

# 第六章 机械振动

## 6-1 简谐运动



- ◆ 任一物理量在某一定值附近往复变化均称为**振动**.
- ◆ **机械振动** 物体围绕一固定位置往复运动.  
运动形式：直线、平面和空间振动.  
例如一切发声体、心脏、海浪起伏、地震以及晶体中原子的振动等.

- ◆ 周期和非周期振动
- ◆ **简谐运动** 最简单、最基本的振动.

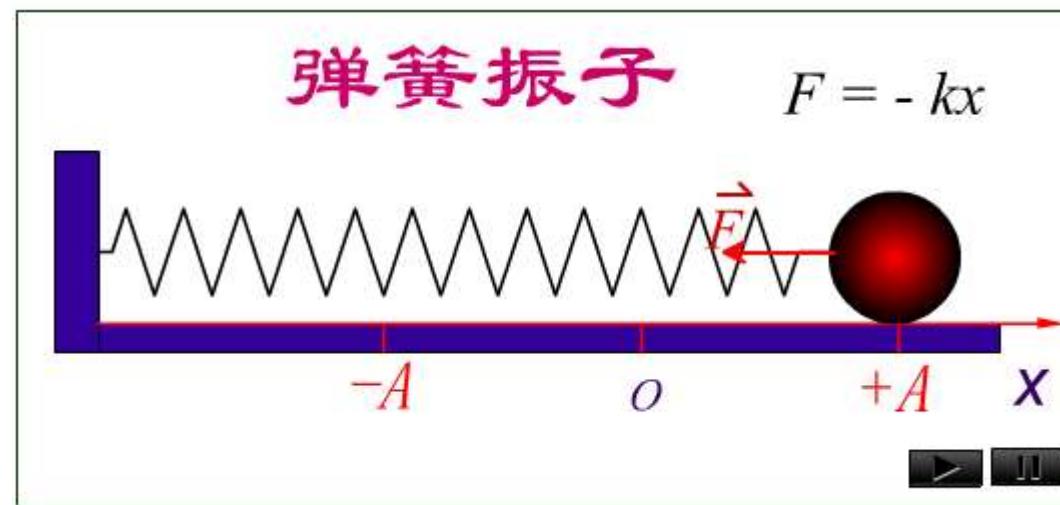
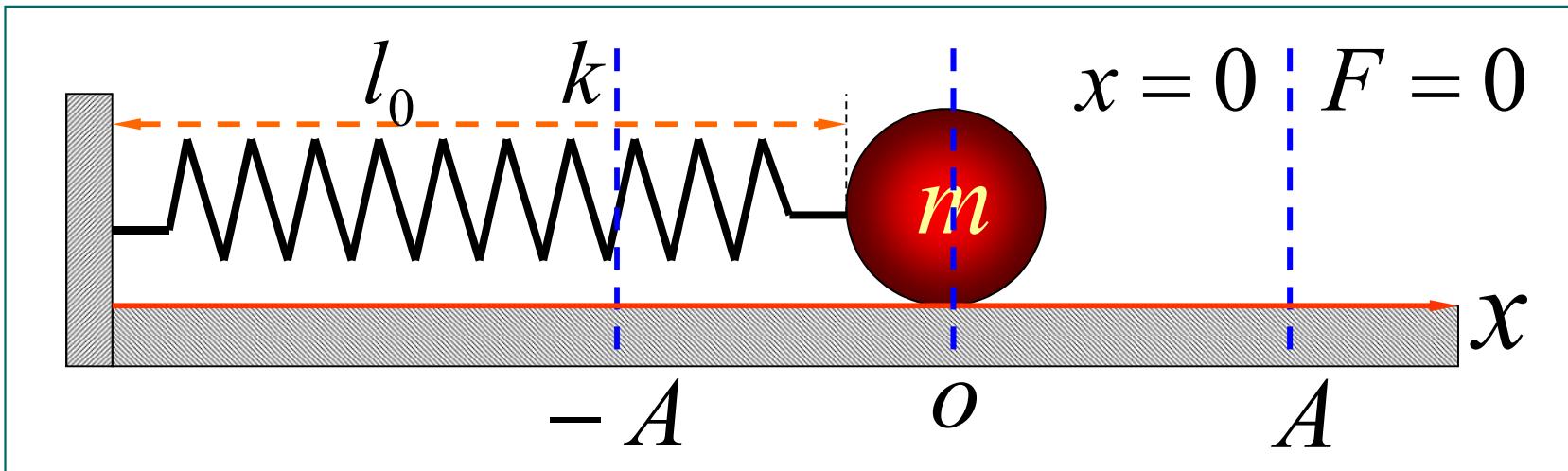


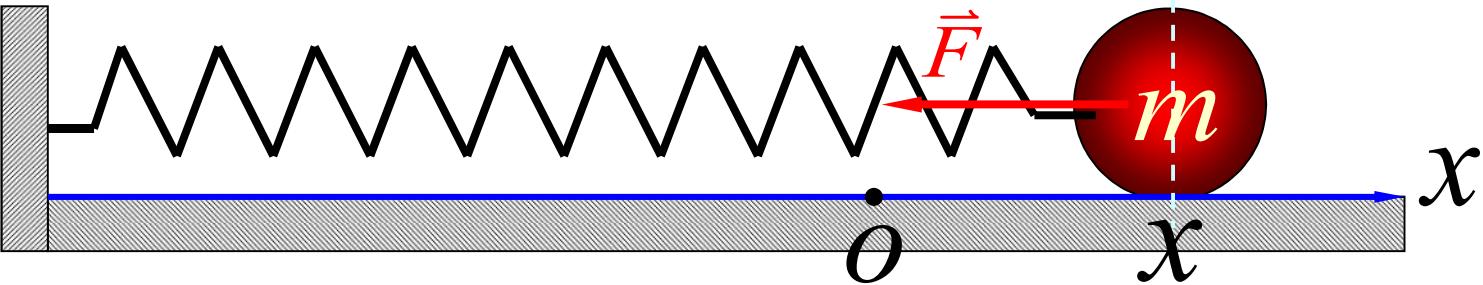
- ◆ **谐振子**：作简谐运动的物体.



# 一 简谐运动

## ◆ 弹簧振子的振动





$$F = -kx = ma$$

令  $\omega^2 = k/m$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

积分常数，根据初始条件确定

$$a = -\omega^2 x$$

$a$  与  $x$  方向相反

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

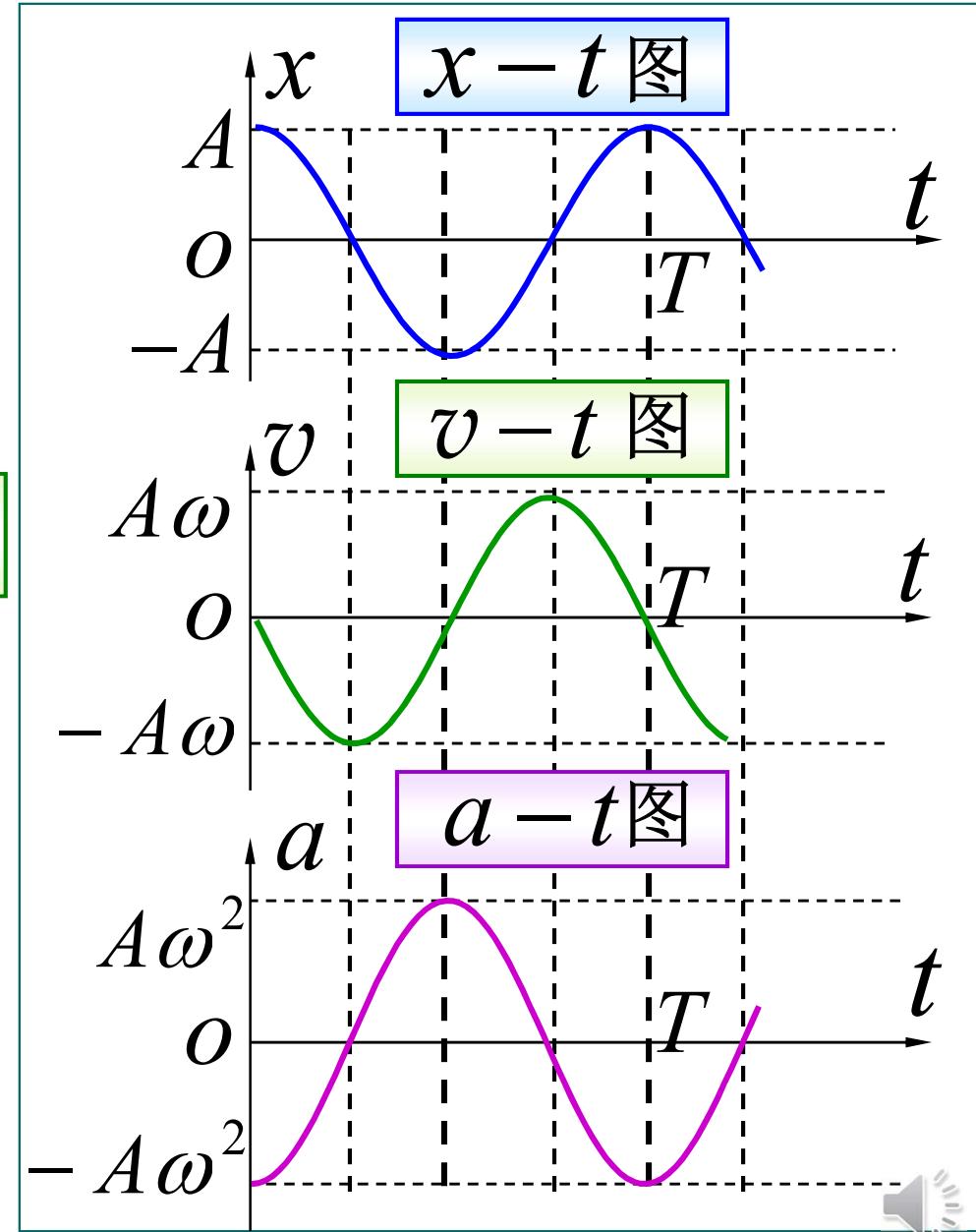
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{取 } \varphi = 0$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



