

2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x = 0$ 处不可导的是()

- (A) $f(x) = |x| \sin|x|$. (B) $f(x) = |x| \sin\sqrt{|x|}$.
(C) $f(x) = \cos|x|$. (D) $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$.

(2) 过点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为()

- (A) $z = 0$ 与 $x + y - z = 1$. (B) $z = 0$ 与 $2x + 2y - z = 2$.
(C) $x = y$ 与 $x + y - z = 1$. (D) $x = y$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$ ()

- (A) $\sin 1 + \cos 1$. (B) $2\sin 1 + \cos 1$.
(C) $2\sin 1 + 2\cos 1$. (D) $2\sin 1 + 3\cos 1$.

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则()

- (A) $M > N > K$. (B) $M > K > N$.
(C) $K > M > N$. (D) $K > N > M$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则()

- (A) $r(A, AB) = r(A)$. (B) $r(A, BA) = r(A)$.
(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$. (D) $r(A, B) = r(A^T, B^T)$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$ ()

- (A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 据此样本检验假设: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 则()

- (A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .
(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有2阶连续导数. 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 xf''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$, 则 $\text{rot } \mathbf{F}(1,1,0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设2阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$. 若 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4}$, 则 $P(C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分10分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

(16) (本题满分10分)

将长为2m的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(17) (本题满分10分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy$.

(18) (本题满分10分)

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的连续函数.

(I) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解;

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(21) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为

λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.