# 2016 年全国硕士研究生招生考试试题

## 一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛,则(　　)

(A)$a<1$ 且 $b>1$.　　(B)$a>1$ 且 $b>1$.

(C)$a<1$ 且 $a+b>1$.　　(D)$a>1$ 且 $a+b>1$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3)若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,则 $q(x)=$(　　)

(A)$3x(1+x^2)$.　　(B)$-3x(1+x^2)$.　　(C)$\frac{x}{1+x^2}$.　　(D)$-\frac{x}{1+x^2}$.

(4)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则(　　)

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　(B)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　)

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为(　　)

(A)单叶双曲面.　　(B)双叶双曲面.　　(C)椭球面.　　(D)柱面.

(7)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$,则(　　)

(A)$p$ 随着 $\mu$ 的增加而增加.　　(B)$p$ 随着 $\sigma$ 的增加而增加.

(C)$p$ 随着 $\mu$ 的增加而减少.　　(D)$p$ 随着 $\sigma$ 的增加而减少.

(8)随机试验 $E$ 有三种两两不相容的结果 $A_1,A_2,A_3$,且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$,将试验 $E$ 独立重复做 2 次,$X$ 表示 2 次试验中结果 $A_1$ 发生的次数,$Y$ 表示 2 次试验中结果 $A_2$ 发生的次数,则 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为(　　)

(A)$-\frac{1}{2}$.　　(B)$-\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{1}{3}$.　　(D)$\frac{1}{2}$.

## 二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$______.

(10) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=$______.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微,$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$______.

(12) 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$,且 $f'''(0)=1$,则 $a=$______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,样本均值 $\overline{X}=9.5$,参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8,则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

## 三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 $0<k<1$.

(Ⅰ)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(Ⅱ)若 $y(0)=1,y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y+1$,$L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$,并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 $\Omega$ 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，$\Sigma$ 为 $\Omega$ 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$. 当 $a$ 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布,令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出 $(X,Y)$ 的概率密度;

(Ⅱ)问 $U$ 与 $X$ 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 $T$ 的概率密度;

(Ⅱ)确定 $a$,使得 $aT$ 为 $\theta$ 的无偏估计.