幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数的概念

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数 .

对 $x_0 \in \mathrm{I}$, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为其收敛点, 所有收敛点的全体称为其收敛域 .

在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称它**为级数的和函数**, 并写成

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和, 即

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

令余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\qquad \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

例如, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1, 1)$，当 $x \in (-1, 1)$ 时, **有和函数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$, **或写作** $|x| \geq 1$.

二、幂级数及其收敛性

形如 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中数列 $a_n \ (n=0,1,\cdots)$ 称为幂级数的系数.

下面着重讨论

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, \ |x|<1$ 即是此种情形.

定理 1.（Abel定理） 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则对满足不等式 $|x| < |x_0|$

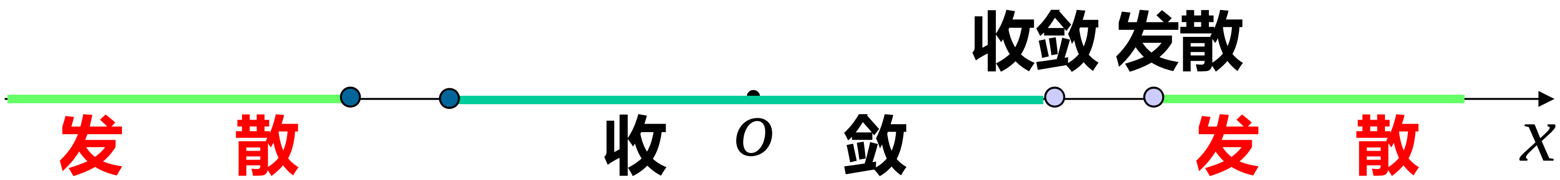
的一切 x 幂级数都**绝对收敛**.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则对满足不等式

$|x| > |x_0|$ 的一切 x，该幂级数也发散.

证：设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，于是存在

常数 $M > 0$，使 $|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$



$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 也收敛，

故原幂级数绝对收敛．

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，下面用反证法证之.

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛，则由前面的证明可知，级数在点 x_0 也应收敛，与所设矛盾，故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散，则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x，原幂级数也发散．

用 $\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点，则

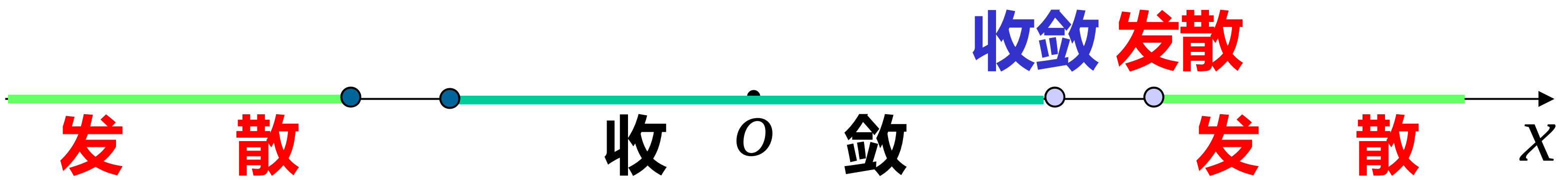
$R = 0$ 时, 幂级数仅在 $x = 0$ 收敛；

$R = \infty$ 时, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛；

$0 < R < \infty$，幂级数在 $(-R, R)$ 收敛；在 $[-R, R]$ 外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散.

R 称为收敛半径，$(-R, R)$ 称为收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域.



定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则

1) 当 $\rho \neq 0$ 时, $R = {}^{1}\!/_{\rho}$;

2) 当 $\rho = 0$ 时, $R = \infty$;

3) 当 $\rho = \infty$ 时, $R = 0$.

证: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho|x|$$

1) 若 $\rho \neq 0$, 则根据比值审敛法可知:

当 $\rho|x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数收敛;

当 $\rho|x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

2) 若$\rho=0$, 则根据比值审敛法可知，对任意 x 原级数绝对收敛，因此 $R=\infty$;

3) 若$\rho=\infty$,则对除 $x=0$ 以外的一切 x 原级发散，因此 $R=0$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

例1.求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径及收敛域.

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x = 1$, 级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x = -1$, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, 发散 .

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2. 求下列幂级数的收敛域：

规定: $0\,!=1$

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

解: (1)

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty\,,+\infty)$.

(2) $\because\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\,!}{(n+1)\,!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

所以级数仅在 $x=0$ 处收敛 .

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ **的收敛半径 .**

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2, 故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\dfrac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

当 $4x^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ **时级数收敛**

当 $4x^2>1$ 即 $|x|>\frac{1}{2}$ **时级数发散**

故收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

例4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$ **的收敛域.**

解: 令 $t = x-1$, **级数变为** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} t^n$

$$\therefore R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n n} \Big/ \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2$$

当 $t = 2$ **时, 级数为** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, **此级数发散;**

当 $t = -2$ **时, 级数为** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, **此级数条件收敛;**

因此级数的收敛域为 $-2 \le t < 2$, **故原级数的收敛域为** $-2 \le x-1 < 2$, **即** $-1 \le x < 3$.

例5　求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$$

解: $$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \therefore R=0,$$

级数只在$x=0$处收敛,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$

$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \quad \therefore R = \frac{1}{2},$

即$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$收敛, $x \in (0,1)$收敛,

当$x=0$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 发散

当$x=1$时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 收敛

故收敛域为(0,1].

三、幂级数的运算

1. 代数运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为 R_1和R_2,

$$R = \min\{R_1, R_2\}$$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x\in(-R,R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1} + \cdots + a_n\cdot b_0)$$

(3) 除法 $\quad$ (收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

(相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多)

说明: 两个幂级数相除所得幂级数的收敛半径可能比原来两个幂级数的收敛半径小得多. 例如, 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0,\ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

它们的收敛半径均为 $R = \infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

2. 和函数的分析运算性质:

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积,且对 $\forall x \in (-R, R)$ 可逐项积分.

即 $\int_0^x s(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$ (收敛半径不变)

(3)　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

(收敛半径不变)

例6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ **的和函数 .**

解：由例2可知级数的收敛半径 $R=+\infty$. **设**

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

故有 $$\left(e^{-x}S(x)\right)'=0$$

因此得 $$S(x)=C\,e^x$$

由$S(0)=1$得$S(x)=e^x$, **故得** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

例7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ **的和函数** $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x = \pm 1$ **时级数发散**, 故当$x \in (-1\,,1)$时,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)'$$

$$= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例8. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **的和函数** $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , 且 $x=-1$时级数**收敛**, 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad (0<|x|<1\ \text{及}\ x=-1)$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x), \qquad (0 < |x| < 1 \text{ 及 } x = -1)$$

而 $S(0) = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right) = 1$,

因此由和函数的连续性得:

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

常用已知和函数的幂级数

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2};\qquad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x;$$

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x;$$

$$(6)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x);$$

常数项级数求和的一种重要方法

幂级数法或**Abel**法

记住几个常见级数的和

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad (|q|<1)$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$