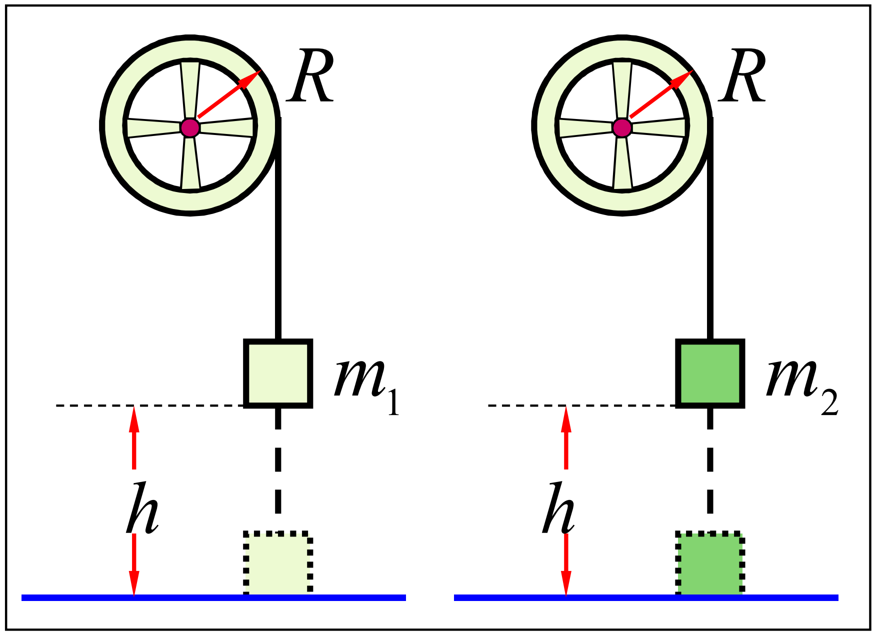
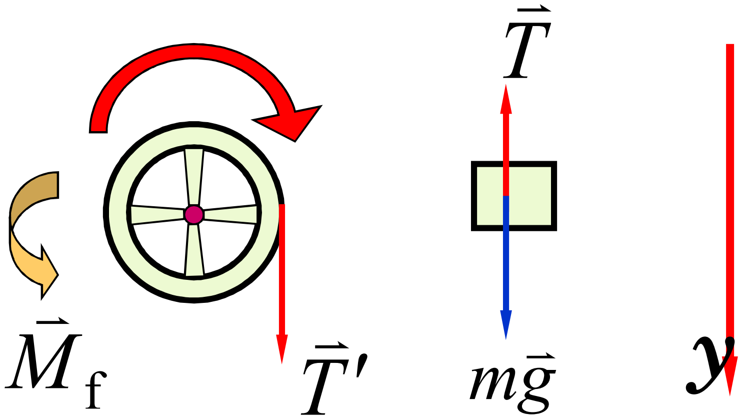
例　求一半径 $R = 50\text{cm}$ 的飞轮对过其中心轴的转动惯量，在飞轮上绕以细绳，绳末端挂一重物，其质量 $m_1 = 8.0\text{kg}$，让其从 $h = 2.0\text{m}$ 处静止下落，测得下落时间 $t_1 = 16\text{s}$；若用质量 $m_2 = 4.0\text{kg}$ 的重物时，$t_2 = 25\text{s}$，　假定摩擦力矩 M_f 是一个常量，求飞轮的转动惯量.



解：受力分析、坐标如图

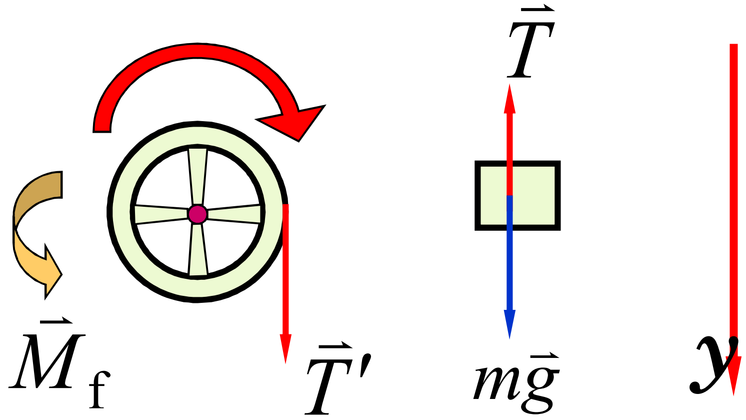


已知：$R=50\text{cm}$ $h=2.0\text{m}$

$m_1=8.0\text{kg}$ $t_1=16\text{s}$

$m_2=4.0\text{kg}$ $t_2=25\text{s}$

$M_\text{f}=C$ 求：$\boldsymbol{J}$



$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a_1 \\ T_1R-M_\text{f}=J\dfrac{a_1}{R} \\ h=\dfrac{1}{2}a_1t_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2g-T_2=m_2a_2 \\ T_2R-M_\text{f}=J\dfrac{a_2}{R} \\ h=\dfrac{1}{2}a_2t_2^2 \end{cases}$$

$$a_1=\frac{2h}{t_1^2}=0.0156\text{m/s}^2$$

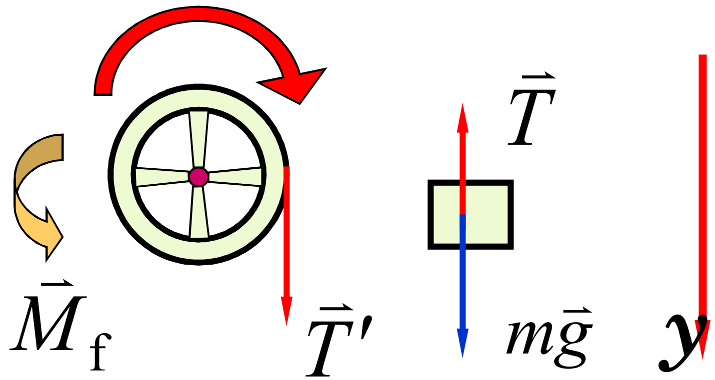
$$a_2=\frac{2h}{t_2^2}=0.0064\text{m/s}^2$$

