

# 2025 年全国硕士研究生入学统一考试（数学一）试卷详解

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知函数  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$ ,  $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$ , 则 ( )

- (A)  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点，也是  $g(x)$  的极值点
- (B)  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  是曲线  $y=g(x)$  的拐点
- (C)  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点， $(0,0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点
- (D)  $(0,0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点，也是曲线  $y=g(x)$  的拐点

【答案】 (B)

【解析】

$$f'(x) = e^{x^2} \sin x, f''(x) = e^{x^2} 2x \sin x + e^{x^2} \cos x$$

$$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + \int_0^x e^{t^2} dt \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$g''(x) = e^{x^2} 2x \sin^2 x + e^{x^2} 2 \sin x \cos x + e^{x^2} 2 \sin x \cos x + \int_0^x e^{t^2} dt 2 \cos 2x$$

$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow x=0$  为  $f(x)$  的极值点，但不是拐点

$$g'(0) = 0, g''(0) = 0$$

$$g'''(x) = 2e^{x^2} \sin^2 x + x(2e^{x^2} \sin^2 x)' + 4 \cos 2x e^{x^2} + 2 \sin 2x (e^{x^2})'$$

$$-4 \sin 2x \int_0^x e^{t^2} dt + 2 \cos 2x e^{x^2}$$

$g'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x=0$  为  $g(x)$  的拐点

(2) 已知级数 ①  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1}$ , ②  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$ , 则

( )

- (A) 均条件收敛
- (B) 条件收敛, 绝对收敛
- (C) 绝对收敛, 条件收敛
- (D) 均绝对收敛

【答案】 (B)

【解析】 ①  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1}$  ②  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$

$$\begin{aligned} \text{对于① } \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} &= (-1)^{n-1} \sin \left( n\pi - \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin \left( n\pi \left( 1 - \frac{n^2}{n^2 + 1} \right) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sin \left( n\pi \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{n\pi}{n^2 + 1} \right|$$

$$\sin \frac{n\pi}{n^2 + 1} \sim \frac{n\pi}{n^2 + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2 + 1} \text{发散而 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2 + 1} \cdot (-1)^{n-1} \text{ 收敛}$$

所以级数①条件收敛

$$\text{对于} ② \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \sim -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)^3 = -\frac{1}{3} \frac{1}{n^2}$$

所以级数②绝对收敛

(3) 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 则 ( )

- (A) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在
- (B) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在
- (C) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在
- (D) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  存在

【答案】 (D)

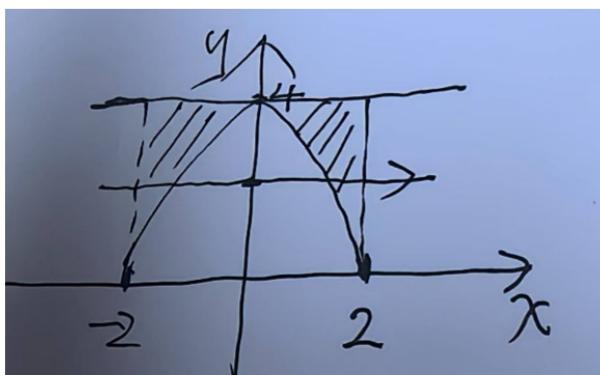
【解析】 (D) 由广义洛必达, 即分母趋于无穷就可以洛必达, 极限存在

(4) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy = ( )$

- (A)  $\int_0^4 [\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx] dy$
- (B)  $\int_0^4 [\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx] dy$
- (C)  $\int_0^4 [\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_2^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx] dy$
- (D)  $2 \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx$

**【答案】** (A)

**【解析】**如图：



$$\text{原式} = \int_0^4 \left[ \int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy$$

(5) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$  的正惯性指数为 ( )

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

**【答案】**(B)

**【解析】**  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2$$

(6) 设  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是  $n$  维列向量, 向量  $a_1, a_2$  线性无关,  $a_1, a_2, a_3$  线性相关且

$a_1 + a_2 + a_4 = 0$  空间直角坐标系中关于  $x, y, z$  的方程,  $xa_1 + ya_2 + za_3 = a_4$

- (A) 过原点的一个平面                      (B) 过原点的一条直线  
(C) 不过原点的一个平面                      (D) 不过原点的一条直线

【答案】(D)

**【解析】**由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 则  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ , 又

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$$

则  $r(a_1, a_2, a_3, a_4) = r(a_1, a_2, a_3) = 2$  进而  $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = 0$  的基础解系向量个数为 1,

又  $x = y = z = 0$  时,  $\alpha_4 = 0$ , 此时  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ , 与  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关矛盾, 故而不过原点, 选 (D) .

