第一章

电路模型和电路定律

学习要求

1. 了解电路模型的概念和电路的基本变量。
2. 理解电压、电流的参考方向与实际方向的关系，电压与电流的关联参考方向的概念。
3. 掌握功率的计算、功率的吸收与发出。
4. 掌握电阻、电容、电感、独立电源和受控源的定义及伏安关系。
5. 掌握基尔霍夫定律：KCL 和 KVL。

知识网络图

- 电路模型和电路定律
  - 电路和电路模型
  - 电流和电压的参考方向
    - 关联
    - 非关联
  - 电功率和能量
  - 电路元件
    - 电阻元件
    - 电容元件
    - 电感元件
  - 电压源和电流源
    - 独立电源
    - 受控电源
  - 基尔霍夫定律
    - KCL
    - KVL

课后习题全解

○ 1－1　**说明题 1－1 图(a)、(b) 中：**

(1)u、i **的参考方向是否关联？**

(2)u、i **乘积表示什么功率？**

(3) **如果在题 1－1 图(a) 中** $u>0$，$i<0$；**图(b) 中** $u>0$，$i>0$，**元件实际发出还是吸收功率？**

题 1－1 图

解　(1) **当流过元件的电流的参考方向，从该元件的标示电压正极性的一端指向负极性的一端，即电流的参考方向与元件两端电压降落的方向一致，称电压和电流的参考方向关联，所以**(a) **图中** u、i **的参考方向是关联的；**(b) **图中** u、i **的参考方向是非关联的。**

(2) **当取元件的** u、i **参考方向为关联参考方向时，定义** $p=ui$ **为元件吸收的功率；当取元件的** u、i **参考方向为非关联时，定义** $p=ui$ **为元件发出的功率。所以**(a) **图中的** ui **表示元件吸收的功率；**(b) **图中的** ui **表示元件发出的功率。**

(3) **在电压、电流参考方向关联的条件下，代入** u、i **数值，经计算，若** $p=ui>0$，**表示元件实际吸收了功率；若** $p<0$，**表示元件吸收负功率，实际是发出功率。**(a) **图中，若** $u>0$，$i<0$，**则** $p=ui<0$，**表示元件吸收了负功率，实际发出功率。在电压、电流参考方向非关联的条件下，代入** u，i **数值，经计算，若** $p=ui>0$，**为正值，表示元件实际是发出功率；若** $p<0$，**为负值，表示元件发出负功率，实际是吸收功率。所以**(b) **图中，当** $u>0$，$i>0$，**则** $p=ui>0$，**表示元件实际发出功率。**

○1－2　**若某元件端子上的电压和电流取关联参考方向，而** $u=170\cos(100\pi t)\,\mathrm{V}$，$i=7\sin(100\pi t)\,\mathrm{A}$。**求：**

(1) **该元件吸收功率的最大值；**

(2) **该元件发出功率的最大值。**

解

$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t)i(t) \\
&= 170\cos(100\pi t)\times 7\sin(100\pi t) \\
&= 595\sin(200\pi t)\ \mathrm{W}
\end{aligned}
$$

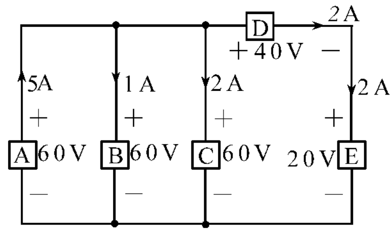
(1) **当** $\sin(200\pi t)>0$ **时，**$p(t)>0$，**元件实际吸收功率；当** $\sin(200\pi t)=1$ **时，元件吸收最大功率：**

$$p_{\max} = 595\ \mathrm{W}$$

(2) 当 $\sin(200\pi t) < 0$ 时，$p(t) < 0$，元件实际发出功率；当 $\sin(200\pi t) = -1$ 时，元件发出最大功率：

$$p_{\max} = 595\ \mathrm{W}$$

○ 1－3　试校核题 1－3 图中电路所得解答是否满足功率平衡。（提示：求解电路以后，校核所得结果的方法之一是核对电路中所有元件的功率平衡，即元件发出的总功率应等于其它元件吸收的总功率）。



题 1－3 图

解　由题 1－3 图可知，元件 A 的电压、电流为非关联参考方向，其余元件的电压、电流均为关联参考方向。所以各元件的功率分别为：

$p_A = 60 \times (-5) = -300\ \mathrm{W} < 0$，为发出功率

$p_B = 60 \times 1 = 60\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

$p_C = 60 \times 2 = 120\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

$p_D = 40 \times 2 = 80\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

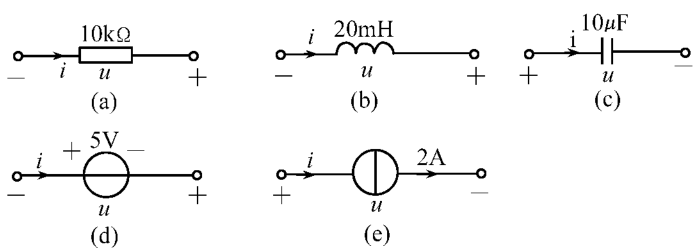
$p_E = 20 \times 2 = 40\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

电路吸收的总功率为

$$p = p_B + p_C + p_D + p_E = 60 + 120 + 80 + 40 = 300\ \mathrm{W}$$

即，元件 A 发出的总功率等于其余元件吸收的总功率，满足功率平衡。

○ 1－4　在指定的电压 u 和电流 i 参考方向下，写出各元件 u 和 i 的约束方程（元件的组成关系）。



题 1－4 图

解　(a) 图为线性电阻元件，其电压、电流关系满足欧姆定律。(a) 图电阻元件 u 和 i 的约束方程为：

$$u = -Ri = -10 \times 10^3 i$$

(b) 图为线性电感元件。(b) 图电感元件 u 和 i 的约束方程为：

$$u = -20 \times 10^{-3} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(c) 图为线性电容元件。(c) 图电容元件 u 和 i 的约束方程为：

$$i = 10 \times 10^{-6} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 10^{-5} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

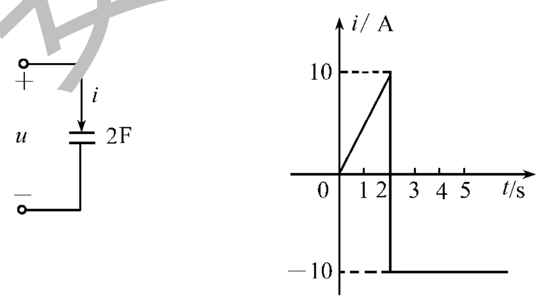
(d) 图是理想电压源。(d) 图的约束方程为：

$$u = -5\mathrm{V}$$

(e) 图是理想电流源。(e) 图的约束方程为：

$$i = 2\mathrm{A}$$

◎ 1－5　题 1－5 图(a) 电容中电流 i 的波形如题 1－5 图(b) 所示，现已知 $u(0) = 0$，试求 $t = 1\mathrm{s}$，$t = 2\mathrm{s}$ 和 $t = 4\mathrm{s}$ 时的电容电压 u。



(a)　　(b)

题 1－5 图

分析　电容两端电压、电流的关系为 $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$，$u(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$，根据公式求解即可。

解　已知电容的电流 $i(t)$，求电压 $u(t)$ 时，有

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi = u(t_0) - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

式中，$u(t_0)$ 为电容电压的初始值。

本题中电容电流 $i(t)$ 的函数表示式为

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ 5t & 0 < t \leqslant 2\mathrm{s} \\ -10 & t > 2\mathrm{s} \end{cases}$$

根据 u，i 积分关系，有

$t = 1\mathrm{s}$ 时，

$$u(1) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^1 i(t)\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 5t\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}t^2\right)\bigg|_0^1 = 1.25\mathrm{V}$$

$t = 2\mathrm{s}$ 时，

$$u(2)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^2 i(t)\mathrm{d}t$$

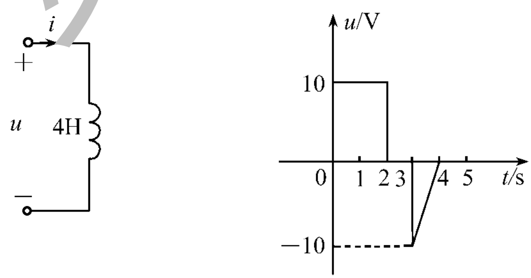
$$=0+\frac{1}{2}\int_0^2 5t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^2=5\mathrm{V}$$

