即为振幅，旋转角速度ω即为谐振动的圆频率，$t=0$时$\vec{A}$与Ox轴的夹角即为初相位φ。

●谐振子的能量 $E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \qquad E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

简谐振动系统的能量在任意时刻都是守恒的。

●振动的合成

同方向、同频率的两个简谐振动的合成

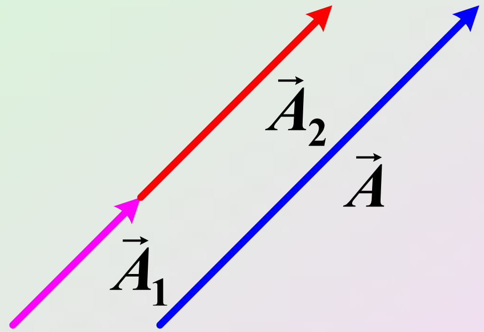
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

●位相对合振动的影响

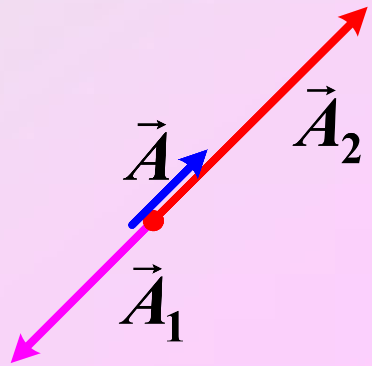


当两振动同相位

$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$ ，$k=0$ ，±1 , ±2 ，$\cdots$时

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$$

合振动初相位与分振动相同。



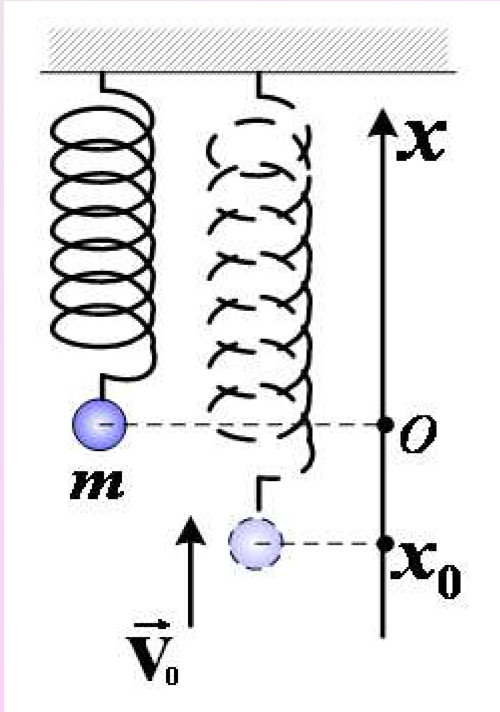
当两振动反相位

$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$ ，$k=0$ ，±1 , ±2 ，$\cdots$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=|A_1-A_2|$$

合振动的初相位与振幅大的分振动的初相位相同。

例7 有一轻弹簧，当下端挂m_1 = 10g的物体而平衡时，伸长量为4.9cm。用这个弹簧和m_2 = 16g的物体连成一弹簧振子。若取平衡位置为原点，向上为x轴的正方向。将m_2从平衡位置向下拉2cm后，给予向上初速度v_0 = 5cm/s并开始计时，试求m_2的振动周期和振动的数值表达式。



解 设弹簧原长为l，悬挂m_1后伸长Δl，则

$$k\Delta l = m_1 g,\text{解得}k = \frac{m_1 g}{\Delta l} = 2\ N/m$$

取下m_1挂上m_2后，系统的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 11.2rad/s \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.56s$$

由初始条件，$x_0 = -2\times 10^{-2} = A\cos\varphi$

$$v_0 = 5\times 10^{-2} = -A\omega\sin\varphi$$

解得 $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = 2.05\times 10^{-2}\,m$

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\frac{-v_0}{\omega x_0} = 12.6^\circ \qquad \varphi_2 = \tan^{-1}\frac{-v_0}{\omega x_0} = -167.4^\circ$$

