粘弹性流体的数学建模和分析

霍晓凯

博士论文最终学术报告

2017 年 3 月 31 日

概览

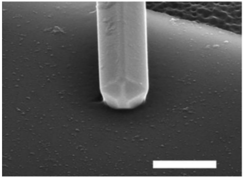
1. 简介
   - 研究综述
   - 研究内容
2. 粘弹性流体的数学建模
   - 线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 非线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 有限守恒耗散理论在粘弹性流体建模中的应用
3. 粘弹性流体力学的数学分析
   - 方程的结构性条件
   - 整体存在性
   - 与 Navier-Stokes 方程的一致性分析
4. 总结与展望

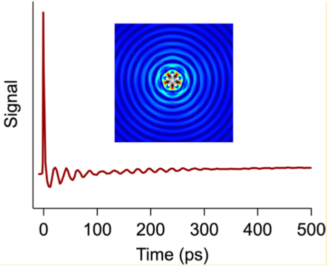
概览

概览

研究背景

- 纳米科学等学科的发展为粘弹性流体力学建模提出了新的挑战：需要在粘弹性流体建模中考虑压缩性和温度的影响。



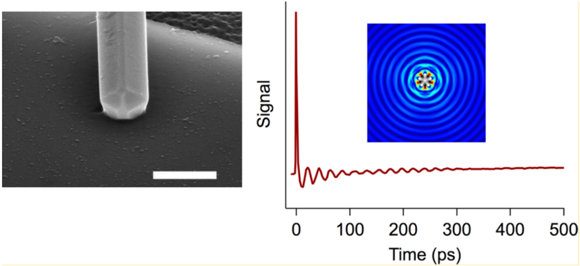


来源：Yu K, Major T A, Chakraborty D, *Nano Letters, 2015*

- 非平衡态热力学为粘弹性建模提供了工具，但目前大多数非平衡态热力学理论是从物理原理出发，缺乏数学上对方程适定性的分析。

研究背景

- 纳米科学等学科的发展为粘弹性流体力学建模提出了新的挑战：需要在粘弹性流体建模中考虑压缩性和温度的影响。



来源：Yu K, Major T A, Chakraborty D, *Nano Letters, 2015*

- 非平衡态热力学为粘弹性建模提供了工具，但目前大多数非平衡态热力学理论是从物理原理出发，缺乏数学上对方程适定性的分析。

粘弹性流体建模的研究历程和现状

19 世纪	Maxwell 模型.
19 世纪	Kelvin-Voigt 模型.
1947	Karl Weissenberg 发现 Weissenberg 效应.
1949	James Oldroyd 提出 Oldroyd 模型和客观性原理.
1961	Peterlin 发展了 FENE-P 模型.
1960s	Coleman、Noll、Truesdell 等提出记忆衰减理论.
1970s	PG. de Gennes、Doi、Edwards 等发展了高分子的纠缠动力学理论.
1980s	Doi、Edwards 等发展了棒状材料的粘弹性模型.
1980—	更多复杂流体的粘弹性模型被提出，Larson 等发展了高分子熔融液的粘弹性模型，ME Cates 等发展了许多软物质的粘弹性模型，J Prost 等发展了活性材料的粘弹性模型....

非平衡热力学在粘弹性建模中的发展

经典不可逆热力学 CIT

有理热力学 RT

扩展不可逆热力学 EIT

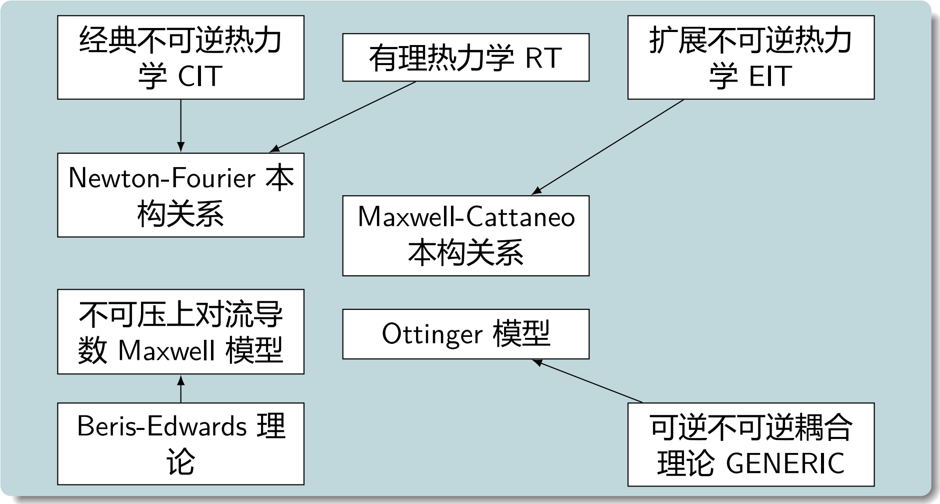
Beris-Edwards 理论

可逆不可逆耦合理论 GENERIC

非平衡热力学在粘弹性建模中的发展

经典不可逆热力学 CIT	有理热力学 RT	扩展不可逆热力学 EIT
Newton-Fourier 本构关系	Maxwell-Cattaneo 本构关系	
不可压上对流导数 Maxwell 模型	Ottinger 模型	
Beris-Edwards 理论		可逆不可逆耦合理论 GENERIC

非平衡热力学在粘弹性建模中的发展



粘弹性流体分析的研究现状

- 目前的研究主要集中于不可压方程，主要为 Oldoyd 模型、FENE-P 模型和林芳华等提出的粘弹性模型等。
- 不可压 Oldroyd 模型的主要分析结果包括解的局部存在性和小解的整体存在性（Guillope 和 Saut，1990；Molinet 和 Talhouk，2004；Chemin 和 Masmoudi，2001）、牛顿极限（Molinet 和 Talhouk，2008）。
- 林芳华等提出的模型的二维、三维局部存在性和小解的整体存在性（林、柳、张，2005；雷、柳、周，2008）。
- 近些年来部分可压模型的分析得到关注。例如可压 Oldroyd 模型（方、訾，2014；雷，2006；Barrett，2016）、林芳华等提出模型的可压情形（钱、章，2010；胡、王，2011）。
- 微观模型的数学结果可以参看（李、张，2007；Bris、Lelievre，2009）。

粘弹性流体分析的研究现状

- 目前的研究主要集中于不可压方程，主要为 Oldoyd 模型、FENE-P 模型和林芳华等提出的粘弹性模型等。
- 不可压 Oldroyd 模型的主要分析结果包括解的局部存在性和小解的整体存在性（Guillope 和 Saut，1990；Molinet 和 Talhouk，2004；Chemin 和 Masmoudi，2001）、牛顿极限（Molinet 和 Talhouk，2008）。
- 林芳华等提出的模型的二维、三维局部存在性和小解的整体存在性（林、柳、张，2005；雷、柳、周，2008）。
- 近些年来部分可压模型的分析得到关注。例如可压 Oldroyd 模型（方、訾，2014；雷，2006；Barrett，2016）、林芳华等提出模型的可压情形（钱、章，2010；胡、王，2011）。
- 微观模型的数学结果可以参看（李、张，2007；Bris、Lelievre，2009）。

粘弹性流体分析的研究现状

- 目前的研究主要集中于不可压方程，主要为 Oldoyd 模型、FENE-P 模型和林芳华等提出的粘弹性模型等。
- 不可压 Oldroyd 模型的主要分析结果包括解的局部存在性和小解的整体存在性（Guillope 和 Saut，1990；Molinet 和 Talhouk，2004；Chemin 和 Masmoudi，2001）、牛顿极限（Molinet 和 Talhouk，2008）。
- 林芳华等提出的模型的二维、三维局部存在性和小解的整体存在性（林、柳、张，2005；雷、柳、周，2008）。
- 近些年来部分可压模型的分析得到关注。例如可压 Oldroyd 模型（方、訾，2014；雷，2006；Barrett，2016）、林芳华等提出模型的可压情形（钱、章，2010；胡、王，2011）。
- 微观模型的数学结果可以参看（李、张，2007；Bris、Lelievre，2009）。

粘弹性流体分析的研究现状

- 目前的研究主要集中于不可压方程，主要为 Oldoyd 模型、FENE-P 模型和林芳华等提出的粘弹性模型等。
- 不可压 Oldroyd 模型的主要分析结果包括解的局部存在性和小解的整体存在性（Guillope 和 Saut，1990；Molinet 和 Talhouk，2004；Chemin 和 Masmoudi，2001）、牛顿极限（Molinet 和 Talhouk，2008）。
- 林芳华等提出的模型的二维、三维局部存在性和小解的整体存在性（林、柳、张，2005；雷、柳、周，2008）。
- 近些年来部分可压模型的分析得到关注。例如可压 Oldroyd 模型（方、訾，2014；雷，2006；Barrett，2016）、林芳华等提出模型的可压情形（钱、章，2010；胡、王，2011）。
- 微观模型的数学结果可以参看（李、张，2007；Bris、Lelievre，2009）。

粘弹性流体分析的研究现状

- 目前的研究主要集中于不可压方程，主要为 Oldoyd 模型、FENE-P 模型和林芳华等提出的粘弹性模型等。
- 不可压 Oldroyd 模型的主要分析结果包括解的局部存在性和小解的整体存在性（Guillope 和 Saut，1990；Molinet 和 Talhouk，2004；Chemin 和 Masmoudi，2001）、牛顿极限（Molinet 和 Talhouk，2008）。
- 林芳华等提出的模型的二维、三维局部存在性和小解的整体存在性（林、柳、张，2005；雷、柳、周，2008）。
- 近些年来部分可压模型的分析得到关注。例如可压 Oldroyd 模型（方、訾，2014；雷，2006；Barrett，2016）、林芳华等提出模型的可压情形（钱、章，2010；胡、王，2011）。
- 微观模型的数学结果可以参看（李、张，2007；Bris、Lelievre，2009）。

粘弹性流体建模和分析的挑战

- 前面提到的非平衡态热力学理论均未能为粘弹性流体建模提供一个统一而完整的框架。
- 这些理论导出的模型的适定性也没有得到严格地数学分析。
- 对粘弹性流体的分析需要统一的处理。

如何发展一个既满足物理理论、又能保证所得模型具有良好数学结构，并为粘弹性流体建模提供一个统一而完整框架的热力学理论，是一个很大的挑战。

雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝提出的非平衡态热力学的守恒耗散理论基于于雍提出的双曲方程守恒耗散结构，是一个具有潜力的非平衡态热力学理论，我们将利用和发展这一理论来对粘弹性流体进行建模和分析。

粘弹性流体建模和分析的挑战

- 前面提到的非平衡态热力学理论均未能为粘弹性流体建模提供一个统一而完整的框架。
- 这些理论导出的模型的适定性也没有得到严格地数学分析。
- 对粘弹性流体的分析需要统一的处理。

如何发展一个既满足物理理论、又能保证所得模型具有良好数学结构，并为粘弹性流体建模提供一个统一而完整框架的热力学理论，是一个很大的挑战。

雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝提出的非平衡态热力学的守恒耗散理论基于雍提出的双曲方程守恒耗散结构，是一个具有潜力的非平衡态热力学理论，我们将利用和发展这一理论来对粘弹性流体进行建模和分析。

粘弹性流体建模和分析的挑战

- 前面提到的非平衡态热力学理论均未能为粘弹性流体建模提供一个统一而完整的框架。
- 这些理论导出的模型的适定性也没有得到严格地数学分析。
- 对粘弹性流体的分析需要统一的处理。

如何发展一个既满足物理理论、又能保证所得模型具有良好数学结构，并为粘弹性流体建模提供一个统一而完整框架的热力学理论，是一个很大的挑战。

雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝提出的非平衡态热力学的守恒耗散理论基于雍提出的双曲方程守恒耗散结构，是一个具有潜力的非平衡态热力学理论，我们将利用和发展这一理论来对粘弹性流体进行建模和分析。

粘弹性流体建模和分析的挑战

- 前面提到的非平衡态热力学理论均未能为粘弹性流体建模提供一个统一而完整的框架。
- 这些理论导出的模型的适定性也没有得到严格地数学分析。
- 对粘弹性流体的分析需要统一的处理。

如何发展一个既满足物理理论、又能保证所得模型具有良好数学结构，并为粘弹性流体建模提供一个统一而完整框架的热力学理论，是一个很大的挑战。

雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝提出的非平衡态热力学的守恒耗散理论基于雍提出的双曲方程守恒耗散结构，是一个具有潜力的非平衡态热力学理论，我们将利用和发展这一理论来对粘弹性流体进行建模和分析。

粘弹性流体建模和分析的挑战

- 前面提到的非平衡态热力学理论均未能为粘弹性流体建模提供一个统一而完整的框架。
- 这些理论导出的模型的适定性也没有得到严格地数学分析。
- 对粘弹性流体的分析需要统一的处理。

如何发展一个既满足物理理论、又能保证所得模型具有良好数学结构，并为粘弹性流体建模提供一个统一而完整框架的热力学理论，是一个很大的挑战。

雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝提出的非平衡态热力学的守恒耗散理论基于雍提出的双曲方程守恒耗散结构，是一个具有潜力的非平衡态热力学理论，我们将利用和发展这一理论来对粘弹性流体进行建模和分析。