已知：$R = 50\text{cm} \quad h = 2.0\text{m}$

$m_1 = 8.0\text{kg} \qquad t_1 = 16\text{s}$

$m_2 = 4.0\text{kg} \qquad t_2 = 25\text{s}$

$M_\text{f} = C$ 　　求：$\boldsymbol{J}$



$$\begin{cases} a_1 = 0.0156 \text{ m/s}^2 \\ a_2 = 0.0064 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

$$T_1 = m_1(g - a_1) = 78.3\text{N}$$

$$\text{T}_2 = m_2\left(g - a_2\right) = 39.2N$$

$$\begin{cases} T_1 R - M_\text{f} = J\dfrac{a_1}{R} \\ T_2 R - M_\text{f} = J\dfrac{a_2}{R} \end{cases}$$

$$(a_1 - a_2)J = (T_1 - T_2)R^2$$

$$J = \frac{(T_1 - T_2)R^2}{a_1 - a_2}$$

$$= 1.06 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

5-4 力矩做功 刚体绕定轴转动的动能定理

力的空间累积效应 ⇨ 力的功,动能,动能定理.

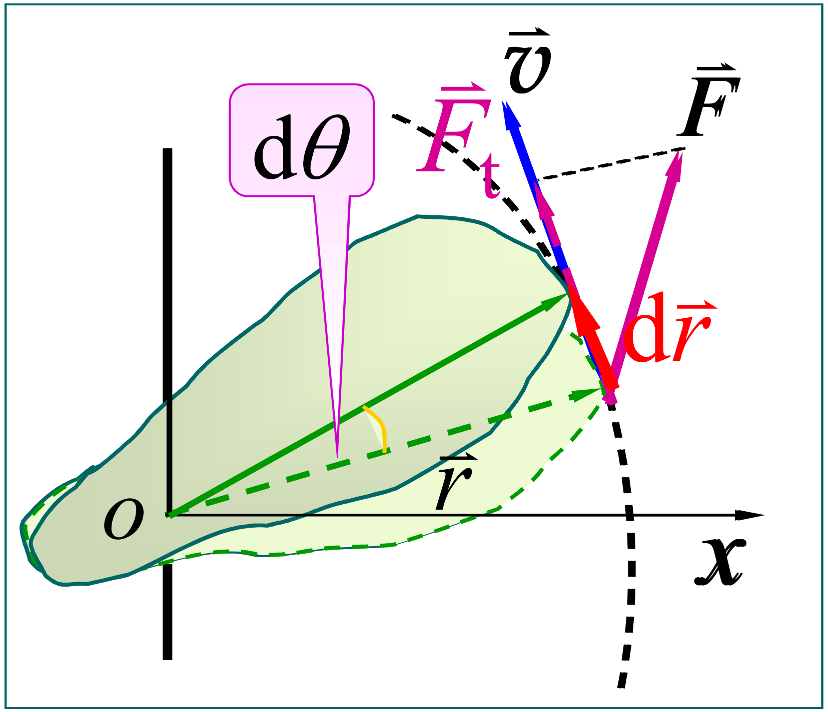
力矩的空间累积效应 ⇨ 力矩的功,转动动能,动能定理.

一 力矩做功

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$

$$=F_{\mathrm{t}}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}W=M\mathrm{d}\theta$$



力矩的功 $\boxed{W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta}$

二 力矩的功率

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M\omega$$

三　转动动能

$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

四　刚体绕定轴转动的动能定理

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_1} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对绕定轴转动的刚体所做的功等于刚体转动动能的增量 .

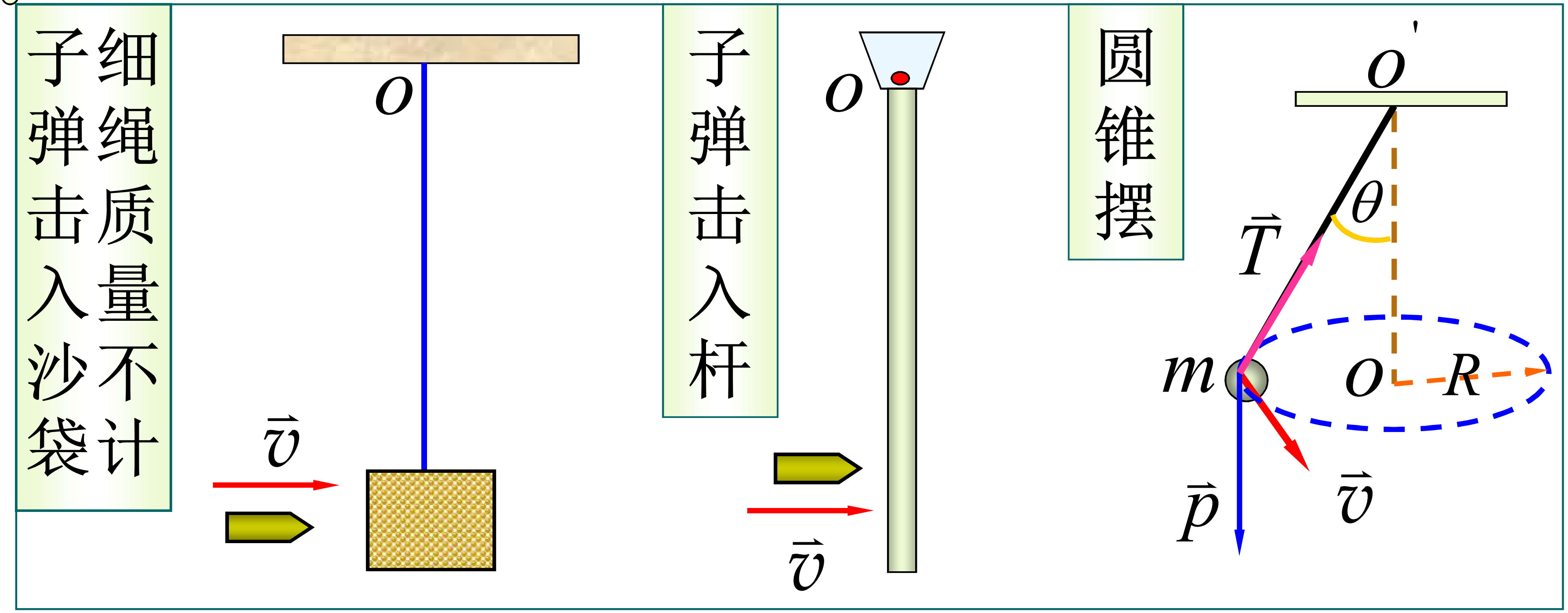
质点运动与刚体定轴转动对照			
质点运动		**刚体定轴转动**	
速度	$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	角加速度	$\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	$\boldsymbol{m}$	转动惯量	$J = \int r^2 \mathrm{d}m$
动量	$\vec{P} = m\vec{v}$	角动量	$\vec{L} = J\vec{\omega}$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照