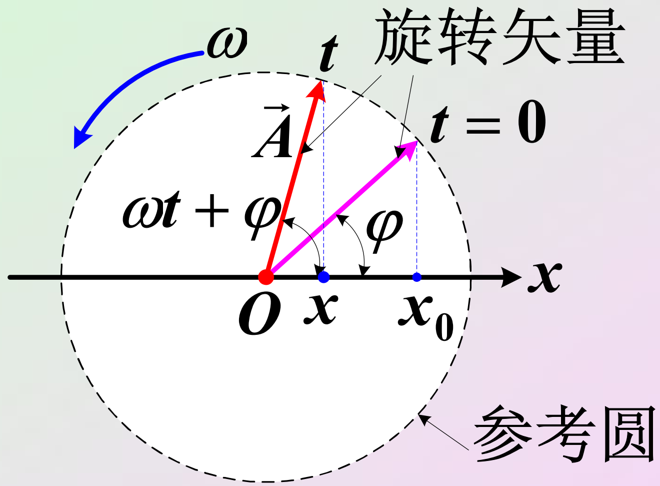
能同时满足初始位移和初始速度的初相为

$$\boldsymbol{\varphi = -167.4^\circ}$$

一般将初相表示为弧度形式 $\boldsymbol{\varphi = -2.92 rad}$

振动表达式为 $\boldsymbol{x = 2.05\times 10^{-2}\cos(11.2t - 2.92)}$ **(SI)**

例 8 一物体沿 x 轴作简谐振动，振幅 $A = 0.12\text{m}$，周期 $T = 2\text{s}$，当 $t = 0$ 时，物体的位移 $x = 0.06\text{m}$ ，且向 x 轴正方向运动。求：



（1）此简谐振动的表达式；（2）$t = \dfrac{T}{4}$ 时物体的位置、速度和加速度；（3）物体从 $x = -0.06\text{m}$ 向 x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需的时间。

解 （1）设这一简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由已知条件，$A = 0.12m, T = 2s, \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \ \ 1/s.$

由初始条件：$t = 0$时，$x_0 = 0.06m$,可得

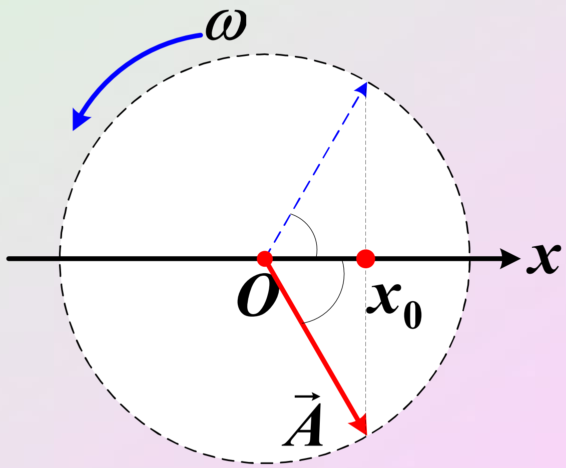
$$0.06 = 0.12\cos\varphi \quad \text{或} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

由初始速度条件　　　　选$\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

简谐振动的表达式为 $x = 0.12\cos\left(\pi t - \dfrac{\pi}{3}\right)m$

由旋转矢量方法易求得初相 $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

(2) 由位移的表达式得



$$v = \frac{dx}{dt} = -0.12\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -012\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) m/s^2$$