$t=4\mathrm{s}$ 时,

$$u(4)=u(2)+\frac{1}{C}\int_2^4 i(t)\mathrm{d}t$$

$$=5+\frac{1}{2}\int_2^4(-10)\mathrm{d}t=5+\frac{1}{2}\times(-10t)\Big|_2^4=-5\mathrm{V}$$

○ 1－6　题 1－6 图(a) 中 $L=4\mathrm{H}$,且 $i(0)=0$,电压的波形如题 1－6 图(b) 所示。试求当 $t=1\mathrm{s}$,$t=2\mathrm{s}$,$t=3\mathrm{s}$ 和 $t=4\mathrm{s}$ 时的电感电流 i。



(a)　　(b)

题 1－6 图

解　电感元件 u,i 关系的积分形式为

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

本题中电感电压的函数表示式为

$$u(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 10 & 0<t\leqslant 2\mathrm{s}\\ 0 & 2<t\leqslant 3\mathrm{s}\\ 10t-40 & 3<t\leqslant 4\mathrm{s}\\ 0 & t>4\end{cases}$$

应用 u,i 积分关系式,有

$t=1\mathrm{s}$ 时,

$$i(1)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\frac{1}{4}\int_0^1 10\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\times(10t)\Big|_0^1=2.5\mathrm{A}$$

$t=2\mathrm{s}$ 时,

$$i(2)=i(1)+\frac{1}{L}\int_1^2 u(t)\mathrm{d}t$$

$$=2.5+\frac{1}{4}\int_1^2 10\mathrm{d}t=2.5+\frac{1}{4}\times(10t)\Big|_1^2=5\mathrm{A}$$

$t=3\mathrm{s}$ 时，

$$i(3)=i(2)+\frac{1}{L}\int_2^3 u(t)\mathrm{d}t$$

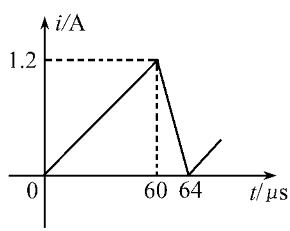
$$=5+\frac{1}{4}\int_2^3 0\mathrm{d}t=5\mathrm{A}$$

$t=4\mathrm{s}$ 时，

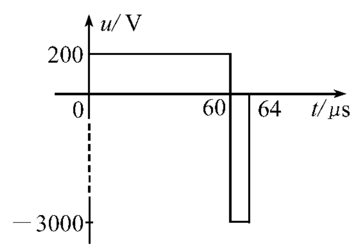
$$i(4)=i(3)+\frac{1}{L}\int_3^4 u(t)\mathrm{d}t$$

$$=5+\frac{1}{4}\int_3^4(10t-40)\mathrm{d}t=5+\frac{1}{4}\times(5t^2-40t)\Big|_3^4=3.75\mathrm{A}$$

◎1－7　**若已知显像管行偏转圈中的周期性扫描电流如题1－7图所示，现已知线圈电感为0.01H，电阻略而不计，试求电感线圈所加电压的波形。**



题 1－7 图



题解 1－7 图

分析　**根据图示可写出** $i(t)$ **的表达式，由** $u_C(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ **即可求解。**

解　**电流** $i(t)$ **的函数表示式为**

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{1.2}{60}\times10^6 t & 0\leqslant t\leqslant 60\mu\mathrm{s}\\ 3\times10^5(64\times10^{-6}-t) & 60<t\leqslant 64\mu\mathrm{s}\end{cases}$$

根据电感元件 u,i **的微分关系，得电压的函数表示式为**

$$u(t)=0.01\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}2\times10^2 & 0\leqslant t\leqslant 60\mu\mathrm{s}\\ -3\times10^3 & 60<t\leqslant 64\mu\mathrm{s}\end{cases}$$

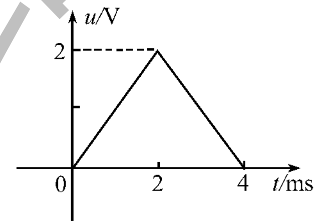
$u(t)$ **的波形如题解1－7图，说明电感的电压可以是时间的间断函数。**

○1－8　$2\mu\mathrm{F}$ **的电容上所加电压** u **的波形如题1－8图所示。求：**

(1) **电容电流** i；

（2）**电容电荷** q；

（3）**电容吸收的功率** p。



题 1－8 **图**

解　（1）**电压** $u(t)$ **的函数表示式为**

$$u(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 10^3 t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ 4-10^3 t & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

根据电容元件 u,i **的微分关系，得电流** $i(t)$ **的函数表示式为：**

$$i(t)=2\times10^{-6}\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2\times10^{-3} & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ -2\times10^{-3} & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

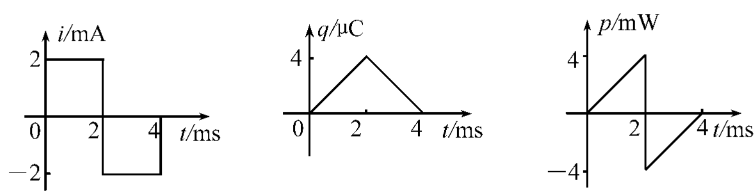
（2）**因为** $C=\dfrac{q}{u}$，**所以有**

$$q(t)=Cu(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2\times10^{-3}t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ 2\times10^{-6}(4-10^3 t) & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

（3）**在电容元件上电压、电流参考方向关联时，电容元件吸收的功率为**

$$p(t)=u(t)i(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ -2\times10^{-3}(4-10^3 t) & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

$i(t)$，$q(t)$，$p(t)$ **波形如题解** 1－8 **图所示。**



(a)　(b)　(c)

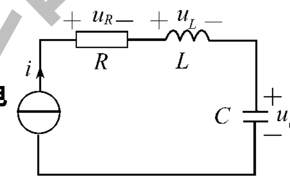
题解 1－8 **图**

◎ 1－9　**电路如题** 1－9 **图所示，其中** $R=2\Omega$，$L=1\text{H}$，$C=0.01\text{F}$，$u_C(0)=0$，**若电路的输入电流为：**

（1）$i=2\sin(2t+\dfrac{\pi}{3})\text{A}$；

(2) $i = e^{-t}$ A。

试求两种情况下，当 $t > 0$ 时的 u_R、u_L 和 u_C 值。



题 1－9 图

分析 电阻两端的电压与电流关系为 $u_R = iR$，电感端电压为 $u_L = L\dfrac{di}{dt}$，电容端电压为 $u_C = u_C(0) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\xi)d\xi$，根据公式求解即可。

解 根据 R，L 和 C 的 u，i 关系有

(1) 若 $i = 2\sin(2t + \frac{\pi}{3})$ A，则有

$$u_R(t) = Ri(t) = 2 \times 2\sin(2t + \frac{\pi}{3})$$

$$= 4\sin(2t + \frac{\pi}{3})\text{V}$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 1 \times 2[\cos(2t + \frac{\pi}{3})] \times 2$$

$$= 4\cos(2t + \frac{\pi}{3})\text{V}$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi$$

$$= 0 + \frac{1}{0.01}\int_0^t 2\sin(2\xi + \frac{\pi}{3})d\xi$$

$$= 50 - 100\cos(2t + \frac{\pi}{3})\text{V}$$

(2) 若 $i = e^{-t}$ A，则有

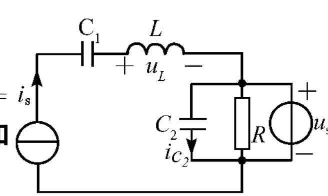
$$u_R(t) = Ri(t) = 2 \times e^{-t}\text{V}$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 1 \times (-e^{-t}) = -e^{-t}\text{V}$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{0.01}\int_0^t e^{-\xi}d\xi = 100(1 - e^{-t})\text{V}$$

○ 1－10 电路如题 1－10 题图所示，设 $u_S(t) = U_m\cos(\omega t)$，$i_S(t) = Ie^{-\alpha t}$，试求 $u_L(t)$ 和 $i_{C_2}(t)$。