质点的平动	刚体的定轴转动
运动定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律 $M=J\alpha$
动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0$
动量守恒定律 $\sum\vec{F}_i=0,\sum m_i\vec{v}_i=$恒量	角动量守恒定律 $\vec{M}=0,\sum J_i\vec{\omega}_i=$恒量
力的功 $W=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功 $W=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta$
动能 $E_\mathrm{k}=mv^2/2$	转动动能 $E_\mathrm{k}=J\omega^2/2$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照	
质点的平动	刚体的定轴转动
动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_\mathrm{p} = mgh$	重力势能 $E_\mathrm{p} = mgh_\mathrm{C}$
机械能守恒 只有保守力作功时 $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} =$ 恒量	机械能守恒 只有保守力作功时 $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} =$ 恒量

讨论



以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒；
机械能不守恒．	机械能不守恒．	机械能守恒．

例1 有一吊扇第一档转速为 $n_1 = 7\mathrm{r/s}$，第二档转速为 $n_2 = 10\mathrm{r/s}$. 吊扇转动时要受到阻力矩 M_f 的作用,一般来说， 阻力矩与转速之间的关系要由实验测定，但作为近似计算，我们取阻力矩与角速度之间的关系为 $M_\mathrm{f} = k\omega^2$，其中系数 $k = 2.74\times10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-2}\cdot s^2}$．试求（1）吊扇的电机在这两种转速下所消耗的功率；（2）吊扇由静止匀加速地达到第二档转速经历的时间为 5s．在此时间内阻力矩做了多少功？

解 （1） $P_1=M_{f1}\omega_1=k\omega_1^3=k(2\pi n_1)^3=23.3\mathrm{W}$

$$P_2=M_{f2}\omega_2=k\omega_2^3=k(2\pi n_2)^3=68.0\mathrm{W}$$

已知： $n_1 = 7\text{r/s}$， $n_2 = 10\text{r/s}$； $M_f = k\,\omega^2$， $k = 2.74 \times 10^{-4}\ \text{N·m·rad}^{-2}\text{·s}^2$. 求（2）吊扇由静止匀加速的达到第二档转速经历的时间为 5s．在此时间内阻力矩做了多少功？

解：吊扇由静止作匀角加速度运动

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n_2}{5} \qquad \omega = \alpha t$$

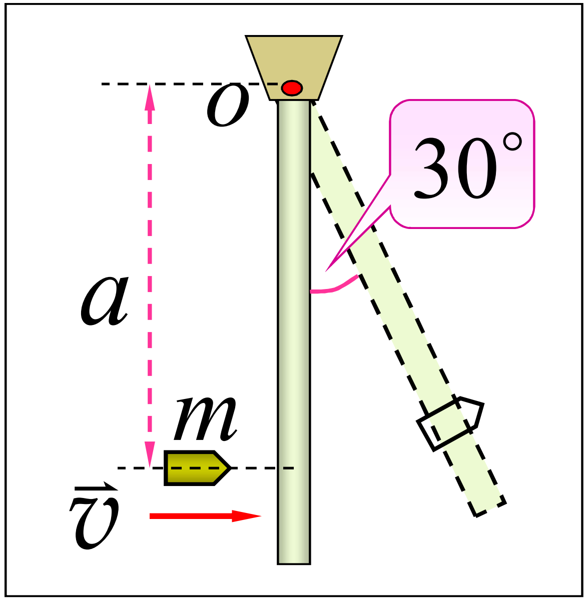
阻力矩做功 $$W = \int M_{f2}\mathrm{d}\theta = \int k\omega^3 \mathrm{d}t$$

$$W = \int_0^t k\alpha^3 t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}k\alpha^3 t^4$$

在 $t = 5\text{s}$ 时间内 $$W = 84.8\,J$$

例2 一长为 l ,质量为 m' 的竿可绕支点O自由转动．一质量为m、速率为v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30°．问子弹的初速率为多少？