将$t = \dfrac{T}{4} = 0.5s$代入x、v、a的表达式得：

$$x = 0.104m,\ v = -0.06\pi\ m/s = -0.18m/s\ ,\ a = -1.03\quad m/s^2$$

(3) 当$x = -0.06m$，设该时刻为t_1，得

$$-0.06 = 0.12\cos\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

因为物体向x轴负向运动，$v < 0$，所以不取$\frac{4\pi}{3}$。求得

$$t_1 = 1s$$

当物体第一次回到平衡位置，设该时刻t_2,由于物体向 x 轴正向运动，所以此时物体在平衡位置处的相位为$\frac{3\pi}{2}$，则由

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

求得

$$t_2 = \frac{11}{6} = 1.83s$$

所以，从$x = -0.06\text{m}$ 处第一次回到平衡位置所需时间为

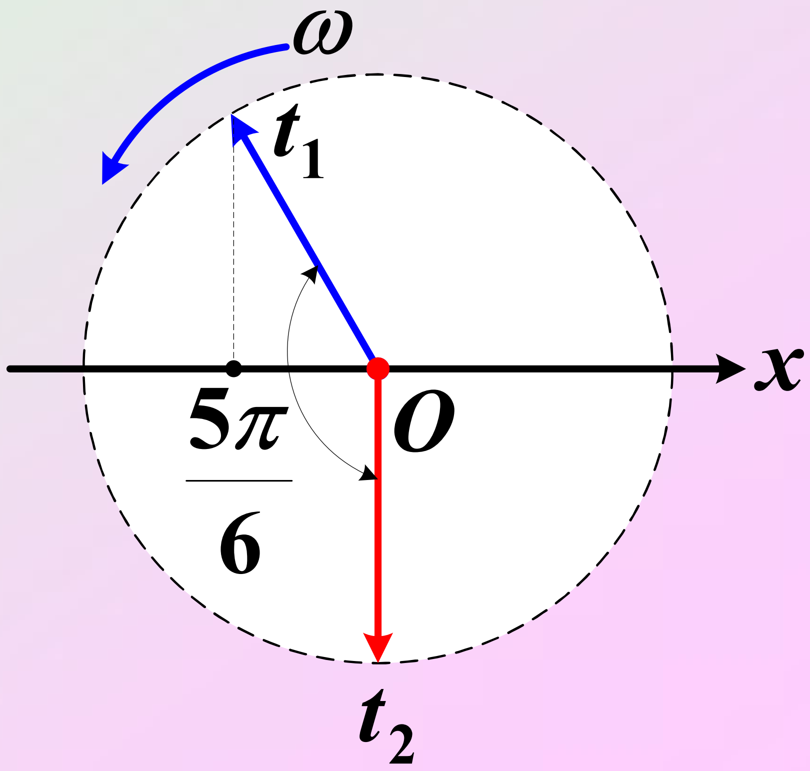
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6}s - 1s = \frac{5}{6}s = 0.83s$$

由旋转矢量能直观地看出，第一次回到平衡位置时旋转矢量转过的角度为

$$\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

因而所需时间为

$$\Delta t=\frac{\frac{5\pi}{6}}{\omega}=0.83s$$



例 9 一简谐振动的振动曲线如图所示。求振动方程。

解：求简谐振动的表达式就是要求出其三个特征量 A、ω、φ。由振动曲线可知，$A = 0.10\ \mathrm{m}$，$x_0 = -0.05 = 0.10\cos\varphi$，$v_0 = -0.10\omega\sin\varphi < 0$，可解得

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi。$$

作旋转矢量图并画出 $t = 0$ 与 $t = 2\mathrm{s}$ 时刻的旋转矢量位置，也可解得 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$。

