

1998 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f, φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设 A 为 n 阶矩阵, $|A| \neq 0$, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ , 则 $(A^*)^2 + E$ 必有特征值 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0, x = 1, x = e^2$ 所围成, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x = 2$ 处的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = (\quad)$

(A) $xf(x^2).$ (B) $-xf(x^2).$ (C) $2xf(x^2).$ (D) $-2xf(x^2).$

(2) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数是 (\quad)

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

(3) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于 (\quad)

(A) $2\pi.$ (B) $\pi.$ (C) $e^{\frac{\pi}{4}}.$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}.$

(4) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的

$\frac{z-c_1}{c_2-c_3} (\quad)$

(A) 相交于一点. (B) 重合. (C) 平行但不重合. (D) 异面.

(5) 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有 (\quad)

(A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B).$ (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B).$

(C) $P(AB) = P(A)P(B).$ (D) $P(AB) \neq P(A)P(B).$

三、(本题满分 5 分)

求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

四、(本题满分 6 分)

确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $\mathbf{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

五、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 k ($k > 0$). 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y = y(v)$.

六、(本题满分 7 分)

计算 $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

七、(本题满分 6 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

八、(本题满分 5 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明 (1) 中的 x_0 是唯一的.

十、(本题满分 6 分)

已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 \mathbf{P} .

十一、(本题满分 4 分)

设 \mathbf{A} 是 n 阶矩阵, 若存在正整数 k , 使线性方程组 $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 且 $\mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

十二、(本题满分 5 分)

已知线性方程组

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^T, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^T$. 试写出线性方程组

$$(II) \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解,并说明理由.

十三、(本题满分 6 分)

设两个随机变量 X, Y 相互独立,且都服从均值为 0,方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布,求随机变量 $|X - Y|$ 的方差.

十四、(本题满分 4 分)

从正态总体 $N(3.4, 6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,如果要求其样本均值位于区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95,问样本容量 n 至少应取多大?

附表:标准正态分布表 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

十五、(本题满分 4 分)

设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机地抽取 36 位考生的成绩,算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附表: t 分布表 $P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$

$t_p(n)$ n		p	0.95	0.975
35			1.6896	2.0301
36			1.6883	2.0281