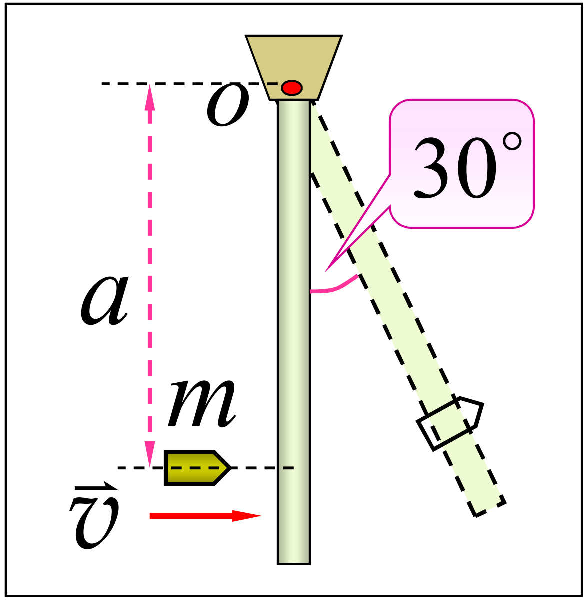
解: 把子弹和竿看作一个系统．子弹射入竿的过程系统角动量守恒



$$mva = \left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$

$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$



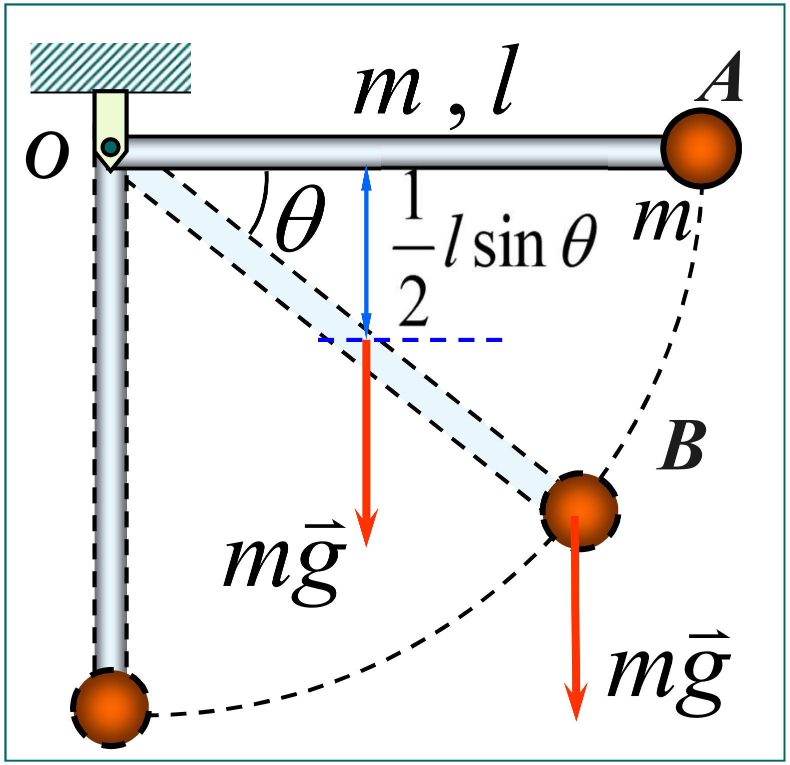
射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒．

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2)\omega^2 =$$

$$mga(1-\cos 30°) + m'g\frac{l}{2}(1-\cos 30°)$$

$$v = \sqrt{g(2-\sqrt{3})(m'l+2ma)(m'l^2+3ma^2)/6}\Big/ma$$

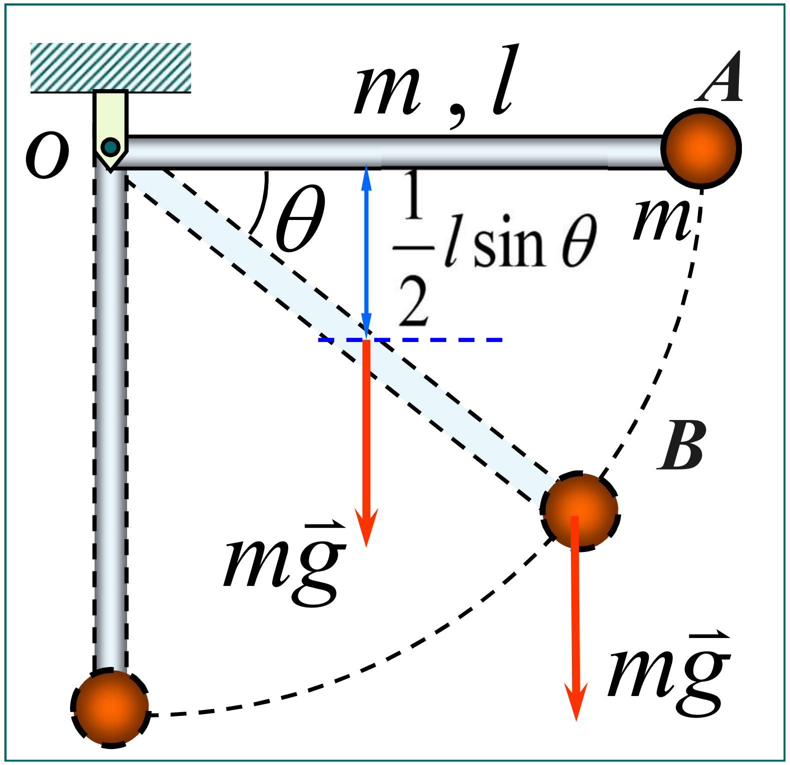
例3　一根长为l、质量为m的均匀细棒，棒的一端可绕通过O点并垂直于纸面的轴转动，棒的另一端有质量为m的小球. 开始时，棒静止地处于水平位置A. 当棒转过θ角到达位置B，棒的角速度为多少?



解: 取小球、细棒和地球为系统, 在棒转动过程中机械能守恒, 设A位置为重力势能零点.

$$E_{\mathrm{kA}} + E_{\mathrm{pA}} = E_{\mathrm{kB}} + E_{\mathrm{pB}}$$

$$E_{\mathrm{kA}} + E_{\mathrm{pA}} = E_{\mathrm{kB}} + E_{\mathrm{pB}}$$



$$E_{\mathrm{kA}} = E_{\mathrm{P}A} = 0$$

$$E_{\mathrm{kB}} = \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad J = J_1 + J_2$$

