2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A)$(1,0)$.　　(B)$(2,0)$.　　(C)$(3,0)$.　　(D)$(4,0)$.

(2)设数列$\{a_n\}$单调减少,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A)$(-1,1]$.　　(B)$[-1,1)$.　　(C)$[0,2)$.　　(D)$(0,2]$.

(3)设函数$f(x)$具有二阶连续导数,且$f(x)>0$,$f'(0)=0$,则函数$z=f(x)\ln f(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A)$f(0)>1$,$f''(0)>0$.　　(B)$f(0)>1$,$f''(0)<0$.

(C)$f(0)<1$,$f''(0)>0$.　　(D)$f(0)<1$,$f''(0)<0$.

(4)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为(　　)

(A)$I<J<K$.　　(B)$I<K<J$.　　(C)$J<I<K$.　　(D)$K<J<I$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$(　　)

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7)设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$与 $f_2(x)$是连续函数,则必为概率密度的是(　　)

(A)$f_1(x)f_2(x)$.　　(B)$2f_2(x)F_1(x)$.

(C)$f_1(x)F_2(x)$.　　(D)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $E(X)$与 $E(Y)$存在,记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$(　　)

(A)$E(U)\cdot E(V)$.　　(B)$E(X)\cdot E(Y)$.

(C)$E(U)\cdot E(Y)$.　　(D)$E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的弧长 $s=$______.

(10)微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$______.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$______.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$______.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数,且$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(Ⅰ)求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z = XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2 > 0$ 未知,$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计$\widehat{\sigma^2}$;

(Ⅱ)计算 $E(\widehat{\sigma^2})$和 $D(\widehat{\sigma^2})$.