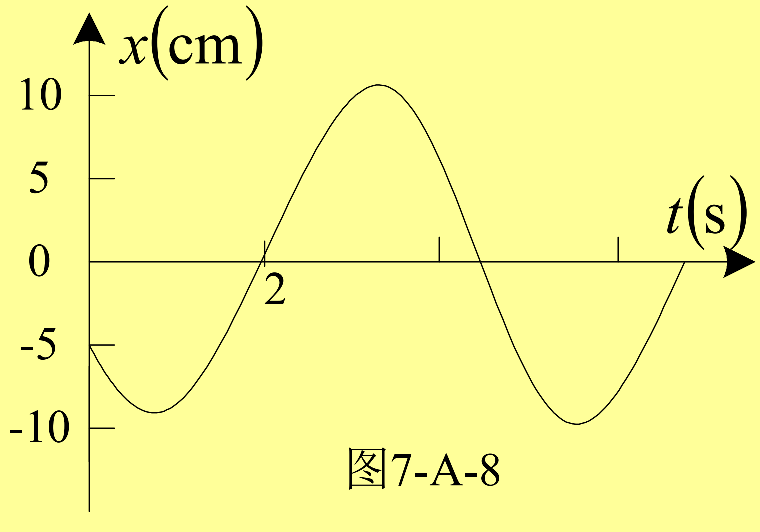


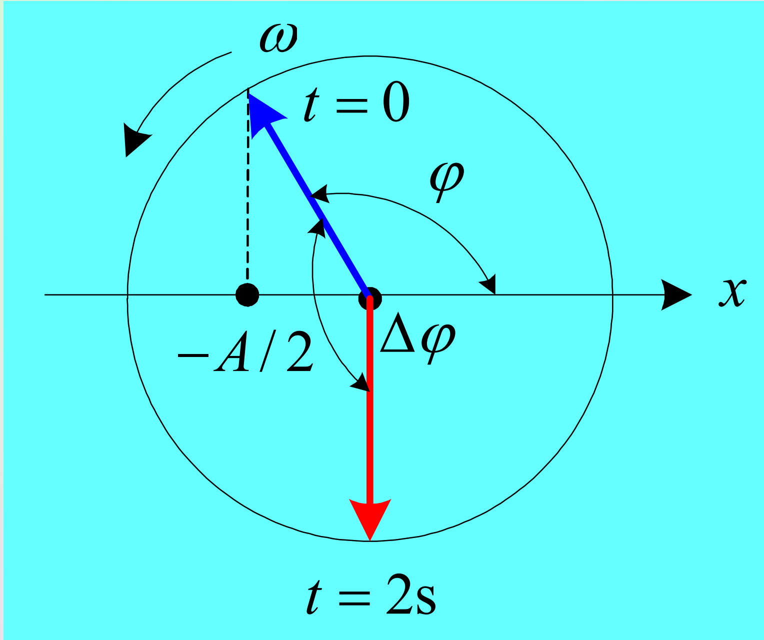
图7-A-8

由图可知

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\omega = \frac{5\pi}{6}$$

$$\omega = \frac{5\pi}{12}\,\mathrm{rad/s}$$

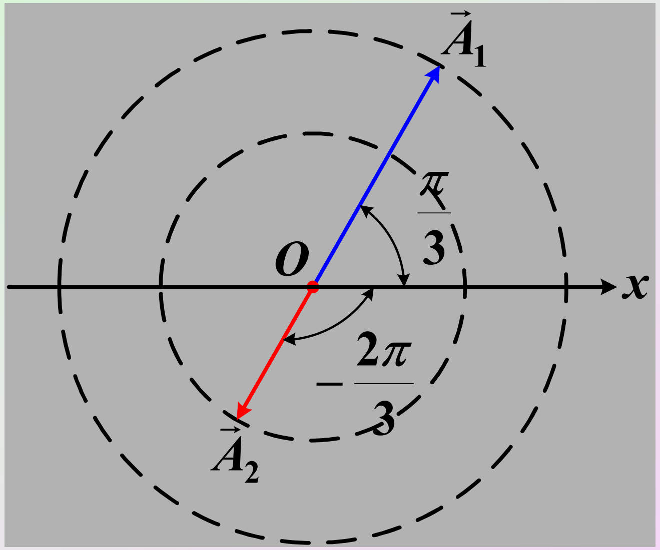
所求振动方程为



$$x = 0.10\cos\left(\frac{5}{12}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right) \qquad （\mathrm{SI}）$$