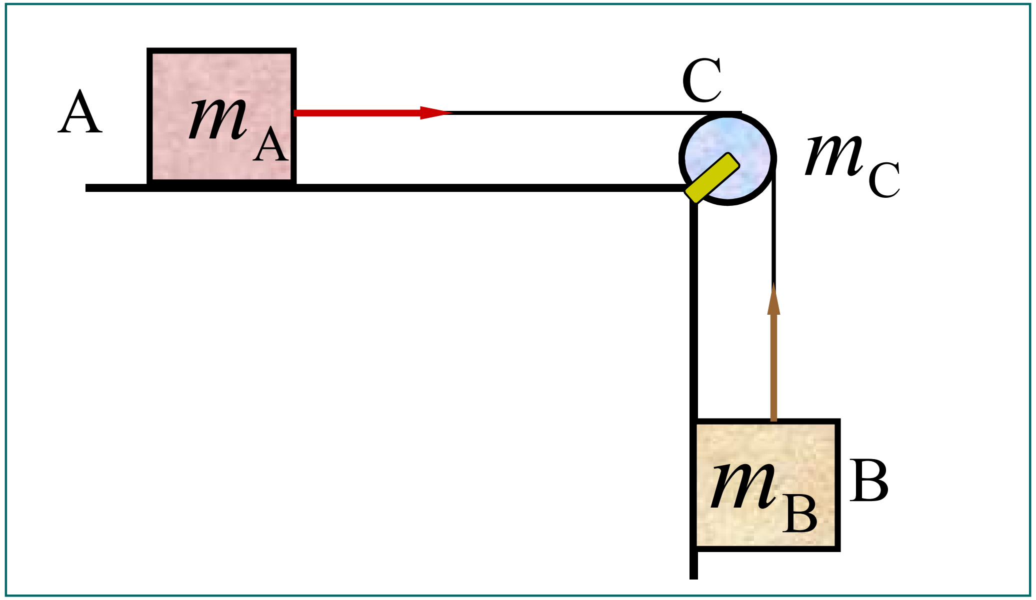
$$J = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

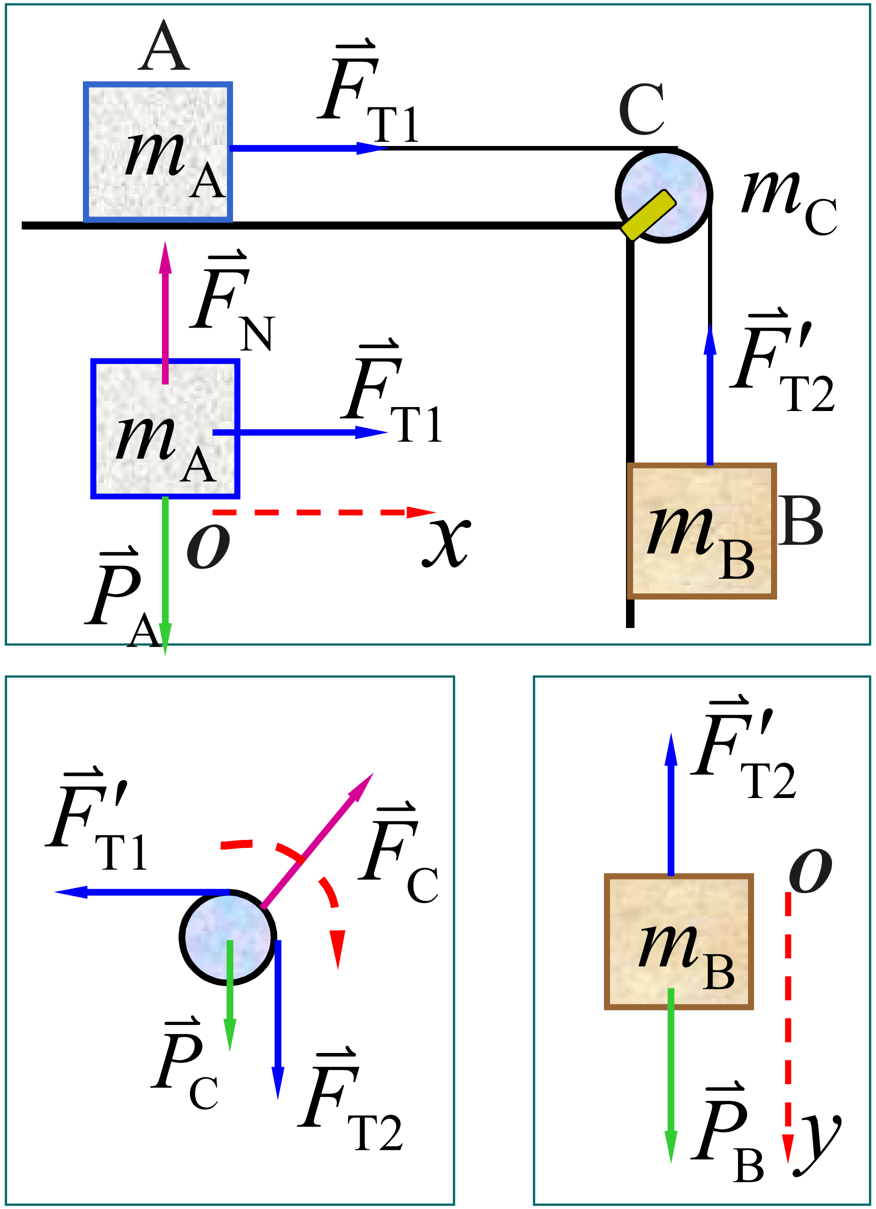
$$E_{\mathrm{pB}} = -(mg\frac{l}{2}\sin\theta + mgl\sin\theta) = -\frac{3}{2} mgl\sin\theta$$

$$0 = \frac{2}{3} ml^2\omega^2 - \frac{3}{2} mgl\sin\theta \qquad \omega = \frac{3}{2}\left(\frac{g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$

习题课

例1　质量为m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上. 滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计. 问：（**1**）两物体的线加速度为多少？水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（**2**）物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？（**3**）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为 M_f 再求线加速度及绳的张力.