## 二 振幅

$$A = |x_{\max}|$$

## 三 周期、频率

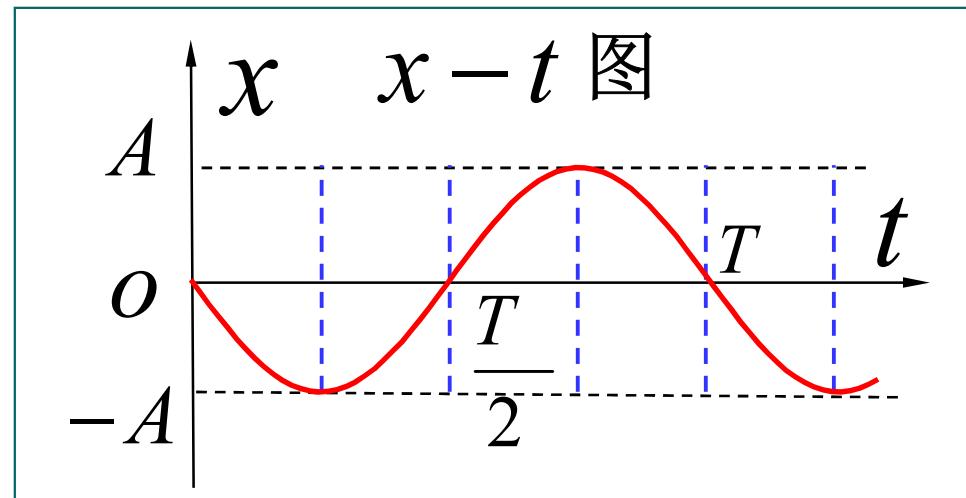
$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A \cos[\omega(t + T) + \varphi]$$

◆ 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

◆ 频率  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

◆ 圆频率  $\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$



弹簧振子周期

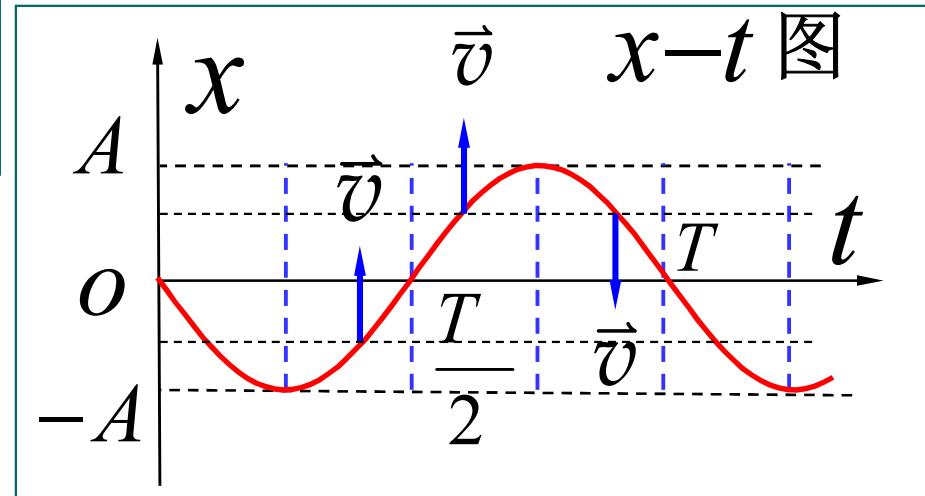
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期和频率仅与振动系统  
本身物理性质有关



简谐运动中， $x$ 和 $v$ 间不存在一一对应的关系.

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



#### 四 相位 $\omega t + \varphi$

- 1)  $\omega t + \varphi \rightarrow (x, v)$  存在一一对对应的关系；
- 2) 相位在  $0 \sim 2\pi$  内变化，质点无相同的运动状态；  
相差  $2n\pi$  ( $n$ 为整数) 质点运动状态全同. (周期性)
- 3) 初相位  $\varphi(t=0)$  描述质点初始时刻的运动状态.  
( $\varphi$  取  $[-\pi \rightarrow \pi]$  或  $[0 \rightarrow 2\pi]$ )



## 五 常数 $A$ 和 $\varphi$ 的确定

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件  $t = 0$   $x = x_0$   $v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases} \xrightarrow{\text{ }} \left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} \end{array} \right.$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，  
振幅和初相由初始条件决定。



讨论

已知  $t = 0, x = 0, v < 0$  求  $\varphi$

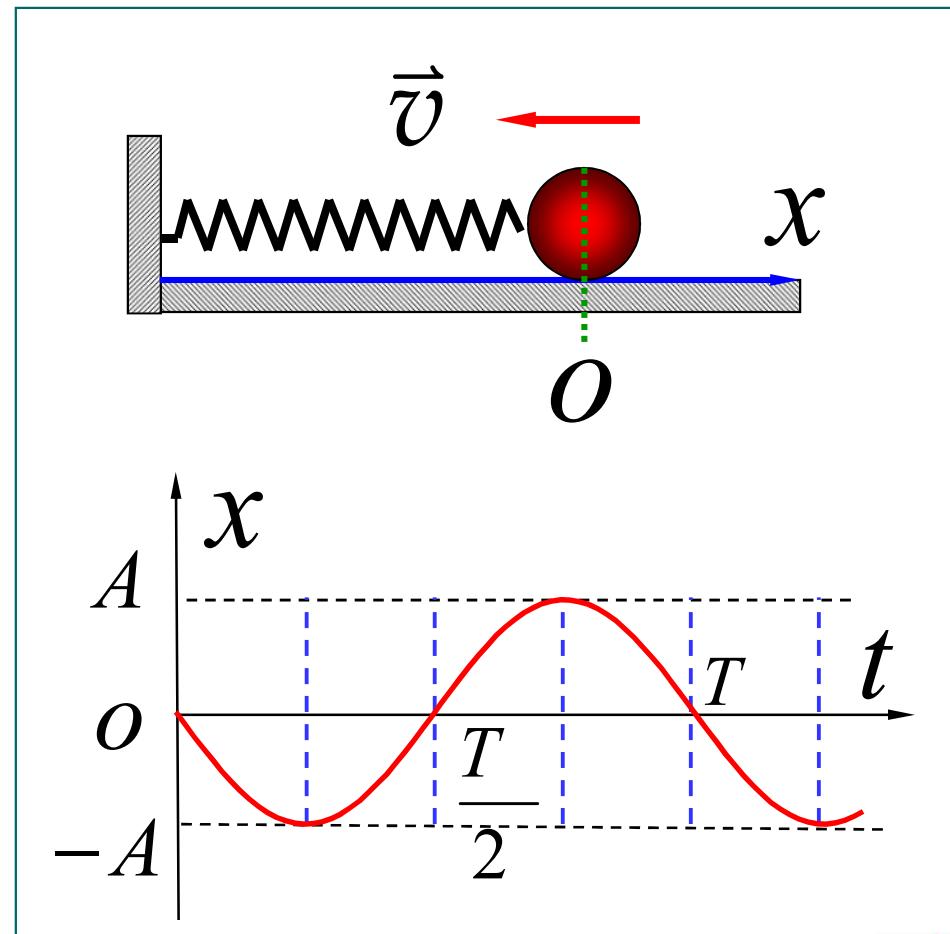
$$0 = A \cos \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega \sin \varphi < 0$$