概览

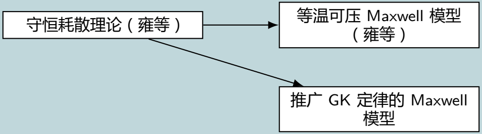
研究内容

守恒耗散理论（雍等）

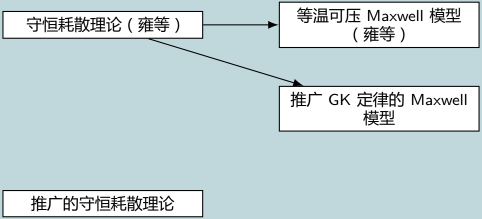
研究内容

守恒耗散理论（雍等） → 等温可压 Maxwell 模型（雍等）

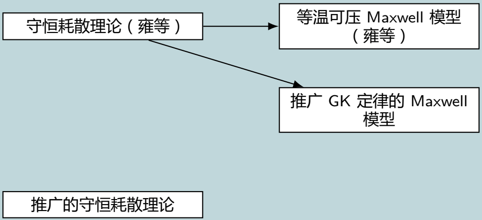
研究内容



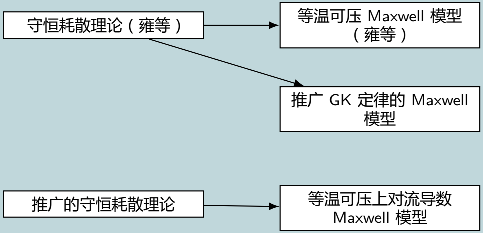
研究内容



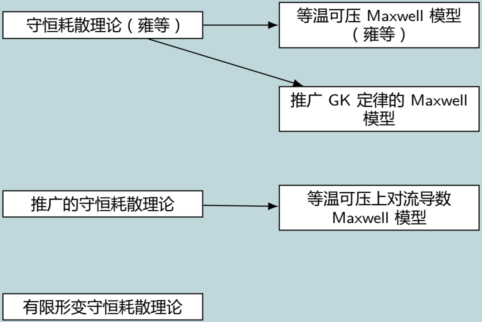
研究内容



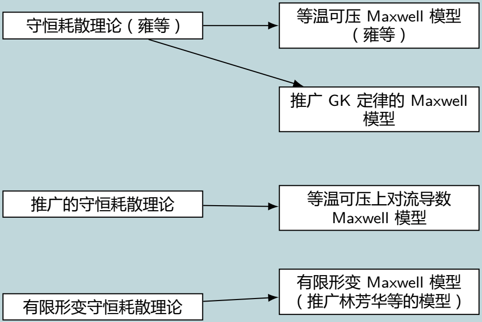
研究内容


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型

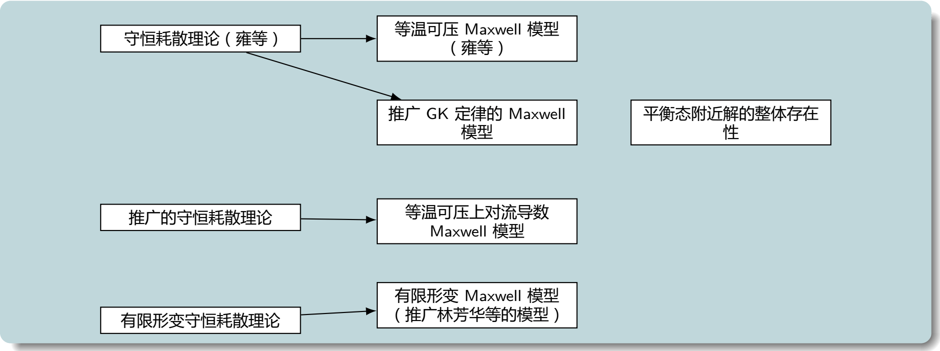
研究内容


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
有限形变守恒耗散理论

研究内容

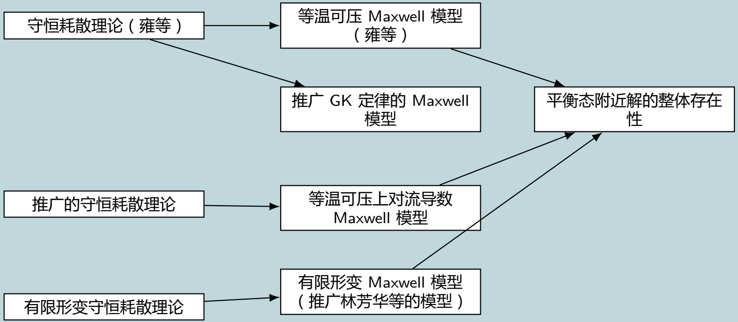

守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
有限形变守恒耗散理论
有限形变 Maxwell 模型（推广林芳华等的模型）

研究内容

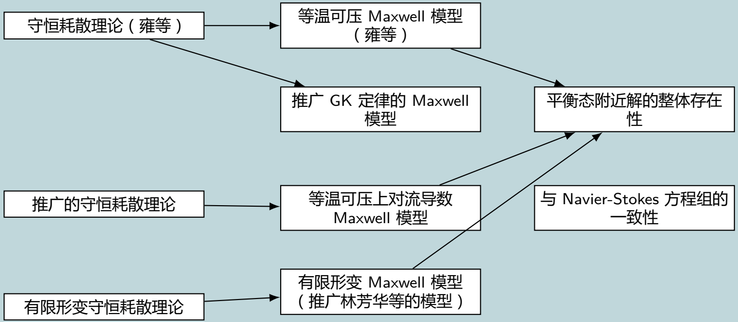


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
平衡态附近解的整体存在性
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
有限形变守恒耗散理论
有限形变 Maxwell 模型（推广林芳华等的模型）

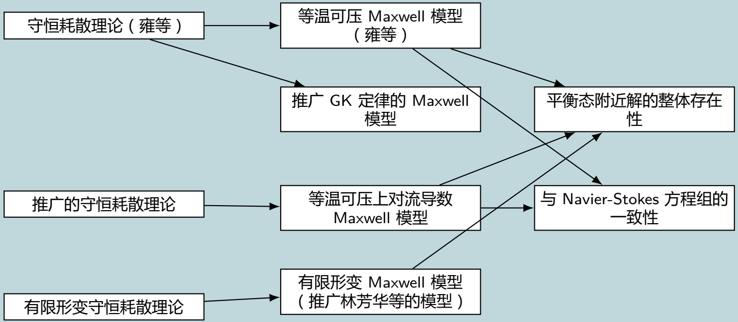
研究内容


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
平衡态附近解的整体存在性
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
有限形变守恒耗散理论
有限形变 Maxwell 模型（推广林芳华等的模型）

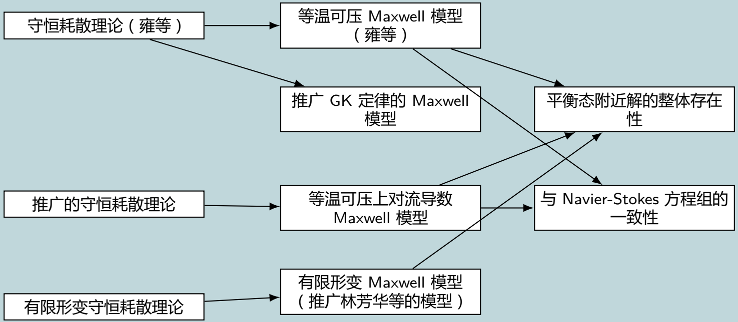
研究内容


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
平衡态附近解的整体存在性
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
与 Navier-Stokes 方程组的一致性
有限形变守恒耗散理论
有限形变 Maxwell 模型（推广林芳华等的模型）

研究内容


守恒耗散理论（雍等）
等温可压 Maxwell 模型（雍等）
推广 GK 定律的 Maxwell 模型
平衡态附近解的整体存在性
推广的守恒耗散理论
等温可压上对流导数 Maxwell 模型
与 Navier-Stokes 方程组的一致性
有限形变守恒耗散理论
有限形变 Maxwell 模型（推广林芳华等的模型）

研究内容



这里对方程的分析基于雍发展的含熵双曲方程组整体存在性理论和松弛极限理论。其中等温可压上对流导数 Maxwell 模型仅考虑了一维的情况，有限形变模型仅考虑了林芳华等提出的模型的整体存在性。

概览

概览

守恒耗散理论

- 雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝基于雍提出的守恒耗散结构提出了不可逆热力学的守恒耗散理论。
- 守恒耗散理论采用守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 来描述不可逆过程。

守恒耗散理论的一般方程

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j(U) = Q(U).$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}, \quad F_j(U) = \begin{pmatrix} f_j(U) \\ g_j(U) \end{pmatrix}, \quad Q(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi(U) \end{pmatrix}.$$

守恒耗散理论

- 雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝基于雍提出的守恒耗散结构提出了不可逆热力学的守恒耗散理论。
- 守恒耗散理论采用守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 来描述不可逆过程。

守恒耗散理论的一般方程

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j(U) = Q(U).$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}, \quad F_j(U) = \begin{pmatrix} f_j(U) \\ g_j(U) \end{pmatrix}, \quad Q(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi(U) \end{pmatrix}.$$

守恒耗散理论

- 雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝基于雍提出的守恒耗散结构提出了不可逆热力学的守恒耗散理论。
- 守恒耗散理论采用守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 来描述不可逆过程。

守恒耗散理论的一般方程

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j(U) = Q(U).$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}, \quad F_j(U) = \begin{pmatrix} f_j(U) \\ g_j(U) \end{pmatrix}, \quad Q(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi(U) \end{pmatrix}.$$

守恒耗散理论

- 雍稳安、朱毅、洪柳、杨再宝基于雍提出的守恒耗散结构提出了不可逆热力学的守恒耗散理论。
- 守恒耗散理论采用守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 来描述不可逆过程。

守恒耗散理论的一般方程

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j(U) = Q(U).$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}, \quad F_j(U) = \begin{pmatrix} f_j(U) \\ g_j(U) \end{pmatrix}, \quad Q(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi(U) \end{pmatrix}.$$

守恒耗散理论的基本假设

守恒耗散理论的假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU}$ 对称。我们称 η 为系统的熵函数。
2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

热力学第二定律成立：

$$\eta_t + \nabla \cdot J = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0.$$

守恒耗散理论的基本假设

守恒耗散理论的假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU}$ 对称。我们称 η 为系统的熵函数。
2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

热力学第二定律成立：

$$\eta_t + \nabla \cdot J = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0.$$

守恒耗散理论的基本假设

守恒耗散理论的假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU}$ 对称。我们称 η 为系统的熵函数。
2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

热力学第二定律成立：

$$\eta_t + \nabla \cdot J = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0.$$

守恒耗散理论的基本假设

守恒耗散理论的假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta=\eta(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU}$ 对称。我们称 η 为系统的熵函数。
2. 存在正定矩阵 $M=M(U)$，使得 $\Pi(U)=M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

热力学第二定律成立：

$$\eta_t+\nabla\cdot J=\eta_{U_d}^T M\eta_{U_d}\geq 0.$$

守恒耗散理论在线性粘弹性模型中的应用

- 取守恒变量、耗散变量分别为 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, \quad U_d = \{w, c\}$。

熵函数

$$\eta(U) = \rho s(\nu, u, w, c) = \rho\left(s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{n}{2\nu\alpha_1} \mathring{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu} \mathring{c} : \mathring{c}\right).$$

- Gibbs 关系：$\theta^{-1} = s_u, \quad \theta^{-1} p = s_\nu, \quad \theta^{-1}\tau = s_c.$
- 熵的产生率：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta}\right) + \Delta.$

$$\Delta = s_w \cdot \left[\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla\theta^{-1}\right] + \left(s_c : \left[\rho(c_t + v \cdot \nabla v)\right] - \theta^{-1}\tau : \nabla v\right).$$

守恒耗散理论在线性粘弹性模型中的应用

- 取守恒变量、耗散变量分别为 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, \quad U_d = \{w, c\}$。

熵函数

$$\eta(U) = \rho s(\nu, u, w, c) = \rho\left(s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{n}{2\nu\alpha_1} \mathring{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2 \nu} \mathring{c} : \mathring{c}\right).$$

- Gibbs 关系：$\theta^{-1} = s_u, \quad \theta^{-1} p = s_\nu, \quad \theta^{-1}\tau = s_c.$
- 熵的产生率：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\frac{q}{\theta}) + \Delta.$

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla v)] - \theta^{-1}\tau : \nabla v).$$

守恒耗散理论在线性粘弹性模型中的应用

- 取守恒变量、耗散变量分别为 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, \quad U_d = \{w, c\}$。

熵函数

$$\eta(U) = \rho s(\nu, u, w, c) = \rho\Big(s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{n}{2\nu\alpha_1}\dot{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu}\mathring{c} : \mathring{c}\Big).$$

- Gibbs 关系：$\theta^{-1} = s_u, \quad \theta^{-1} p = s_\nu, \quad \theta^{-1}\tau = s_c.$
- 熵的产生率：$\eta_t + \nabla\cdot(\eta v) = -\nabla\cdot(\frac{q}{\theta}) + \Delta.$

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v\cdot\nabla w) + \nabla\theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v\cdot\nabla v)] - \theta^{-1}\tau : \nabla v).$$

守恒耗散理论在线性粘弹性模型中的应用

- 取守恒变量、耗散变量分别为 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, \quad U_d = \{w, c\}$。

熵函数

$$\eta(U) = \rho s(\nu, u, w, c) = \rho(s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{n}{2\nu\alpha_1} \dot{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu} \mathring{c} : \mathring{c}).$$

- Gibbs 关系：$\theta^{-1} = s_u, \quad \theta^{-1} p = s_\nu, \quad \theta^{-1}\tau = s_c.$
- 熵的产生率：$\eta_t + \nabla\cdot(\eta v) = -\nabla\cdot(\frac{q}{\theta}) + \Delta.$

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v\cdot\nabla w) + \nabla\theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v\cdot\nabla v)] - \theta^{-1}\tau : \nabla v).$$

线性粘弹性模型的本构方程

取 $q = s_w, \tau = \theta s_c$，得到

线性粘弹性模型本构关系的一般形式

$$\begin{pmatrix} (\rho w)_t + \nabla \cdot (\rho w \otimes v) + \nabla \theta^{-1} \\ (\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c \otimes v) - D \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1} \tau \end{pmatrix}.$$

取 M 为

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2 \lambda} & 0 \\ 0 & \theta(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}}) \end{pmatrix}$$

其中 $\dot{\mathcal{T}}, \mathring{\mathcal{T}}$ 均为四阶张量，其坐标表示为
$\dot{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}, \mathring{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{2}(\delta_{kk'}\delta_{ll'} + \delta_{kl'}\delta_{lk'}) - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}$。从而
$\dot{\mathcal{T}} A = \dot{A}, \mathring{\mathcal{T}} A = \mathring{A}$ ($\dot{A} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A), \mathring{A} = \frac{1}{2}(A + A^T) - \dot{A} I$)。

线性粘弹性模型的本构方程

取 $q = s_w, \tau = \theta s_c$，得到

线性粘弹性模型本构关系的一般形式

$$\begin{pmatrix} (\rho w)_t + \nabla\cdot(\rho w\otimes v) + \nabla\theta^{-1} \\ (\rho c)_t + \nabla\cdot(\rho c\otimes v) - D \end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \end{pmatrix}.$$

取 M 为

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & \theta(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}}) \end{pmatrix}$$

其中 $\dot{\mathcal{T}}, \mathring{\mathcal{T}}$ 均为四阶张量，其坐标表示为 $\dot{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}, \mathring{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{2}(\delta_{kk'}\delta_{ll'} + \delta_{kl'}\delta_{lk'}) - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}$。从而 $\dot{\mathcal{T}}A = \dot{A}, \mathring{\mathcal{T}}A = \mathring{A}$ ($\dot{A} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A), \mathring{A} = \frac{1}{2}(A + A^T) - \dot{A}I$)。

线性粘弹性模型的本构方程

取 $q=s_w, \tau=\theta s_c$，得到

线性粘弹性模型本构关系的一般形式

$$\begin{pmatrix} (\rho w)_t+\nabla\cdot(\rho w\otimes v)+\nabla\theta^{-1} \\ (\rho c)_t+\nabla\cdot(\rho c\otimes v)-D \end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \end{pmatrix}.$$

取 M 为

耗散矩阵

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & \theta(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}}+\frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}}) \end{pmatrix}$$

其中 $\dot{\mathcal{T}},\mathring{\mathcal{T}}$ 均为四阶张量，其坐标表示为
$\dot{\mathcal{T}}_{kl,k'l'}=\frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}, \mathring{\mathcal{T}}_{kl,k'l'}=\frac{1}{2}(\delta_{kk'}\delta_{ll'}+\delta_{kl'}\delta_{lk'})-\frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}$。从而
$\dot{\mathcal{T}}A=\dot{A}, \mathring{\mathcal{T}}A=\mathring{A}$（$\dot{A}=\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A), \mathring{A}=\frac{1}{2}(A+A^T)-\dot{A}I$）。

线性粘弹性模型的本构方程

取 $q = s_w, \tau = \theta s_c$，得到

线性粘弹性模型本构关系的一般形式

$$\begin{pmatrix} (\rho w)_t + \nabla\cdot(\rho w\otimes v) + \nabla\theta^{-1} \\ (\rho c)_t + \nabla\cdot(\rho c\otimes v) - D \end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \end{pmatrix}.$$

取 M 为

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & \theta(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}}) \end{pmatrix}$$