例 **10** 一质点同时参与两个同方向的简谐振动，其振动方程分别为：

$x_1 = 5\times10^{-2}\cos\left(4t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$x_2 = 3\times10^{-2}\cos\left(4t-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，画出两振动的旋转矢量图，并求合振动的振动方程。



$$\boldsymbol{x = 2\times10^{-2}\cos(4t+\frac{\pi}{3})\ \mathrm{m}}$$

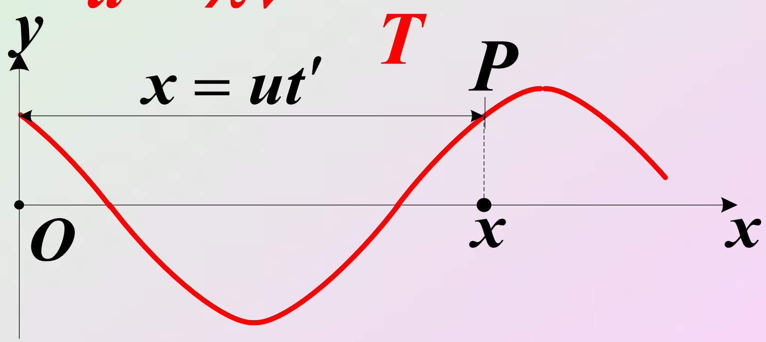
第七章 机械波

●波长、频率与波速的关系

$$u = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}$$

●简谐波

沿x轴正向传的波



始点 O 点处（即$x=0$处）质点的振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

O 点的振动传到 P 点所需的时间为$t' = \dfrac{x}{u}$，这样P点在t时刻的振动相当于O点在$(t-t')$时刻的振动，即P点在t时刻振动可用O点在$(t-t')$时刻的振动表达示

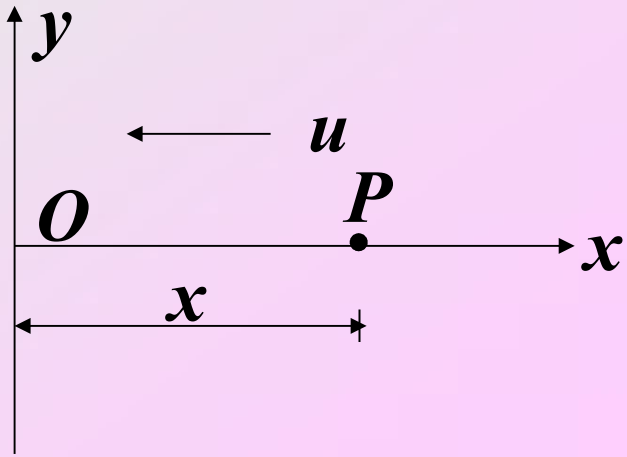
$$x_P = A\cos[\omega(t - t') + \varphi]$$

或写成

$$\boxed{x = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]}$$

利用$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$和$uT = \lambda$，可将其写成其他形式。

沿坐标轴负向传播的波动表达式



t时刻始点O的振动表达式为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P点在t时刻的振动位移为 $y = A\cos\left[\omega\left(t + \dfrac{x}{u}\right) + \varphi\right]$

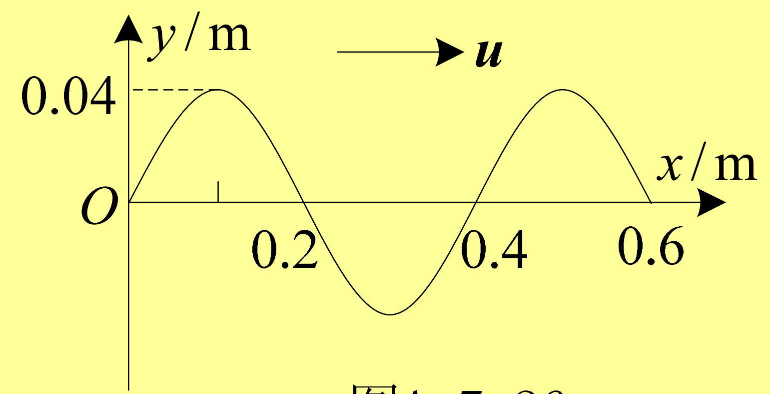
$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega\left(\boldsymbol{t}-\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{u}}\right)+\varphi\right]$$

例 **11** 一平面简谐波在 $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$ 时的波形曲线如图**7 – A – 26**所示，波速 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0.08m/s}$。