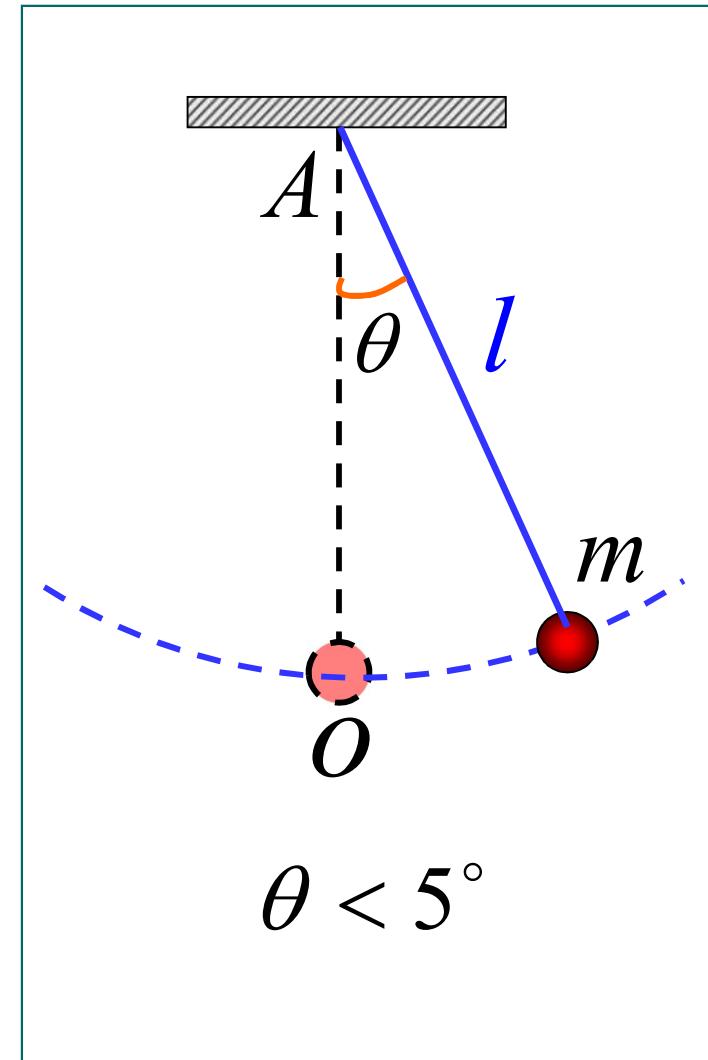
$$\therefore \sin \varphi > 0 \text{ 取 } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



**例1** 如图所示系统（细线的质量和伸长可忽略不计），细线静止地处于铅直位置，重物位于 $O$ 点时为平衡位置。

若把重物从平衡位置 $O$ 略微移开后放手，重物就在平衡位置附近往复的运动。这一振动系统叫做**单摆**。求单摆小角度振动时的周期。



$$\theta < 5^\circ$$



解  $\theta < 5^\circ$  时,  $\sin \theta \approx \theta$

$$M = -mgl \sin \theta \approx -mgl\theta$$

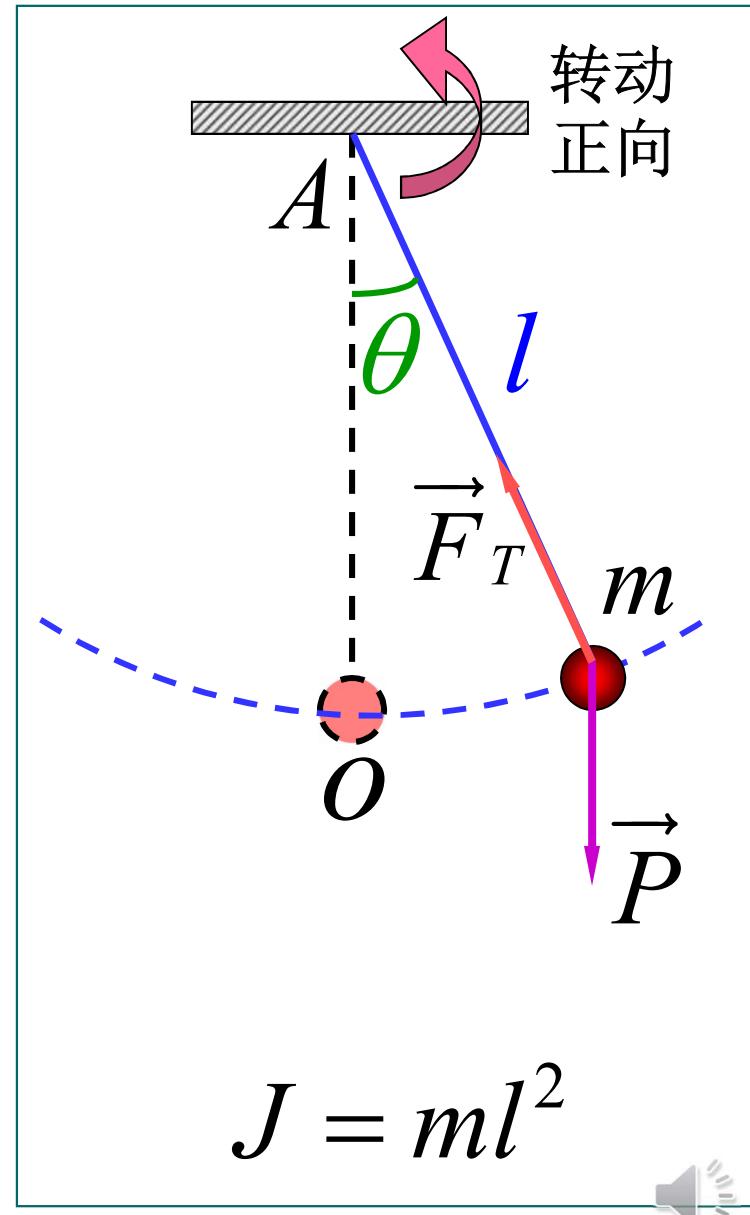
$$-mgl\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad \text{令 } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$



➤ 简谐运动的判断（满足其中一条即可）

1) 物体受线性回复力作用

$$F = -kx \quad \text{平衡位置 } x = 0$$

2) 简谐运动的动力学描述

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

3) 简谐运动的运动学描述

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

(在无外驱动力的情况下)

$$v = -A \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ 简谐运动的特征  $a = -\omega^2 x$