题 1－10 图

解 可以看出，流过电感的电流等于电流源的电流 i_S，电容 C_2 上的电压为 u_S，故由 L，C 元件的 u，i 约束方程可得

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t} = LI\mathrm{e}^{-\alpha t} \times (-\alpha) = -LI\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{V}$$

$$i_{C_2}(t) = C_2\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t} = C_2U_m[-\sin(\omega t)]\omega$$

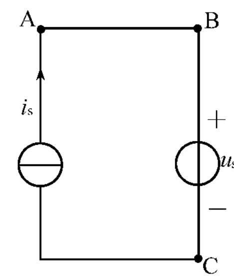
$$= -\omega C_2U_m\sin(\omega t)\mathrm{V}$$

○ 1－11　**电路如题 1－11 图所示，其中 $i_S = 2\mathrm{A}, u_S = 10\mathrm{V}$。**

(1) 求 2A 电流源和 10V 电压源的功率；

(2) 如果要求 2A 电流源的功率为零，在 AB 线段内应插入何种元件？分析此时各元件的功率；

(3) 如果要求 10V 电压源的功率为零，则应在 BC 间并联何种元件？分析此时各元件的功率。



题 1－11 图

解　(1) **电流源发出的功率**

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

电压源吸收的功率

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

(2) **若要 2A 电流源的功率为零，则需使其端电压为零。在 AB 间插入 $u_S{}' = 10\mathrm{V}$ 电压源，极性如题解 1－11 图(a) 所示。此时，电流源的功率为 $p = 0 \times i_S = 0\mathrm{W}$。插入的电压源发出功率 20W，原来的电压源吸收功率 20W。**

(3) **若要 10V 电压源的功率为零，则需使流过电压源的电流为零。可以采取在 BC 间并联 $i'_S = 2\mathrm{A}$ 的电流源，如题解 1－11 图(b) 所示，或并联 $R = u_S/i_S = 10/2 = 5\Omega$ 的电阻，如题解 1－11 图(c) 所示。**

题解 1－11 图(b) 中，因 $i_S = i'_S$，由 KCL 可知，流经 u_S 的电流为零。所以 u_S 的功率为零。原电流源发出功率为

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

并入电流源吸收功率为

$$p = u_Si'_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

题解 1－11 图(c) 中，流经电阻的电流为

$$i_R = \frac{u_S}{R} = \frac{10}{5} = 2\mathrm{A}$$

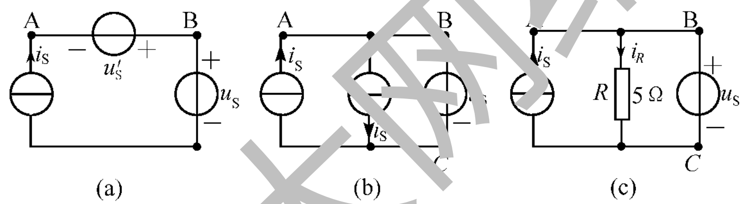
由 KCL 可知，流经 u_S 的电流为零，因此，u_S 的功率为零。此时，电流源发出功率

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

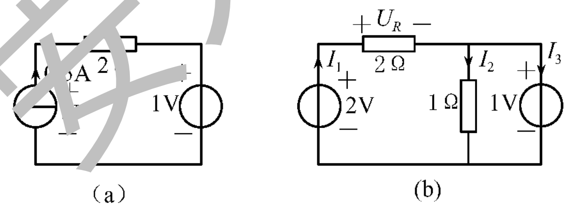
电阻消耗功率

$$p = \frac{u_S^2}{R} = \frac{10^2}{5} = 20\mathrm{W}$$

◎ 1－12　**试求题 1－12 图所示电路中每个元件的功率。**



题解 1－11 图



题 1－12 图

分析　电阻消耗的功率 $P = I^2R$，电压源吸收的功率 $P = U_S I_S$，电流源发出的功率 $P = I_S U$，根据公式求解即可。

解　(a) 图中，由于流经电阻和电压源的电流为 0.5A，所以电阻消耗功率

$$P_R = RI^2 = 2 \times 0.5^2 = 0.5\text{W}$$

电压源吸收功率

$$P_U = U_S I_S = 1 \times 0.5 = 0.5\text{W}$$

由于电阻电压

$$U_R = RI = 2 \times 0.5 = 1\text{V}$$

得电流源端电压

$$U = U_R + U_S = 1 + 1 = 2\text{V}$$

电流源发出功率

$$P_I = I_S U = 0.5 \times 2 = 1\text{W}$$

(b) 图中 2Ω 电阻的电压

$$U_R = 2 - 1 = 1\text{V}$$

所以有

$$I_1 = \frac{U_R}{2} = \frac{1}{2} = 0.5\text{A}$$

$$I_2 = \frac{1}{1} = 1\text{A}$$

由 KCL 得

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.5 - 1 = -0.5\text{A}$$

故 2V 电压源发出功率

$$P = 2 \times I_1 = 2 \times 0.5 = 1\text{W}$$

1V 电压源发出功率

$$P = 1 \times (-I_1) = 1 \times 0.5 = 0.5\text{W}$$

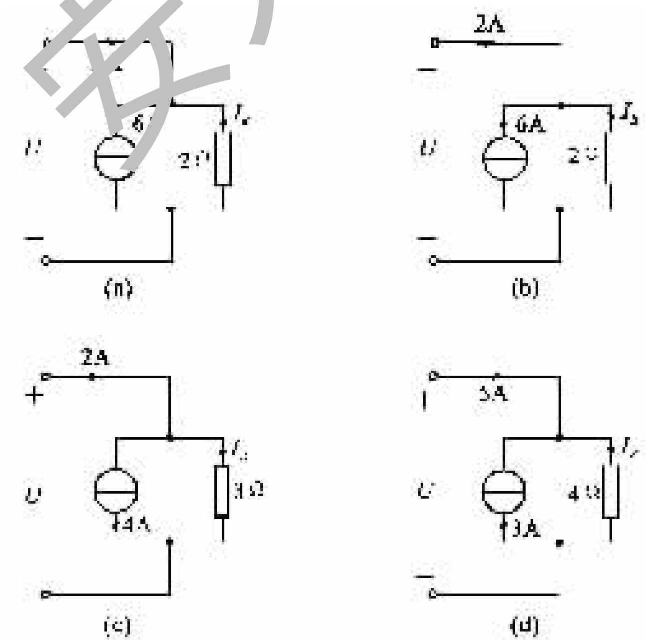
2Ω 电阻消耗功率

$$P = 2 \times I_1^2 = 2 \times 0.5^2 = 0.5\text{W}$$

1Ω 电阻消耗功率

$$P = 1 \times I_2^2 = 1 \times 1^2 = 1\text{W}$$

○ 1－13　**试求题 1－13 图中各电路的电压 U，并讨论其功率平衡。**



题 1－13 图

解　**应用 KCL 先计算电阻电流 I_R，再根据欧姆定律计算电阻电压 U_R，从而得出端电压 U，最后计算功率。**

(a) **图中**

$$I_R = 2 + 6 = 8\text{A}$$

$$U = U_R = 2 \times I_R = 2 \times 8 = 16\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P = U \times 2 = 16 \times 2 = 32\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_I = 6 \times U = 6 \times 16 = 96\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R = 2 \times I_R^2 = 2 \times 8^2 = 128\text{W}$$

显然 $P+P_I=P_R$,即输入电路的功率和电源发出的功率都被电阻消耗了。

(b) 图中

$$I_R = 6-2=4\text{A}$$

$$U=U_R=2\times I_R=2\times 4=8\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=-U\times 2=-8\times 2=-16\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_I=6\times U=6\times 8=48\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R=2\times I_R{}^2=2\times 4^2=32\text{W}$$

显然仍满足

$$P+P_I=P_R$$

实际上电流源发出的功率被电阻消耗了 32W,还有 16W 输送给了外电路。

(c) 图中

$$I_R=2-4=-2\text{A}$$

$$U=U_R=3\times I_R=3\times(-2)=-6\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=U\times 2=-6\times 2=-12\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_I=4\times 6=24\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R=3\times I_R^2=3\times(-2)^2=12\text{W}$$

显然仍满足

$$P+P_I=P_R$$

(d) 图中

$$I_R=5-3=2\text{A}$$

$$U=U_R=4\times I_R=4\times 2=8\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=U\times 5=8\times 5=40\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_I=-3\times U=-3\times 8=-24\text{W}$$