（**1**）写出该波的波动表达式；

（**2**）画出$\boldsymbol{t}=\dfrac{\boldsymbol{T}}{\mathbf{8}}$时的波形曲线。



图A-7-26

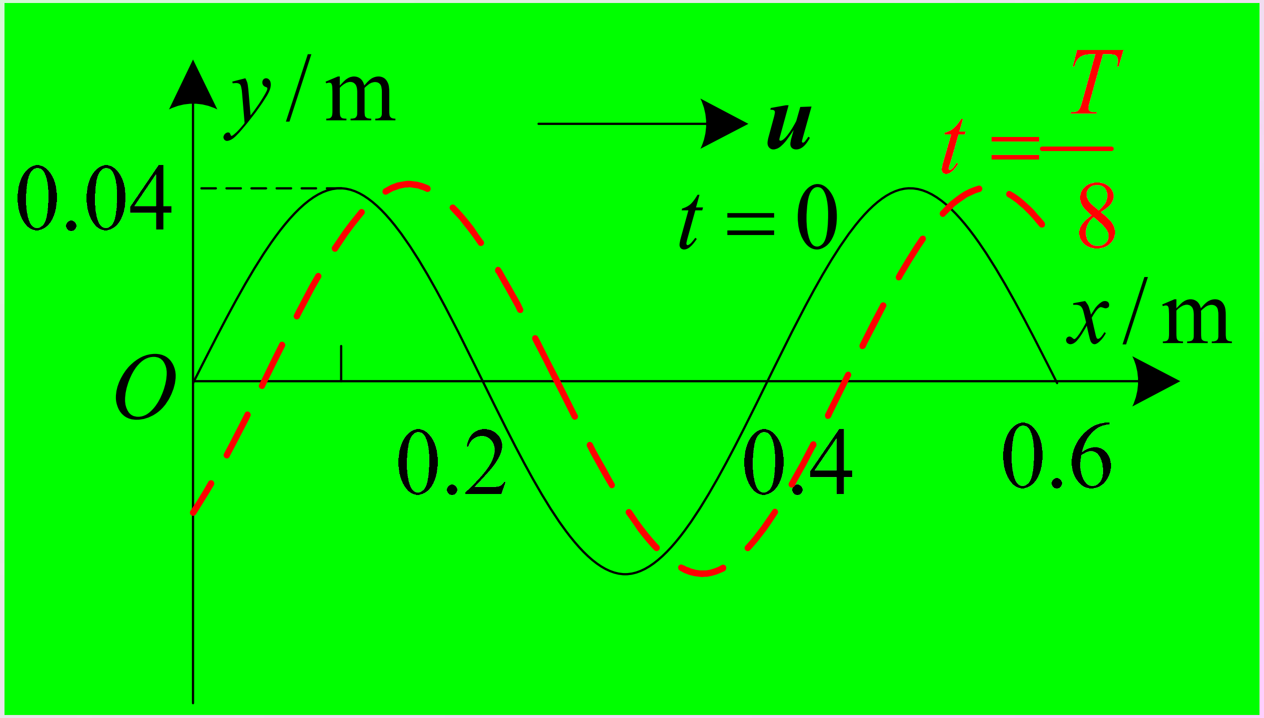
解：（1）由波形曲线知，振幅 $A=0.04$ m，波长 $\lambda=0.4\mathrm{m}$，$\omega=2\pi\dfrac{u}{\lambda}=0.4\pi\,\mathrm{rad/s}$。将$t=0$时刻的波形图略向传播方向移动，可知此时原点处的质点向 y 轴负向运动，即原点处质点的振动初始条件为 $y_0=0$，$v_0<0$，求得其初相位为$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$。原点处质点的振动方程为

$$y=0.04\cos\left[0.4\pi t+\frac{\pi}{2}\right]$$

波的波动表达式为 $y=0.04\cos\left[0.4\pi\left(t-\dfrac{x}{0.08}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$=0.04\cos(0.4\pi t-5\pi x+\frac{\pi}{2})\mathrm{m}$$

（**2**）波动在传播过程中，一周期中波形沿传播方向向前推进一个波长的空间距离，$\frac{T}{8}$后的波形相当于$t=0$时刻的波形向右方推进$\frac{\lambda}{8}$的空间距离，如图中虚线所示。



