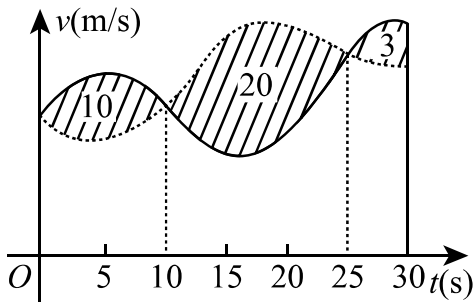


2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则()
- (A) $ab = \frac{1}{2}$. (B) $ab = -\frac{1}{2}$. (C) $ab = 0$. (D) $ab = 2$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x) > 0$,则()
- (A) $f(1) > f(-1)$. (B) $f(1) < f(-1)$.
(C) $|f(1)| > |f(-1)|$. (D) $|f(1)| < |f(-1)|$.
- (3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为()
- (A) 12. (B) 6. (C) 4. (D) 2.
- (4) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次是 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位:s),则()
- (A) $t_0 = 10$.
(B) $15 < t_0 < 20$.
(C) $t_0 = 25$.
(D) $t_0 > 25$.
- 
- (5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵,则()
- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆. (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.
- (6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则()
- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似. (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似. (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.
- (7) 设 A, B 为随机事件. 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是()
- (A) $P(B|A) > P(B|\bar{A})$. (B) $P(B|A) < P(B|\bar{A})$.
(C) $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$. (D) $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$.
- (8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是()
- (A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.
(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

- (9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$ _____.
- (10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.
- (11) 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$ _____.
- (12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.
- (13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 _____.
- (14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

(16) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$. 证明:

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z) = 9 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M .

(20) (本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 设 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 \mathbf{Q} .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.