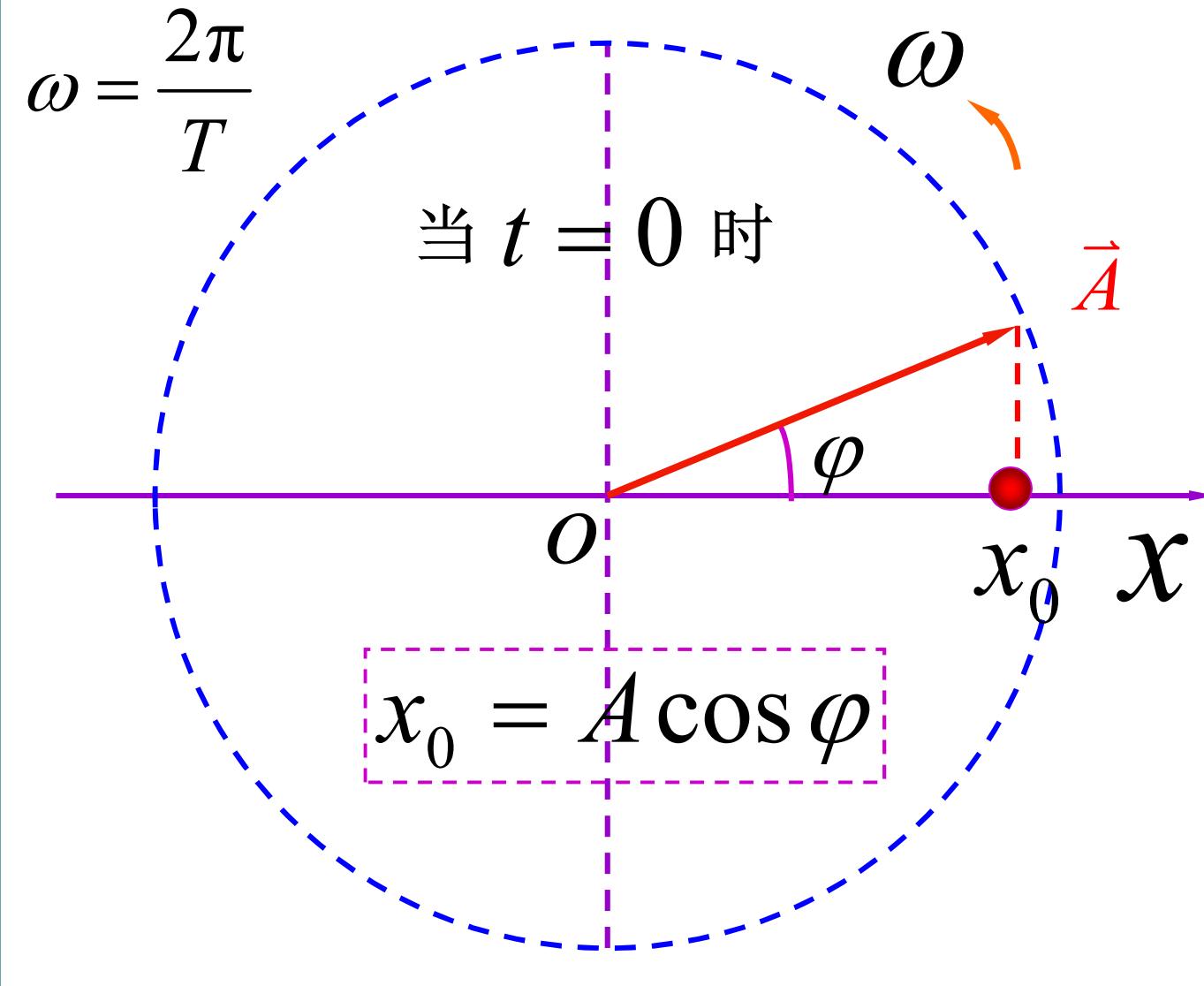
弹簧振子  $\omega = \sqrt{k/m}$

单摆  $\omega = \sqrt{g/l}$

(由振动系统本身性质决定)



## 6-2 旋转矢量



以  $O$  为原点旋转矢量  $\vec{A}$  的端点在  $x$  轴上的投影点的运动为简谐运动.



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$t = t$  时

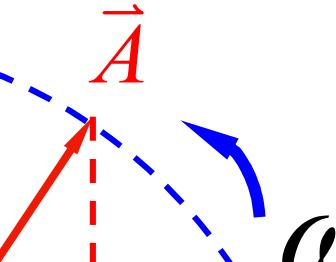
$O$

$x$

$x_0$

$x$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

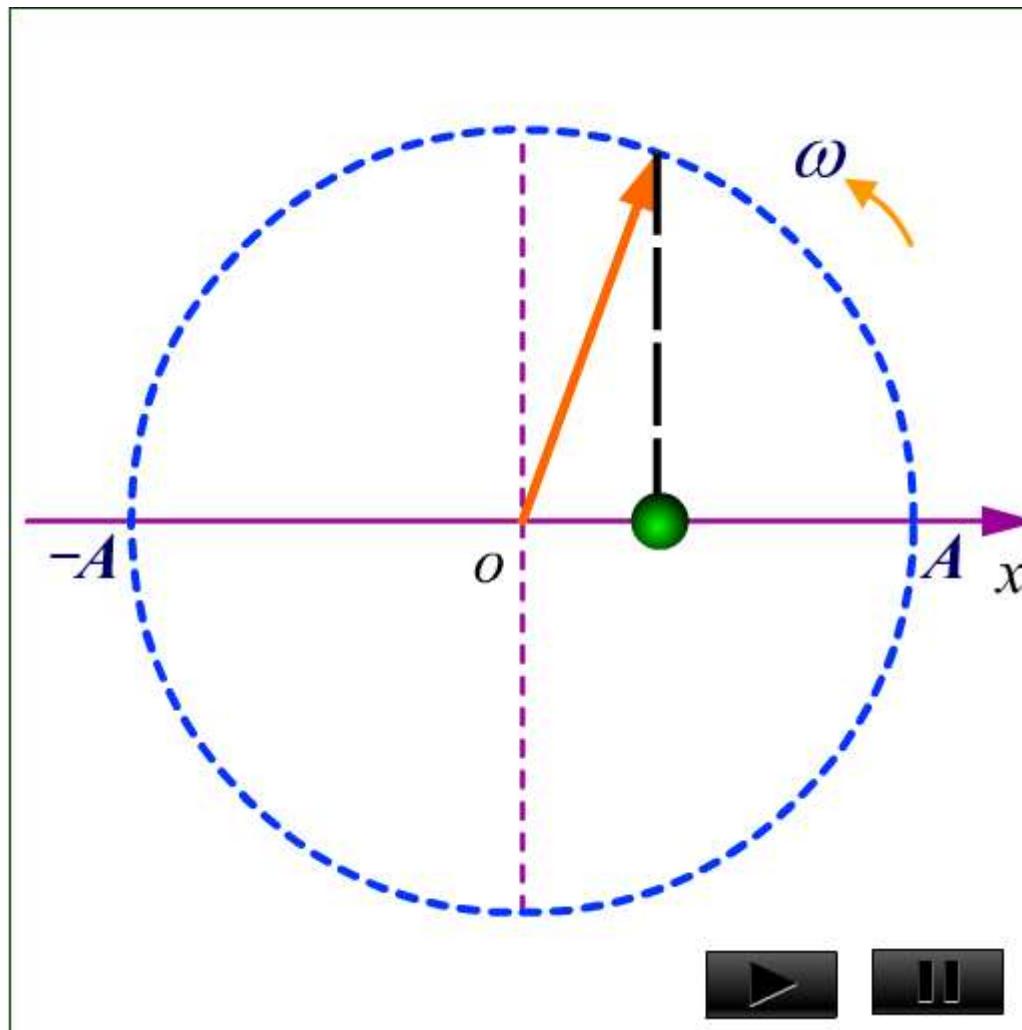


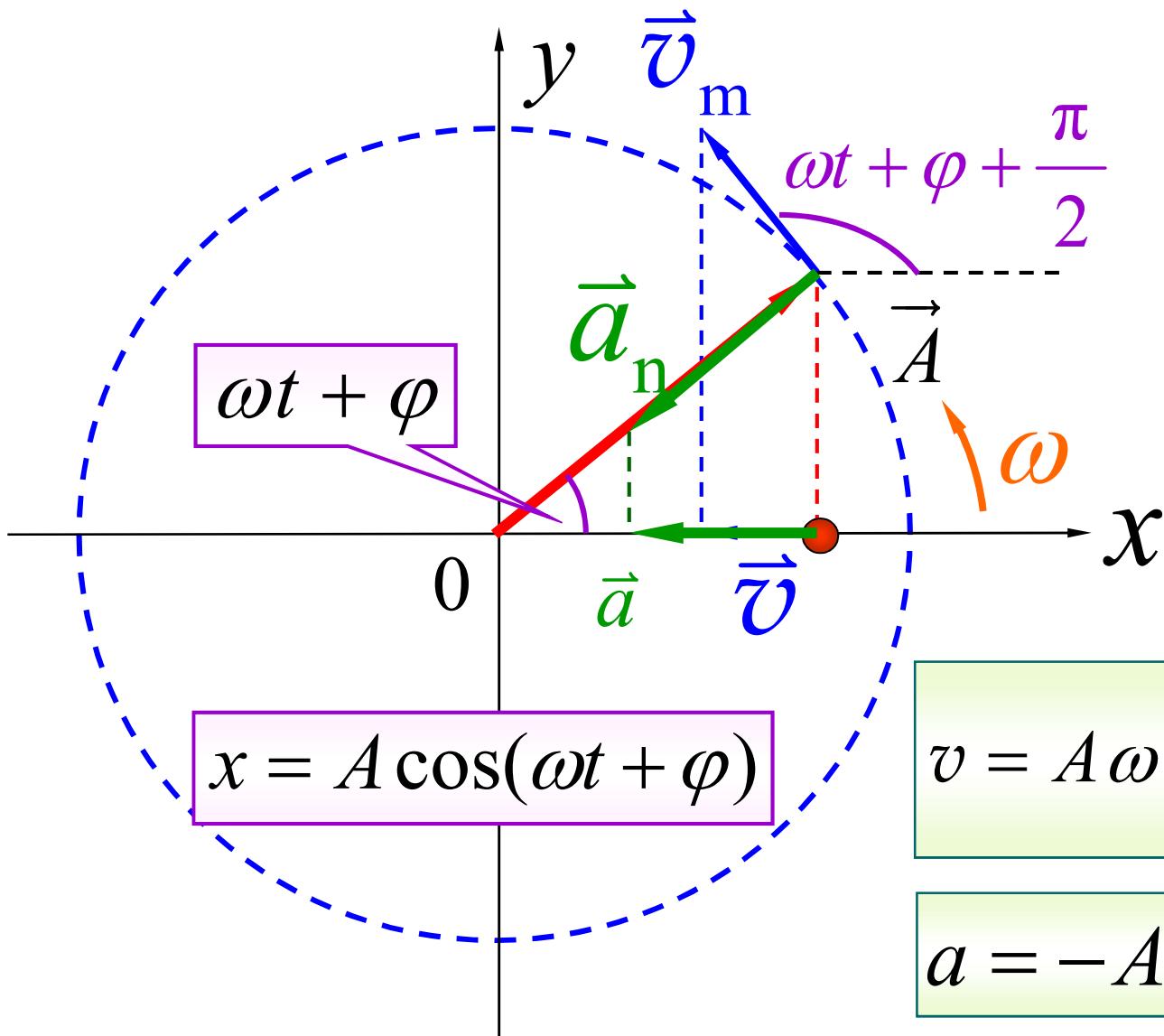
以  $O$  为原点旋转矢量  $\vec{A}$  的端点在  $x$  轴上的投影点的运动为简谐运动.



