

1997 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - 1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二人取得黄球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 在点 $(0, 0)$ 处()

- (A) 连续, 偏导数存在. (B) 连续, 偏导数不存在.
 (C) 不连续, 偏导数存在. (D) 不连续, 偏导数不存在.

(2) 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b - a),$

$S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b - a)$, 则()

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$. (B) $S_2 < S_1 < S_3$.
 (C) $S_3 < S_1 < S_2$. (D) $S_2 < S_3 < S_1$.

(3) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ ()

- (A) 为正常数. (B) 为负常数.
 (C) 恒为零. (D) 不为常数.

(4) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, 则三条直线 $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$

$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3$) 交于一点的充要条件是()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.
 (C) 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2)$.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关.

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2, 则随机变量 $3X - 2Y$ 的方差是()

- (A) 8. (B) 16. (C) 28. (D) 44.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)(1) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.(2) 计算曲线积分 $\oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + z = 2, \end{cases}$, 从 z 轴正向往 z 轴负向看, C 的方向是顺时针的.(3) 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N , 在 $t = 0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0 , 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$ 视为连续可微变量), 其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比, 比例常数 $k > 0$, 求 $x(t)$.**四、(本题共 2 小题,第(1) 小题 6 分,第(2) 小题 7 分,满分 13 分)**(1) 设直线 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b 之值.(2) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$, 求 $f(u)$.**五、(本题满分 6 分)**设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.**六、(本题满分 8 分)**设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明:(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.**七、(本题共 2 小题,第(1) 小题 5 分,第(2) 小题 6 分,满分 11 分)**(1) 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是齐次线性方程组 $Bx = \mathbf{0}$ 的解向量, 求 $Bx = \mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.(2) 已知 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.(I) 试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(Ⅱ) 问 A 能否相似于对角阵? 说明理由.

八、(本题满分 5 分)

设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B .

- (1) 证明 B 可逆;
- (2) 求 AB^{-1} .

九、(本题满分 7 分)

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗, 假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数, 求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

十、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本, 分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.