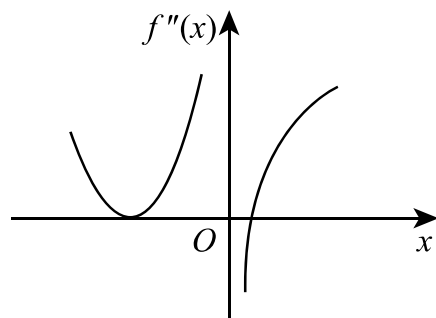


# 2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,其 2 阶导函数  $f''(x)$  的图形如右图所示,则曲线  $y=f(x)$  的拐点个数为( )

(A) 0. (B) 1.  
(C) 2. (D) 3.



- (2) 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$  是二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解,则( )

(A)  $a = -3, b = 2, c = -1$ . (B)  $a = 3, b = 2, c = -1$ .  
(C)  $a = -3, b = 2, c = 1$ . (D)  $a = 3, b = 2, c = 1$ .

- (3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛,则  $x = \sqrt{3}$  与  $x = 3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的( )

(A) 收敛点,收敛点. (B) 收敛点,发散点.  
(C) 发散点,收敛点. (D) 发散点,发散点.

- (4) 设  $D$  是第一象限中的曲线  $2xy = 1, 4xy = 1$  与直线  $y = x, y = \sqrt{3}x$  围成的平面区域,函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续,则  $\iint_D f(x, y) dx dy = ( )$

(A)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(B)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(C)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

(D)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

- (5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ . 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解的充分

必要条件为( )

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ . (B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$ .  
(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$ . (D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$ .

- (6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $P = (e_1, e_2, e_3)$ . 若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为( )

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ . (B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .  
(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ . (D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

- (7) 若  $A, B$  为任意两个随机事件,则( )

(A)  $P(AB) \leq P(A)P(B)$ . (B)  $P(AB) \geq P(A)P(B)$ .  
(C)  $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ . (D)  $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ .

- (8) 设随机变量  $X, Y$  不相关, 且  $E(X) = 2, E(Y) = 1, D(X) = 3$ , 则  $E[X(X+Y-2)] = ( \quad )$   
 (A)  $-3$ . (B)  $3$ . (C)  $-5$ . (D)  $5$ .

二、填空题( 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上. )

- (9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (10)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (11) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^z + xyz + x + \cos x = 2$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (12) 设  $\Omega$  是由平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面所围成的空间区域, 则  $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz$   
 $= \underline{\hspace{2cm}}.$
- (13)  $n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1; 0)$ , 则  $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题( 本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. )

- (15) ( 本题满分 10 分)  
 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$ . 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  值.
- (16) ( 本题满分 10 分)  
 设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零. 若对任意的  $x_0 \in I$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4, 且  $f(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.
- (17) ( 本题满分 10 分)  
 已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ , 曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ , 求  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ;

(II) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式.

(19) (本题满分 10 分)

已知曲线  $L$  的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$  起点为  $A(0, \sqrt{2}, 0)$ , 终点为  $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ , 计算曲线积

$$\text{分 } I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz.$$

(20) (本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $\mathbf{R}^3$  的一个基,  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$ ,  $\beta_2 = 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ .

(I) 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $\mathbf{R}^3$  的一个基;

(II) 当  $k$  为何值时, 存在非零向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同, 并求所有的  $\xi$ .

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记  $Y$  为观测次数.

(I) 求  $Y$  的概率分布;

(II) 求  $E(Y)$ .

(23)(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求  $\theta$  的矩估计量;

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.