(7) 设  $n$  阶矩阵  $A, B, C$  满足  $r(A) + r(B) + r(C) = r(ABC) + 2n$  给出下列四个结论

$$\textcircled{1} \quad r(ABC) + n = r(AB) + r(C) \quad \textcircled{2} \quad r(AB) + n = r(A) + r(B) \quad \textcircled{3}$$

$$r(A) = r(B) = r(C) = n \quad \textcircled{4} \quad r(AB) = r(BC) = n$$

- (A) \textcircled{1}\textcircled{2} \quad (B) \textcircled{1}\textcircled{3} \quad (C) \textcircled{2}\textcircled{4} \quad (D) \textcircled{3}\textcircled{4}

**【答案】** (A)

**【解析】** 取  $n=1, A=a \neq 0, B=b \neq 0, C=0$  满足条件, 而 \textcircled{3}\textcircled{4} 不对, 故选 A.

(8) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(0, 0, 1, 1, \rho)$  其中  $\rho \in (-1, 1)$  若  $a, b$  为满足

$a^2 + b^2 = 1$  的任意实数, 则  $D(aX + bY)$  的最大值为 ( )

- (A) 1 \quad (B) 2 \quad (C)  $1+|\rho|$  \quad (D)  $1+\rho^2$

**【答案】** (C)

$$\text{【解析】 } D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY} = a^2 + b^2 + 2ab\rho$$

$a^2 + b^2 = 1$ , 设  $a = \sin t, b = \cos t$ , 有

$a^2 + b^2 + 2ab\rho = 1 + \sin 2t \cdot \rho$ , 最大值选 (C)

(9) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$  是来自样本总体  $B(1, 0.1)$  的简单随机样本, 令  $T = \sum_{i=1}^{20} X_i$

利用泊松分布表示二项分布方法可得  $P\{T \leq 1\} = ( )$

- (A)  $\frac{1}{e^2}$  \quad (B)  $\frac{2}{e^2}$  \quad (C)  $\frac{3}{e^2}$  \quad (D)  $\frac{4}{e^2}$

**【答案】** (C)

**【解析】**

由  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$  来自  $B(1, 0.1)$  的简单随机样本

则  $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim B(20, 0.1)$

$$\begin{aligned} P\{T \leq 1\} &= P\{T = 0\} + P\{T = 1\} \\ &= C_{20}^0 (0.1)^0 (0.9)^{20} + C_{20}^1 (0.1)^1 (0.9)^{19} \\ &\approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} \end{aligned}$$

其中  $\lambda \approx 0.1 \cdot 20 = 2$

(10) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu, 2)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$z_\alpha$  表示标准正态分布的上侧  $\alpha$  分位数, 假设检验问题  $H_0: \mu \leq 1$ ,  $H_1: \mu > 1$  时显著性水平为  $\alpha$ , 检验的拒绝域为 ( )

(A)  $\left[ (x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \bar{X} > 1 + \frac{2}{n} z_\alpha \right]$       (B)  $\left[ (x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \bar{X} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} z_\alpha \right]$

(C)  $\left[ (x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \bar{X} > 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} z_\alpha \right]$       (D)

$$\left[ (x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \bar{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha \right]$$

【答案】 (D)

【解析】 记  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$ , 则有  $P\{T > z_\alpha\} = \alpha$ ,  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{2}{n}}} > z_\alpha$ , 即  $\bar{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} z_\alpha$ ,

选 (D)

二、填空题: 11–16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 -1

$$[\text{解析}] \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\ln x \cdot (-x)} = -1$$

$$(12) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ 的傅里叶级数为 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad S(x) \text{ 为}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \text{ 的和函数, 则 } S(-\frac{7}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$[\text{答案}] \frac{1}{8}$$

$$[\text{解析}] S\left(-\frac{7}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2} - 4\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2} - 0\right) + f\left(\frac{1}{2} + 0\right)}{2} = \frac{0 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$(13) \text{ 已知函数 } U(x, y, z) = xy^2 z^3, \text{ 向量 } n = (2, 2, -1), \text{ 则 } \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 1

$$[\text{解析}] \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2,$$

$$\text{grad } u \Big|_{(1,1,1)} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \Big|_{(1,1,1)} = \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \Big|_{(1,1,1)} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \{1, 2, 3\} \cdot \frac{\{2, 2, -1\}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1$$