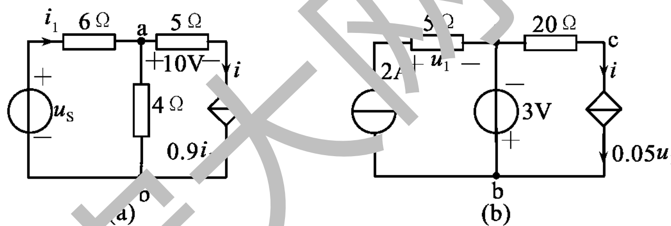
电阻消耗功率 $$P_R=4\times I_R{}^2=4\times(-2)^2=16\text{W}$$

显然仍满足 $$P+P_I=P_R$$

○ 1－14　电路如题 1－14 图所示,试求:

（1）电流 i_1 和 u_{ab}[图(a)]；

（2）电压 u_{cb}[图(b)]。



题 1－14 图

解　（1）受控电流源的电流为

$$0.9i_1 = i = \frac{10}{5} = 2\text{A}$$

所以

$$i_1 = \frac{2}{0.9} \approx 2.222\text{A}$$

$$u_{ab} = 4 \times i_{ab} = 4 \times (i_1 - i) = 4 \times (i_1 - 0.9i_1) = 4 \times 0.1i_1$$

$$= 4 \times 0.1 \times \frac{20}{9} \approx 0.889\text{V}$$

（2）因为 $u_1 = 2 \times 5 = 10\text{V}$，所以受控电流源的电流为

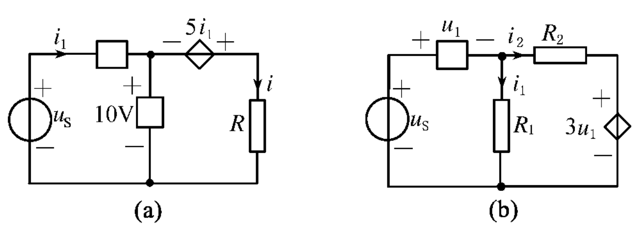
$$i = 0.05u_1 = 0.05 \times 10 = 0.5\text{A}$$

$$u_{ac} = 20 \times i = 20 \times 0.5 = 10\text{V}$$

因为　$u_{ab} = -3\text{V}$

所以　$u_{cb} = -u_{ac} + u_{ab} = -10 - 3 = -13\text{V}$

● 1－15　**对题 1－15 图示电路：**



题 1－15 图

（1）已知图(a)中，$R = 2\Omega$，$i_1 = 1\text{A}$，求电流 i；

（2）已知图(b)中，$u_S = 10\text{V}$，$i_1 = 2\text{A}$，$R_1 = 4.5\Omega$，$R_2 = 1\Omega$，求 i_2。

分析　根据图(a)右边回路的 KVL 方程即可求解 i，由图(b)左边回路 KVL 方程即可求出 u_1。

解　（1）对图(a)中右边的回路列 KVL 方程（顺时针方向绕行）有

$$Ri - 10 - 5i_1 = 0$$

所以
$$i = \frac{10 + 5i_1}{R} = \frac{10 + 5 \times 1}{2} = 7.5\text{A}$$

(2) 图(b) 中，电路 R_1 两端的电压为

$$u_{R_1} = R_1 i_1 = 4.5 \times 2 = 9\text{V}$$

对左边回路列 KVL 方程顺时针方向绕行有

$$u_{R_1} - u_S + u_1 = 0$$

所以

$$u_1 = u_S - u_{R_1} = 10 - 2 \times 4.5 = 10 - 9 = 1\text{V}$$

从图(b) 中右边回路列 KVL 方程顺时针方向绕行得

$$R_2 i_2 + 3u_1 - u_{R_1} = 0$$

所以

$$i_2 = \frac{u_{R_1} - 3u_1}{R_2} = \frac{2 \times 4.5 - 3 \times 1}{1} = 6\text{A}$$

小结 掌握回路的 KVL 方程是本题的解题关键。

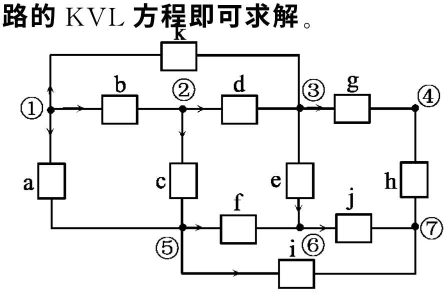
○ 1－16 (1) $i_4 = 1\text{A}, i_5 = 13\text{A}$；

(2) $i_1 = \frac{10}{3}\text{A}, i_2 = \frac{1}{3}\text{A}, i_3 = -\frac{11}{3}\text{A}, i_4 = 1\text{A}, i_5 = 13\text{A}$。

◎ 1－17 在题 1－17 图所示电路中，已知 $u_{12} = 2\text{V}, u_{23} = 3\text{V}, u_{25} = 5\text{V}, u_{37} = 3\text{V}, u_{67} = 1\text{V}$，尽可能多地确定其它各元件的电压。

分析 求解各元件的电压只需根据各个回路的 KVL 方程即可求解。

解 已知 $u_b = u_{12} = 2\text{V}, u_d = u_{23} = 3\text{V}, u_c = u_{25} = 5\text{V}, u_j = u_{67} = 1\text{V}$，选取回路列 KVL 方程。



题 1－17 图

对回路(①②⑤①) 有

$$u_a = u_{15} = u_{12} + u_{25} = 2 + 5 = 7\text{V}$$

对回路(①②③①) 有

$$u_k = u_{13} = u_{12} + u_{23} = 2 + 3 = 5\text{V}$$

对回路(②③④⑦⑥⑤②) 有

$$u_{23} + u_{37} - u_{67} - u_{56} - u_{25} = 0$$

所以

$$u_f = u_{56} = u_{23} + u_{37} - u_{67} - u_{25} = 3 + 3 - 1 - 5 = 0$$

对回路(③④⑦⑥③) 有

$$u_e = u_{36} = u_{37} - u_{67} = 3 - 1 = 2\text{V}$$

对回路(⑤⑥⑦⑤)有

$$u_i = u_{57} = u_{56} + u_{67} = 0 + 1 = 1\text{V}$$

○ 1－18 对上题所示电路,指定各支路电流的参考方向,然后列出所有结点处的KCL方程,并说明这些方程中有几个是独立的。

解 支路电流的参考方向如题1－17图所示,各结点的KCL方程分别为(以流出结点的电流为正)

①$i_a + i_b + i_k = 0$　　②$-i_b + i_c + i_d = 0$

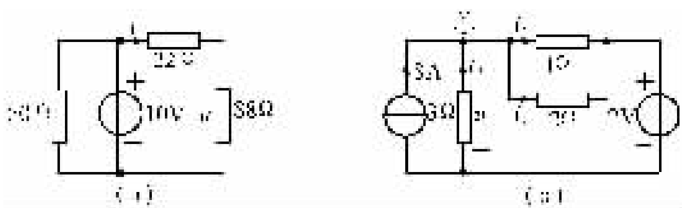
③$-i_d + i_e + i_g - i_k = 0$　　⑤$-i_a - i_c + i_f + i_i = 0$

⑥$-i_e - i_f + i_j = 0$　　⑦$-i_j - i_i - i_g = 0$

把以上6个方程相加,得到0 = 0的结果,说明这6个方程不是相互独立的,但其中任意5个方程是相互独立的。

○1－19 略

○ 1－20 利用KCL和KVL求解题1－20图示电路中的电压u。



题1－20图

解 在(a)图中,设电流i,右边网孔的KVL方程为

$$22i + 88i = 10$$

解得
$$i = \frac{10}{110} \approx 0.091\text{A}$$

所以

$$u = 88i = 88 \times \frac{10}{110} = 8\text{V}$$

在(b)图中,设电流i_1, i_2, i_3,①号结点上的KCL方程为

$$i_1 + i_2 + i_3 = 8$$

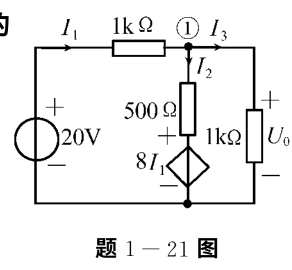
对右边大孔和其中的小孔分别按顺时针列出的KVL方程为

$$i_1 + 2 - 3i_3 = 0, \qquad i_1 - 2i_2 = 0$$

由以上三个方程解得

$$i_3 = 2\text{A}$$

所以



题1－21图

$$u = 3i_3 = 3 \times 2 = 6\text{V}$$

●1－21　**试求题 1－21 图示电路中控制量 I_1 及 U_0。**

分析　**根据图示电路列出结点的 KCL 及回路的 KVL 方程即可求解。**

解　**设电流 I_1, I_2, I_3。对结点 ① 和两个网孔列 KCL(电流流入为正,流出为负)和 KVL 方程,有**

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 1000I_1 + 500I_2 + 8I_1 = 20 \\ 8I_1 + 500I_2 - 1000I_3 = 0 \end{cases}$$