其中 $\dot{\mathcal{T}}, \mathring{\mathcal{T}}$ 均为四阶张量，其坐标表示为 $\dot{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}, \mathring{\mathcal{T}}_{kl,k'l'} = \frac{1}{2}(\delta_{kk'}\delta_{ll'} + \delta_{kl'}\delta_{lk'}) - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{k'l'}$。从而 $\dot{\mathcal{T}}A = \dot{A}, \mathring{\mathcal{T}}A = \mathring{A}$（$\dot{A} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A), \mathring{A} = \frac{1}{2}(A + A^T) - \dot{A}I$）。

可压 Maxwell 模型（雍、朱、洪等）

非等温可压 Maxwell 模型

$$
\begin{aligned}
\partial_t(\alpha_0 q) + \nabla\cdot(\alpha_0 q \otimes v) - \nabla\theta^{-1} &= -\frac{q}{\theta^2\lambda},\\
\partial_t(\alpha_1\theta^{-1}\dot{\tau}) + \nabla\cdot(\alpha_1\theta^{-1}\dot{\tau}\otimes v) + \dot{D} &= -\frac{\dot{\tau}}{\kappa},\\
\partial_t(\alpha_2\theta^{-1}\mathring{\tau}) + \nabla\cdot(\alpha_2\theta^{-1}\mathring{\tau}\otimes v)] + \mathring{D} &= -\frac{\dot{\tau}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

可压 Maxwell 模型（雍、朱、洪等）

非等温可压 Maxwell 模型

$$
\begin{aligned}
\partial_t(\alpha_0 q) + \nabla\cdot(\alpha_0 q\otimes v) - \nabla\theta^{-1} &= -\frac{q}{\theta^2\lambda},\\
\partial_t(\alpha_1\theta^{-1}\dot{\tau}) + \nabla\cdot(\alpha_1\theta^{-1}\dot{\tau}\otimes v) + \dot{D} &= -\frac{\dot{\tau}}{\kappa},\\
\partial_t(\alpha_2\theta^{-1}\mathring{\tau}) + \nabla\cdot(\alpha_2\theta^{-1}\mathring{\tau}\otimes v)] + \mathring{D} &= -\frac{\dot{\tau}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

等温可压 Maxwell 模型

$$
\begin{aligned}
\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0,\\
(\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p - \nabla\cdot(\rho\dot{c}I + \rho\mathring{c}) &= 0,\\
(\rho\dot{c})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{c}\otimes v) - \dot{D} &= -\frac{\rho\dot{c}}{\kappa},\\
(\rho\mathring{c})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{c}\otimes v) - \mathring{D} &= -\frac{\rho\mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

其中 $p = \pi + \frac{n(\rho\dot{c})^2}{2} + \frac{\rho\mathring{c}:\rho\mathring{c}}{2}$。

推广的 Guyer-Krumhansl 定律

- 引入张量 Q 来描述粘弹性流体中与高分子取向等结构引起的热传导各向异性。

熵函数

$$s(u, w, \mathring{Q}, \dot{Q}) = s_{eq}(u) - \frac{1}{2\alpha_0}w^2 - \frac{1}{2\tau_1}\mathring{Q} : \mathring{Q} - \frac{1}{2\tau_2}\dot{Q}^2$$

- 熵增：$s_t = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q + (s_{\mathring{Q}} + s_{\dot{Q}}) \cdot q) + \Delta.$

$$\Delta = (w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_{\dot{Q}}) + \nabla\theta^{-1})\cdot q + s_{\mathring{Q}} : (\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym}) + s_{\dot{Q}}(\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q).$$

推广的 Guyer-Krumhansl 定律

- 引入张量 Q 来描述粘弹性流体中与高分子取向等结构引起的热传导各向异性。

熵函数

$$s(u, w, \overset{\circ}{Q}, \dot{Q}) = s_{eq}(u) - \frac{1}{2\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\tau_1} \overset{\circ}{Q} : \overset{\circ}{Q} - \frac{1}{2\tau_2} \dot{Q}^2$$

- 熵增：$s_t = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q + (s_{\overset{\circ}{Q}} + s_{\dot{Q}}) \cdot q) + \Delta.$

$$\Delta = (w_t + \nabla \cdot (s_{\overset{\circ}{Q}} + s_{\dot{Q}}) + \nabla \theta^{-1}) \cdot q + s_{\overset{\circ}{Q}} : (\overset{\circ}{Q}_t + (\overset{\circ}{\nabla} q)^{sym}) + s_{\dot{Q}} (\dot{Q}_t + \frac{1}{3} \nabla \cdot q).$$

推广的 Guyer-Krumhansl 定律

- 引入张量 Q 来描述粘弹性流体中与高分子取向等结构引起的热传导各向异性。

熵函数

$$s(u, w, \mathring{Q}, \dot{Q}) = s_{eq}(u) - \frac{1}{2\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\tau_1} \mathring{Q} : \mathring{Q} - \frac{1}{2\tau_2} \dot{Q}^2$$

- 熵增：$s_t = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q + (s_{\mathring{Q}} + s_{\dot{Q}}) \cdot q) + \Delta.$

$$\Delta = (w_t + \nabla \cdot (s_{\mathring{Q}} + s_{\dot{Q}}) + \nabla \theta^{-1}) \cdot q + s_{\mathring{Q}} : (\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym}) + s_{\dot{Q}} (\dot{Q}_t + \frac{1}{3} \nabla \cdot q).$$

推广 GK 热传导定律

$$\begin{pmatrix} w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_Q) + \nabla\theta^{-1} \\ \mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ \dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ s_{\mathring{Q}} \\ s_{\dot{Q}} \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} = -\frac{M_1}{\tau_1}\mathring{Q},$$

$$\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q = -\frac{M_2}{\tau_2}\dot{Q}.$$

$\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$ 时，上面的方程近似为

$$\mathring{Q} = -\frac{\tau_1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}, \qquad s_{\mathring{Q}} = \frac{1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}$$

$$\dot{Q} = -\frac{\tau_2}{3M_2}\nabla\cdot q \quad , \quad s_{\dot{Q}} = \frac{1}{3M_2}\nabla\cdot q$$

选取合适的参数可以得到 Guyer-Krumhansl 模型（以 T 代替 θ）。

$$q_t + \frac{q}{\tau_0} + \frac{\lambda}{\tau_0}\nabla T = \frac{1}{2}d(\nabla^2 q + 2\nabla\nabla\cdot q)$$

推广 GK 热传导定律

$$\begin{pmatrix} w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_Q) + \nabla\theta^{-1} \\ \mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ \dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ s_{\mathring{Q}} \\ s_{\dot{Q}} \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} = -\frac{M_1}{\tau_1}\mathring{Q},$$

$$\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q = -\frac{M_2}{\tau_2}\dot{Q}.$$

$\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$ 时，上面的方程近似为

$$\mathring{Q} = -\frac{\tau_1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}, \qquad s_{\mathring{Q}} = \frac{1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}$$

$$\dot{Q} = -\frac{\tau_2}{3M_2}\nabla\cdot q \quad , \quad s_{\dot{Q}} = \frac{1}{3M_2}\nabla\cdot q$$

选取合适的参数可以得到 Guyer-Krumhansl 模型（以 T 代替 θ）。

$$q_t + \frac{q}{\tau_0} + \frac{\lambda}{\tau_0}\nabla T = \frac{1}{2}d(\nabla^2 q + 2\nabla\nabla\cdot q)$$

推广 GK 热传导定律

$$\begin{pmatrix} w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_Q) + \nabla\theta^{-1} \\ \mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ \dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ s_{\mathring{Q}} \\ s_{\dot{Q}} \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} = -\frac{M_1}{\tau_1}\mathring{Q},$$

$$\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q = -\frac{M_2}{\tau_2}\dot{Q}.$$

$\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$ 时，上面的方程近似为

$$\mathring{Q} = -\frac{\tau_1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}, \qquad s_{\mathring{Q}} = \frac{1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}$$

$$\dot{Q} = -\frac{\tau_2}{3M_2}\nabla\cdot q \quad , \quad s_{\dot{Q}} = \frac{1}{3M_2}\nabla\cdot q$$

选取合适的参数可以得到 Guyer-Krumhansl 模型（以 T 代替 θ）。

$$q_t + \frac{q}{\tau_0} + \frac{\lambda}{\tau_0}\nabla T = \frac{1}{2}d(\nabla^2 q + 2\nabla\nabla\cdot q)$$

推广 GK 热传导定律

$$\begin{pmatrix} w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_Q) + \nabla\theta^{-1} \\ \mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ \dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ s_{\mathring{Q}} \\ s_{\dot{Q}} \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} = -\frac{M_1}{\tau_1}\mathring{Q},$$

$$\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q = -\frac{M_2}{\tau_2}\dot{Q}.$$

$\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$ 时，上面的方程近似为

$$\mathring{Q} = -\frac{\tau_1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}, \qquad s_{\mathring{Q}} = \frac{1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}$$

$$\dot{Q} = -\frac{\tau_2}{3M_2}\nabla\cdot q \quad , \quad s_{\dot{Q}} = \frac{1}{3M_2}\nabla\cdot q$$

选取合适的参数可以得到 Guyer-Krumhansl 模型（以 T 代替 θ）。

$$q_t + \frac{q}{\tau_0} + \frac{\lambda}{\tau_0}\nabla T = \frac{1}{2}d(\nabla^2 q + 2\nabla\nabla\cdot q)$$

推广 GK 热传导定律

$$\begin{pmatrix} w_t + \nabla\cdot(s_{\mathring{Q}} + s_Q) + \nabla\theta^{-1} \\ \mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ \dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ s_{\mathring{Q}} \\ s_{\dot{Q}} \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathring{Q}_t + (\mathring{\nabla} q)^{sym} = -\frac{M_1}{\tau_1}\mathring{Q},$$

$$\dot{Q}_t + \frac{1}{3}\nabla\cdot q = -\frac{M_2}{\tau_2}\dot{Q}.$$

$\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$ 时，上面的方程近似为

$$\mathring{Q} = -\frac{\tau_1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}, \qquad s_{\mathring{Q}} = \frac{1}{M_1}(\mathring{\nabla} q)^{sym}$$

$$\dot{Q} = -\frac{\tau_2}{3M_2}\nabla\cdot q \quad , \quad s_{\dot{Q}} = \frac{1}{3M_2}\nabla\cdot q$$

选取合适的参数可以得到 Guyer-Krumhansl 模型（以 T 代替 θ ）。

$$q_t + \frac{q}{\tau_0} + \frac{\lambda}{\tau_0}\nabla T = \frac{1}{2}d(\nabla^2 q + 2\nabla\nabla\cdot q)$$

推广的 Guyer-Krumhansl 与粘弹性流体模型

假设熵函数是二次的且具有下面的形式。

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0}w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1}\dot{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu}\mathring{c} : \mathring{c} - \frac{1}{2\tau_1\nu}\mathring{Q} : \mathring{Q} - \frac{1}{2\tau_2\nu}\dot{Q}^2.$$

推广 GK 定律的粘弹性流体模型

$$\begin{pmatrix} (\alpha_0 q)_t + \nabla\cdot(\alpha_0 q \otimes v) + \nabla\theta^{-1} + \nabla\cdot(\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} + \frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q}) \\ (\alpha_1\theta^{-1}\tau)_t + \nabla\cdot(\alpha_1\theta^{-1}\tau\otimes v) - D \\ (\rho\mathring{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{Q}\otimes v) + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ (\rho\dot{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{Q}v) + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \\ -\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} \\ -\frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q} \end{pmatrix}.$$

推广的 Guyer-Krumhansl 与粘弹性流体模型

假设熵函数是二次的且具有下面的形式。

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1}\dot{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu}\mathring{c} : \mathring{c} - \frac{1}{2\tau_1\nu}\mathring{Q} : \mathring{Q} - \frac{1}{2\tau_2\nu}\dot{Q}^2.$$

推广 GK 定律的粘弹性流体模型

$$\begin{pmatrix} (\alpha_0 q)_t + \nabla\cdot(\alpha_0 q \otimes v) + \nabla\theta^{-1} + \nabla\cdot(\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} + \frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q}) \\ (\alpha_1\theta^{-1}\tau)_t + \nabla\cdot(\alpha_1\theta^{-1}\tau\otimes v) - D \\ (\rho\mathring{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{Q}\otimes v) + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ (\rho\dot{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{Q}v) + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \\ -\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} \\ -\frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q} \end{pmatrix}.$$

推广的 Guyer-Krumhansl 与粘弹性流体模型

假设熵函数是二次的且具有下面的形式。

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1} \dot{c}^2 - \frac{1}{2\alpha_2\nu} \mathring{c} : \mathring{c} - \frac{1}{2\tau_1\nu} \mathring{Q} : \mathring{Q} - \frac{1}{2\tau_2\nu} \dot{Q}^2.$$

推广 GK 定律的粘弹性流体模型

$$\begin{pmatrix} (\alpha_0 q)_t + \nabla\cdot(\alpha_0 q \otimes v) + \nabla\theta^{-1} + \nabla\cdot(\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} + \frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q}) \\ (\alpha_1\theta^{-1}\tau)_t + \nabla\cdot(\alpha_1\theta^{-1}\tau\otimes v) - D \\ (\rho\mathring{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{Q}\otimes v) + (\mathring{\nabla} q)^{sym} \\ (\rho\dot{Q})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{Q}v) + \frac{1}{3}\nabla\cdot q \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} q \\ \theta^{-1}\tau \\ -\frac{1}{\tau_1}\rho\mathring{Q} \\ -\frac{1}{\tau_2}\rho\dot{Q} \end{pmatrix}.$$

小结

- 回顾了雍等提出的守恒耗散理论和等温可压 Maxwell 模型。
- 利用守恒耗散理论推广了 Guyer-Krumhansl 理论并提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型。

小结

- 回顾了雍等提出的守恒耗散理论和等温可压 Maxwell 模型。
- 利用守恒耗散理论推广了 Guyer-Krumhansl 理论并提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型。

概览

粘弹性流体建模的客观性原理

- 1949 年，J. G. Oldroyd 在《流变学状态方程的构建》中提出了客观性原理。
- 根据客观性原理，Cauchy 应力张量 σ 的时间演化方程应该包含客观导数，例如上对流 Maxwell 导数

$$\frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \partial_t\sigma + v^s\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^s} - \sigma^{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - \sigma^{il}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}.$$

- 张量客观导数的非守恒性，守恒-耗散理论对方程守恒形式的假设不再成立。

粘弹性流体建模的客观性原理

- 1949 年，J. G. Oldroyd 在《流变学状态方程的构建》中提出了客观性原理。
- 根据客观性原理，Cauchy 应力张量 σ 的时间演化方程应该包含客观导数，例如上对流 Maxwell 导数

$$\frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \partial_t\sigma + v^s\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^s} - \sigma^{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - \sigma^{il}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}.$$

- 张量客观导数的非守恒性，守恒-耗散理论对方程守恒形式的假设不再成立。

粘弹性流体建模的客观性原理

- 1949 年，J. G. Oldroyd 在《流变学状态方程的构建》中提出了客观性原理。
- 根据客观性原理，Cauchy 应力张量 σ 的时间演化方程应该包含客观导数，例如上对流 Maxwell 导数

$$\frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \partial_t \sigma + v^s \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^s} - \sigma^{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - \sigma^{il}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}.$$

