

2025 年全国硕士研究生入学统一考试（数学一）试卷详解

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$, 则 ()

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点
- (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- (D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】 (B)

【解析】

$$f'(x) = e^{x^2} \sin x, f''(x) = e^{x^2} 2x \sin x + e^{x^2} \cos x$$

$$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + \int_0^x e^{t^2} dt \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$g''(x) = e^{x^2} 2x \sin^2 x + e^{x^2} 2 \sin x \cos x + e^{x^2} 2 \sin x \cos x + \int_0^x e^{t^2} dt 2 \cos 2x$$

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow x=0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的极值点, 但不是拐点}$$

$$g'(0) = 0, g''(0) = 0$$

$$g'''(x) = 2e^{x^2} \sin^2 x + x(2e^{x^2} \sin^2 x)' + 4 \cos 2x e^{x^2} + 2 \sin 2x (e^{x^2})'$$

$$-4 \sin 2x \int_0^x e^{t^2} dt + 2 \cos 2x e^{x^2}$$

$$g'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x=0 \text{ 为 } g(x) \text{ 的拐点}$$

(2) 已知级数 ① $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1}$, ② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$, 则

()

(A) 均条件收敛

(B) 条件收敛, 绝对收敛

(C) 绝对收敛, 条件收敛

(D) 均绝对收敛

【答案】 (B)

【解析】 ① $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$

$$\begin{aligned} \text{对于①} \quad \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} &= (-1)^{n-1} \sin \left(n\pi - \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin \left(n\pi \left(1 - \frac{n^2}{n^2 + 1} \right) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin \left(n\pi \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{n\pi}{n^2 + 1} \right|$$

$$\sin \frac{n\pi}{n^2 + 1} \sim \frac{n\pi}{n^2 + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2 + 1} \text{ 发散而 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2 + 1} \cdot (-1)^{n-1} \text{ 收敛}$$

所以级数①条件收敛

$$\text{对于② } \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sim -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)^3 = -\frac{1}{3} \frac{1}{n^2}$$

所以级数②绝对收敛

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 则 ()

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 存在

【答案】 (D)

【解析】 (D) 由广义洛必达, 即分母趋于无穷就可以洛必达, 极限存在

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy = ()$

(A) $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$

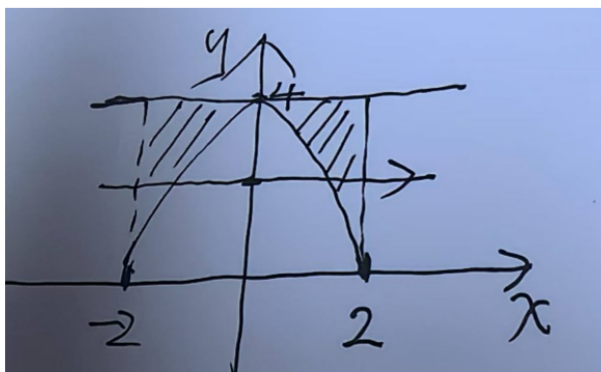
(B) $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$

(C) $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_2^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right] dy$

(D) $2 \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx$

【答案】 (A)

【解析】 如图:



$$\text{原式} = \int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$$

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 的正惯性指数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】 (B)

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2$$

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 n 维列向量, 向量 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \text{ 空间直角坐标系中关于 } x, y, z \text{ 的方程, } x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha_4$$

(A) 过原点的一个平面 (B) 过原点的一条直线
(C) 不过原点的一个平面 (D) 不过原点的一条直线

【答案】 (D)

【解析】 由 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 又

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 进而 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = 0$ 的基础解系向量个数为 1,

又 $x=y=z=0$ 时, $\alpha_4=0$, 此时 $\alpha_1+\alpha_2=0$, 与 α_1, α_2 线性无关矛盾, 故而不过原点, 选 (D) .

(7) 设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $r(A)+r(B)+r(C)=r(ABC)+2n$ 给出下列四个结论

① $r(ABC)+n=r(AB)+r(C)$ ② $r(AB)+n=r(A)+r(B)$ ③

$r(A)=r(B)=r(C)=n$ ④ $r(AB)=r(BC)=n$

(A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

【答案】 (A)

【解析】 取 $n=1, A=a \neq 0, B=b \neq 0, c=0$ 满足条件, 而③④不对, 故选 A.