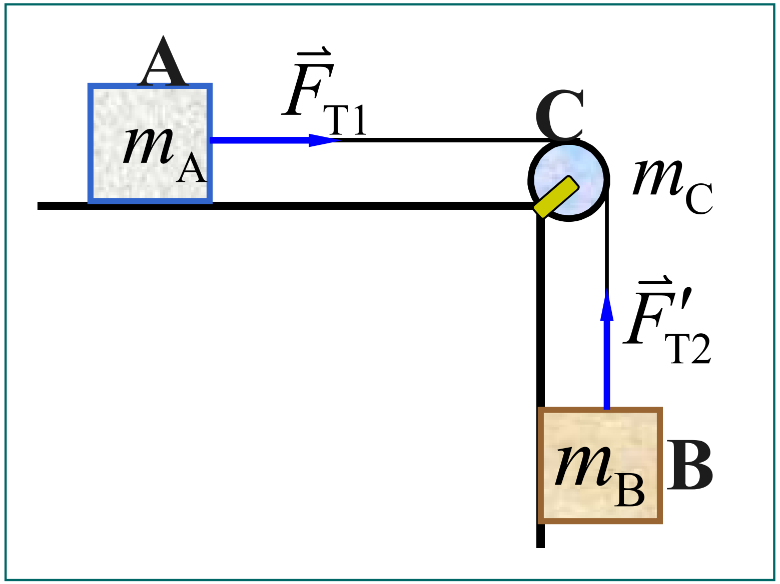




解 （**1**）隔离物体分别对物体A、B 及滑轮作受力分析，取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程．

$$
\begin{cases}
F_{T1} = m_A a \\
m_B g - F_{T2} = m_B a \\
RF_{T2} - RF_{T1} = J\alpha \\
a = R\alpha
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\[2ex]
F_{T1} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\[2ex]
F_{T2} = \dfrac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2}
\end{cases}
$$



如令 $m_C = 0$，可得 $F_{T1} = F_{T2} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$

（2） B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

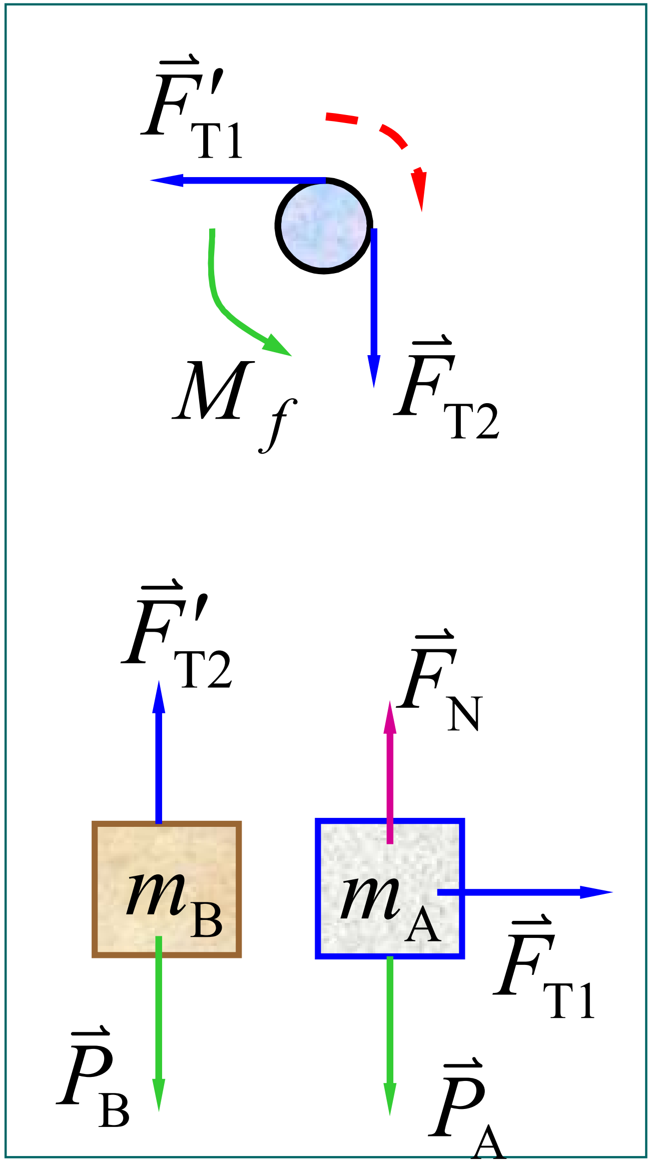
$$
v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2m_B g y}{m_A + m_B + m_C/2}}
$$

（3） 考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_{f}，转动定律

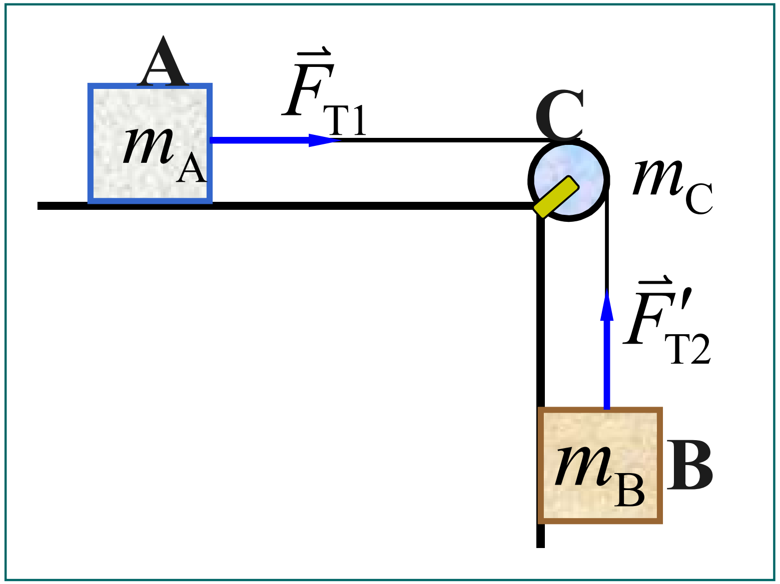
$$RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\
m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\
R F_{\mathrm{T2}} - R F_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\
a = R\alpha
\end{cases}
$$



$$
a = \frac{m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}} / R}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2} \qquad F_{\mathrm{T1}} = \frac{m_{\mathrm{A}} (m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}} / R)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2}
$$

$$
F_{\mathrm{T2}} = \frac{m_{\mathrm{B}} \left[(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}} / 2)\, g + M_{\mathrm{f}} / R \right]}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2}
$$

例2 一滑冰者开始转动时 $E_{k0}=J_0\omega_0^2/2$，然后将手臂收回，使转动惯量减少为原来的 **1/3**，求此时的转动动能.