- 张量客观导数的非守恒性，守恒-耗散理论对方程守恒形式的假设不再成立。

粘弹性流体建模的客观性原理

- 1949 年，J. G. Oldroyd 在《流变学状态方程的构建》中提出了客观性原理。
- 根据客观性原理，Cauchy 应力张量 σ 的时间演化方程应该包含客观导数，例如上对流 Maxwell 导数

$$\frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \partial_t\sigma + v^s\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^s} - \sigma^{lj}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - \sigma^{il}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}.$$

- 张量客观导数的非守恒性，守恒-耗散理论对方程守恒形式的假设不再成立。

推广的守恒耗散理论

假设守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 满足

$$\partial_t U_c + \sum_{j=1}^{n} f_j(U) = 0.$$

$$\frac{\mathcal{D} U_d}{\mathcal{D} t} + \sum_{j=1}^{d} B_j(U) U_{x_j} = \Pi(U).$$

推广的守恒-耗散理论的基本假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，称为 η 为系统的熵函数，使得存在 $J = J(U), \Delta = \Delta(U)$，

$$\eta_t + \nabla \cdot J = \Delta$$

2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，称为耗散矩阵，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。

这两条假设保证了 $\Delta = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0$，即热力学第二定律成立。

推广的守恒耗散理论

假设守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 满足

$$\partial_t U_c + \sum_{j=1}^{n} f_j(U) = 0.$$

$$\frac{\mathcal{D} U_d}{\mathcal{D} t} + \sum_{j=1}^{d} B_j(U) U_{x_j} = \Pi(U).$$

推广的守恒-耗散理论的基本假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，称为 η 为系统的熵函数，使得存在 $J = J(U), \Delta = \Delta(U)$，
$$\eta_t + \nabla \cdot J = \Delta$$
2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，称为耗散矩阵，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。

这两条假设保证了 $\Delta = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0$，即热力学第二定律成立。

推广的守恒耗散理论

假设守恒变量 U_c 和耗散变量 U_d 满足

$$\partial_t U_c + \sum_{j=1}^{n} f_j(U) = 0.$$

$$\frac{\mathcal{D} U_d}{\mathcal{D} t} + \sum_{j=1}^{d} B_j(U) U_{x_j} = \Pi(U).$$

推广的守恒-耗散理论的基本假设

1. 存在严格上凸函数 $\eta = \eta(U)$，称为 η 为系统的熵函数，使得存在 $J = J(U), \Delta = \Delta(U)$，
$$\eta_t + \nabla \cdot J = \Delta$$
2. 存在正定矩阵 $M = M(U)$，称为耗散矩阵，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。

这两条假设保证了 $\Delta = \eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \geq 0$，即热力学第二定律成立。

在粘弹性流体建模中的应用

- 取 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, U_d = \{w, c\}$；
- 熵函数 $\eta = \rho s(\nu, u, w, c)$；
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \theta^{-1} q + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla\theta^{-1}] + [s_c : \rho \overset{\nabla}{c} + (\rho s_c c - \frac{1}{2}\theta^{-1}\tau) : 2D].$$

在粘弹性流体建模中的应用

- 取 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, U_d = \{w, c\}$；
- 熵函数 $\eta = \rho s(\nu, u, w, c)$；
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \theta^{-1} q + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + [s_c : \rho \overset{\nabla}{c} + (\rho s_c c - \frac{1}{2}\theta^{-1}\tau) : 2D].$$

在粘弹性流体建模中的应用

- 取 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, U_d = \{w, c\}$；
- 熵函数 $\eta = \rho s(\nu, u, w, c)$；
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \theta^{-1} q + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + [s_c : \rho \overset{\nabla}{c} + (\rho s_c c - \frac{1}{2}\theta^{-1}\tau) : 2D].$$

在粘弹性流体建模中的应用

- 取 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, U_d = \{w, c\}$；
- 熵函数 $\eta = \rho s(\nu, u, w, c)$；
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \theta^{-1} q + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + [s_c : \rho \overset{\nabla}{c} + (\rho s_c c - \frac{1}{2}\theta^{-1}\tau) : 2D].$$

在粘弹性流体建模中的应用

- 取 $U_c = \{\rho, \rho v, \rho e\}, U_d = \{w, c\}$；
- 熵函数 $\eta = \rho s(\nu, u, w, c)$；
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot \theta^{-1} q + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + [s_c : \rho \overset{\nabla}{c} + (\rho s_c c - \frac{1}{2}\theta^{-1}\tau) : 2D].$$

令 $\theta^{-1}\tau = 2s_c + 2\rho s_c c$，得到

推广守恒耗散理论得到的粘弹性模型

$$\begin{pmatrix} (\rho w)_t + \nabla \cdot (\rho w \otimes v) + \nabla \theta^{-1} \\ (\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c \otimes v) - (\nabla v)\rho c - (\rho c)(\nabla v)^T - 2D \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} q \\ s_c \end{pmatrix}.$$

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

熵函数

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1} c : c$$

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} I + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}} I\right) \end{pmatrix}$$

Gibbs 关系：

$$q = s_w = -\frac{\rho w}{\alpha_0}$$

$$\theta^{-1} p = s_\nu = \pi + \frac{\rho^2}{2} w^2 + \frac{1}{2}\rho c : \rho c$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1}\theta(2\rho c + 2\rho c \cdot \rho c)$$

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

熵函数

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1} c : c$$

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2 \lambda} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} I + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}} I\right) \end{pmatrix}$$

Gibbs 关系：

$$q = s_w = -\frac{\rho w}{\alpha_0}$$

$$\theta^{-1} p = s_\nu = \pi + \frac{\rho^2}{2} w^2 + \frac{1}{2}\rho c : \rho c$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1}\theta(2\rho c + 2\rho c \cdot \rho c)$$

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

熵函数

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1} c : c$$

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} I + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}} I) \end{pmatrix}$$

Gibbs 关系：

$$q = s_w = -\frac{\rho w}{\alpha_0}$$

$$\theta^{-1} p = s_\nu = \pi + \frac{\rho^2}{2} w^2 + \frac{1}{2}\rho c : \rho c$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1}\theta(2\rho c + 2\rho c \cdot \rho c)$$

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

熵函数

$$s = s_0(\nu, u) - \frac{1}{2\nu\alpha_0} w^2 - \frac{1}{2\nu\alpha_1} c : c$$

耗散矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta^2\lambda} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{\kappa}\dot{\mathcal{T}} I + \frac{1}{\xi}\mathring{\mathcal{T}} I) \end{pmatrix}$$

Gibbs 关系：

$$q = s_w = -\frac{\rho w}{\alpha_0}$$

$$\theta^{-1} p = s_\nu = \pi + \frac{\rho^2}{2} w^2 + \frac{1}{2}\rho c : \rho c$$

$$\tau = -\frac{1}{\alpha_1}\theta(2\rho c + 2\rho c \cdot \rho c)$$

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

非等温可压上对流导数 Maxwell 模型

$$
\begin{aligned}
\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0,\\
(\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla\cdot P &= 0,\\
(\rho e)_t + \nabla\cdot q + \nabla\cdot(P\cdot v) &= 0,\\
(\rho w)_t + \nabla\cdot(\rho w\otimes v) + \nabla\theta^{-1} &= -\frac{1}{\lambda\theta^2}w,\\
(\rho c)_t + \nabla\cdot(\rho c\otimes v) - (\nabla v)\rho c - (\rho c)(\nabla v)^T - 2D &= -\frac{\rho \dot{c} I}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

其中 $P = (\theta\pi + \frac{\rho^2}{2}w^2 + \frac{1}{2}\rho c:\rho c)I - (\frac{1}{\alpha_1}\theta(2\rho c + 2\rho c\cdot\rho c))$。

等温可压上对流导数 Maxwell 模型

等温可压上对流导数 Maxwell 模型

$$
\begin{aligned}
\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0,\\
(\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla(\pi + \frac{1}{2}\rho c:\rho c) - \nabla\cdot(2\rho c + 2\rho c\cdot\rho c) &= 0,\\
(\rho c)_t + \nabla\cdot(\rho c\otimes v) - (\nabla v)\rho c - (\rho c)(\nabla v)^T - 2D &= -\frac{\rho\dot{c}I}{\kappa} - \frac{\rho\mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

其中 $P = (\pi + \frac{1}{2}\rho c:\rho c)I - (2\rho c + 2\rho c\cdot\rho c)$。

小结

- 通过放松对耗散变量守恒形式的要求提出了推广的守恒耗散理论。
- 利用守恒耗散理论发展了非等温不可压上对流导数 Maxwell 模型。

小结

- 通过放松对耗散变量守恒形式的要求提出了推广的守恒耗散理论。
- 利用守恒耗散理论发展了非等温不可压上对流导数 Maxwell 模型。

概览

1. 简介
   - 研究综述
   - 研究内容
2. 粘弹性流体的数学建模
   - 线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 非线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 有限守恒耗散理论在粘弹性流体建模中的应用
3. 粘弹性流体力学的数学分析
   - 方程的结构性条件
   - 整体存在性
   - 与 Navier-Stokes 方程的一致性分析
4. 总结与展望

连续介质的形变描述

- 有限形变理论采用形变张量 F 对流体的变形进行度量。
- F 的定义为运动函数 $x = x(X,t)$ 的梯度张量 $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$。
- F 的运动方程为 $F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F$。
- F 满足力学适应性条件：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho F^T) &= 0, \\ F_{lj} \partial_{x_l} F_{ik} &= F_{lk} \partial_{x_k} F_{il}, \\ \rho \det F &= 1. \end{aligned}$$

- 由第一个条件，$(\rho F)_t + \nabla \cdot (\rho F \otimes v) - \nabla \cdot (\rho v \otimes F^T) = 0$，从而 ρF 可以加入守恒变量中。

连续介质的形变描述

- 有限形变理论采用形变张量 F 对流体的变形进行度量。
- F 的定义为运动函数 $x = x(X, t)$ 的梯度张量 $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$。
- F 的运动方程为 $F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F$。
- F 满足力学适应性条件：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho F^T) &= 0, \\
F_{lj} \partial_{x_l} F_{ik} &= F_{lk} \partial_{x_k} F_{il}, \\
\rho \det F &= 1.
\end{aligned}
$$

- 由第一个条件，$(\rho F)_t + \nabla \cdot (\rho F \otimes v) - \nabla \cdot (\rho v \otimes F^T) = 0$，从而 ρF 可以加入守恒变量中。

连续介质的形变描述

- 有限形变理论采用形变张量 F 对流体的变形进行度量。
- F 的定义为运动函数 $x = x(X, t)$ 的梯度张量 $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$。
- F 的运动方程为 $F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F$。
- F 满足力学适应性条件：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho F^T) &= 0, \\ F_{lj} \partial_{x_l} F_{ik} &= F_{lk} \partial_{x_k} F_{il}, \\ \rho \det F &= 1. \end{aligned}$$

- 由第一个条件，$(\rho F)_t + \nabla \cdot (\rho F \otimes v) - \nabla \cdot (\rho v \otimes F^T) = 0$，从而 ρF 可以加入守恒变量中。

连续介质的形变描述

- 有限形变理论采用形变张量 F 对流体的变形进行度量。
- F 的定义为运动函数 $x = x(X,t)$ 的梯度张量 $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$。
- F 的运动方程为 $F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F$。
- F 满足力学适应性条件：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho F^T) &= 0, \\ F_{lj} \partial_{x_l} F_{ik} &= F_{lk} \partial_{x_k} F_{il}, \\ \rho \det F &= 1. \end{aligned}$$

- 由第一个条件，$(\rho F)_t + \nabla \cdot (\rho F \otimes v) - \nabla \cdot (\rho v \otimes F^T) = 0$，从而 ρF 可以加入守恒变量中。

连续介质的形变描述

- 有限形变理论采用形变张量 F 对流体的变形进行度量。
- F 的定义为运动函数 $x = x(X, t)$ 的梯度张量 $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$。
- F 的运动方程为 $F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F$。
- F 满足力学适应性条件：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho F^T) &= 0, \\ F_{lj} \partial_{x_l} F_{ik} &= F_{lk} \partial_{x_k} F_{il}, \\ \rho \det F &= 1. \end{aligned}$$

- 由第一个条件，$(\rho F)_t + \nabla \cdot (\rho F \otimes v) - \nabla \cdot (\rho v \otimes F^T) = 0$，从而 ρF 可以加入守恒变量中。

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F), \quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F)$, $\quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F), \quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F), \quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F), \quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论

- 守恒变量、耗散变量：$U_c = (\rho, \rho v, \rho e, \rho F)$, $\quad U_d = (\rho w, \rho c)$。
- 熵函数：$\eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, C)$。
- 熵产：$\eta_t + \nabla \cdot (\eta v) = -\nabla \cdot (\theta^{-1} q) + \Delta$，

$$\Delta = s_w \cdot [\rho(w_t + v \cdot \nabla w) + \nabla \theta^{-1}] + (s_c : [\rho(c_t + v \cdot \nabla c)] - (\theta^{-1}\tau - \rho s_F F^T) : D).$$

- 令 $\theta^{-1}\tau = \rho s_F F^T + s_c$，得到

有限形变守恒耗散理论得到的模型

$$\begin{pmatrix} \partial_t(\rho w) + \nabla \cdot (\rho w \otimes v) + \nabla \theta^{-1}) \\ \partial_t(\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \otimes v) - D \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} q \\ s_c \end{pmatrix}$$

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta=\eta(U)=\rho s(\nu,u,F,w,c)$，满足
  1. $s_F F^T=F s_F^T, s(OF)=Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW}\omega \le -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W=(\nu,u,F,c,w)$ 和 $\Omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\xi\otimes\nu,\omega_5,\omega_6)$ 成立;
  3. 存在 $\Xi=\Xi(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU}+\Xi_U^T\mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j=diag\{0,0,0,\delta_{jk'}\delta_{ll'},0,0\}$。
- 存在正定矩阵 $M=M(U)$，使得 $\Pi(U)=M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到;
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到;
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j\partial_{x_j}U=0$，即 $\nabla\cdot(\rho F^T)=0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）；
  2. $\Omega^T s_{WW}\omega \le -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j\partial_{x_j}U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW} \omega \leq -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立;
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到;
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到;
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j \partial_{x_j} U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）；
  2. $\Omega^T s_{WW}\omega \le -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j\partial_{x_j}U = 0$，即 $\nabla\cdot(\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW} \omega \leq -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j \partial_{x_j} U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = O s(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW} \omega \leq -\mu |\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M \eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j \partial_{x_j} U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW}\omega \le -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU}F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j\partial_{x_j}U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW} \omega \leq -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'}\delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M\eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j \partial_{x_j} U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变守恒耗散理论的假设

有限形变守恒耗散理论的假设

- 存在函数 $\eta = \eta(U) = \rho s(\nu, u, F, w, c)$，满足
  1. $s_F F^T = F s_F^T, s(OF) = Os(F)$（其中 O 为旋转矩阵）;
  2. $\Omega^T s_{WW} \omega \leq -\mu|\Omega|^2$ 对任意的 $W = (\nu, u, F, c, w)$ 和 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi \otimes \nu, \omega_5, \omega_6)$ 成立；
  3. 存在 $\Xi = \Xi(U)$，使得 $\eta_{UU} F_{jU} + \Xi_U^T \mathcal{M}_j$ 对称，其中 $\mathcal{M}_j = diag\{0, 0, 0, \delta_{jk'} \delta_{ll'}, 0, 0\}$。
- 存在正定矩阵 $M = M(U)$，使得 $\Pi(U) = M \eta_{U_d}$。我们称 M 为耗散矩阵。