应用行列式求解以上方程组,有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1008 & 500 & 0 \\ 8 & 500 & -1000 \end{vmatrix} = -2008 \times 10^3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 20 & 500 & 0 \\ 0 & 500 & -1000 \end{vmatrix} = -30 \times 10^3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1008 & 500 & 20 \\ 8 & 500 & 0 \end{vmatrix} = -10160$$

则

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30 \times 10^3}{-2008 \times 10^3} = 14.94\text{mA}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10160}{-2008 \times 10^3} = 5.06\text{mA}$$

所以

$$U_0 = 1000 \times I_3 = 1000 \times \frac{10160}{2008 \times 10^3} = 5.06\text{V}$$

小结　**求解电路中的变量,利用 KCL、KVL 方程是最基本的方法。**

○1－22　$u_1 = 20\text{V}, u = 200\text{V}$

第二章

电阻电路的等效变换

学习要求

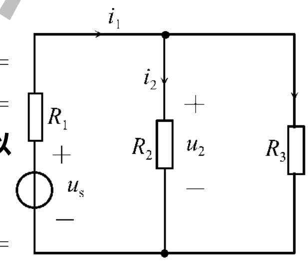
1. 理解等效变换的概念，利用等效变换分析电路。
2. 掌握电阻的等效变换：串并混联、Y↔△ 的等效变换。
3. 理解、掌握两种电源的等效变换。
4. 深刻理解单口电路输入电阻 R_{in} 的定义，并会计算。
5. 理解二端电阻电路等效电阻的定义，熟练掌握求等效电阻的方法。

知识网络图

- 电阻电路的等效变换
  - 电阻的等效变换
    - 电阻的串联
    - 电阻的并联
    - 电阻的 Y↔△
  - 电源的串联、并联等效变换
    - n 个电压源串联
    - n 个电流源并联
    - n 个电压源并联：要求电压相同
    - n 个电流源串联：要求电流相同
  - “实际电源”的等效变换
    - 实际电压源 → 实际电流源
    - 实际电流源 → 实际电压源
    - 等效互换的原则：端口 VAR 不变
  - 输入电阻
    - 输入电阻的定义
    - 输入电阻的求法
      - 电阻变换法
      - 外加电压 / 电流法

课后习题全解

○ 2－1　**电路如题 2－1 图所示，已知** $u_S = 100\mathrm{V}$，$R_1 = 2\mathrm{k}\Omega$，$R_2 = 8\mathrm{k}\Omega$。**若** (1) $R_3 = 8\mathrm{k}\Omega$；(2) $R_3 = \infty$（R_3 **处开路**）；(3) $R_3 = 0$（R_3 **处短路**）。**试求以上 3 种情况下电压** u_2 **和电流** i_2，i_3。



题 2－1 图

解　(1) R_2 **和** R_3 **为并联且相等，其等效电阻** $R = \dfrac{8}{2} = 4\mathrm{k}\Omega$，**则**

$$i_1 = \frac{u_S}{R_1 + R} = \frac{100}{2+4} = \frac{50}{3}\mathrm{mA}$$

$$i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = \frac{50}{6} = 8.333\mathrm{mA}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = 8 \times \frac{50}{6} = 66.667\mathrm{V}$$

(2) **因** $R_3 = \infty$，**则有**　$i_3 = 0$

$$i_2 = \frac{u_S}{R_1 + R_2} = \frac{100}{2+8} = 10\mathrm{mA}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = 8 \times 10 = 80\mathrm{V}$$

(3) **因** $R_3 = 0$，**则有** $i_2 = 0$，**得** $u_2 = 0$，

$$i_3 = \frac{u_S}{R_1} = \frac{100}{2} = 50\mathrm{mA}$$

○ 2－2　**电路如题 2－2 图所示，其中电阻、电压源和电流源均为已知，且为正值。求：(1) 电压** u_2 **和电流** i_2；**(2) 若电阻** R_1 **增大，对哪些元件的电压、电流有影响？影响如何？**

解　(1) **因为** R_2 **和** R_3 **为并联，且该并联部分的总电流为电流源的电流** i_S，**根据分流公式，有**

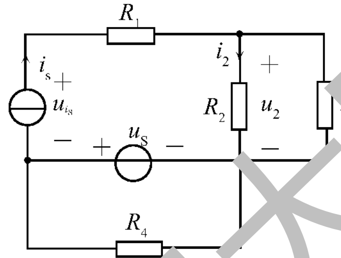
$$i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_S$$

$$u_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_S$$

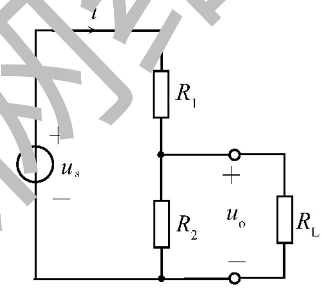
(2) **由于** R_1 **和电流源串接支路对其余电路来说可以等效为一个电流源。因此当** R_1 **增大，对** R_2，R_3，R_4 **及** u_S **的电流和端电压都没有影响。但** R_1 **增大，**R_1 **上的电压增大，将影响电流源两端的电压，即**

$$u_{i_S} = R_1 i_S + u_2 - u_S$$

显然，u_{i_S} **随** R_1 **的增大而增大。**



题 2—2 图



题 2—3 图

◎2—3　**电路如题 2—3 图所示。**(1) **求**$\dfrac{u_o}{u_S}$;(2) **当** $R_L \gg R_1 \,/\!/\, R_2 \left(=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)$ **时,**$\dfrac{u_o}{u_S}$ **可近似为**$\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$**,此时引起的相对误差为**

$$\frac{\dfrac{u_o}{u_S}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{u_o}{u_S}}\times 100\%$$

当 R_L **为**$(R_1 \,/\!/\, R_2)$ **的** 100 **倍**、10 **倍时,分别计算此相对误差。**

分析　R_2 **与** R_L **并联,然后与** R_1 **串联,则**$\dfrac{u_o}{u_S}=\dfrac{R_2 \,/\!/\, R_L}{R_2 \,/\!/\, R_L+R_1}$。

解　(1)

$$R=\frac{R_2\times R_L}{R_2+R_L}$$

$$i=\frac{u_S}{R_1+R}$$

$$u_o=Ri=\frac{u_SR}{R_1+R}$$

所以

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R}{R_1+R}=\frac{R_2R_L}{R_1R_2+R_1R_L+R_2R_L}$$

(2) **设** $R_L=K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$**,代入上述**$\dfrac{u_o}{u_S}$ **式子中,可得**

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R_2\times K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{R_1R_2+(R_1+R_2)\times K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=\frac{K}{(1+K)}\times\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

