

# 常系数非齐次线性微分方程

一、  $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$  型

二、  $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x$   
 $+ \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$  型

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad \textcircled{1}$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解      非齐次方程特解

求特解的方法 — 待定系数法

根据  $f(x)$  的特殊形式，给出特解  $y^*$  的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数。

一、  $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$  型

$\lambda$  为实数,  $P_m(x)$  为  $m$  次多项式.

设特解为  $y^* = e^{\lambda x} Q(x)$ , 其中  $Q(x)$  为待定多项式,

$$y^{*'} = e^{\lambda x} [\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$y^{*''} = e^{\lambda x} [\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入原方程, 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若  $\lambda$  不是特征方程的根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 则取  $Q(x)$  为  $m$  次待定系数多项式  $Q_m(x)$ , 从而得到特解形式为  $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$ .

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

---

(2) 若 $\lambda$  是特征方程的单根, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p \neq 0,$$

则 $Q'(x)$ 为 $m$ 次多项式, 故特解形式为  $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 $\lambda$  是特征方程的重根, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p = 0,$$

则 $Q''(x)$ 是 $m$ 次多项式, 故特解形式为  $y^* = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

**小结** 对方程①, 当 $\lambda$  是特征方程的 $k$ 重根时, 可设

$$\text{特解 } y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程.

例1. 求方程  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$  的一个特解.

解: 本题  $\lambda = 0$ , 而特征方程为  $r^2 - 2r - 3 = 0$ ,

$\lambda = 0$  不是特征方程的根.

设所求特解为  $y^* = b_0x + b_1$ , 代入方程:

$$-3b_0x - 3b_1 - 2b_0 = 3x + 1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -2b_0 - 3b_1 = 1 \end{cases} \longrightarrow b_0 = -1, b_1 = \frac{1}{3}$$

于是所求特解为  $y^* = -x + \frac{1}{3}$ .

例2. 求方程  $y'' - 5y' + 6y = \underline{x}e^{2x}$  的通解.

解: 本题  $\underline{\lambda = 2}$ , 特征方程为  $r^2 - 5r + 6 = 0$ , 其根为

$$\underline{r_1 = 2}, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为  $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为  $y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$

代入方程得  $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得  $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{blue arrow}} b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

因此特解为  $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$ .

所求通解为  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$ .

例3. 求解定解问题  $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题  $\lambda = 0$ , 特征方程为  $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$ , 其根为

$$\underline{r_1 = 0}, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为  $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为  $y^* = bx$ , 代入方程得  $2b = 1$ , 故  $y^* = \frac{1}{2}x$ , 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得 
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = -3/4 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -1/4 \end{cases}$$

于是所求解为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x}) \end{aligned}$$



二、  $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$  型

分析思路:

第一步 将  $f(x)$  转化为

$$f(x) = P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将  $f(x)$  变形

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} \left[ P_l(x) \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + \tilde{P}_n(x) \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right] \\ &= \left[ \frac{P_l(x)}{2} + \frac{\tilde{P}_n(x)}{2i} \right] e^{(\lambda+i\omega)x} \\ &\quad + \left[ \frac{P_l(x)}{2} - \frac{\tilde{P}_n(x)}{2i} \right] e^{(\lambda-i\omega)x} \end{aligned}$$

令  $m = \max\{n, l\}$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) &= P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x)} e^{(\lambda-i\omega)x} \\ &= P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x}} \end{aligned}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + p y' + q y = P_m(x) e^{(\lambda + i\omega)x} \quad \textcircled{2}$$

$$y'' + p y' + q y = \overline{P_m(x) e^{(\lambda + i\omega)x}} \quad \textcircled{3}$$

设  $\lambda + i\omega$  是特征方程的  $k$  重根 ( $k = 0, 1$ ), 则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x) e^{(\lambda + i\omega)x} \quad (Q_m(x) \text{ 为 } m \text{ 次多项式})$$

$$\text{故} \quad (y_1^*)'' + p (y_1^*)' + q y_1^* \equiv P_m(x) e^{(\lambda + i\omega)x}$$

等式两边取共轭:

$$\overline{y_1^*}'' + p \overline{y_1^*}' + q \overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x) e^{(\lambda + i\omega)x}}$$

这说明  $\overline{y_1^*}$  为方程 ③ 的特解.

### 第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解:

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\ &= x^k e^{\lambda x} [Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m} e^{-i\omega x}] \\ &= x^k e^{\lambda x} [Q_m (\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ &\quad + \overline{Q_m} (\cos \omega x - i \sin \omega x)] \\ &= x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x] \end{aligned}$$

其中  $R_m, \tilde{R}_m$  均为  $m$  次多项式.

#### 第四步 分析 $y^*$ 的特点

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\ &= x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x] \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} \overline{y^*} &= \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}} \\ &= \overline{y_1^*} + y_1^* \\ &= y^* \end{aligned}$$

所以  $y^*$  本质上为实函数，因此  $R_m, \tilde{R}_m$  均为  $m$  次实多项式。

## 小结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$$

( $p, q$  为常数)

$\lambda + i\omega$  为特征方程的  $k$  重根 ( $k = 0, 1$ ), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m \cos \omega x + \tilde{R}_m \sin \omega x]$$

其中  $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例4. 求方程  $y'' + y = x \cos 2x$  的一个特解.

解: 本题  $\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, \tilde{P}_n(x) = 0,$

$$\text{特征方程} \quad r^2 + 1 = 0$$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$  不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x$$

代入方程得

$$(\underline{-3ax} \underline{-3b+4c}) \cos 2x - (\underline{3cx+3d+4a}) \sin 2x = \underline{x} \cos 2x$$

$$\text{比较系数, 得} \begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \quad d = \frac{4}{9} \\ b = c = 0 \end{cases}$$

于是求得一个特解  $y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$

例5. 求方程  $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$  的通解.

解: 特征方程为  $r^2 + 9 = 0$ , 其根为  $r_{1,2} = \pm 3i$

对应齐次方程的通解为  $Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$\pm 3i$  为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a \cos 3x + b \sin 3x)$$

代入方程:  $\underline{6b} \cos 3x - \underline{6a} \sin 3x = \underline{18} \cos 3x - \underline{30} \sin 3x$

比较系数, 得  $a = 5, \quad b = 3,$

因此特解为  $y^* = x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$$



例6. 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1) \ y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$$

$$(2) \ y^{(4)} + y'' = \underline{x} + \underline{e^x} + \underline{3\sin x}$$

解: (1) 特征方程  $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ , 即  $(r^2 + 1)^2 = 0$ , 有二重根  $r = \pm i$ , 所以设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(a \cos x + b \sin x)$$

(2) 特征方程  $r^4 + r^2 = 0$ , 即  $r^2(r^2 + 1) = 0$  有根

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i$$

利用叠加原理, 可设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(ax + b) \quad ce^x + x(d \cos x + k \sin x)$$

## 内容小结

1.  $y'' + p y' + q y = P_m(x) e^{\lambda x}$

$\lambda$  为特征方程的  $k$  ( $=0, 1, 2$ ) 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2.  $y'' + p y' + q y = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$

$\lambda \pm i\omega$  为特征方程的  $k$  ( $=0, 1$ ) 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m(x) \cos \omega x + \tilde{R}_m(x) \sin \omega x]$$

$$m = \max\{l, n\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.