

2009年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量, 则()

$$(A) a = 1, b = -\frac{1}{6}. \quad (B) a = 1, b = \frac{1}{6}.$$

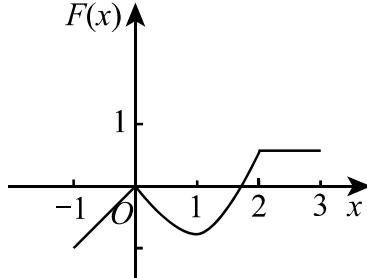
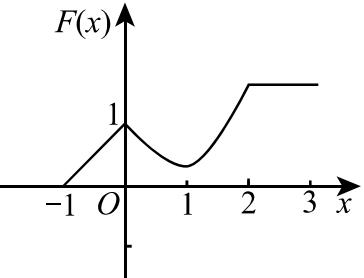
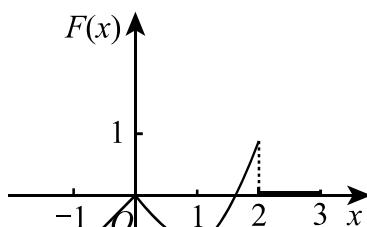
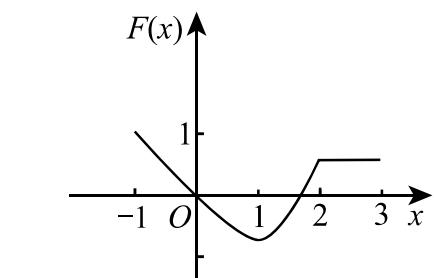
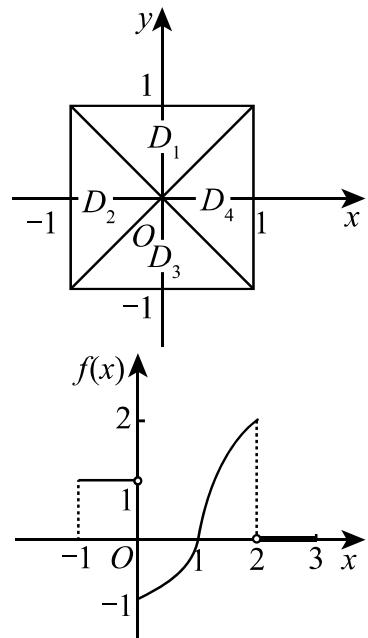
$$(C) a = -1, b = -\frac{1}{6}. \quad (D) a = -1, b = \frac{1}{6}.$$

- (2) 如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区

$$\text{域 } D_k \text{ } (k=1,2,3,4), I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy, \text{ 则 } \max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = (\quad)$$

- (3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如右图所示, 则函数

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为()



- (4) 设有两个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则()

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

- (5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 \mathbf{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

的过渡矩阵为()

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$$

$$(A) \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}. \quad (B) \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \quad (C) \begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}. \quad (D) \begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) = (\quad)$

- (A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$,

求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体的体积.

(18)(本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1 | Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.