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量  $\vec{A}$  的端点在  $x$  轴上的投影点的运动为简谐运动.





$$v_m = A\omega$$

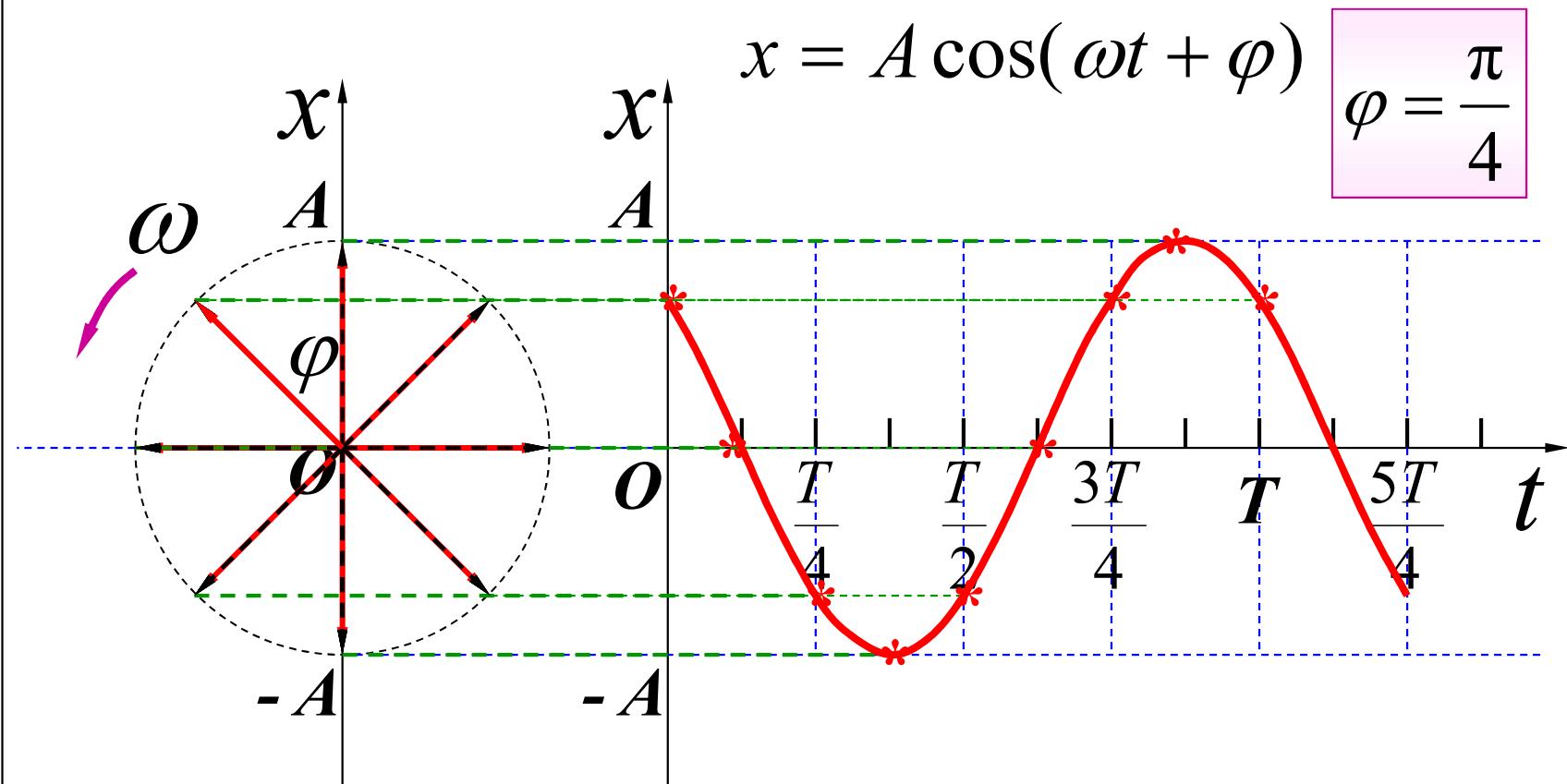
$$a_n = A\omega^2$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



## 用旋转矢量图画简谐运动的 $x - t$ 图

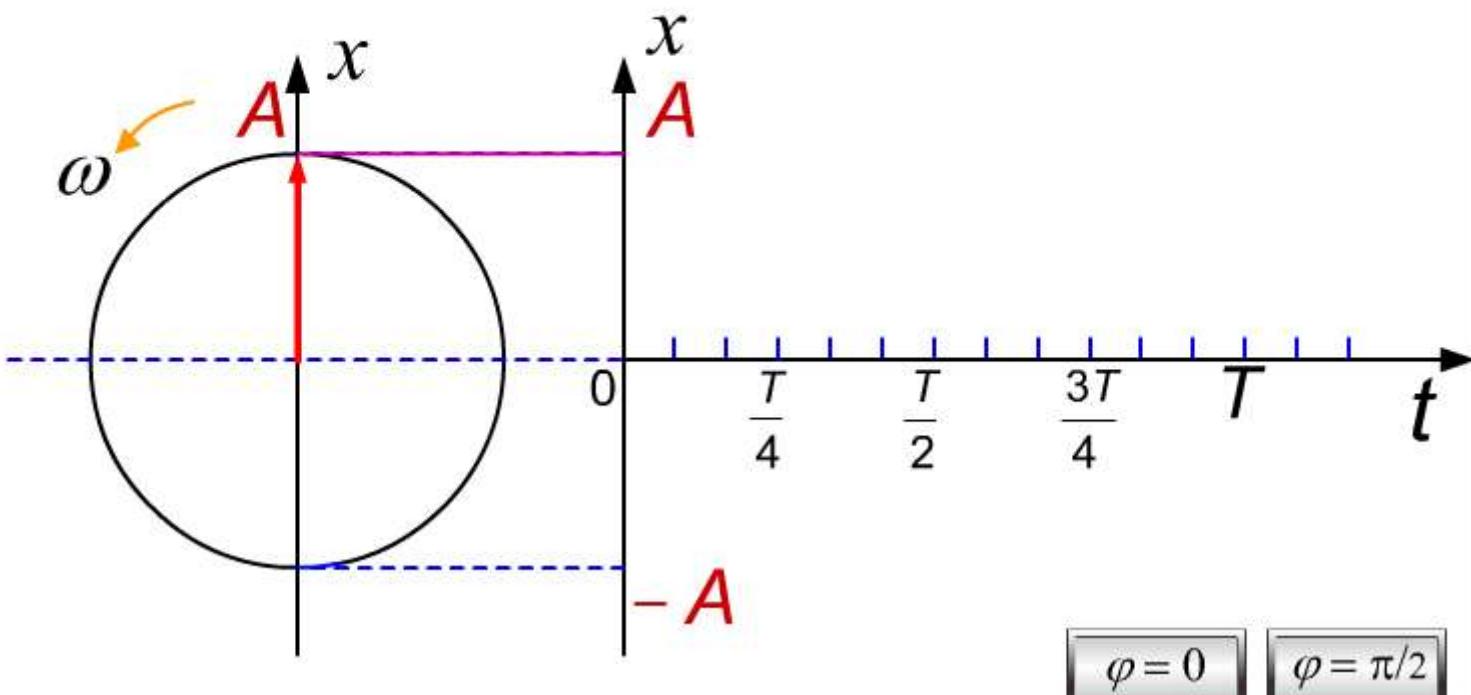


$$T = 2\pi/\omega \text{ (旋转矢量旋转一周所需的时间)}$$



## 用旋转矢量图画简谐运动的 $x - t$ 图

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



$T = 2\pi/\omega$  (旋转矢量旋转一周所需的时间)