- 第一条假设的第一条根据角动量守恒和客观性原理得到；
- 第二条根据固体力学对应变能函数秩一凸的要求推广得到；
- 第三条是根据 D Serre 和 C. M. Dafermos 等对含有对合条件（$\mathcal{M}_j \partial_{x_j} U = 0$，即 $\nabla \cdot (\rho F^T) = 0$）的双曲方程组提出的结构性条件得到的。

有限形变 Maxwell 模型

- 取 $U_c = (\rho, \rho v, \rho F)$, $U_d = c$；
- 熵函数 $s = -\int_{\rho_0}^{1/\nu} \frac{\pi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{2} F : F - \frac{1}{2\nu} c : c$；
- 耗散矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{\dot{\mathcal{T}}}{\kappa} + \frac{\mathring{\mathcal{T}}}{\xi} \end{pmatrix}.$$

- 由 Gibbs 关系，$p = \pi + \frac{1}{2}\rho c : \rho c, \tau = -\rho F F^T - \rho c$，得到

等温可压有限形变 Maxwell 模型

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p - \nabla \cdot (\rho F F^T) - \nabla \cdot (\rho c) &= 0, \\ (\rho F)_t + \nabla \cdot (F \otimes \rho v) - \nabla \cdot (v \otimes \rho F^T) &= 0, \\ (\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c) - D &= -\frac{\rho \dot{c}}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}. \end{aligned}$$

有限形变 Maxwell 模型

- 取 $U_c = (\rho, \rho v, \rho F)$, $U_d = c$；
- 熵函数 $s = -\int_{\rho_0}^{1/\nu} \frac{\pi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{2} F : F - \frac{1}{2\nu} c : c$；
- 耗散矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{\dot{\mathcal{T}}}{\kappa} + \frac{\mathring{\mathcal{T}}}{\xi} \end{pmatrix}.$$

- 由 Gibbs 关系，$p = \pi + \frac{1}{2}\rho c : \rho c, \tau = -\rho F F^T - \rho c$，得到

等温可压有限形变 Maxwell 模型

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p - \nabla \cdot (\rho F F^T) - \nabla \cdot (\rho c) &= 0, \\ (\rho F)_t + \nabla \cdot (F \otimes \rho v) - \nabla \cdot (v \otimes \rho F^T) &= 0, \\ (\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c) - D = -\frac{\rho \dot{c}}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}&. \end{aligned}$$

有限形变 Maxwell 模型

- 取 $U_c = (\rho, \rho v, \rho F), U_d = c$；
- 熵函数 $s = -\int_{\rho_0}^{1/\nu} \frac{\pi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{2} F : F - \frac{1}{2\nu} c : c$；
- 耗散矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{\dot{\mathcal{T}}}{\kappa} + \frac{\mathring{\mathcal{T}}}{\xi} \end{pmatrix}.$$

- 由 Gibbs 关系，$p = \pi + \frac{1}{2} \rho c : \rho c, \tau = -\rho F F^T - \rho c$，得到

等温可压有限形变 Maxwell 模型

$$\begin{aligned}
\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\
(\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p - \nabla \cdot (\rho F F^T) - \nabla \cdot (\rho c) &= 0, \\
(\rho F)_t + \nabla \cdot (F \otimes \rho v) - \nabla \cdot (v \otimes \rho F^T) &= 0, \\
(\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c) - D &= -\frac{\rho \dot{c}}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}$$

有限形变 Maxwell 模型

- 取 $U_c = (\rho, \rho v, \rho F), U_d = c$；
- 熵函数 $s = -\int_{\rho_0}^{1/\nu} \frac{\pi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{2} F : F - \frac{1}{2\nu} c : c$；
- 耗散矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{\mathcal{I}}{\kappa} + \frac{\mathcal{I}}{\xi} \end{pmatrix}.$$

- 由 Gibbs 关系，$p = \pi + \frac{1}{2}\rho c : \rho c, \tau = -\rho F F^T - \rho c$，得到

等温可压有限形变 Maxwell 模型

$$\begin{aligned}
\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\
(\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p - \nabla \cdot (\rho F F^T) - \nabla \cdot (\rho c) &= 0, \\
(\rho F)_t + \nabla \cdot (F \otimes \rho v) - \nabla \cdot (v \otimes \rho F^T) &= 0, \\
(\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c) - D &= -\frac{\rho \dot{c}}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}$$

有限形变 Maxwell 模型

- 取 $U_c = (\rho, \rho v, \rho F), U_d = c$；
- 熵函数 $s = -\int_{\rho_0}^{1/\nu} \frac{\pi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{2} F : F - \frac{1}{2\nu} c : c$；
- 耗散矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{\dot{\mathcal{T}}}{\kappa} + \frac{\mathring{\mathcal{T}}}{\xi} \end{pmatrix}.$$

- 由 Gibbs 关系，$p = \pi + \frac{1}{2}\rho c : \rho c, \tau = -\rho F F^T - \rho c$，得到

等温可压有限形变 Maxwell 模型

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p - \nabla \cdot (\rho F F^T) - \nabla \cdot (\rho c) &= 0, \\ (\rho F)_t + \nabla \cdot (F \otimes \rho v) - \nabla \cdot (v \otimes \rho F^T) &= 0, \\ (\rho c)_t + \nabla \cdot (\rho c) - D &= -\frac{\rho \dot{c}}{\kappa} - \frac{\rho \mathring{c}}{\xi}. \end{aligned}$$

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c} = -\kappa\Big((\rho\dot{c})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{c}) - \frac{1}{n}\nabla\cdot v\Big),$$
$$\rho\mathring{c} = -\xi\Big((\rho\mathring{c})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{c}) - \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI)\Big).$$

假设 κ, ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c} = \frac{\kappa}{n}\nabla\cdot v + O(\kappa^2),\ \rho\mathring{c} = \frac{\xi}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI) + O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned}
\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0,\\
(\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p &= \nabla\cdot(\rho F F^T) + \mu\Delta v + \mu'\nabla\nabla\cdot v,\\
(\rho F)_t + \nabla\cdot(F\otimes\rho v) &= (\nabla v)\rho F.
\end{aligned}$$

其中 $\mu = \xi/2,\ \mu' = \xi/2 + (\kappa - \xi)/n$。

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c}=-\kappa\Big((\rho\dot{c})_t+\nabla\cdot(\rho\dot{c})-\frac{1}{n}\nabla\cdot v\Big),$$
$$\rho\mathring{c}=-\xi\Big((\rho\mathring{c})_t+\nabla\cdot(\rho\mathring{c})-\frac{1}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T-\frac{2}{n}\nabla\cdot vI)\Big).$$

假设 κ,ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c}=\frac{\kappa}{n}\nabla\cdot v+O(\kappa^2),\ \ \rho\mathring{c}=\frac{\xi}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T-\frac{2}{n}\nabla\cdot vI)+O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned}\rho_t+\nabla\cdot(\rho v)&=0,\\(\rho v)_t+\nabla\cdot(\rho v\otimes v)+\nabla p&=\nabla\cdot(\rho FF^T)+\mu\Delta v+\mu'\nabla\nabla\cdot v,\\(\rho F)_t+\nabla\cdot(F\otimes\rho v)&=(\nabla v)\rho F.\end{aligned}$$

其中 $\mu=\xi/2,\ \mu'=\xi/2+(\kappa-\xi)/n$。

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c} = -\kappa\Big((\rho\dot{c})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{c}) - \frac{1}{n}\nabla\cdot v\Big),$$
$$\rho\mathring{c} = -\xi\Big((\rho\mathring{c})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{c}) - \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI)\Big).$$

假设 κ, ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c} = \frac{\kappa}{n}\nabla\cdot v + O(\kappa^2),\ \rho\mathring{c} = \frac{\xi}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI) + O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p &= \nabla\cdot(\rho FF^T) + \mu\Delta v + \mu'\nabla\nabla\cdot v, \\ (\rho F)_t + \nabla\cdot(F\otimes\rho v) &= (\nabla v)\rho F. \end{aligned}$$

其中 $\mu = \xi/2,\ \mu' = \xi/2 + (\kappa - \xi)/n$。

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c} = -\kappa\Big((\rho\dot{c})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{c}) - \frac{1}{n}\nabla\cdot v\Big),$$
$$\rho\mathring{c} = -\xi\Big((\rho\mathring{c})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{c}) - \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI)\Big).$$

假设 κ, ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c} = \frac{\kappa}{n}\nabla\cdot v + O(\kappa^2),\ \rho\mathring{c} = \frac{\xi}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \frac{2}{n}\nabla\cdot vI) + O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p &= \nabla\cdot(\rho F F^T) + \mu\Delta v + \mu'\nabla\nabla\cdot v, \\ (\rho F)_t + \nabla\cdot(F\otimes\rho v) &= (\nabla v)\rho F. \end{aligned}$$

其中 $\mu = \xi/2,\ \mu' = \xi/2 + (\kappa - \xi)/n$。

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c}=-\kappa\Big((\rho\dot{c})_t+\nabla\cdot(\rho\dot{c})-\frac{1}{n}\nabla\cdot v\Big),$$
$$\rho\mathring{c}=-\xi\Big((\rho\mathring{c})_t+\nabla\cdot(\rho\mathring{c})-\frac{1}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T-\frac{2}{n}\nabla\cdot vI)\Big).$$

假设 κ,ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c}=\frac{\kappa}{n}\nabla\cdot v+O(\kappa^2),\ \rho\mathring{c}=\frac{\xi}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T-\frac{2}{n}\nabla\cdot vI)+O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned}\rho_t+\nabla\cdot(\rho v)&=0,\\ (\rho v)_t+\nabla\cdot(\rho v\otimes v)+\nabla p=\nabla\cdot(\rho FF^T)+\mu\Delta v+\mu'\nabla\nabla\cdot v&,\\ (\rho F)_t+\nabla\cdot(F\otimes\rho v)&=(\nabla v)\rho F.\end{aligned}$$

其中 $\mu=\xi/2,\ \mu'=\xi/2+(\kappa-\xi)/n$。

与林芳华等提出的模型的关系

c 的方程

$$\rho\dot{c} = -\kappa\big((\rho\dot{c})_t + \nabla\cdot(\rho\dot{c}) - \tfrac{1}{n}\nabla\cdot v\big),$$
$$\rho\mathring{c} = -\xi\big((\rho\mathring{c})_t + \nabla\cdot(\rho\mathring{c}) - \tfrac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \tfrac{2}{n}\nabla\cdot vI)\big).$$

假设 κ, ξ 很小，迭代一次得到

$$\rho\dot{c} = \tfrac{\kappa}{n}\nabla\cdot v + O(\kappa^2),\ \ \rho\mathring{c} = \tfrac{\xi}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T - \tfrac{2}{n}\nabla\cdot vI) + O(\xi^2).$$

代入等温有限形变第二类模型中，并忽略高阶项，可以得到

林芳华等提出的模型的可压形式

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p &= \nabla\cdot(\rho F F^T) + \mu\Delta v + \mu'\nabla\nabla\cdot v, \\ (\rho F)_t + \nabla\cdot(F\otimes\rho v) &= (\nabla v)\rho F. \end{aligned}$$

其中 $\mu = \xi/2,\ \mu' = \xi/2 + (\kappa - \xi)/n$。

小结

- 将形变张量纳入守恒变量，推广了雍稳安等提出的守恒耗散理论。
- 应用有限形变守恒耗散理论，推广了林芳华等提出的模型。

小结

- 将形变张量纳入守恒变量，推广了雍稳安等提出的守恒耗散理论。
- 应用有限形变守恒耗散理论，推广了林芳华等提出的模型。

小结

- 将形变张量纳入守恒变量，推广了雍稳安等提出的守恒耗散理论。
- 应用有限形变守恒耗散理论，推广了林芳华等提出的模型。

概览

概览

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU}F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L=L(U)$，使得 $Q(U)=-L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

实际上，守恒耗散理论就是根据这一结构提出的。

- 守恒耗散理论的第一条假设保证了守恒耗散结构的第一个条件，取 $\tilde{\eta} = -\eta$ 即可。
- 守恒耗散理论的第二条假设保证了守恒耗散结构的后两个条件，取 $L = diag\{0, M\}$。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

实际上，守恒耗散理论就是根据这一结构提出的。

- 守恒耗散理论的第一条假设保证了守恒耗散结构的第一个条件，取 $\tilde{\eta} = -\eta$ 即可。
- 守恒耗散理论的第二条假设保证了守恒耗散结构的后两个条件，取 $L = diag\{0, M\}$。

守恒耗散结构（雍，2008）

针对包含源项的双曲守恒律方程组，雍在 2008 年提出了下面的守恒耗散结构。

守恒耗散结构（雍，2008）

1. 存在严格下凸熵函数 $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(U)$，使得 $\tilde{\eta}_{UU} F_{jU}$ 对称。
2. 存在对称半正定矩阵 $L = L(U)$，使得 $Q(U) = -L\tilde{\eta}_U(U)$。
3. $L(U)$ 的零空间不依赖于 U。

实际上，守恒耗散理论就是根据这一结构提出的。

- 守恒耗散理论的第一条假设保证了守恒耗散结构的第一个条件，取 $\tilde{\eta} = -\eta$ 即可。
- 守恒耗散理论的第二条假设保证了守恒耗散结构的后两个条件，取 $L = diag\{0, M\}$。

耗散条件（雍，2004）

由于守恒耗散结构的成立，守恒耗散理论导出的方程组满足雍提出的耗散条件。令 U_e 满足 $Q(U_e)=0$ 为一常数，那么成立

耗散条件（雍，2000）

存在正常数 λ，使得 $[\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e)]Q(U)\leq -\lambda|Q(U)|^2$

实际上，由 $Q(U_e)=0$ 得到 $\eta_{U_d}(U_e)=0$，于是

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e))^T Q(U) &= -\eta_{U_d}(U)^T \Pi(U) = -\eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \\
&= -\eta_{U_d}^T M^T M^{-T} M \eta_{U_d} \leq -\mu|M\eta_{U_d}|^2 = -\mu|Q|^2
\end{aligned}
$$

其中 μ 为 M^{-1} 的最小特征值。由于 M 的正定性，耗散条件成立。

耗散条件（雍，2004）

由于守恒耗散结构的成立，守恒耗散理论导出的方程组满足雍提出的耗散条件。令 U_e 满足 $\mathcal{Q}(U_e)=0$ 为一常数，那么成立

耗散条件（雍，2000）

存在正常数 λ，使得 $[\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e)]\mathcal{Q}(U)\le -\lambda|\mathcal{Q}(U)|^2$

实际上，由 $\mathcal{Q}(U_e)=0$ 得到 $\eta_{U_d}(U_e)=0$，于是

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e))^T\mathcal{Q}(U) &= -\eta_{U_d}(U)^T\Pi(U) = -\eta_{U_d}^T M\eta_{U_d} \\
&= -\eta_{U_d}^T M^T M^{-T} M\eta_{U_d} \le -\mu|M\eta_{U_d}|^2 = -\mu|\mathcal{Q}|^2
\end{aligned}
$$

其中 μ 为 M^{-1} 的最小特征值。由于 M 的正定性，耗散条件成立。

耗散条件（雍，2004）

由于守恒耗散结构的成立，守恒耗散理论导出的方程组满足雍提出的耗散条件。令 U_e 满足 $Q(U_e)=0$ 为一常数，那么成立

耗散条件（雍，2000）

存在正常数 λ，使得 $[\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e)]Q(U)\leq -\lambda|Q(U)|^2$