注意：刚体定轴转动内力矩的功之和为零，非刚体不一定.

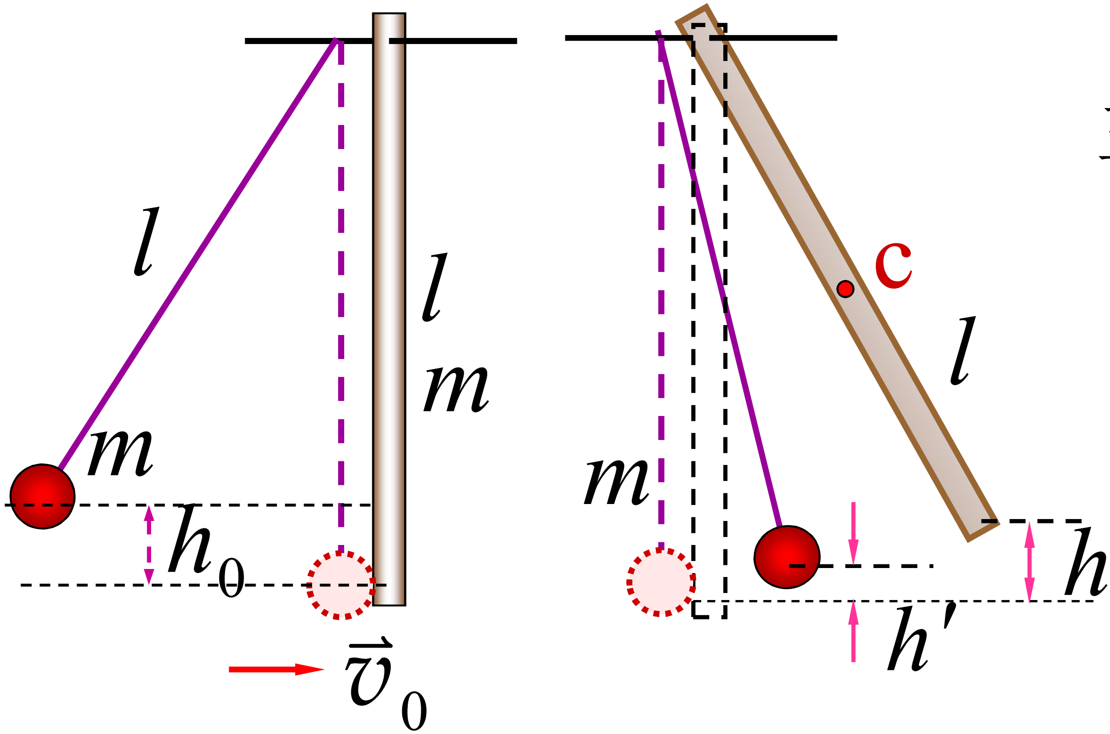
解：外力矩为零，角动量守恒

$$J_0\omega_0=\frac{1}{3}J_0\omega \qquad \omega=3\omega_0$$

内力做功，转动动能变化

$$E_{k0}=\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 \quad < \quad E_k=\frac{1}{2}\frac{J_0}{3}9\omega_0^2=\frac{3}{2}J_0\omega_0^2$$

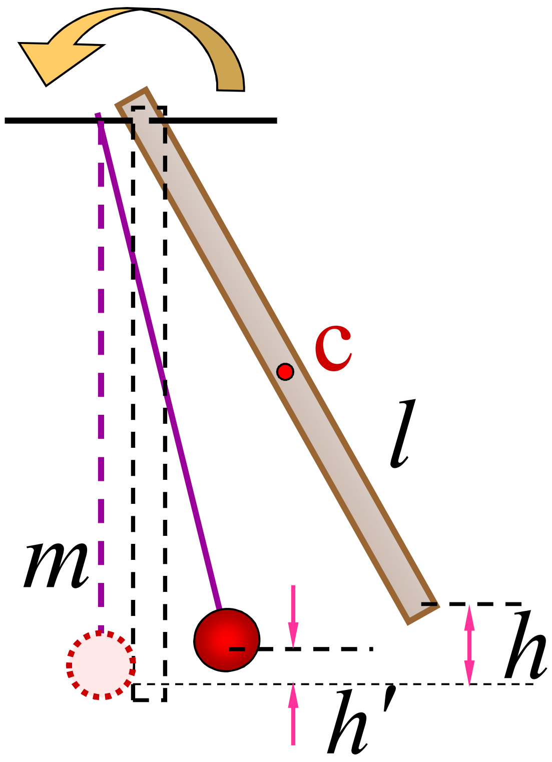
例3 把单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点，杆与单摆的摆锤质量均为 m . 开始时直杆自然下垂，将单摆摆锤拉到高度 h_0 ，令它自静止状态下摆，于垂直位置和直杆作弹性碰撞. **求** 碰后直杆下端达到的高度 h .