(14) 已知有向曲线  $L$  是沿抛物线  $y=1-x^2$  从点  $(1, 0)$  到  $(-1, 0)$  的段, 则曲线积分

$$\int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】  $\frac{4}{3} - 2\sin 1$

【解析】 补  $L_1: y=0, x: -1 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} & \int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy \\ &= \oint_{L+L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy - \int_{L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \oint_{L+L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \iint_D (2-1) dx dy = S_D \\ &= 2 \int_0^1 1-x^2 dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{L_1} (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \int_{-1}^1 \cos x dx = 2 \int_0^1 \cos x dx = 2 \sin 1$$

所以  $\int_L (y + \cos x) dx + (2x + \cos y) dy = \frac{4}{3} - 2 \sin 1$

(15) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$  若方程组  $A^2 x = 0$  与  $Ax = 0$  不同解则  $a-b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 -4

【解析】 根据题意,  $|A|=0$ ,  $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a-b & 0 & 0 \\ a-b & -2 & 3 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = (4+a-b)(-1) = 0, \text{ 故}$$

$$a-b=-4$$

(16) 设 A,B 为两个随机事件, A,B 相互独立  $P(A) = 2P(B)$ ,  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$  则 A,B

至少有一个发生的条件下\_\_\_\_\_.

**【答案】**

**【解析】**

**三、解答题：17—22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

$$(17) \quad (\text{本题满分 10 分}) \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$$

**【答案】**  $\frac{3}{10} \ln 2 + \frac{\pi}{10}$

**【解析】**

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx$$

由

于

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2} = \frac{(a+b)x^2 + (-2a+b+c)x + 2a+c}{(1+x)(x^2-2x+2)},$$

$$\text{则 } \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b+c=0 \\ 2a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=-\frac{1}{5} \\ c=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{5}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{(1+x)(x^2-2x+2)} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{x-3}{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2} d(x^2-2x+2) - \int_0^1 \frac{2}{x^2-2x+2} dx \right] \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{10} \ln(x^2-2x+2) \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 - \frac{1}{10}(0-\ln 2) + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \ln 2 + \frac{1}{10} \ln 2 + \frac{2}{5} \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{10} \ln 2 + \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

(18) (本题满分 12 分) 函数  $f(u)$  在区间  $(0, +\infty)$  内有二阶导数, 记  $g(x, y) = f(\frac{x}{y})$ ,

若  $g(x, y)$  满足  $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$ , 且  $g(x, x) = 1$ ,  $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x, x)} = \frac{2}{x}$ , 求  $f(u)$ .

**【答案】**  $f(u) = -5 + 6\sqrt{u - \ln u}$

**【解析】**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} f'(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} f''(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^4} f''(\frac{x}{y})$$

代入原方程得:  $\frac{2x^2}{y^2} f''(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y} f'(\frac{x}{y}) = 1$

令  $\frac{x}{y} = u$ , 则  $2u^2 f''(u) + uf'(u) = 1$  (欧拉方程)

令  $y = f(u)$ ,  $x = u$  则方程变为  $2x^2 y'' + xy' = 1$

令  $x = e^t$ , 则方程变为:

$$y''(t) - \frac{1}{2} y'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}t} - t \Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 \sqrt{x} - \ln x \Rightarrow f(u) = C_1 + C_2 \sqrt{u} - \ln u$$

由  $g(x, x) = 1$ ,  $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x, x)} = \frac{2}{x} \Rightarrow f(1) = 1, f'(1) = 2 \Rightarrow C_1 = -5, C_2 = 6$

$$\Rightarrow f(u) = -5 + 6\sqrt{u} - \ln u$$

(19) (本题满分 12 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  可导, 证明导函数  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内严格单调递增的充分必要条件是: 对  $(a, b)$  内任意  $x_1, x_2, x_3$ , 当  $x_1 < x_2 < x_3$  时, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

