2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则(　　)

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为(　　)

(A) $x-y+z=-2$.　　(B) $x+y+z=0$.

(C) $x-2y+z=-3$.　　(D) $x-y-z=0$.

(3)设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$, $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$,则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$(　　)

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{1}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

(4)设 $L_1:x^2+y^2=1$, $L_2:x^2+y^2=2$, $L_3:x^2+2y^2=2$, $L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\ (i=1,2,3,4)$,则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$(　　)

(A) I_1.　　(B) I_2.　　(C) I_3.　　(D) I_4.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　)

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6)矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　)

(A) $a=0,b=2$.　　(B) $a=0$, b 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$.　　(D) $a=2$, b 为任意常数.

(7)设 X_1,X_2,X_3 是随机变量,且 $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,2^2)$, $X_3\sim N(5,3^2)$, $p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}$ $(i=1,2,3)$,则(　　)

(A) $p_1>p_2>p_3$.　　(B) $p_2>p_1>p_3$.

(C) $p_3>p_1>p_2$.　　(D) $p_1>p_3>p_2$.

(8)设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$,给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$,常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$,则 $P\{Y>c^2\}=$(　　)

(A) α.　　(B) $1-\alpha$.　　(C) 2α.　　(D) $1-2\alpha$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$______.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^{x}-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$______.

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t 为参数)，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

(12) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\leqslant a+1\mid Y>a\}=$______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

(16)（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\ (n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ) 证明 $S''(x)-S(x)=0$；

(Ⅱ) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点,将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(Ⅰ)求曲面 Σ 的方程;

(Ⅱ)求 Ω 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ)求 Y 的分布函数;

(Ⅱ)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.