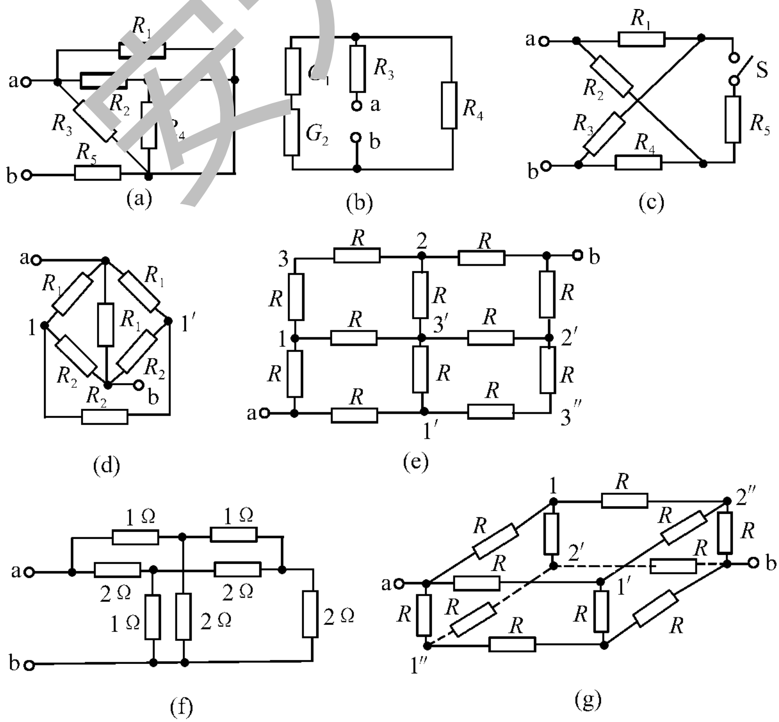
相对误差为

$$\eta=\frac{\left(\dfrac{u_o}{u_S}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)\times 100\%}{\dfrac{u_o}{u_S}}=\frac{\dfrac{K}{1+K}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{K}{1+K}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}\times 100\%$$

$$=\frac{\dfrac{K}{1+K}-1}{\dfrac{K}{1+K}}\times 100\% = -\frac{1}{K}\times 100\%$$

当 $K=100$ 时，$\eta=-1\%$；$K=10$ 时，$\eta=-10\%$。

◎ 2－4　求题 2－4 图示各电路的等效电阻 R_{ab}，其中 $R_1=R_2=1\Omega$，$R_3=R_4=2\Omega$，$R_5=4\Omega$，$G_1=G_2=1\mathrm{S}$，$R=2\Omega$。



题 2－4 图

分析　根据串联、并联，$Y\leftrightarrow\triangle$ 变换等电阻电路的等效方法即可求解。

解　图(a) 中将短路线缩为点后，可知 R_4 被短路，R_1，R_2 和 R_3 为并联，于是有

$$R_{ab}=[R_1 /\!/ R_2 /\!/ R_3]+R_5=[1 /\!/ 1 /\!/ 2]+4=4.4\Omega$$

图(b) 中 G_1 和 G_2 所在支路的电阻

$$R=\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}=2\Omega$$

所以　$$R_{ab}=[R /\!/ R_4]+R_3=[2 /\!/ 2]+2=3\Omega$$

图(c) 改画后可知，这是一个电桥电路，由于 $R_1=R_2$，$R_3=R_4$ 处于电桥平衡，故开关闭合与打开时的等效电阻相等。即

$$R_{ab}=(R_1+R_3) /\!/ (R_2+R_4)=(1+2) /\!/ (1+2)=1.5\Omega$$

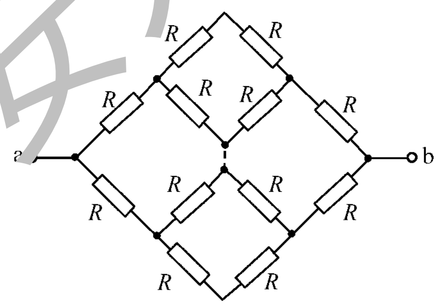
图(d)中结点1,1′同电位(电桥平衡),所以1—1′间跨接电阻R_2可以拿去(也可以用短路线替代),故

$$R_{ab} = (R_1 + R_2) \;/\!/\; (R_1 + R_2) \;/\!/\; R_1$$

$$= (1+1) \;/\!/\; (1+1) \;/\!/\; 1 = 0.5\Omega$$

图(e)为非串联电路,其具有某种对称结构,称之为平衡对称网络。

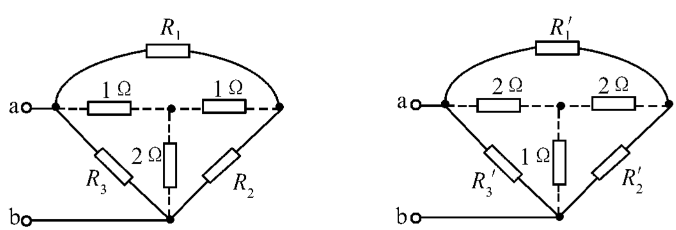
因为该电路为对称电路,因此可将电路从中心点断开(因断开点间的连线没有电流)如题解2-4图(a)所示。



题解2-4图(a)

则 $$R_{ab} = \frac{2R + (2R \;/\!/\; 2R)}{2} = \frac{3}{2}R = 3\Omega$$

图(f)中(1Ω,1Ω,2Ω)和(2Ω,2Ω,1Ω)构成两个Y形连接,分别将两个Y形转化成等值的三角形连接,如题解2-4图(b)所示。等值三角形的电阻分别为



题解2-4图(b)

$$R_1 = (1 + 1 + \frac{1 \times 1}{2}) = 2.5\Omega$$

$$R_2 = (1 + 2 + \frac{1 \times 2}{1}) = 5\Omega$$

$$R_3 = R_2 = 5\Omega$$

$$R'_1 = 2 + 2 + \frac{2 \times 2}{1} = 8\Omega$$

$$R'_2 = 1 + 2 + \frac{1 \times 2}{2} = 4\Omega$$

$$R'_3 = R'_2 = 4\Omega$$

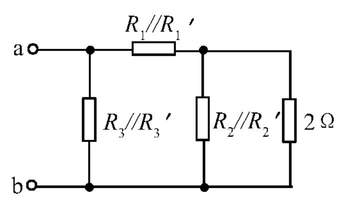
并接两个三角形，最后得题解 2—4 图(c) 所示的等效电路，所以

$$R_{ab} = [2 \mathbin{/\!/} (R_2 \mathbin{/\!/} R'_2) + (R_1 \mathbin{/\!/} R'_1)] \mathbin{/\!/} (R_3 \mathbin{/\!/} R'_3)$$
$$= [2 \mathbin{/\!/} (5 \mathbin{/\!/} 4) + (2.5 \mathbin{/\!/} 8)] \mathbin{/\!/} (5 \mathbin{/\!/} 4)$$
$$= [\frac{20}{19} + \frac{40}{21}] \mathbin{/\!/} \frac{20}{9} = 1.269\Omega$$

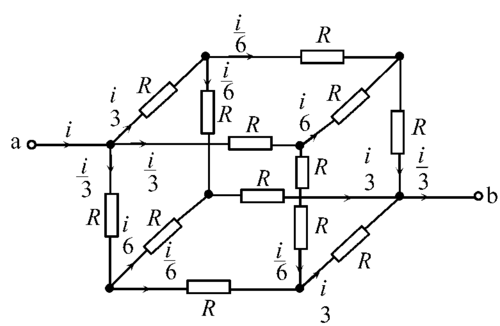
图(g) 也是一个对称电路。根据电路的结构特点，设 i 从 a 流入，则与 a 相连的 3 个电阻 R 中流过的电流均为 $\frac{i}{3}$。同理，从 1′ 点分流的支流 R 对称，故支流为 $\frac{i}{6}$，得各支路电流的分布如题解 2—4 图(d) 所示。由此得端口电压

$$u_{ab} = \frac{1}{3}i \times R + \frac{1}{6}i \times R + \frac{1}{3}i \times R = \frac{5}{6}i \times R$$

所以
$$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i} = \frac{5}{6}R = 1.667\Omega$$

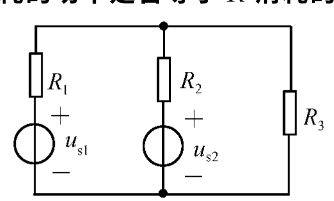


题解 2—4 图(c)

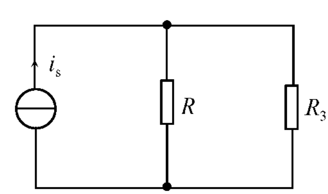


题解 2—4 图(d)

○ 2—5　在题 2—5 图(a) 电路中，$u_{s1} = 24\text{V}$，$u_{s2} = 6\text{V}$，$R_1 = 12\Omega$，$R_2 = 6\Omega$，$R_3 = 2\Omega$。图(b) 为经电源变换后的等效电路。(1) 求等效电路的 i_S 和 R；(2) 根据等效电路求 R_3 中电流和消耗功率；(3) 分别在图(a)，(b) 中求出 R_1，R_2 及 R 消耗的功率；(4) 试问 u_{s1}，u_{s2} 发出的功率是否等于 i_S 发出的功率？R_1，R_2 消耗的功率是否等于 R 消耗的功率？为什么？