实际上，由 $Q(U_e)=0$ 得到 $\eta_{U_d}(U_e)=0$，于是

$$\begin{aligned}(\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e))^T Q(U) &= -\eta_{U_d}(U)^T \amalg(U) = -\eta_{U_d}^T M \eta_{U_d} \\ &= -\eta_{U_d}^T M^T M^{-T} M \eta_{U_d} \leq -\mu|M\eta_{U_d}|^2 = -\mu|Q|^2\end{aligned}$$

其中 μ 为 M^{-1} 的最小特征值。由于 M 的正定性，耗散条件成立。

耗散条件（雍，2004）

由于守恒耗散结构的成立，守恒耗散理论导出的方程组满足雍提出的耗散条件。令 U_e 满足 $\mathcal{Q}(U_e)=0$ 为一常数，那么成立

耗散条件（雍，2000）

存在正常数 λ，使得 $[\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e)]\mathcal{Q}(U)\leq-\lambda|\mathcal{Q}(U)|^2$

实际上，由 $\mathcal{Q}(U_e)=0$ 得到 $\eta_{U_d}(U_e)=0$，于是

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\eta}_U(U)-\tilde{\eta}_U(U_e))^T\mathcal{Q}(U) &= -\eta_{U_d}(U)^T\Pi(U) = -\eta_{U_d}^T M\eta_{U_d} \\
&= -\eta_{U_d}^T M^T M^{-T} M\eta_{U_d} \leq -\mu|M\eta_{U_d}|^2 = -\mu|\mathcal{Q}|^2
\end{aligned}
$$

其中 μ 为 M^{-1} 的最小特征值。由于 M 的正定性，耗散条件成立。

稳定性条件（雍，1992）

由前面耗散条件的成立可以导出雍提出的稳定性条件的成立。针对一般的双曲对称组

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) U_{x_j} = \frac{1}{\epsilon} Q(U),$$

设平衡流形 $\mathcal{E} := \{U | Q(U) = 0\}$，雍在博士论文中提出了下面的稳定性条件。

雍提出的稳定性条件

1 存在可逆矩阵 $P = P(U)$，使得

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \hat{Q}(U) \end{pmatrix} P$$

对任意 $U \in \mathcal{E}$ 成立；

2 存在对称正定矩阵 $A_0 = A_0(U)$，使得 $A_0 A_j(U)$ 对称；

雍提出的稳定性条件（雍，1992）

3 对任意 $U \in \mathcal{E}$，成立

$$A_0 Q_U + Q_U A_0 \leq -P^T \begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} P.$$

取 $P = I, A_0 = -\eta_{UU}$ 可以得到这三个条件成立，其中最后一个条件的验证利用了前面的耗散条件。

这一稳定性条件的成立保证了当 ϵ 趋于 0 时，守恒耗散理论方程组的一阶摄动展开的结果可以近似原方程组。

整体存在性条件（雍，2004）

由雍稳安 2004 年对含熵守恒律方程组的整体存在性理论，守恒耗散理论导出的方程组解在平衡态 U_e 附近存在的充分条件为

雍稳安整体存在性条件（雍，2004）

1. $\amalg_{U_d}(U_e)$ 可逆；
2. 守恒耗散理论第一条假设成立；
3. 耗散性条件成立；
4. 成立下面的 Kawashima 条件：雅克比矩阵 $Q_U(U_e)$ 的零空间不包含符号矩阵 $\sum_j \omega_j F_{jU}(U_e), \omega = (\omega_1, \cdot, \omega_n) \in \mathbf{S}^{n-1}$ 的特征向量（$\mathbf{S}^{n-1}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的单位球）。

其中第二条和第三条由守恒耗散理论的假设成立，对于第一条，由

$$\amalg_{U_d}(U_e) = M_{U_d}(U_e)\eta_{U_d}(U_e) + M(U_e)\eta_{U_dU_d}(U_e) = M(U_e)\eta_{U_dU_d}(U_e),$$

第一条成立（守恒耗散定律保证了 M 与 $\eta_{U_dU_d}$ 正定）。这样对于由守恒耗散理论导出的方程组，只要第四条条件成立，则整体存在性定理成立（雍，2004）。

各向同性条件（雍、杨，2015）

对于带小参数源项的双曲守恒律，其 Chapman-Enskog 展开的有效性由雍、杨提出。守恒耗散结构和下面的各向同性条件共同保证了 Chapman-Enskog 展开的有效性。

各向同性条件（雍、杨，2015）

矩阵 $\sum_{j=1}^{n} f_{jU_d}\omega_j$ 的左零空间不依赖于 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\neq 0$ 和满足 $\eta_{U_d}(U)=0$ 的 U。

各个条件的关系和数学结果

守恒耗散理论

守恒耗散结构

Kawashima 条件

稳定性条件

各向同性条件

整体存在性

摄动展开有效性

Chapman-Enskog 展开有效性

各个条件的关系和数学结果

守恒耗散理论

↓

守恒耗散结构

Kawashima 条件

稳定性条件

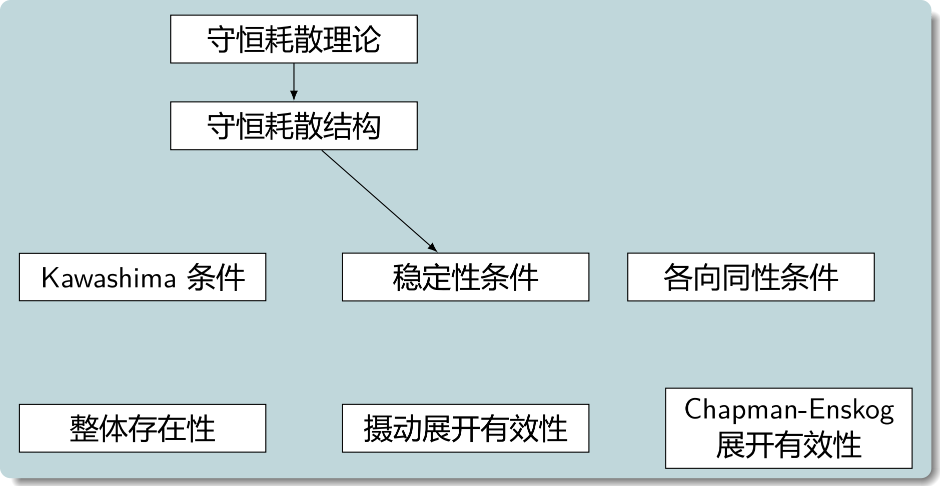
各向同性条件

整体存在性

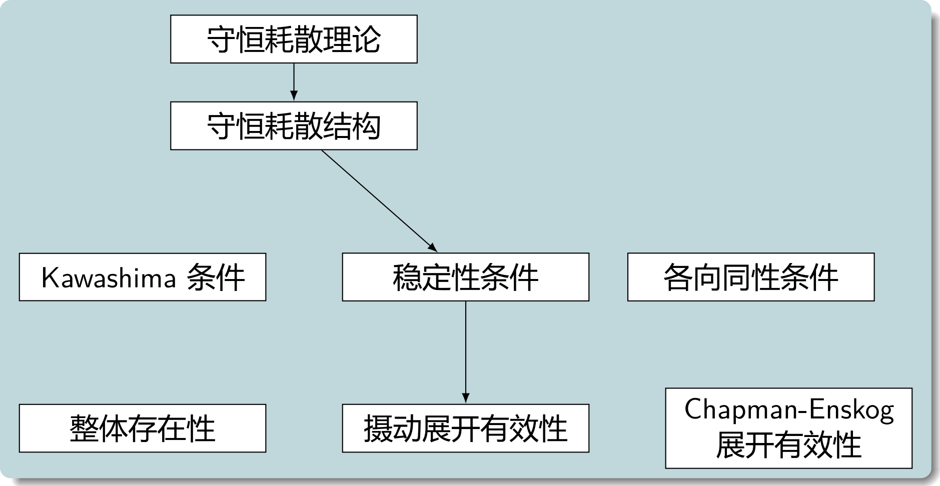
摄动展开有效性

Chapman-Enskog 展开有效性

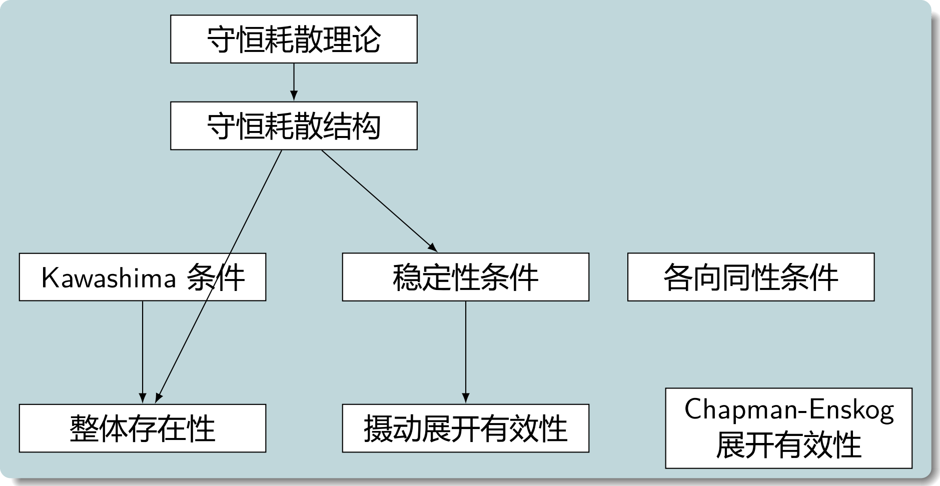
各个条件的关系和数学结果



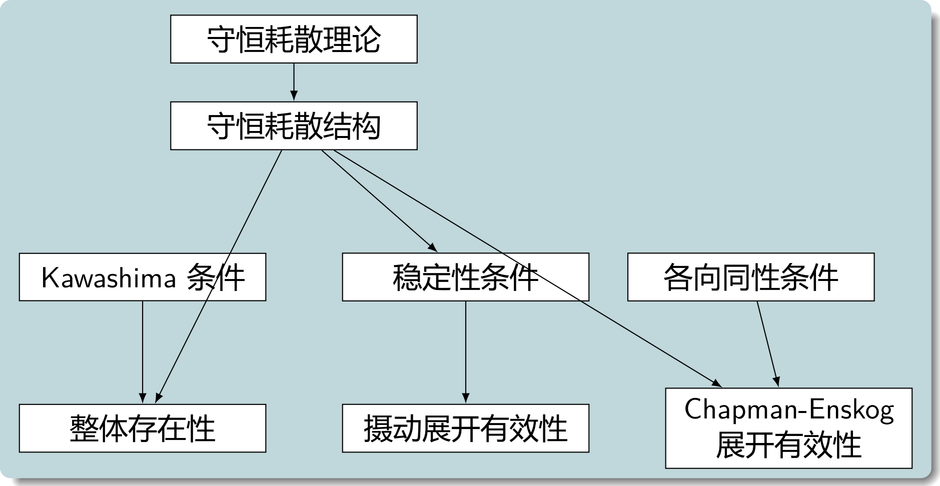
各个条件的关系和数学结果



各个条件的关系和数学结果



各个条件的关系和数学结果



概览

整体存在性定理

- 我们证明对于等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型、林芳华等提出的模型下面的整体存在性定理成立。

定理 (整体存在性定理)

设整数 $s \geq [\frac{n}{2}]+2$，$U_0 = U_0(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 且 $\| U_0 - U_e \|_{H^s}$ 足够小，那么上面的方程组以 U_0 为初值的 *Cauchy* 问题存在唯一的整体解 $U = U(x,t) \in C([0,\infty), H^s(\mathbf{R}^d))$。

- 对于等温可压 Maxwell 模型直接验证雍提出的整体存在性条件即可；
- 对于一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型，虽然方程不是守恒形式，但可以验证耗散条件和 Kawashima 条件成立，亦可利用雍的整体存在性理论，相关的估计仍然成立。
- 对于林芳华等提出的模型，可以利用双曲-抛物组的 Kawashima 理论，虽然 Kawashima 条件不成立，但力学适应性条件可以弥补这一点，而使得整体存在性所需的估计成立。

整体存在性定理

- 我们证明对于等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型、林芳华等提出的模型下面的整体存在性定理成立。

定理 (整体存在性定理)

设整数 $s \geq [\frac{n}{2}]+2$，$U_0 = U_0(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|U_0 - U_e\|_{H^s}$ 足够小，那么上面的方程组以 U_0 为初值的 *Cauchy* 问题存在唯一的整体解 $U = U(x,t) \in C([0,\infty), H^s(\mathbf{R}^d))$。

- 对于等温可压 Maxwell 模型直接验证雍提出的整体存在性条件即可；
- 对于一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型，虽然方程不是守恒形式，但可以验证耗散条件和 Kawashima 条件成立，亦可利用雍的整体存在性理论，相关的估计仍然成立。
- 对于林芳华等提出的模型，可以利用双曲-抛物组的 Kawashima 理论，虽然 Kawashima 条件不成立，但力学适应性条件可以弥补这一点，而使得整体存在性所需的估计成立。

整体存在性定理

- 我们证明对于等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型、林芳华等提出的模型下面的整体存在性定理成立。

定理 (整体存在性定理)

设整数 $s \geq [\frac{n}{2}] + 2$，$U_0 = U_0(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|U_0 - U_e\|_{H^s}$ 足够小，那么上面的方程组以 U_0 为初值的 *Cauchy* 问题存在唯一的整体解 $U = U(x,t) \in C([0,\infty), H^s(\mathbf{R}^d))$。

- 对于等温可压 Maxwell 模型直接验证雍提出的整体存在性条件即可；
- 对于一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型，虽然方程不是守恒形式，但可以验证耗散条件和 Kawashima 条件成立，亦可利用雍的整体存在性理论，相关的估计仍然成立。
- 对于林芳华等提出的模型，可以利用双曲-抛物组的 Kawashima 理论，虽然 Kawashima 条件不成立，但力学适应性条件可以弥补这一点，而使得整体存在性所需的估计成立。

整体存在性定理

- 我们证明对于等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型、林芳华等提出的模型下面的整体存在性定理成立。

定理 (整体存在性定理)

设整数 $s \geq [\frac{n}{2}] + 2$，$U_0 = U_0(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|U_0 - U_e\|_{H^s}$ 足够小，那么上面的方程组以 U_0 为初值的 *Cauchy* 问题存在唯一的整体解 $U = U(x,t) \in C([0,\infty), H^s(\mathbf{R}^d))$。

- 对于等温可压 Maxwell 模型直接验证雍提出的整体存在性条件即可；
- 对于一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型，虽然方程不是守恒形式，但可以验证耗散条件和 Kawashima 条件成立，亦可利用雍的整体存在性理论，相关的估计仍然成立。
- 对于林芳华等提出的模型，可以利用双曲-抛物组的 Kawashima 理论，虽然 Kawashima 条件不成立，但力学适应性条件可以弥补这一点，而使得整体存在性所需的估计成立。

整体存在性定理

- 我们证明对于等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型、林芳华等提出的模型下面的整体存在性定理成立。

定理 (整体存在性定理)

