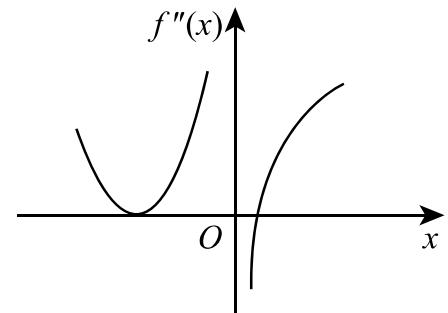


2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形



如右图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则()

- (A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
 (C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的()

- (A) 收敛点, 收敛点. (B) 收敛点, 发散点.
 (C) 发散点, 收敛点. (D) 发散点, 发散点.

(4) 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在

D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dxdy =$ ()

- (A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$. (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$.
 (C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$. (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分

必要条件为()

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
 (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若

$Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为()

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则()

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
 (C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

- (8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $E(X) = 2, E(Y) = 1, D(X) = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] = (\quad)$
 (A) -3. (B) 3. (C) -5. (D) 5.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

- (15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + b x \sin x, g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 值.

- (16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

- (17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

- (I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
- (II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

- 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \\ z = x, \end{cases}$, 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

- (I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基;
- (II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I)求 a, b 的值;

(II)求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量;

(II)求 θ 的最大似然估计量.