解： 此问题分为三个阶段

1） 单摆自由下摆（机械能守恒），与杆碰前速度

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$



$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

2）摆与杆弹性碰撞（摆，杆）

角动量守恒 $$mlv_0 = J\omega + mlv$$

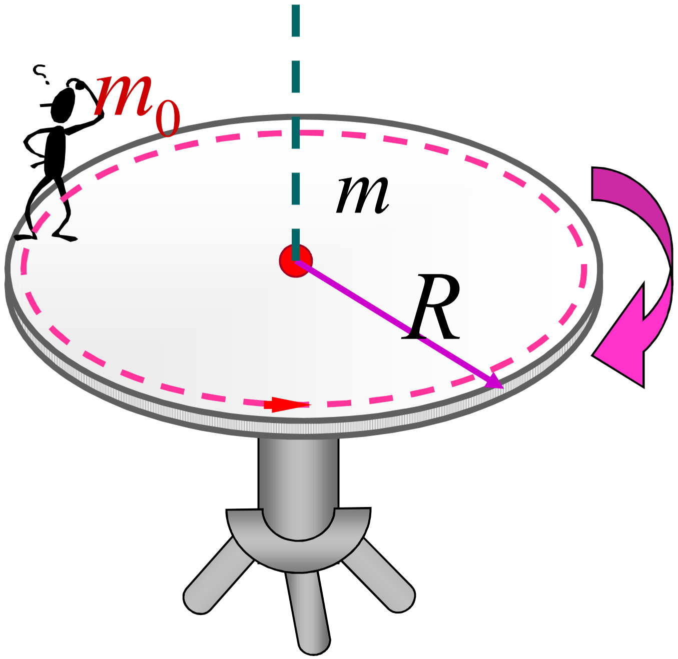
机械能守恒 $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$v = \frac{1}{2}v_0 \qquad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

3）碰后杆上摆，机械能守恒（杆，地球）

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mgh_c \qquad h = 2h_c = \frac{3}{2}h_0$$

例4 质量m，半径 R 的均匀圆盘可绕过中心的光滑竖直轴自由转动. 在盘缘站一质量为 m_0的人，开始人和盘都静止，当人在盘缘走一圈时，盘对地面转过的角度.



解：盘和人为系统，角动量守恒。

设：ω_0 ,ω 分别为人和盘相对地的角速度，顺时针为正向.

$$\frac{1}{2}mR^2\omega - m_0R^2\omega_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = m_0R^2\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{2}mR^2\mathrm{d}\theta = m_0R^2\int_0^{\boxed{2\pi-\theta}}\mathrm{d}\theta_0$$

顺时针向

$$\theta = \frac{2m_0}{2m_0+m}\times 2\pi$$

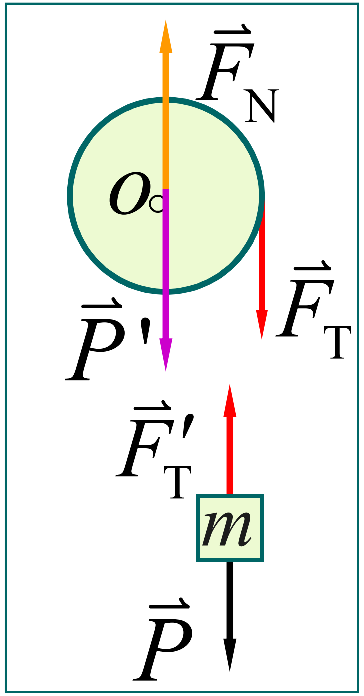
例5 一质量为 m'、半径为 R 的圆盘，可绕一垂直通过盘心的无摩擦的水平轴转动．圆盘上绕有轻绳，一端挂质量为m 的物体．问物体在静止下落高度 h 时，其速度的大小为多少？设绳的质量忽略不计．

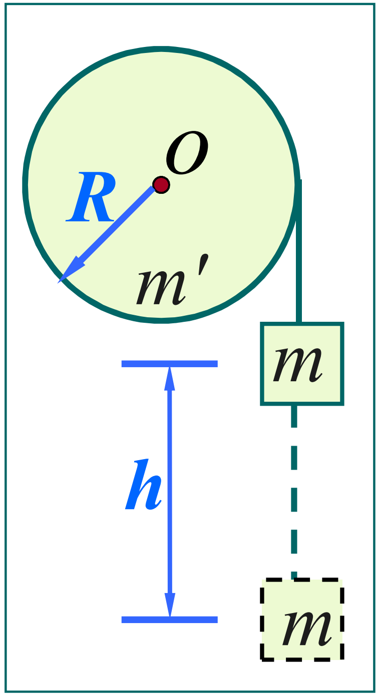
解 拉力 $\vec{F}_{\mathrm{T}}$ 对圆盘做功，由刚体绕定轴转动的动能定理可得，拉力 $\vec{F}_{\mathrm{T}}$ 的力矩所做的功为

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_{\mathrm{T}} R \mathrm{d}\theta = R\int_{\theta_0}^{\theta} F_{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta$$

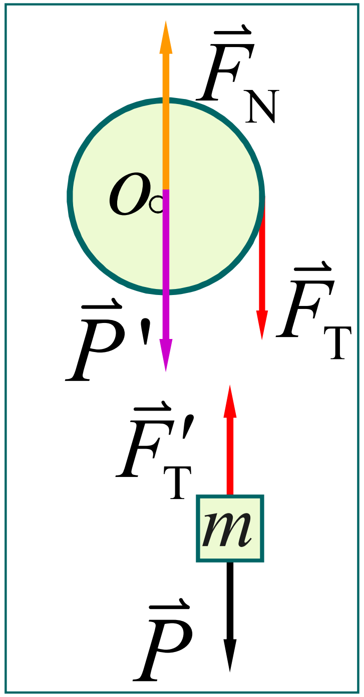
$$=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

θ,θ_0 和 ω 、ω_0 分别为圆盘终了和起始时的角坐标和角速度．





$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_{\mathrm{T}} R \mathrm{d}\theta = R\int_{\theta_0}^{\theta} F_{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$



由质点动能定理 $\quad \vec{F}_{\mathrm{T}} = -\vec{F}_{\mathrm{T}}'$

$$mgh - R\int_{\theta_0}^{\theta} F_{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

物体由静止开始下落 $v_0 = 0, \omega_0 = 0$

并考虑到圆盘的转动惯量 $J = \dfrac{1}{2}m'R^2 \qquad v = \omega R$

解得 $\quad v = 2\sqrt{\dfrac{mgh}{m' + 2m}} = \sqrt{\dfrac{m}{(m'/2) + m}2gh}$