设整数 $s \geq [\frac{n}{2}]+2$，$U_0 = U_0(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|U_0 - U_e\|_{H^s}$ 足够小，那么上面的方程组以 U_0 为初值的 *Cauchy* 问题存在唯一的整体解 $U = U(x,t) \in C([0,\infty), H^s(\mathbf{R}^d))$。

- 对于等温可压 Maxwell 模型直接验证雍提出的整体存在性条件即可；
- 对于一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型，虽然方程不是守恒形式，但可以验证耗散条件和 Kawashima 条件成立，亦可利用雍的整体存在性理论，相关的估计仍然成立。
- 对于林芳华等提出的模型，可以利用双曲-抛物组的 Kawashima 理论，虽然 Kawashima 条件不成立，但力学适应性条件可以弥补这一点，而使得整体存在性所需的估计成立。

等温可压 Maxwell 模型的整体存在性

- 由守恒耗散理论可知，方程满足守恒耗散结构；
- 只需验证 Kawashima 条件，则整体存在性成立。假设 $W=(W_1, W_2, W_3, W_4)^T$ 在雅克比矩阵 $\mathcal{Q}_U(U_e)$ 的零空间中，且为矩阵 $\sum_j \omega_j A_j(U_e)$ 的特征向量，即存在 μ，使得 $A_j(U_e)W=\mu W$。可以得到 $W_3=0, W_4=0$，且

$$
\begin{aligned}
\omega\cdot W_2 &= \mu W_1,\\
\pi_\rho(\rho_e)W_1\omega_i &= \mu W_{2i},\\
-\frac{1}{n\rho_e}W_2\cdot\omega &= 0,\\
-\frac{1}{\rho_e}(\omega_k W_{2l}+\omega_l w_{2k}-\frac{2}{n}\omega\cdot W_2\delta_{kl}) &= 0.
\end{aligned}
$$

可以得到 $W=0$，即第四个条件成立。定理得证。

等温可压 Maxwell 模型的整体存在性

- 由守恒耗散理论可知，方程满足守恒耗散结构；
- 只需验证 Kawashima 条件，则整体存在性成立。假设 $W=(W_1, W_2, W_3, W_4)^T$ 在雅克比矩阵 $\mathcal{Q}_U(U_e)$ 的零空间中，且为矩阵 $\sum_j \omega_j A_j(U_e)$ 的特征向量，即存在 μ，使得 $A_j(U_e)W=\mu W$。可以得到 $W_3=0, W_4=0$，且

$$
\begin{aligned}
\omega\cdot W_2 &= \mu W_1,\\
\pi_\rho(\rho_e)W_1\omega_i &= \mu W_{2i},\\
-\frac{1}{n\rho_e}W_2\cdot\omega &= 0,\\
-\frac{1}{\rho_e}(\omega_k W_{2l}+\omega_l w_{2k}-\frac{2}{n}\omega\cdot W_2\delta_{kl}) &= 0.
\end{aligned}
$$

可以得到 $W=0$，即第四个条件成立。定理得证。

等温可压 Maxwell 模型的整体存在性

- 由守恒耗散理论可知，方程满足守恒耗散结构；
- 只需验证 Kawashima 条件，则整体存在性成立。假设 $W=(W_1,W_2,W_3,W_4)^T$ 在雅克比矩阵 $\mathcal{Q}_U(U_e)$ 的零空间中，且为矩阵 $\sum_j \omega_j A_j(U_e)$ 的特征向量，即存在 μ，使得 $A_j(U_e)W=\mu W$。可以得到 $W_3=0, W_4=0$，且

$$
\begin{aligned}
\omega\cdot W_2 &= \mu W_1,\\
\pi_\rho(\rho_e)W_1\omega_i &= \mu W_{2i},\\
-\frac{1}{n\rho_e}W_2\cdot\omega &= 0,\\
-\frac{1}{\rho_e}(\omega_k W_{2l}+\omega_l w_{2k}-\frac{2}{n}\omega\cdot W_2\delta_{kl}) &= 0.
\end{aligned}
$$

可以得到 $W=0$，即第四个条件成立。定理得证。

一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型的分析

- 对称性：存在

$$A_0(U) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} p_\rho + v^2 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\rho c+2}{\rho c+2}\rho \end{pmatrix},$$

  使得 $A_0 A$ 对称；

- 耗散性:

$$A_0(U_e)Q_U(U_e) + Q_U^T(U_e)A_0(U_e) = -\frac{2}{\kappa}\mathrm{diag}(0,0,1)$$

- Kawashima 条件：令

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  和 $\bar{L} = \eta\,\mathrm{diag}(0,0,1)$，则对于足够大的 η，我们有

$$KA(U_e) + (KA(U_e))^T + \bar{L} \geq C_s I.$$

- 这三条性质与熵的存在性保证了雍论文中整体存在性证明中的估计仍然成立。

一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型的分析

- 对称性：存在

$$A_0(U) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} p_\rho + v^2 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\rho c+2}{\rho c+2}\rho \end{pmatrix},$$

使得 $A_0 A$ 对称；

- 耗散性:

$$A_0(U_e)Q_U(U_e) + Q_U^T(U_e)A_0(U_e) = -\frac{2}{\kappa}\mathrm{diag}(0,0,1)$$

- Kawashima 条件：令

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

和 $\bar{L} = \eta\mathrm{diag}(0,0,1)$，则对于足够大的 η，我们有

$$KA(U_e) + (KA(U_e))^T + \bar{L} \geq C_s I.$$

- 这三条性质与熵的存在性保证了雍论文中整体存在性证明中的估计仍然成立。

林芳华等提出的模型的整体存在性

- 可以验证 $-\eta_{UU}$ 可以对称化这一模型，从而可以采用可对称双曲-抛物组的 Kawashima 理论分析。
- 考虑平衡点 $U_e=(\rho=0, v=0, F=I)$ 附近下面的方程组。

$$U_t+\sum_{j=1}^n A_j(U_e)U_{x_j}-\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n D_{jk}(U_e)U_{x_jx_k}=0,\ D_{jk}(U)=diag(0,\tfrac{\mu}{\rho}\delta_{jk}\delta_{ii'}+\tfrac{\mu'}{\rho},0)$$

取 Kawashima 条件的一个形式为

- 矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量不在矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中。

- 假设 $\hat{U}=(\hat{\rho},\hat{v},\hat{F})$ 是矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量的特征向量且位于矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中，可以得到 $\hat{v}=0,\quad \xi_i\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}\hat{\rho}-\xi_{l'}\hat{F}_{il'}=0$。例如可以选取 $\hat{U}=(1,0,\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}I_{n^2})$ 使之成立，从而 Kawashima 条件不成立。

林芳华等提出的模型的整体存在性

- 可以验证 $-\eta_{UU}$ 可以对称化这一模型，从而可以采用可对称双曲-抛物组的 Kawashima 理论分析。
- 考虑平衡点 $U_e=(\rho=0, v=0, F=I)$ 附近下面的方程组。

$$U_t+\sum_{j=1}^n A_j(U_e)U_{x_j}-\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n D_{jk}(U_e)U_{x_jx_k}=0,\ D_{jk}(U)=diag(0,\frac{\mu}{\rho}\delta_{jk}\delta_{ii'}+\frac{\mu'}{\rho},0)$$

取 Kawashima 条件的一个形式为
  - 矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量不在矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中。
- 假设 $\hat{U}=(\hat{\rho},\hat{v},\hat{F})$ 是矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量的特征向量且位于矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中，可以得到 $\hat{v}=0, \quad \xi_i\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}\hat{\rho}-\xi_{l'}\hat{F}_{il'}=0$。例如可以选取 $\hat{U}=(1,0,\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}I_{n^2})$ 使之成立，从而 Kawashima 条件不成立。

林芳华等提出的模型的整体存在性

- 可以验证 $-\eta_{UU}$ 可以对称化这一模型，从而可以采用可对称双曲-抛物组的 Kawashima 理论分析。
- 考虑平衡点 $U_e=(\rho=0, v=0, F=I)$ 附近下面的方程组。

$$U_t+\sum_{j=1}^n A_j(U_e)U_{x_j}-\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n D_{jk}(U_e)U_{x_jx_k}=0,\ D_{jk}(U)=diag(0,\frac{\mu}{\rho}\delta_{jk}\delta_{ii'}+\frac{\mu'}{\rho},0)$$

取 Kawashima 条件的一个形式为

  - 矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量不在矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中。

- 假设 $\hat{U}=(\hat{\rho},\hat{v},\hat{F})$ 是矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量的特征向量且位于矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中，可以得到 $\hat{v}=0,\quad \xi_i\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}\hat{\rho}-\xi_{l'}\hat{F}_{il'}=0$。例如可以选取 $\hat{U}=(1,0,\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}I_{n^2})$ 使之成立，从而 Kawashima 条件不成立。

林芳华等提出的模型的整体存在性

- 可以验证 $-\eta_{UU}$ 可以对称化这一模型，从而可以采用可对称双曲-抛物组的 Kawashima 理论分析。
- 考虑平衡点 $U_e = (\rho = 0, v = 0, F = I)$ 附近下面的方程组。

$$U_t+\sum_{j=1}^n A_j(U_e)U_{x_j}-\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n D_{jk}(U_e)U_{x_jx_k}=0,\ D_{jk}(U)=diag(0,\frac{\mu}{\rho}\delta_{jk}\delta_{ii'}+\frac{\mu'}{\rho},0)$$

  取 Kawashima 条件的一个形式为
  - 矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量不在矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中。
- 假设 $\hat{U} = (\hat{\rho}, \hat{v}, \hat{F})$ 是矩阵 $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(U_e)$ 的特征向量的特征向量且位于矩阵 $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k D_{jk}(U_e)$ 的零空间中，可以得到 $\hat{v} = 0, \quad \xi_i\frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e}\hat{\rho} - \xi_{l'}\hat{F}_{il'} = 0$。例如可以选取 $\hat{U} = (1, 0, \frac{p_\rho(\rho_e)}{\rho_e} I_{n^2})$ 使之成立，从而 Kawashima 条件不成立。

力学适应性条件对 Kawashima 条件的补偿

- 虽然 Kawashima 条件不成立，但是在力学适应性条件的限制下可以得到其成立。
- 利用前两个适应性条件定义下面的线性算子

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(U) &= -\nabla\rho - \rho_e \nabla \cdot F^T, \\ [\mathcal{C}_2(U)]_{kmj} &= \partial_{x_m} F_{kj} - \partial_{x_j} F_{km} \end{aligned}$$

- 假设上面的 $\hat{U}$ 也在算子 $\mathcal{C}_1(U)$ 和 $\mathcal{C}_2(U)$ 的符号矩阵的零空间中，可以推出 $\hat{\rho} = 0, \hat{F} = 0$，从而 Kawashima 条件在前两个力学适应性条件的限制下成立。

力学适应性条件对 Kawashima 条件的补偿

- 虽然 Kawashima 条件不成立，但是在力学适应性条件的限制下可以得到其成立。
- 利用前两个适应性条件定义下面的线性算子

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(U) = &\quad -\nabla\rho - \rho_e\nabla\cdot F^T, \\
[\mathcal{C}_2(U)]_{kmj} = &\quad \partial_{x_m}F_{kj} - \partial_{x_j}F_{km}
\end{aligned}
$$

- 假设上面的 $\hat{U}$ 也在算子 $\mathcal{C}_1(U)$ 和 $\mathcal{C}_2(U)$ 的符号矩阵的零空间中，可以推出 $\hat{\rho}=0, \hat{F}=0$，从而 Kawashima 条件在前两个力学适应性条件的限制下成立。

力学适应性条件对 Kawashima 条件的补偿

- 虽然 Kawashima 条件不成立，但是在力学适应性条件的限制下可以得到其成立。
- 利用前两个适应性条件定义下面的线性算子

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(U) = &\quad -\nabla\rho - \rho_e\nabla\cdot F^T, \\
[\mathcal{C}_2(U)]_{kmj} = &\quad \partial_{x_m}F_{kj} - \partial_{x_j}F_{km}
\end{aligned}
$$

- 假设上面的 $\hat{U}$ 也在算子 $\mathcal{C}_1(U)$ 和 $\mathcal{C}_2(U)$ 的符号矩阵的零空间中，可以推出 $\hat{\rho}=0, \hat{F}=0$，从而 Kawashima 条件在前两个力学适应性条件的限制下成立。

力学适应性条件对 Kawashima 条件的补偿

- 虽然 Kawashima 条件不成立，但是在力学适应性条件的限制下可以得到其成立。
- 利用前两个适应性条件定义下面的线性算子

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(U) &= -\nabla\rho - \rho_e \nabla\cdot F^T,\\
[\mathcal{C}_2(U)]_{kmj} &= \partial_{x_m} F_{kj} - \partial_{x_j} F_{km}
\end{aligned}
$$

- 假设上面的 $\hat{U}$ 也在算子 $\mathcal{C}_1(U)$ 和 $\mathcal{C}_2(U)$ 的符号矩阵的零空间中，可以推出 $\hat{\rho}=0, \hat{F}=0$，从而 Kawashima 条件在前两个力学适应性条件的限制下成立。

整体存在性定理的证明

- 基于上面的分析，下面的引理成立

取反对称矩阵

$$K_j = \mathrm{diag}\left(\frac{p'(\rho_e)}{\rho_e^2}, -I_d, I_{d^2}\right) A_j(U_e),$$

那么存在正常数 η 和 C_S，使得对任意的光滑函数 $U = U(x)$，下面的不等式成立。

$$\sum_{j,m=1}^{d}[(\eta K_m A_j(U_e)U_{x_j}, U_{xm}) + (D_{mj}(U_e)U_{x_j}, U_{xm})]$$
$$\geq C_S\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \eta\frac{2p'(\rho_e)}{\rho_e^2}(\mathcal{C}_1(U-U_e), \nabla\rho) + \eta(\mathcal{C}_2(U-U_e), \nabla F).$$

- Kawashima 理论导出的估计不含 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 项，然而对于平衡态附近的情况 $U-U_e$ 很小，从而这两项为高阶项不影响整体存在性定理的成立。

整体存在性定理的证明

- 基于上面的分析，下面的引理成立

取反对称矩阵

$$K_j = \mathrm{diag}\left(\frac{p'(\rho_e)}{\rho_e^2}, -I_d, I_{d^2}\right) A_j(U_e),$$

那么存在正常数 η 和 C_S，使得对任意的光滑函数 $U = U(x)$，下面的不等式成立。

$$\sum_{j,m=1}^{d}[(\eta K_m A_j(U_e)U_{x_j}, U_{x_m}) + (D_{mj}(U_e)U_{x_j}, U_{x_m})]$$
$$\geq C_S\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \eta\frac{2p'(\rho_e)}{\rho_e^2}(\mathcal{C}_1(U-U_e), \nabla\rho) + \eta(\mathcal{C}_2(U-U_e), \nabla F).$$

- Kawashima 理论导出的估计不含 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 项，然而对于平衡态附近的情况 $U-U_e$ 很小，从而这两项为高阶项不影响整体存在性定理的成立。

整体存在性定理的证明

- 基于上面的分析，下面的引理成立

取反对称矩阵

$$K_j = \text{diag}\left(\frac{p'(\rho_e)}{\rho_e^2}, -I_d, I_{d^2}\right) A_j(U_e),$$