●波的能量和强度

$$E_k=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$E_P=\frac{1}{2}k\Delta V\frac{\omega^2A^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$E=E_k+E_P=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

波动过程中质元中的动能与势能始终相等。同时达到最大，同时达到最小；

波动过程小体元中能量不守恒，随时间作周期性变化，起到吞吐能量的作用。

能量密度 $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

平均能流 $\overline{P}=\bar{\varepsilon}uS=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2uS$

能流密度 $\vec{I}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\vec{u}$

●波的干涉

相干条件

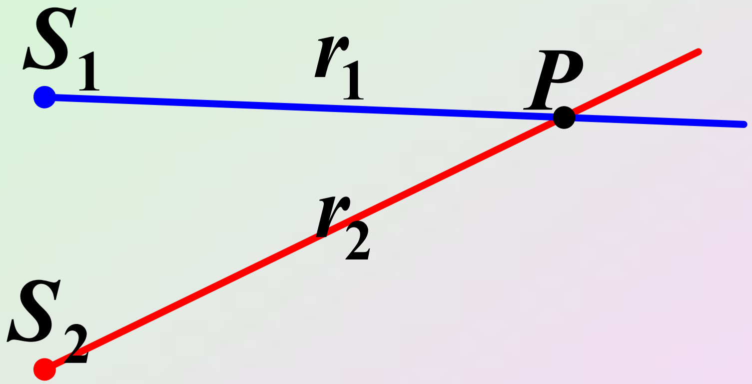
1）两列波的波源具有相同的频率，即波长相同；

2）两波源的相位差恒定。

设两波源的振动表达式为

$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$



P点干涉极大与极小的条件

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2n\pi$

$n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\cdots$ 时

该点的合振幅最大 $A = A_1 + A_2$ 称干涉极大

当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2n+1)\pi$

$n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\cdots$ 时

该点的合振幅最小 $A = |A_1 - A_2|$ 称干涉极小

如果两相干波源初相位相同，即 $\varphi_1 = \varphi_2$

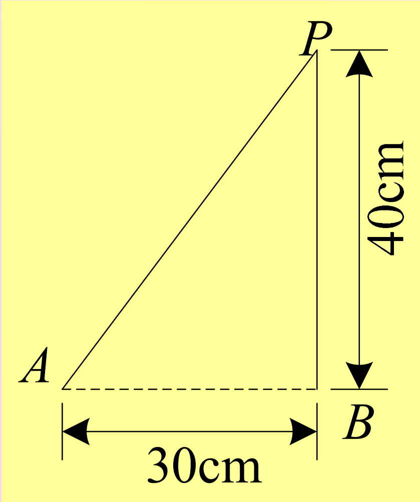
干涉极大的条件为 $\delta = r_1 - r_2 = n\lambda \ , \ n = 0 \, , \pm 1 \, , \pm 2 \ , \cdots$

干涉极小的条件为

$$\delta = r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \ , \ n = 0 \, , \pm 1 \, , \pm 2 \ , \cdots$$

$\delta = r_1 - r_2$ 称为两列波在P点处的波程差。

例 12：如图，A、B 是两个相干的点波源，它们的振动位相差为 π（反相）。A、B 相距 30cm，观察点 P 和 B 点相距 40cm，且 $\overline{PB} \perp \overline{AB}$。若发自 A、B 的两波在 p 点处最大限度地互相削弱，求波长的最大可能值。



解：在 P 点最大限度地减弱，即两振动反相，现两个波源是反相的相干波源，故要求因传播路径不同而引起的位相差应等于 $\pm 2k\pi(k=1,2,\cdots)$

由图 $\overline{AP}=50\,\text{cm}$，$\therefore 2\pi(50-40)/\lambda = 2k\pi$，即 $\lambda = \dfrac{10}{k}\text{cm}$

当 $k=1$ 时，$\lambda_{\max} = 10\,\text{cm}$

例13 一质点在 xOy 平面内作平面运动，其速度随时间的变化为 $\vec{v}=2t\vec{i}+3t^2\vec{j}$（SI），求 $t_1\sim t_2$ 内质点的位移及 t 时刻质点的加速度。

