

2004 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

- (1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为 _____.

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为 _____.

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 _____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _____.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分)

- (7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos(t^2) dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^3) dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小量, 则正确的排列次序是()

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得()

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.
 (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.
 (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$.
 (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
 (B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
 (C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.
 (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于()

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0 .

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为()

$$(A) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(B) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(12) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有()

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于()

$$(A) u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

$$(B) u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

$$(C) u_{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

$$(D) u_{1-\alpha}.$$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则()

$$(A) \text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$(B) \text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2.$$

$$(C) D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2.$$

$$(D) D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n}\sigma^2.$$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

(16) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

(注: kg 表示千克, km/h 表示千米 / 小时.)

(17) (本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

(18) (本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

(19) (本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

(20) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots \cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases} \quad (n \geq 2),$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(21) (本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

(22) (本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, A \text{ 发生,} \\ 0, A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, B \text{ 发生,} \\ 0, B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量;

(II) β 的最大似然估计量.