那么存在正常数 η 和 C_S，使得对任意的光滑函数 $U = U(x)$，下面的不等式成立。

$$\sum_{j,m=1}^{d}[(\eta K_m A_j(U_e)U_{x_j}, U_{x_m}) + (D_{mj}(U_e)U_{x_j}, U_{x_m})]$$
$$\geq C_S\|\nabla U\|_{L^2}^2 + \eta\frac{2p'(\rho_e)}{\rho_e^2}(\mathcal{C}_1(U-U_e), \nabla\rho) + \eta(\mathcal{C}_2(U-U_e), \nabla F).$$

- Kawashima 理论导出的估计不含 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 项，然而对于平衡态附近的情况 $U - U_e$ 很小，从而这两项为高阶项不影响整体存在性定理的成立。

概览

与 Navier-Stokes 方程的一致性分析

- 等温可压 Maxwell 模型的 Chapman-Enskog 展开的结果为可压 Navier-Stokes 方程，验证各向同性条件即可得到一致性成立。
- 一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型利用 Maxwell 迭代的结果得到一维可压 Maxwell 方程，由于方程的非守恒形式，这一过程的有效性需要利用雍提出的摄动展开的分析结果，可以验证雍、杨 Chapman-Enskog 展开论文中的估计仍然成立。

与 Navier-Stokes 方程的一致性分析

- 等温可压 Maxwell 模型的 Chapman-Enskog 展开的结果为可压 Navier-Stokes 方程，验证各向同性条件即可得到一致性成立。
- 一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型利用 Maxwell 迭代的结果得到一维可压 Maxwell 方程，由于方程的非守恒形式，这一过程的有效性需要利用雍提出的摄动展开的分析结果，可以验证雍、杨 Chapman-Enskog 展开论文中的估计仍然成立。

与 Navier-Stokes 方程的一致性分析

- 等温可压 Maxwell 模型的 Chapman-Enskog 展开的结果为可压 Navier-Stokes 方程，验证各向同性条件即可得到一致性成立。
- 一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型利用 Maxwell 迭代的结果得到一维可压 Maxwell 方程，由于方程的非守恒形式，这一过程的有效性需要利用雍提出的摄动展开的分析结果，可以验证雍、杨 Chapman-Enskog 展开论文中的估计仍然成立。

等温可压 Maxwell 模型与 NS 方程的一致性

- 形式上，可以采用 Maxwell 迭代得到下面的可压 NS 方程。由

$$
\begin{aligned}
\rho\dot{c}&=-\kappa\Big((\rho\dot{c})_t+\nabla\cdot(\rho\dot{c}\otimes v)-\tfrac{1}{n}\nabla\cdot v\Big).\\
\rho\mathring{c}&=-\xi\Big((\rho\mathring{c})_t+\nabla\cdot(\rho c\otimes v)-\tfrac{1}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T--\tfrac{2}{n}\nabla\cdot vI\Big).
\end{aligned}
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
\rho_t+\nabla\cdot(\rho v)&=0,\\
(\rho v)_t+\nabla\cdot(\rho v\otimes v)+\nabla\pi&=\tfrac{\xi}{2}\Delta v+(\tfrac{\kappa-\xi}{n}+\tfrac{\xi}{2})\nabla\nabla\cdot v\\
(\rho\dot{c})_t+\nabla\cdot(\rho\dot{c}\otimes v)-\frac{1}{n}\nabla\cdot v&=-\frac{\rho\dot{c}}{\kappa}.\\
(\rho\mathring{c})_t+\nabla\cdot(\rho c\otimes v)-\frac{1}{2}(\nabla v+(\nabla v)^T-\frac{2}{n}\nabla\cdot vI)&=-\frac{\rho\mathring{c}}{\xi}.
\end{aligned}
$$

各向同性条件

- 守恒耗散结构显然成立；
- 各向同性条件可以验证成立。实际上，计算得出

$$\sum_{j=1}^{n} f_{jU_d}\omega_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{n\rho}\omega_i & -\frac{1}{2\rho}(\omega_{l'}\delta_{ik'} + \omega_{k'}\delta_{il'} - \frac{2}{n}\omega_i\delta_{k'l'}) \end{pmatrix}$$

  的左零空间不依赖于 ω 和 U。
- 上面的两个条件保证了下面定理的成立。

各向同性条件

- 守恒耗散结构显然成立；
- 各向同性条件可以验证成立。实际上，计算得出

$$\sum_{j=1}^{n} f_{jU_d}\omega_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{n\rho}\omega_i & -\frac{1}{2\rho}(\omega_{l'}\delta_{ik'} + \omega_{k'}\delta_{il'} - \frac{2}{n}\omega_i\delta_{k'l'}) \end{pmatrix}$$

的左零空间不依赖于 ω 和 U。
- 上面的两个条件保证了下面定理的成立。

各向同性条件

- 守恒耗散结构显然成立；
- 各向同性条件可以验证成立。实际上，计算得出

$$\sum_{j=1}^{n} f_{jU_d}\omega_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{n\rho}\omega_i & -\frac{1}{2\rho}(\omega_{l'}\delta_{ik'} + \omega_{k'}\delta_{il'} - \frac{2}{n}\omega_i\delta_{k'l'}) \end{pmatrix}$$

的左零空间不依赖于 ω 和 U。

- 上面的两个条件保证了下面定理的成立。

各向同性条件

- 守恒耗散结构显然成立；
- 各向同性条件可以验证成立。实际上，计算得出

$$\sum_{j=1}^{n} f_{jU_d}\omega_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{n\rho}\omega_i & -\frac{1}{2\rho}(\omega_{l'}\delta_{ik'} + \omega_{k'}\delta_{il'} - \frac{2}{n}\omega_i\delta_{k'l'}) \end{pmatrix}$$

的左零空间不依赖于 ω 和 U。

- 上面的两个条件保证了下面定理的成立。

与 NS 方程一致性

定理 (等温可压 Maxwell 模型与 Navier-Stokes 一致性)

令整数 $s \geq \frac{1}{2}n+1$。假设 $\kappa=\xi$，等温可压 *Maxwell* 方程组和 *Maxwell* 迭代得到的 *Navier-Stokes* 方程组的初值分别为 $U_0(x,\kappa)=(U_{c0}(x,\kappa),U_{d0}(x,\kappa))$ 和 $W_0(x,\kappa)$，且 $U_0 \in H^s(\mathbf{R}^n), W_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 以及

$$\|U_{c0}(\cdot,\kappa)-W_0(\cdot,\kappa)\|_{H^s}=O(\kappa^2).$$

那么存在不依赖与 κ 的时间常数 $T>0$ 和常数 $K(T)$，使得以 U_0 和 W_0 为初值的等温可压 *Maxwell* 模型和 *Navier-Stokes* 方程组的解 $U=U(x,t)$ 和 $W=W(x,t)$ 在空间 $C([0,T],H^s)$ 中存在且唯一，并且对充分小的 κ，下面的式子成立。

$$\sup_{t\in[0,T]}\|U(\cdot,t)-W(\cdot,t)\|_{H^s}\leq K(T)\kappa^2.$$

与一维 Navier-Stokes 方程的一致性

一维等温上对流导数 Maxwell 模型

$$\rho c = -\kappa((\rho c)_t + v\partial_x(\rho c) - 2\rho c\partial_x v + 2\partial_x v.$$

迭代一次得到

$$\rho c = 2\kappa\partial_x v + O(\kappa^2)$$

可以得到下面的一维 Navier-Stokes 方程组。

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \partial_x(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) &= 4\kappa\partial_x^2 v \end{aligned}$$

其中 4κ 为粘性系数。
下面我们将严格地分析这一形式近似的合理性。

一维可压上对流导数 Maxwell 模型与 NS 方程的一致性

- 由于可以验证，雍提出的稳定性条件对一维可压上对流导数 Maxwell 模型成立，所以其一阶摄动展开有效。只需证明一阶摄动展开得到的方程组与 NS 方程组在 κ 趋于 0 时近似。
- 通过计算得到一阶摄动展开得到的方程组满足

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + \partial_x(\rho_1 v_1) &= 0, \\ \partial_t(\rho_1 v_1) + \partial_x(\rho_1 v_1^2 + \pi_1) &= 4\kappa \partial_x^2 v_1 + R. \end{aligned}$$

其中 $\|R\|_{H^s} = O(\kappa^2)$。于是只需证明这一方程组在 κ 趋于 0 时可以近似一维 Navier-Stokes。根据雍等发展的估计方法，这一结论容易得到证明。

一维可压上对流导数 Maxwell 模型与 NS 方程的一致性

- 由于可以验证，雍提出的稳定性条件对一维可压上对流导数 Maxwell 模型成立，所以其一阶摄动展开有效。只需证明一阶摄动展开得到的方程组与 NS 方程组在 κ 趋于 0 时近似。
- 通过计算得到一阶摄动展开得到的方程组满足

$$\begin{aligned}\partial_t\rho_1 + \partial_x(\rho_1 v_1) &= 0,\\ \partial_t(\rho_1 v_1) + \partial_x(\rho_1 v_1^2 + \pi_1) &= 4\kappa\partial_x^2 v_1 + R.\end{aligned}$$

其中 $\|R\|_{H^s} = O(\kappa^2)$。于是只需证明这一方程组在 κ 趋于 0 时可以近似一维 Navier-Stokes。根据雍等发展的估计方法，这一结论容易得到证明。

一维可压上对流导数 Maxwell 模型与 NS 方程的一致性

- 由于可以验证，雍提出的稳定性条件对一维可压上对流导数 Maxwell 模型成立，所以其一阶摄动展开有效。只需证明一阶摄动展开得到的方程组与 NS 方程组在 κ 趋于 0 时近似。
- 通过计算得到一阶摄动展开得到的方程组满足

$$
\begin{aligned}
\partial_t\rho_1 + \partial_x(\rho_1 v_1) &= 0, \\
\partial_t(\rho_1 v_1) + \partial_x(\rho_1 v_1^2 + \pi_1) &= 4\kappa\partial_x^2 v_1 + R.
\end{aligned}
$$

其中 $\|R\|_{H^s} = O(\kappa^2)$。于是只需证明这一方程组在 κ 趋于 0 时可以近似一维 Navier-Stokes。根据雍等发展的估计方法，这一结论容易得到证明。

概览

1. 简介
   - 研究综述
   - 研究内容
2. 粘弹性流体的数学建模
   - 线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 非线性粘弹性模型的守恒耗散理论
   - 有限守恒耗散理论在粘弹性流体建模中的应用
3. 粘弹性流体力学的数学分析
   - 方程的结构性条件
   - 整体存在性
   - 与 Navier-Stokes 方程的一致性分析
4. 总结与展望

总结

我们基于雍等提出的非平衡态热力学的守恒-耗散理论，发展了粘弹性流体力学的经典模型，并对得到的模型进行了数学分析。主要完成了以下工作：

1. 利用守恒耗散理论，提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型；
2. 推广守恒耗散理论以将客观性原理纳入其中，提出了可压上对流导数 Maxwell 模型。
3. 利用有限形变理论，推广了守恒-耗散理论，发展了林芳华等人提出的模型。

总结

我们基于雍等提出的非平衡态热力学的守恒-耗散理论，发展了粘弹性流体力学的经典模型，并对得到的模型进行了数学分析。主要完成了以下工作：

1. 利用守恒耗散理论，提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型；
2. 推广守恒耗散理论以将客观性原理纳入其中，提出了可压上对流导数 Maxwell 模型。
3. 利用有限形变理论，推广了守恒-耗散理论，发展了林芳华等人提出的模型。

总结

我们基于雍等提出的非平衡态热力学的守恒-耗散理论，发展了粘弹性流体力学的经典模型，并对得到的模型进行了数学分析。主要完成了以下工作：

1. 利用守恒耗散理论，提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型；
2. 推广守恒耗散理论以将客观性原理纳入其中，提出了可压上对流导数 Maxwell 模型。
3. 利用有限形变理论，推广了守恒-耗散理论，发展了林芳华等人提出的模型。

总结

我们基于雍等提出的非平衡态热力学的守恒-耗散理论，发展了粘弹性流体力学的经典模型，并对得到的模型进行了数学分析。主要完成了以下工作：

1. 利用守恒耗散理论，提出了推广 GK 定律的粘弹性流体模型；
2. 推广守恒耗散理论以将客观性原理纳入其中，提出了可压上对流导数 Maxwell 模型。
3. 利用有限形变理论，推广了守恒-耗散理论，发展了林芳华等人提出的模型。

总结

基于守恒-耗散理论的数学结构，本文对粘弹性流体力学的模型做了数学分析，主要得到了以下结果。

1. 利用雍发展的整体存在性理论证明了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型平衡态附近接的整体存在性。
2. 利用双曲抛物组的 Kawashima 理论结合力学适应性条件的分析给出了林芳华等提出的模型整体存在性定理的一个新的证明。
3. 利用雍、杨发展的 Chapman-Enskog 展开的数学理论，给出了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型与 Navier-Stokes 方程组的一致性分析。

总结

基于守恒-耗散理论的数学结构，本文对粘弹性流体力学的模型做了数学分析，主要得到了以下结果。

1. 利用雍发展的整体存在性理论证明了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型平衡态附近接的整体存在性。
2. 利用双曲抛物组的 Kawashima 理论结合力学适应性条件的分析给出了林芳华等提出的模型整体存在性定理的一个新的证明。
3. 利用雍、杨发展的 Chapman-Enskog 展开的数学理论，给出了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型与 Navier-Stokes 方程组的一致性分析。

总结

基于守恒-耗散理论的数学结构，本文对粘弹性流体力学的模型做了数学分析，主要得到了以下结果。

1. 利用雍发展的整体存在性理论证明了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型平衡态附近接的整体存在性。
2. 利用双曲抛物组的 Kawashima 理论结合力学适应性条件的分析给出了林芳华等提出的模型整体存在性定理的一个新的证明。
3. 利用雍、杨发展的 Chapman-Enskog 展开的数学理论，给出了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型与 Navier-Stokes 方程组的一致性分析。

总结

基于守恒-耗散理论的数学结构，本文对粘弹性流体力学的模型做了数学分析，主要得到了以下结果。

1. 利用雍发展的整体存在性理论证明了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型平衡态附近接的整体存在性。
2. 利用双曲抛物组的 Kawashima 理论结合力学适应性条件的分析给出了林芳华等提出的模型整体存在性定理的一个新的证明。
3. 利用雍、杨发展的 Chapman-Enskog 展开的数学理论，给出了等温可压 Maxwell 模型、一维等温可压上对流导数 Maxwell 模型与 Navier-Stokes 方程组的一致性分析。

展望

未来的研究可以从下面几个方面进行；

- 发展守恒-耗散理论以包含更加复杂的流体模型，如凝胶、液晶和活性物质的模型。并推广经典的模型以考虑温度和压缩性。
- 研究有限形变守恒-耗散理论中熵函数的凸性条件及其与方程组的数学性质的关系。
- 研究本文得到的非等温可压粘弹性流体力学模型的数值格式，并与实验进行比较以验证本文模型的合理性。

致谢

谢谢大家！

参考文献 I

- Zhu Y, Hong L, Yang Z, et al. Conservation-dissipation formalism of irreversible thermody- namics. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 2015, 40(2):67–74.
- Yong W A. An interesting class of partial differential equations. Journal of Mathematical Physics, 2008, 49(3):033503.
- Yong W A. Singular pertubations of first-order hyperbolic systems[D]. Universität Heidelberg, 1992.
- Oldroyd J. On the formulation of rheological equations of state. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 200. The Royal Society, 1950. 523–541.
- Lin F H, Liu C, Zhang P. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, 58(11):1437–1471.