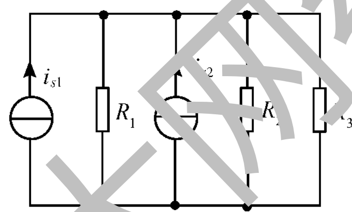


(a)



(b)

题 2—5 图



题解 2－5 图

解 (1) 利用电源的等效变换，图(a)中电阻与电压源的串联可以用电阻与电流源的并联来等效。等效后的电路如题解 2－5 图所示，其中

$$i_{s1}=\frac{u_{s1}}{R_1}=\frac{24}{12}=2\mathrm{A}$$

$$i_{s2}=\frac{u_{s2}}{R_2}=\frac{6}{6}=1\mathrm{A}$$

对题解 2－5 图电路进一步简化为题 2－5 图(b)所示电路，故

$$i_s=i_{s1}+i_{s2}=2+1=3\mathrm{A}$$

$$R=R_1 /\!/ R_2=\frac{12\times 6}{12+6}=4\Omega$$

(2) 由图(b)可解得三条并联支路的端电压

$$u=(R /\!/ R_3)\times i_S=\frac{4\times 2}{4+2}\times 3=4\mathrm{V}$$

所以 R_3 的电流和消耗的功率分别为

$$i_3=\frac{u}{R_3}=\frac{4}{2}=2\mathrm{A}$$

$$P_3=R_3 i_3^2=2\times 2^2=8\mathrm{W}$$

(3) 根据 KVL，图(a)电路中 R_1，R_2 两端的电压分别为

$$u_1=u_{s1}-u=24-4=20\mathrm{V}$$

$$u_2=u_{s2}-u=6-4=2\mathrm{V}$$

则 R_1，R_2 消耗的功率分别为

$$P_1=\frac{{u_1}^2}{R_1}=\frac{(20)^2}{12}=\frac{100}{3}=33.33\mathrm{W}$$

$$P_2=\frac{{u_2}^2}{R_2}=\frac{2^2}{6}=\frac{2}{3}\mathrm{W}$$

图(b)中 R 消耗的功率

$$P=\frac{u^2}{R}=\frac{4^2}{4}=4\mathrm{W}$$

(4) 图(a)中 u_{s1} 和 u_{s2} 发出的功率分别为

$$P_{u_{s1}} = u_{s1} \times \frac{u_1}{R_1} = 24 \times \frac{20}{12} = 40\text{W}$$

$$P_{u_{s2}} = u_{s2} \times \frac{u_2}{R_2} = 6 \times \frac{2}{6} = 2\text{W}$$

图(b) 图中 i_s 发出的功率

$$P_{i_s} = ui_s = 4 \times 3 = 12\text{W}$$

显然 $$P_{i_s} \neq P_{u_{s1}} + P_{u_{s2}}$$

由(3) 的解可知 $$P \neq P_1 + P_2$$

以上结果表明，等效电源发出的功率一般并不等于电路中所有电源发出的功率之和；等效电阻消耗的功率一般也并不等于原电路中所有电阻消耗的功率之和。这充分说明，电路的“等效”概念仅仅指对外电路等效，对内部电路（变换的电路）则不等效。

○ 2－6 对题 2－6 图所示电桥电路，应用 Y－三角形等效变换求：(1) 对角线电压 U；(2) 电压 U_{ab}。

解 把(10Ω，10Ω，5Ω) 构成的三角形等效变换为 Y 形，如题解 2－6 图所示。由于两条并联支路的电阻相等，因此得电流

$$I_1 = I_2 = \frac{5}{2} = 2.5\text{A}$$

应用 KVL 得电压

$$U = 6 \times 2.5 - 4 \times 2.5 = 5\text{V}$$

又因输入电阻

$$R_{ab} = (4+4) /\!/ (6+2) + 2 + 24 = 30\Omega$$

所以 $$U_{ab} = 5 \times R_{ab} = 5 \times 30 = 150\text{V}$$

◎ 2－7 题 2－7 图为由桥 T 电路构成的衰减器。

(1) 试证明当 $R_2 = R_1 = R_L$ 时，$R_{ab} = R_L$，且有 $\frac{u_o}{u_{in}} = 0.5$；

(2) 试证明当 $R_2 = \frac{2R_1R_L^2}{3R_1^2 - R_L^2}$ 时，$R_{ab} = R_L$，并求此时电压比 $\frac{u_o}{u_{in}}$。

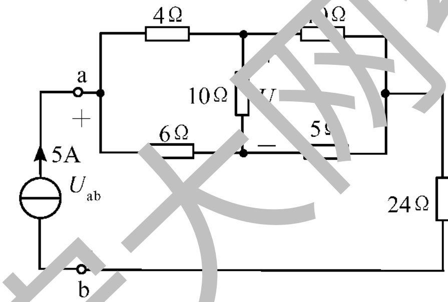
分析 平衡电桥等位点间的电阻可省去。

证明 (1) 当 $R_1 = R_2 = R_L$ 时，此电路为一平衡电桥，c、d 两点为等位点，故可将连于这两点之间的 R_1 支路断开，从而得到一串并联电路，则

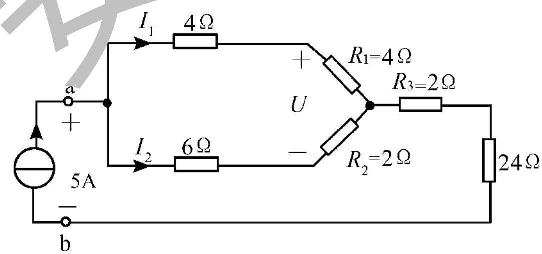
$$R_{ab} = (R_1 + R_1) /\!/ (R_2 + R_L) = R_L$$

$$u_o = \frac{1}{2}u_{in}$$

即 $$\frac{u_o}{u_{in}} = \frac{1}{2} = 0.5$$



题 2-6 图



题解 2-6 图

(2) 把由 3 个 R_1 构成的 Y 形电路等效变换为三角形电路，则原电路等效为题解 2－7 图所示，其中 $R=3R_1$。根据题意，即 $R_2=\dfrac{2R_1R_L^2}{3R_1^2-R_L^2}$ 时，不难得出电路的等效电阻 R_{ab} 为

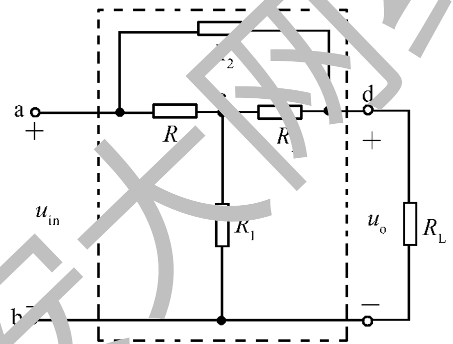
$$R_{ab}=\frac{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1-R_L}3R_1}{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1-R_L}+3R_1}=\frac{9R_1^2R_L}{9R_1^2}=R_L$$

$$u_o=\frac{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1+R_L}}{\dfrac{3R_1R_2}{3R_1+R_2}+\dfrac{3R_1R_L}{3R_1+R_L}}u_{in}=\frac{3R_1-R_L}{3R_1+R_L}u_{in}$$

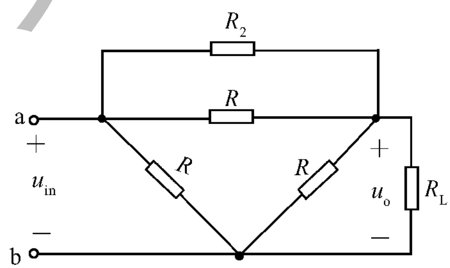
$$\frac{u_o}{u_{in}}=\frac{3R_1-R_L}{3R_1+R_L}$$

○ 2－8　在题 2－8 图(a) 中，$u_{s1}=45V$，$u_{s2}=20V$，$u_{s4}=20V$，$u_{s5}=50V$；$R_1=R_3=15\Omega$，$R_2=20\Omega$，$R_4=50\Omega$，$R_5=8\Omega$；在图(b) 中，$u_{s1}=20V$，$u_{s5}=30V$，$i_{s2}=8A$，$i_{s4}=17A$，$R_1=5\Omega$，$R_3=10\Omega$，$R_5=10\Omega$。利用电源的等效变换求图(a) 和图(b) 中电压 u_{ab}。