(8) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(0, 0.1, 1, \rho)$ 其中 $\rho \in (-1, 1)$ 若 a, b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数, 则 $D(aX+bY)$ 的最大值为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) $1+|\rho|$ (D) $1+\rho^2$

【答案】 (C)

【解析】 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=a^2+b^2+2ab\rho$

$a^2+b^2=1$, 设 $a=\sin t, b=\cos t$, 有

$a^2+b^2+2ab\rho=1+\sin 2t \cdot \rho$, 最大值选 (C)

(9) 设 X_1, X_2, \dots, X_{20} 是来自样本总体 $B(1, 0.1)$ 的简单随机样本, 令 $T=\sum_{i=1}^{20} X_i$

利用泊松分布表示二项分布方法可得 $P\{T \leq 1\} = ()$

(A) $\frac{1}{e^2}$ (B) $\frac{2}{e^2}$ (C) $\frac{3}{e^2}$ (D) $\frac{4}{e^2}$

【答案】 (C)

【解析】

由 X_1, X_2, \dots, X_{20} 来自 $B(1, 0.1)$ 的简单随机样本

$$\text{则 } T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim B(20, 0.1)$$

$$\begin{aligned} P\{T \leq 1\} &= P\{T = 0\} + P\{T = 1\} \\ &= C_{20}^0 (0.1)^0 (0.9)^{20} + C_{20}^1 (0.1)^1 (0.9)^{19} \\ &\approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} \end{aligned}$$

其中 $\lambda \approx 0.1 \cdot 20 = 2$

(10) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu, 2)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

2α 表示标准正态分布的上侧 α 分位数, 假设检验问题 $H_0: \mu \leq 1, H_1: \mu > 1$ 时显著性水平为 α , 检验的拒绝域为 ()

(A) $\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{2}{n} z_\alpha \right]$

(B) $\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} z_\alpha \right]$

(C) $\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} z_\alpha \right]$

(D)

$\left[(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha \right]$

【答案】 (D)

【解析】 记 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$, 则有 $P\{T > z_\alpha\} = \alpha$, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}} > z_\alpha$, 即 $\bar{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha$,

选 (D)

二、填空题: 11–16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -1

$$\text{【解析】} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x \cdot (-x)} = -1$$

$$(12) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ 的傅里叶级数为 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad S(x) \text{ 为}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \text{ 的和函数, 则 } S(-\frac{7}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{8}$

$$\text{【解析】} S\left(-\frac{7}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2} - 4\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2} = \frac{0 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$(13) \text{ 已知函数 } U(x, y, z) = xy^2z^3, \text{ 向量 } n = (2, 2, -1), \text{ 则 } \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 1

$$\text{【解析】} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 z^3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3xy^2z^2,$$

$$\text{grad } U|_{(1,1,1)} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \Big|_{(1,1,1)} = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \text{grad } U|_{(1,1,1)} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \{1, 2, 3\} \cdot \frac{\{2, 2, -1\}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1$$

(14) 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的段, 则曲线积分

$$\int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{4}{3} - 2 \sin 1$

【解析】 补 $L_1: y=0, x: -1 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} & \int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy \\ &= \oint_{L+L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy - \int_{L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \oint_{L+L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \iint_D (2-1) dx dy = S_D \\ &= 2 \int_0^1 1-x^2 dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \int_{-1}^1 \cos x dx = 2 \int_0^1 \cos x dx = 2 \sin 1$$

所以 $\int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \frac{4}{3} - 2 \sin 1$

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$ 若方程组 $A^2 x = 0$ 与 $Ax = 0$ 不同解则 $a-b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4

【解析】 根据题意, $|A| = 0$, $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a-b & 0 & 0 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = (4+a-b)(-1) = 0, \text{ 故}$$

$$a-b=-4$$

(16) 设 A,B 为两个随机事件, A,B 相互独立 $P(A) = 2P(B)$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ 则 A,B 至少有一个发生的条件下_____.

【答案】

【解析】

三、解答题: 17—22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$

【答案】 $\frac{3}{10} \ln 2 + \frac{\pi}{10}$

【解析】

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx$$

由

于

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2} = \frac{(a+b)x^2 + (-2a+b+c)x + 2a+c}{(1+x)(x^2-2x+2)},$$

$$\text{则} \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b+c=0 \\ 2a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=-\frac{1}{5} \\ c=\frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{x-3}{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{5} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} d(x^2-2x+2) - \int_0^1 \frac{2}{x^2-2x+2} dx \right] \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{10} \ln(x^2-2x+2) \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{10} (0 - \ln 2) + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 + \frac{1}{10} \ln 2 + \frac{2}{5} \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{10} \ln 2 + \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

(18)(本题满分 12 分) 函数 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有二阶导数, 记 $g(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$,

若 $g(x, y)$ 满足 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$, 且 $g(x, x) = 1$, $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x, x)} = \frac{2}{x}$, 求

$f(u)$.

