

# 2024 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

考试时间：180 分钟，满分：150 分

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 已知函数  $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$ ,  $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , 则

- A.  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数
- B.  $f(x)$  为偶函数,  $g(x)$  为奇函数
- C.  $f(x)$  与  $g(x)$  均为奇函数
- D.  $f(x)$  与  $g(x)$  均为周期函数

【答案】C

2. 设  $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z)$  均为连续函数,

$\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) 的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx =$

A.  $\iint_{\Sigma} \left( \frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

B.  $\iint_{\Sigma} \left( -\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

C.  $\iint_{\Sigma} \left( \frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

D.  $\iint_{\Sigma} \left( -\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

【答案】A

3. 已知幂函数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数为  $\ln(2+x)$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} =$

A.  $-\frac{1}{6}$

B.  $-\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{3}$

【答案】A

设函数  $f(x)$  在区间  $(-1,1)$  内有定义,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 则  
4.

A. 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$  时,  $f'(0) = m$ .

B. 当  $f'(0) = m$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$ .

C. 当  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$  时,  $f'(0) = m$ .

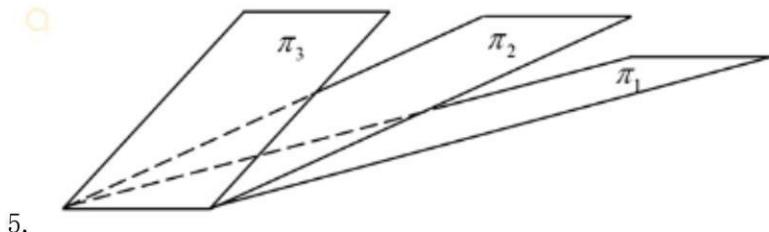
D. 当  $f'(0) = m$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$ .

【答案】B

在空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 三张平面  $\pi_i: a_i x + b_i y + c_i z = d_i$

( $i=1,2,3$ ) 位置关系如图所示, 记  $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$ ,  $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ ,

若  $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m$ ,  $r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$ , 则



5.

A.  $m=1, n=2$

- B.  $m=n=2$   
 C.  $m=2, n=3$   
 D.  $m=n=3$

【答案】B

设向量  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 且其中任意两个向量线性无关, 则

6.  
 A.  $a=1, b \neq -1$   
 B.  $a=1, b=-1$   
 C.  $a \neq -2, b=2$   
 D.  $a=-2, b=2$

【答案】D

- 3阶矩阵  $A$  的秩为 2, 非零向量  $\alpha$  满足  $A\alpha=0$ , 任意向量  $\beta$ , 使得  $\beta^T\alpha=0$ , 且  $A\beta=\beta$ ,  
 则下列结论正确的是  
 7.  
 A.  $A^3$  的迹为 2  
 B.  $A^3$  的迹为 5  
 C.  $A^5$  的迹为 7  
 D.  $A^5$  的迹为 9

【答案】A

8. 设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从  $N(0, 2)$  的正态分布, Y 服从  $N(-2, 2)$  的正态分布, 若  $P\{2X+Y < a\} = P\{X > Y\}$ , 则  $a =$   
 A.  $-2-\sqrt{10}$   
 B.  $-2+\sqrt{10}$   
 C.  $-2-\sqrt{6}$

D.  $-2+\sqrt{6}$

【答案】B

- 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 在  $X=x$  的条件下,  $Y$  在区间  $(x, 1)$  上服从均匀分布, 则  $\text{cov}(X, Y) =$

- 9.
- A.  $-\frac{1}{36}$
  - B.  $-\frac{1}{72}$
  - C.  $\frac{1}{72}$
  - D.  $\frac{1}{36}$

【答案】D

10. 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且均服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 令  $Z=|X-Y|$ , 则下列随机变量与  $Z$  同分布的是

- A.  $X+Y$
- B.  $\frac{X+Y}{2}$
- C.  $2X$
- D.  $X$

【答案】D

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

11. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$ , 则  $a =$

【答案】6

$z = f(u, v)$  有二阶连续导数,  $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right|_{(1,1)} = 3$ ,

$y = f(\cos x, 1+x^2)$ , 则  $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=0} =$   
12.

【答案】5

13.

若函数  $f(x) = x+1$ . 若  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ,  $x \in [0, \pi]$ . 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin a_{2n-1} = \psi$

【答案】 $-\frac{1}{x}$

微分方程  $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$ , 满足条件  $y(1)=0$  的解为.  
14.

$x = \tan(y + \frac{\pi}{4}) - y$ .

【答案】

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$ , 若对任意实向量  $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  
15.  $(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \beta^T A \beta$  都成立, 则  $a$  的取值范围是

【答案】 $a \geq 0$

16. 随机试验每次成功的概率为  $P$ , 现进行三次独立重复实验, 已知至少成功一次的条件下

全部成功概率为  $\frac{4}{13}$ , 现  $P =$

【答案】 $\frac{2}{3}$

三、解答题: 17-22 小题, 共 70 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

已知平面区域  $D = \{(x, y) | \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , 计算  $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$ .

17.

【答案】 $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - 2$

18. 设  $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x+y)^2 + 3$ , 曲面  $z = f(x, y)$  在  $(1, 1, 1)$  处的切平面为  $T$ ,  $T$  与三个坐标面所围有界区域在  $xoy$  面的投影为  $D$

(1) 求  $T$  的方程

(2) 求  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值和最小值

【答案】切平面  $x+y+z=3$ ; 最大值 21, 最小值  $\frac{17}{27}$

设  $f(x)$  二阶可导,  $f'(0) = f''(0)$ ,  $|f''(x)| \leq 1$ , 证:

$$1) |f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}.$$

$$2) \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$$

19.

【答案】(1) 泰勒公式 (2) 把 (1) 代入

20. 已知有向曲线  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  与平面  $2x - z - 1 = 0$  的交线从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 计算曲线积分  $\int_L (6xyz - yz^2)dx + 2x^2zdy + xyzdz$

【答案】 $\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

已知数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  满足  $x_0 = -1, y_0 = 0, z_0 = 2$ , 且  $\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{cases}$ ,

记  $\alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ , 写出满足  $\alpha_n = A\alpha_{n-1}$  的矩阵  $A$ , 并求  $A^n$  及  $x_n, y_n, z_n (n=1, 2, \dots)$ .

21.

$$【答案】 A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1} 2^n & -2 + (-1)^{n+1} 2^n & 2 \\ 4 + (-1)^{n+1} 2^n & 2 + (-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_n = 8 + (-2)^n, y_n = -8 + (-2)^n, z_n = 12.$$

22.

设总体  $X \sim U(0, \theta)$ ， $\theta$  未知， $X_1, X_2 \dots X_n$  为简单随机样本，

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2 \dots X_n), \quad T_c = cX_{(n)}.$$

(1) 求  $c$  时，使得  $T_c$  为  $\theta$  的无偏估计。

(2) 记  $h(c) = E(T_c - \theta)^2$ ，求  $c$  使得  $h(c)$  取最小值。

$$【答案】 (1) c = \frac{n+1}{n}; \quad (2) c = \frac{n+2}{n+1}$$