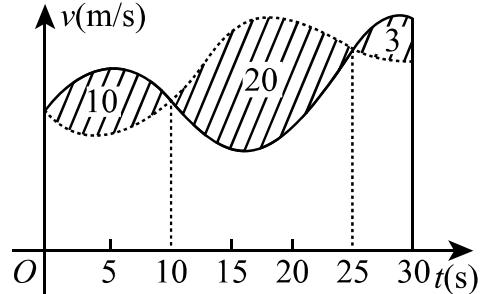


# 2017 年全国硕士研究生招生考试试题

**一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)**

- (1) 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ , 在  $x=0$  处连续, 则( )
- (A)  $ab = \frac{1}{2}$ . (B)  $ab = -\frac{1}{2}$ . (C)  $ab = 0$ . (D)  $ab = 2$ .
- (2) 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(x)f'(x) > 0$ , 则( )
- (A)  $f(1) > f(-1)$ . (B)  $f(1) < f(-1)$ .  
 (C)  $|f(1)| > |f(-1)|$ . (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$ .
- (3) 函数  $f(x, y, z) = x^2y + z^2$  在点  $(1, 2, 0)$  处沿向量  $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$  的方向导数为( )
- (A) 12. (B) 6. (C) 4. (D) 2.
- (4) 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位:m) 处, 图中, 实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$  (单位:m/s), 虚线表示乙的速度曲线  $v = v_2(t)$ , 三块阴影部分面积的数值依次是 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为  $t_0$  (单位:s), 则( )
- (A)  $t_0 = 10$ . (B)  $15 < t_0 < 20$ .  
 (C)  $t_0 = 25$ . (D)  $t_0 > 25$ .
- (5) 设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则( )
- (A)  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆. (B)  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆.  
 (C)  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆. (D)  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆.
- (6) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则( )
- (A)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似. (B)  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似.  
 (C)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似. (D)  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似.
- (7) 设  $A, B$  为随机事件. 若  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 则  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$  的充分必要条件是( )
- (A)  $P(B|A) > P(B|\bar{A})$ . (B)  $P(B|A) < P(B|\bar{A})$ .  
 (C)  $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$ . (D)  $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$ .
- (8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 为来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列结论中不正确的是( )
- (A)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布. (B)  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布.  
 (C)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布. (D)  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布.



## 二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f^{(3)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(10) 微分方程  $y'' + 2y' + 3y = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(11) 若曲线积分  $\int_L \frac{x \, dx - ay \, dy}{x^2 + y^2 - 1}$  在区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  内与路径无关, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$  在区间  $(-1, 1)$  内的和函数  $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  的秩为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(u, v)$  具有 2 阶连续偏导数,  $y = f(e^x, \cos x)$ , 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ .

(16) (本题满分 10 分)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ .

(17) (本题满分 10 分)

已知函数  $y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$  确定, 求  $y(x)$  的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上具有 2 阶导数, 且  $f(1) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ . 证明:

( I ) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在一个实根;

( II ) 方程  $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少存在两个不同实根.

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体  $S$  是圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  割下的有限部分, 其上任一点的密度为  $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . 记圆锥面与柱面的交线为  $C$ .

( I ) 求  $C$  在  $xOy$  平面上的投影曲线的方程;

( II ) 求  $S$  的质量  $M$ .

(20) (本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ .

( I ) 证明  $r(A) = 2$ ;

( II ) 设  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程组  $Ax = \beta$  的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$ .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且  $X$  的概率分布为  $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$ ,  $Y$  的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- ( I ) 求  $P\{Y \leq E(Y)\}$ ;  
( II ) 求  $Z = X + Y$  的概率密度.

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的. 设  $n$  次测量结果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且均服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差  $Z_i = |X_i - \mu|$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 利用  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  估计  $\sigma$ .

- ( I ) 求  $Z_1$  的概率密度;  
( II ) 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量;  
( III ) 求  $\sigma$  的最大似然估计量.