【答案】 $f(u) = -5 + 6\sqrt{u} - \ln u$

【解析】 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} f'(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} f''(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} f''(\frac{x}{y}),$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^4} f''(\frac{x}{y})$$

代入原方程得: $\frac{2x^2}{y^2} f''(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y} f'(\frac{x}{y}) = 1$

令 $\frac{x}{y} = u$, 则 $2u^2 f''(u) + uf'(u) = 1$ (欧拉方程)

令 $y = f(u), x = u$ 则方程变为 $2x^2 y'' + xy' = 1$

令 $x = e^t$, 则方程变为:

$$y''(t) - \frac{1}{2} y'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}t} - t \Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 \sqrt{x} - \ln x \Rightarrow f(u) = C_1 + C_2 \sqrt{u} - \ln u$$

由 $g(x, x) = 1, \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x, x)} = \frac{2}{x} \Rightarrow f(1) = 1, f'(1) = 2 \Rightarrow C_1 = -5, C_2 = 6$

$$\Rightarrow f(u) = -5 + 6\sqrt{u} - \ln u$$

(19) (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导, 证明导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递增的充分必要条件是: 对 (a, b) 内任意 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

【答案】略

【解析】证明: (1) 必要性

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) (x_1 < \xi_1 < x_2)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2) \quad (x_2 < \xi_2 < x_3)$$

由于 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单增, 且 $\xi_1 < \xi_2$, 则 $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 进而

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(2) 充分性

对于任意 $c_1 < c_2 \in (a, b)$ 有: $f'(c_1) = \lim_{x \rightarrow c_1} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1}$,

$$f'(c_2) = \lim_{x \rightarrow c_2} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2}.$$

当 $a < c_1 < x < c_2 < b$ 时, 由 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ 知,

$$\frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} < \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} < \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x}$$

两边同时取极限及极限的保号性可知:

$$\lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \leq \lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x} = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

$$\lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x} \geq \lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

进而 $f'(c_1) = \lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \leq \lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} = f'(c_2)$, 即 $f'(x)$ 在 (a, b) 上

单增.

(20) (本题满分 12 分) 设 Σ 是由直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ (t 为参数) 旋转一周得到的曲面, Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 与 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma_1} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy$$

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{27} - 2$

【解析】取 $\Sigma_2: x+y+z=1$ 上侧, 则有

$$I = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy - \iint_{\Sigma_2} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy$$

$$I = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy = \iiint_{\Omega} 1+1+1 dV = 3V_{\Omega}$$

Ω 为底在平面 $\Sigma_2: x+y+z=1$ 上的圆, 顶点为原点的锥体, 高

$$h = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{半径 } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, V_{\Omega} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma_2} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy \\
&= \iint_{\Sigma_2} (x \cdot 1 + (y+1) \cdot 1 + (z+2) \cdot 1) dx dy \\
&= \iint_D x + y + 1 + 2 + 1 - x - y dx dy \\
&= \iint_D 4 dx dy = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

故而原式 = $\frac{2\sqrt{3}}{27} - 2$

(21) (本题满分 12 分) 设矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 已知 1 是 A 的特征多项式的重根

(1) 求 a 的值

(2) 求所有满足 $\begin{matrix} A^2 \alpha = \alpha + 2\beta \\ A\alpha = \alpha + \beta \end{matrix}$ 非零列向量 α, β

【答案】

【解析】

(22) (本题满分 12 分) 投保人的损失事件发生时, 保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ X - 100, & x > 100 \end{cases}, \text{ 设损失事件发生时, 投保人的损失额 } X \text{ 概率密度为}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{2 \times 100^2}{(100 + x)^3}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

(1)求 $P\{Y>0\}$ 及 EY

(2)这种损失事件在一年内发生的次数记为 N 保险公司在一年内就这种损失事件产生次数记为 M .假设 N 服从参数为 8 的泊松分布, 在 $N=n (n \geq 1)$ 的条件下, M 服的理赔

从二项分布 $B(n,p)$,其中 $p = P(Y > 0)$ 求 M 的概率分布.

【答案】 (1) $P\{Y > 0\} = \frac{1}{4}; E(Y) = 50$

(2) $P\{M = k\} = \frac{e^{-2} 2^k}{k!} (k = 1, 2, 3 \cdots)$

【解析】 (1) $P\{Y > 0\} = P\{Y = X - 100\} = P\{X > 100\} = \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100 + x)^3} dx = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{100}^{+\infty} (x - 100) \frac{2 \times 100^2}{(100 + x)^3} dx = \int_{100}^{+\infty} (x + 100 - 200) \frac{2 \times 100^2}{(100 + x)^3} dx \\ &= \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100 + x)^2} dx - 200 \times \frac{1}{4} = 50 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
P\{M = k\} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n e^{-8}}{n!} C_n^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n e^{-8}}{n!} \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-8}}{k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n}{(n-k)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = \frac{e^{-8}}{k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^{n+k}}{n!} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= \frac{e^{-8} 2^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n}{n!} = \frac{e^{-8} 2^k}{k!} e^6 = \frac{e^{-2} 2^k}{k!} \quad (k = 1, 2, 3 \cdots)
\end{aligned}$$