## 讨论

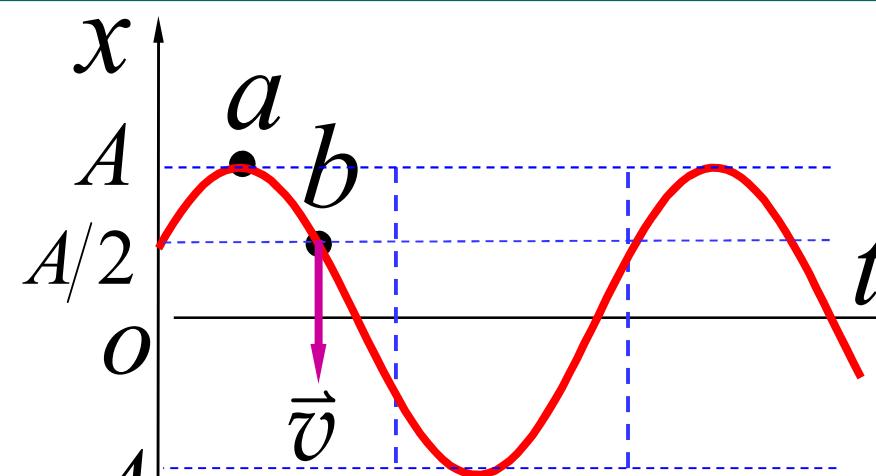
➤ 相位差：表示两个相位之差。

1) 对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间。 $\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$

$$x = A \cos(\omega t_1 + \varphi)$$

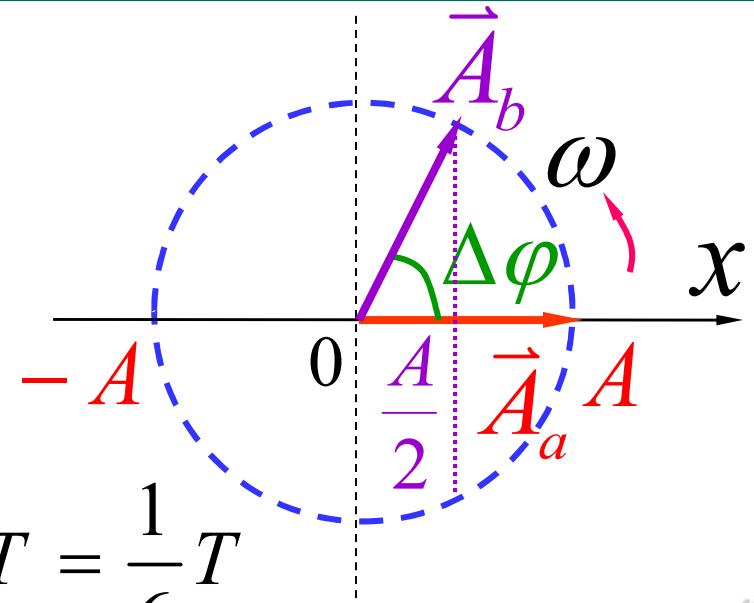
$$x = A \cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi} T = \frac{1}{6} T$$



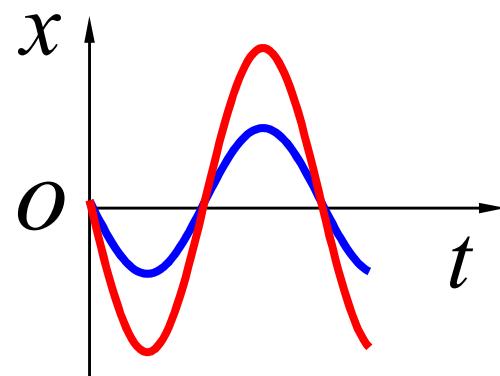
2) 对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。(解决振动合成问题)

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

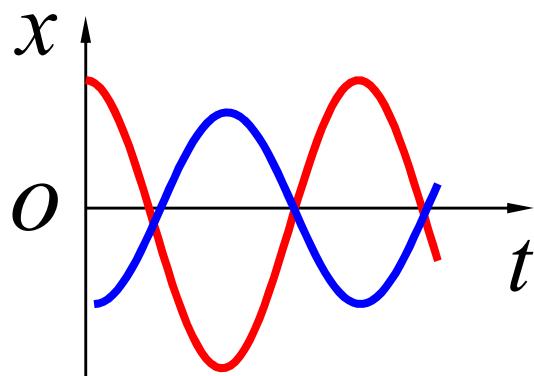
$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

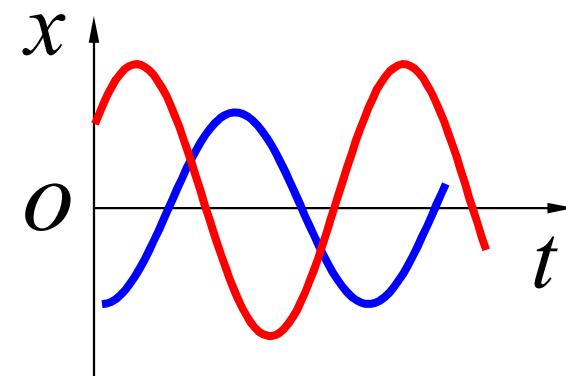
$\Delta\varphi = 0$  同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$  反相



$\Delta\varphi$  为其它 {  
    超前  
    落后}

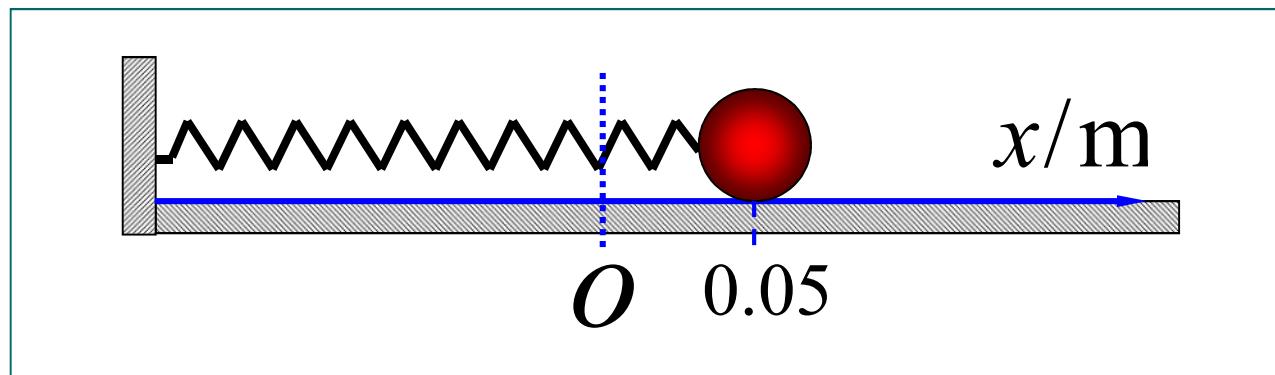


**例1** 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数  $k = 0.72 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，物体的质量  $m = 20\text{g}$ .

(1) 把物体从平衡位置向右拉到  $x = 0.05\text{m}$  处停下后再释放，求简谐运动方程；

(2) 求物体从初位置运动到第一次经过  $\frac{A}{2}$  处时的速度；

(3) 如果物体在  $x = 0.05\text{m}$  处时速度不等于零，而是具有向右的初速度  $v_0 = 0.30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求其运动方程.



