

2020 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是().

- (A) $\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2} - 1) dt$ (B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$
(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义,且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
(B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
(C) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$
(D) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$
(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0$, $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 \mathbf{n} 垂直,则().

- (A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
(B) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
(C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\boldsymbol{\alpha} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
(D) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\boldsymbol{\alpha} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在

- 4) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则().
- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$ (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| \leq R$
 (C) 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散 (D) 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛
- 5) 若矩阵 A 经过初等列变换化成 B , 则().
- (A) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$
 (B) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$
 (C) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$
 (D) 方程组 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 同解
- 6) 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,
 记向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$, 则().
- (A) α_1 可由 α_2, α_3 线性表示 (B) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示
 (C) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
- 7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$,
 $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为().
- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$
- 8) 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}, \Phi(x)$
 表示标准正态分布函数, 利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为().
- (A) $1 - \Phi(1)$ (B) $\Phi(1)$ (C) $1 - \Phi(0.2)$ (D) $\Phi(0.2)$
- 二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题中的横线上.)
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 10) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \end{cases}$ 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 11) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则
 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 12) 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$(13) \text{ 行列式} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

(17) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$) 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求正交矩阵 Q .

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = \mathbf{0}$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2.$$

(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23) (本题满分 11 分)

设某元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.