

2005 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

(2) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

(3) 设函数 $u(x,y,z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)} = _____$.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界
的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = _____$.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mathbf{B} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|\mathbf{A}| = 1$, 那么 $|\mathbf{B}| = _____$.

(6) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 1, ..., X 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} = _____$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内()

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
- (C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有()

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
- (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
- (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
- (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一
阶导数, 则必有()

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(10) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻
域内该方程()

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$.
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$.
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$.

- (11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是()
(A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$.
- (12) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则()
(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .
(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.
(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.
- (13) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| | Y | 0 | 1 |
| X | | | |
| 0 | | 0.4 | a |
| 1 | | b | 0.1 |

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则()

- (A) $a = 0.2, b = 0.3$. (B) $a = 0.4, b = 0.1$.
(C) $a = 0.3, b = 0.2$. (D) $a = 0.1, b = 0.4$.
- (14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n(n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则()
(A) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$. (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.
(C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$. (D) $\frac{(n-1)\bar{X}^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

- (15) (本题满分 11 分)

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

- (16) (本题满分 12 分)

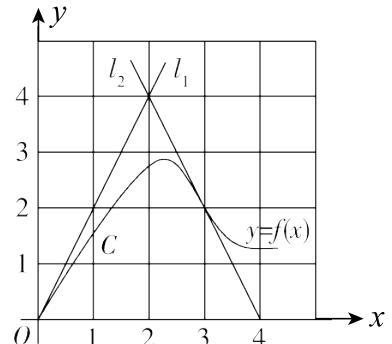
求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

- (17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$.

设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$



(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$$

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(21) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

(22) (本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 9 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

求: (I) Y_i 的方差 $D(Y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{Cov}(Y_1, Y_n)$.