**【答案】** 略

**【解析】** 证明: (1) 必要性

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) (x_1 < \xi_1 < x_2)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2)(x_2 < \xi_2 < x_3)$$

由于  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上单增, 且  $\xi_1 < \xi_2$ , 则  $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ , 进而

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

## (2) 充分性

对于任意  $c_1 < c_2 \in (a, b)$  有 :  $f'(c_1) = \lim_{x \rightarrow c_1} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1}$ ,

$$f'(c_2) = \lim_{x \rightarrow c_2} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2}.$$

当  $a < c_1 < x < c_2 < b$  时, 由  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$  知,

$$\frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} < \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} < \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x}$$

两边同时取极限及极限的保号性可知:

$$\lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \leq \lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x} = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

$$\lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(c_2) - f(x)}{c_2 - x} \geq \lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

进而  $f'(c_1) = \lim_{x \rightarrow c_1^+} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \leq \lim_{x \rightarrow c_2^-} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} = f'(c_2)$ , 即  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上

单增.

(20) (本题满分 12 分) 设  $\Sigma$  是由直线  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  绕直线  $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$  (t 为参数) 旋转一

周得到的曲面,  $\Sigma_1$  是  $\Sigma$  介于平面  $x+y+z=0$  与  $x+y+z=1$  之间部分的外侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz + (y+1)dzdx + (z+2)dxdy$$

【答案】  $\frac{2\sqrt{3}}{27} - 2$

【解析】 取  $\Sigma_2$ :  $x+y+z=1$  上侧, 则有

$$I = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} xdydz + (y+1)dzdx + (z+2)dxdy - \iint_{\Sigma_2} xdydz + (y+1)dzdx + (z+2)dxdy$$

$$I = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} xdydz + (y+1)dzdx + (z+2)dxdy = \iiint_{\Omega} 1+1+1dV = 3V_{\Omega}$$

$\Omega$  为底在平面  $\Sigma_2: x+y+z=1$  上的圆, 顶点为原点的锥体, 高

$$h = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{半径 } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, V_{\Omega} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma_2} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy \\
&= \iint_{\Sigma_2} (x \cdot 1 + (y+1) \cdot 1 + (z+2) \cdot 1) dx dy \\
&= \iint_D x + y + 1 + z + 2 + 1 - x - y dx dy \\
&= \iint_D 4 dx dy = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

故而原式  $= \frac{2\sqrt{3}}{27} - 2$

(21) (本题满分 12 分) 设矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$  已知 1 是 A 的特征多项式的重根

(1) 求  $a$  的值

(2) 求所有满足  $A^2 \alpha = \alpha + 2\beta$  非零列向量  $\alpha, \beta$   
 $A\alpha = \alpha + \beta$

**【答案】**

**【解析】**

(22) (本题满分 12 分) 投保人的损失事件发生时, 保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x - 100, & x > 100 \end{cases}, \text{ 设损失事件发生时, 投保人的损失额 } X \text{ 概率密度为}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求  $P\{Y>0\}$  及  $EY$

(2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为  $N$  保险公司一年内就这种损失事件产生的次数记为  $M$ . 假设  $N$  服从参数为 8 的泊松分布, 在  $N=n$  ( $n \geq 1$ ) 的条件下,  $M$  服从的理赔

从二项分布  $B(n,p)$ , 其中  $p = P(Y > 0)$  求  $M$  的概率分布.

**【答案】** (1)  $P\{Y > 0\} = \frac{1}{4}; E(Y) = 50$

(2)  $P\{M = k\} = \frac{e^{-2} 2^k}{k!} (k = 1, 2, 3 \dots)$

**【解析】** (1)  $P\{Y > 0\} = P\{Y = X - 100\} = P\{X > 100\} = \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{100}^{+\infty} (x-100) \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = \int_{100}^{+\infty} (x+100-200) \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx \\ &= \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^2} dx - 200 \times \frac{1}{4} = 50 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{M} = k\} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n e^{-8}}{n!} C_n^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n e^{-8}}{n!} \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-8}}{k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{8^n}{(n-k)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-k)} = \frac{e^{-8}}{k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^{n+k}}{n!} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= \frac{e^{-8} 2^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n}{n!} = \frac{e^{-8} 2^k}{k!} e^6 = \frac{e^{-2} 2^k}{k!} (k = 1, 2, 3 \dots)
\end{aligned}$$