解 (1)  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.72\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{0.02\text{kg}}} = 6.0\text{s}^{-1}$

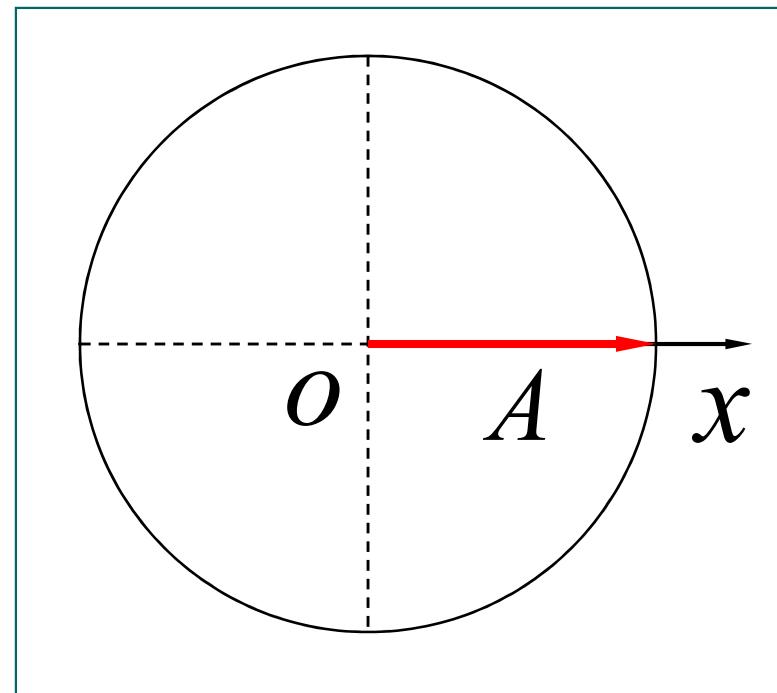
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.05\text{m}$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} = 0$$

$$\varphi = 0 \text{ 或 } \pi$$

由旋转矢量图可知  $\varphi = 0$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.05 \cos 6.0t \text{ m}$$



(2) 求物体从初位置运动到第一次经过  $\frac{A}{2}$  处时的速度；

解  $x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t)$

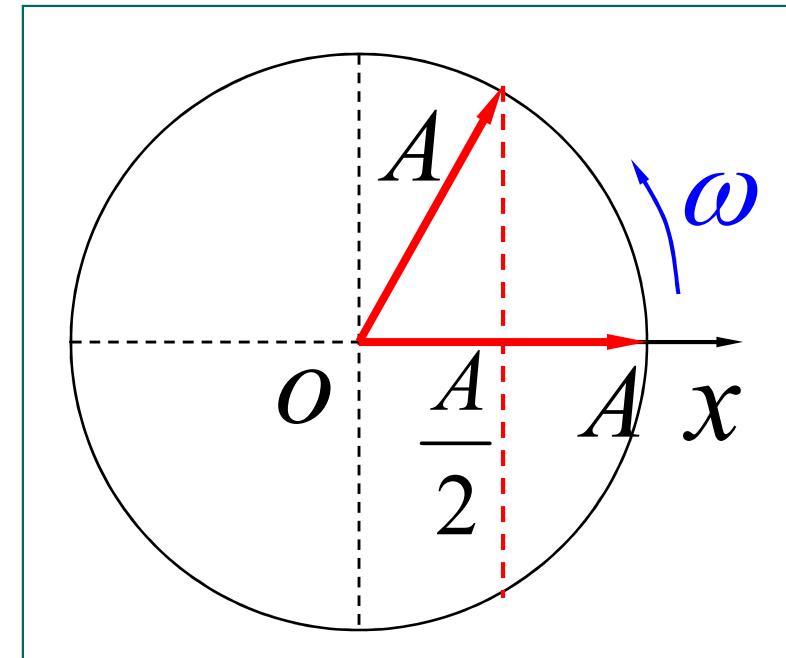
$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由旋转矢量图可知  $\omega t = \frac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

$$= -0.26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{负号表示速度沿 } O_x \text{ 轴负方向})$$

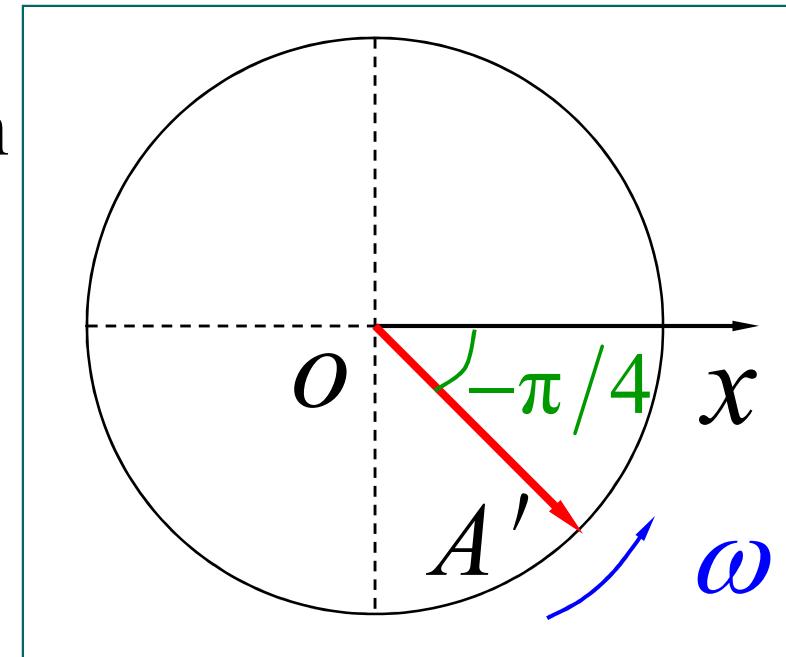


(3) 如果物体在  $x = 0.05\text{m}$  处时速度不等于零, 而是具有向右的初速度  $v_0 = 0.30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 求其运动方程.

解  $A' = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.0707\text{m}$

$$\tan \varphi' = \frac{-v_0}{\omega x_0} = -1$$

$$\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$



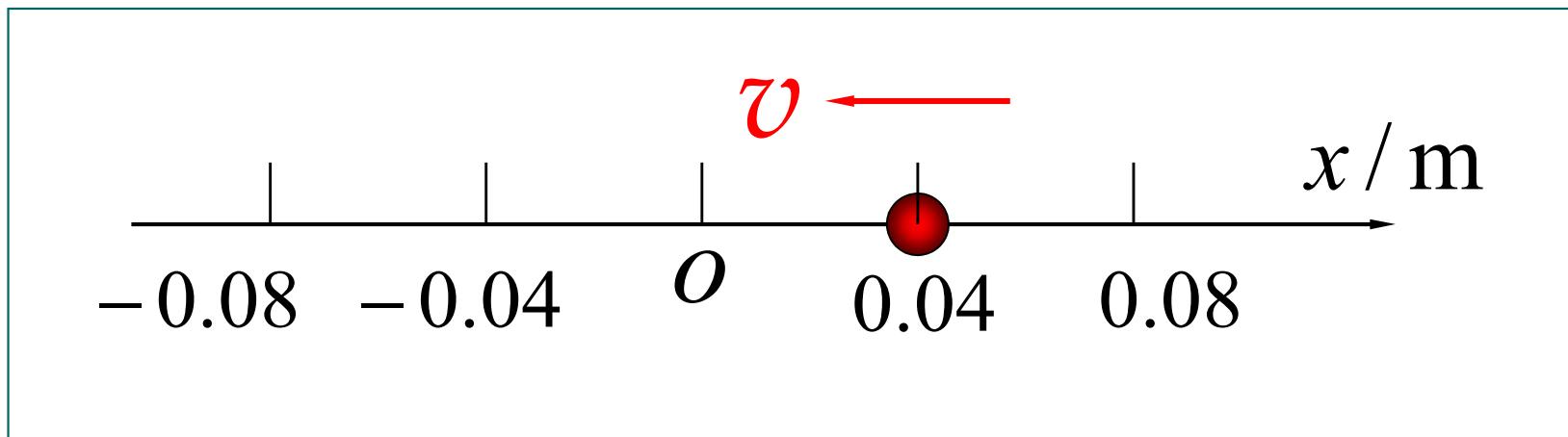
因为  $v_0 > 0$ , 由旋转矢量图可知  $\varphi' = -\pi/4$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.0707 \cos(6.0t - \frac{\pi}{4})$$



**例2** 一质量为  $0.01\text{kg}$  的物体作简谐运动，其振幅为  $0.08\text{m}$ ，周期为  $4\text{s}$ ，起始时刻物体在  $x = 0.04\text{m}$  处，向  $Ox$  轴负方向运动（如图）。试求