解： $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2t\vec{i}+3t^2\vec{j}$ $\qquad d\vec{r}=\left(2t\vec{i}+3t^2\vec{j}\right)dt$

两边积分得

$$\Delta\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\left(2t\vec{i}+3t^2\vec{j}\right)dt$$

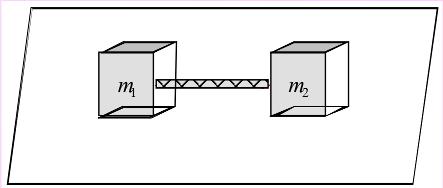
$$=\left(t_2^2\vec{i}+t_2^3\vec{j}\right)-\left(t_1^2\vec{i}+t_1^3\vec{j}\right)=\left(t_2^2-t_1^2\right)\vec{i}+\left(t_2^3-t_1^3\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=2\vec{i}+6t\vec{j}$$

例14 如下图所示，由轻质弹簧相连接的两木块质量分别为m_1和 m_2，静止于光滑水平桌面上。现将两木块相向压紧弹簧，然后由静止释放，发现当弹簧伸长到原长时，m_2 的速率为v_2，求弹簧在开始被压缩状态时所具有的弹性势能(用 m_1 、m_2 、v_2 表示)。

解：弹簧伸缩过程中木块动量守恒，设m_2 的速率为 v_2时m_1的速率为v_1 ，则有：

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \qquad \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2$$



整个过程中能量守恒，两木块的动能由紧压时候的弹性势能转化而来，因此有:

$$E_p = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 (\frac{m_2}{m_1} v_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 (1 + \frac{m_2}{m_1})$$

例15 一弹簧振子沿x轴作简谐振动，已知振动物体最大位移为X_m=0.4m, 最大回复力为F_m=0.8m，最大速度为V_m=0.8πm/s, 若t=0时的初位移为0.2m，且初速度与所选x轴方向相反。

（1）求振动能量。

（2）求此振动的表达式。

解： (1)由题意 $F_m = kA,\quad A = x_m,\quad k = \dfrac{F_m}{x_m}$

$$E = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}F_m x_m = 0.16J$$

(2) $v_m = A\omega,\quad \omega = \dfrac{v_m}{A} = \dfrac{v_m}{x_m}$

$$\omega = 2\pi rad/s,\quad \nu = \omega/2\pi = 1Hz$$

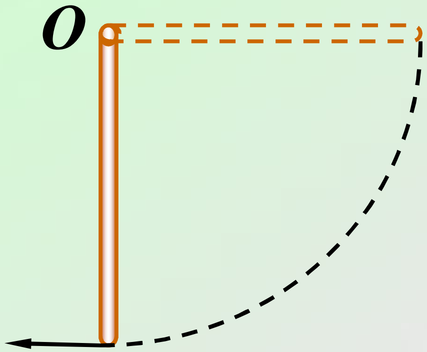
$$t = 0,\quad x_0 = A\cos\phi = 0.2,\quad v_0 = -A\omega\sin\phi < 0,\quad \therefore \phi = \frac{\pi}{3}$$

振动方程为 $x = 0.4\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)\quad (SI)$

例16 均质杆的质量为m，长为l,一端为光滑的支点。最初处于水平位置，释放后杆向下摆动，如图所示。

（1）求杆在图示的竖直位置时，其下端点的线速度v;

（2）求杆在图示的竖直位置时，杆对支点的作用力。



解（1）由机械能守恒得

$$mgh_c = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad h_c = \frac{1}{2}l \qquad J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$v = \sqrt{3gl}$$

（2）由转动定理得

$$F - mg = m\frac{v_c^2}{r_c} \qquad r_c = \frac{1}{2}l, \quad v_c = \frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

$$F = mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg$$ 方向向上．

注意事项

- 带好计算器
- 不要用铅笔答题、作图
- 开考后1个半小时才能交卷
- 千万不能作弊，后果很严重