(1)  $t = 1.0\text{s}$  时，物体所处的位置和所受的力；



解  $A = 0.08\text{m}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$



$$A = 0.08\text{m}$$

$$t = 0, x = 0.04\text{m}$$

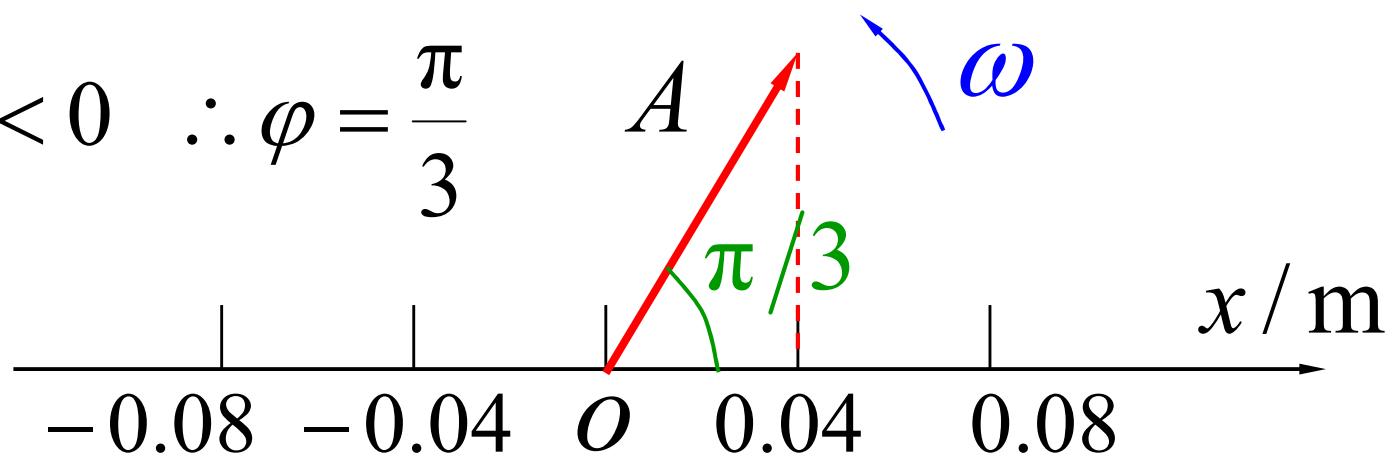
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$$

$$\text{代入 } x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$0.04 = 0.08 \cos \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

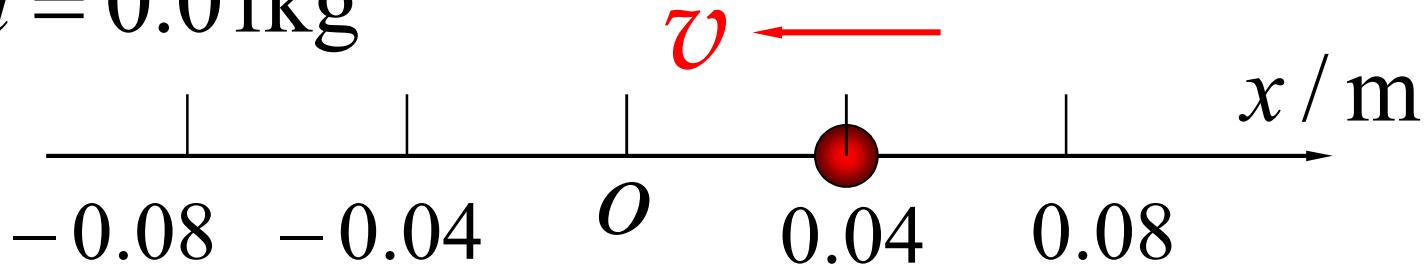
$$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$m = 0.01\text{kg}$$



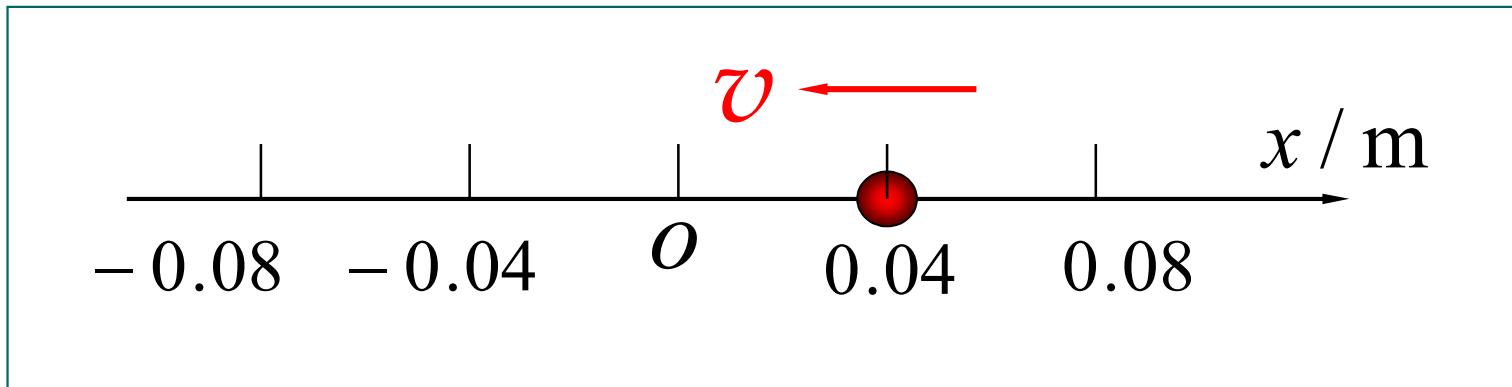
$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 1.0\text{s} \text{ 代入上式得 } x = -0.069\text{m}$$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70 \times 10^{-3}\text{N}$$



(2) 由起始位置运动到  $x = -0.04\text{m}$  处所需要的最短时间.



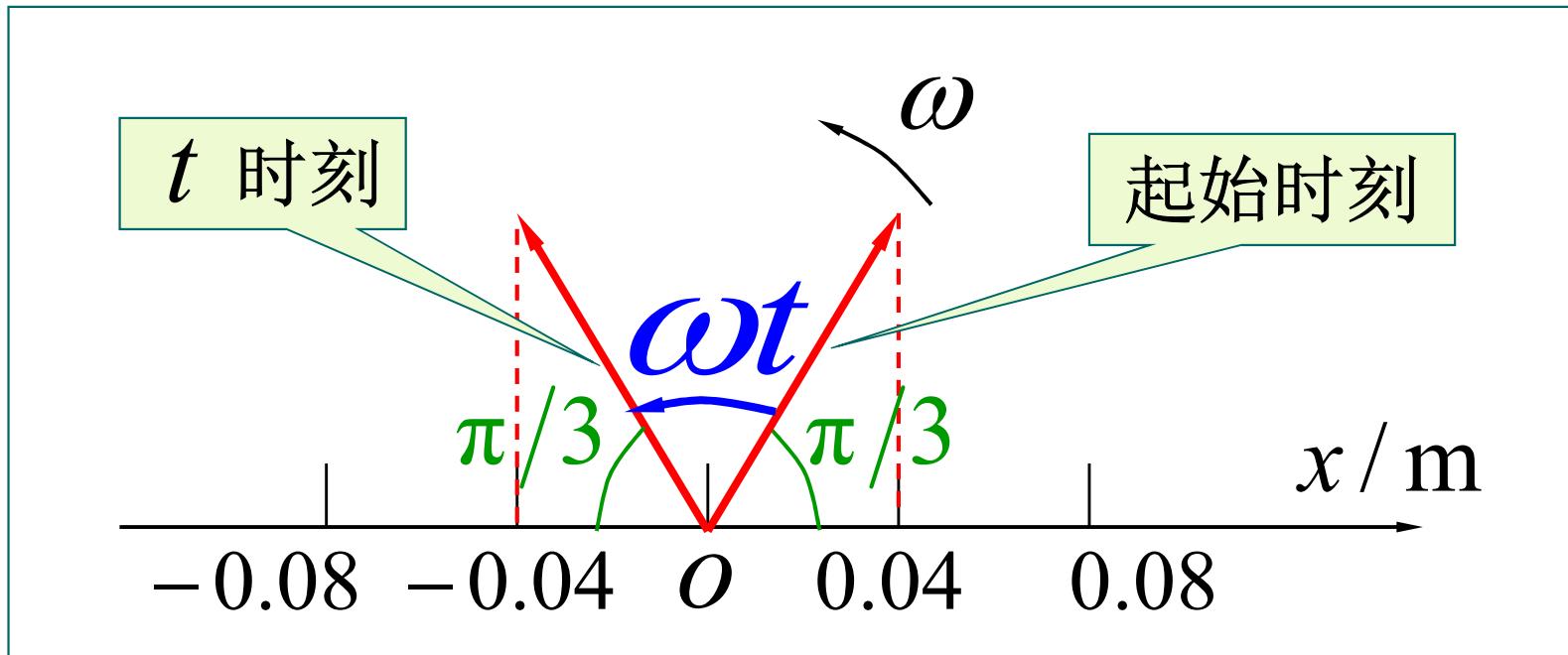
法一 设由起始位置运动到  $x = -0.04\text{m}$  处所需要的最短时间为  $t$

$$-0.04 = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t = 0.667\text{s}$$



## 解法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$$

$$t = 0.667 \text{ s}$$