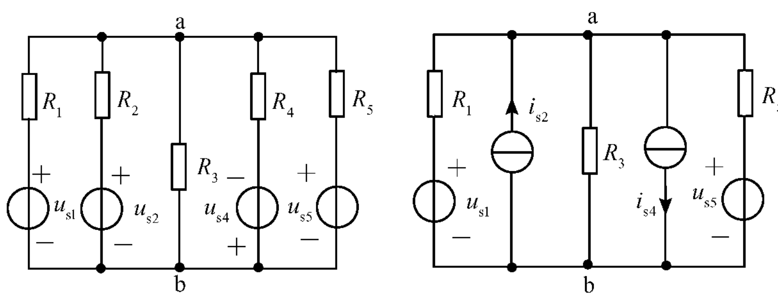
解　图(a) 利用电源的等效变换，将图(a) 中的电压源等效为电流源，得题解 2－8 所示。



题 2-7 图



题解 2-7 图



(a)　　(b)

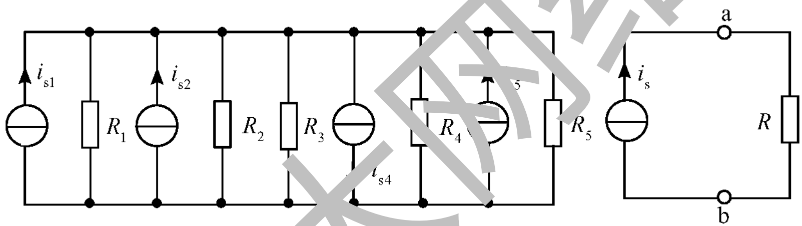
题 2－8 **图**

$$i_{s1} = \frac{u_{s1}}{R_1} = \frac{45}{15} = 3\text{A}$$

$$i_{s2} = \frac{u_{s2}}{R_2} = \frac{20}{20} = 1\text{A}$$

$$i_{s4} = \frac{u_{s4}}{R_4} = \frac{20}{50} = 0.4\text{A}$$

$$i_{s5} = \frac{u_{s5}}{R_5} = \frac{50}{8} = 6.25\text{A}$$



题解 2－8 图

把所有电源流合并得

$$i_S = i_{s1} + i_{s2} - i_{s4} + i_{s5} = 3 + 1 - 0.4 + 6.25 = 9.85\text{A}$$

把所有电阻并联，有

$$R = R_1 /\!/ R_2 /\!/ R_3 /\!/ R_4 /\!/ R_5$$

$$= 15 /\!/ 20 /\!/ 15 /\!/ 50 /\!/ 8 = \frac{600}{197}\Omega$$

所以 $$u_{ab} = i_S R = 9.85 \times \frac{600}{197} = 30\text{V}$$

图(b)**的求解方法同图**(a)**，可得** $u_{ab} = -5\text{V}$。

○2－9 $i = \frac{1}{8}\text{A}$

○2－10 **利用电源的等效变换，求题** 2－10 **图所示电路中电压比** $\frac{u_o}{u_S}$。**已知** $R_1 = R_2 = 2\Omega$，$R_3 = R_4 = 1\Omega$。

解 **因为受控电流源的电流为** $2u_3 = 2i_3R_3 = 2i_3 \times 1$，**即受控电流源的控制量可以改为** i_3，**则**

$$u_o = R_4 i_4 = R_4(i_3 + 2i_3) = 3i_3$$

即 $$i_3 = \frac{u_o}{3}$$

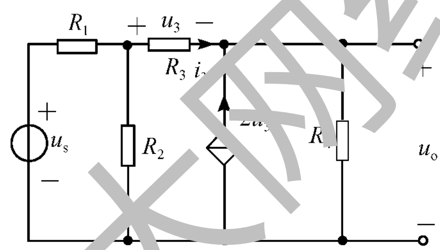
又因 $$i_3 = \frac{1}{4}u_S - \frac{u_o}{2}$$

即 $$\frac{u_o}{3} = \frac{1}{4}u_S - \frac{u_o}{2}$$

所以

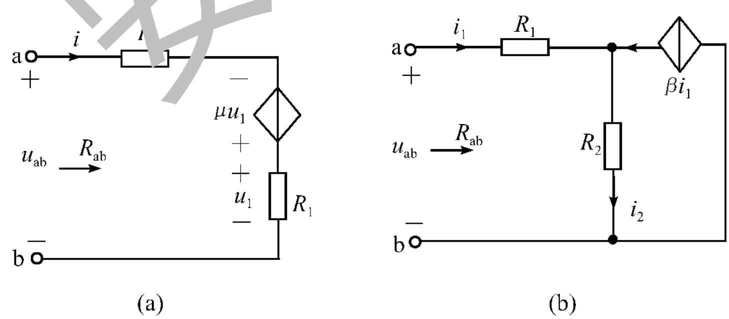
$$\frac{u_o}{u_S} = 0.3$$

○2－11 $u_{10} = 0.75u_s$



题 2－10 图

●2－12 试求题 2－12 图(a) 和(b) 的输入电阻 R_{ab}。



题 2－12 图

分析 输入电阻 $R_{in}=\dfrac{u}{i}$，u、i 分别为端口电压和端口电流，由公式求解即可。

解 (1) 在图(a) 中，设端口电流 i 的参考方向如图所示，因 $u_1=R_1 i$，根据 KVL，有

$$u_{ab}=R_2 i-\mu u_1+R_1 i=R_2 i-\mu(R_1 i)+R_1 i=(R_1+R_2-\mu R_1)i$$

故得 a，b 端的输入电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i}=R_1+R_2-\mu R_1$$

(2) 在图(b) 中，设电阻 R_2 中的电流 i_2 的参考方向如图所示，由 KVL 和 KCL 可得电压

$$u_{ab}=R_1 i_1+R_2 i_2=R_1 i_1+R_2(i_1+\beta i_1)$$

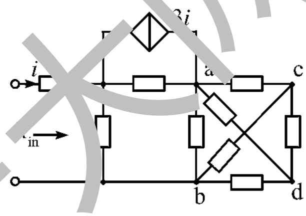
所以 a，b 端的输入电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i_1}=R_1+R_2(1+\beta)$$

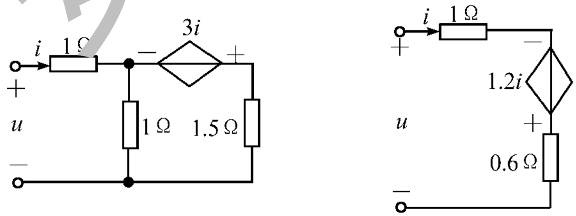
小结 若求解纯电阻电路的输入电阻可利用等效变换求解。电路中若出现有受控源，则常用 $R_{in}=\dfrac{u_{端口}}{i_{端口}}$ 求解。

○2－13　$R_{in}=\dfrac{R_1R_3}{(1-\mu)R_3+R_1}$

● 2－14　**题 2－14 图所示电路中全部电阻均为 1Ω，求输入电阻 R_{in}。**



题 2－14 **图**



(a)　　　　(b)

题解 2－14 **图**

分析　**对电阻电路进行等效变换，即可容易求解。**

解　a，b **端右边的电阻电路是一平衡电桥，故可拿去** c，d **间连接的电阻，然后利用电阻的串、并联对电路进行简化并进行受控源的等效变换，得题解** 2－14 **图**(a) **所示电路，再进行简化得题解** 2－14 **图**(b) **所示电路，图解** 2－14 **图**(b) **电路的** KVL **方程为**

$$u=1.6i-1.2i=0.4i$$

$$R_{in}=\frac{u}{i}=0.4\Omega$$

小结　**平衡电桥是一种特殊的电路，**c、d **间连接的电阻可拿去，特殊的电路用特殊的求解方式。**

第三章

电阻电路的一般分析

学习要求

1. 要求会用手写法列出电路方程。
2. 了解图的基本概念，掌握独立结点、独立回路的数目及选取，KCL 和 KVL 的独立方程数。
3. 掌握支路电流法、回路电流法、结点电压法。

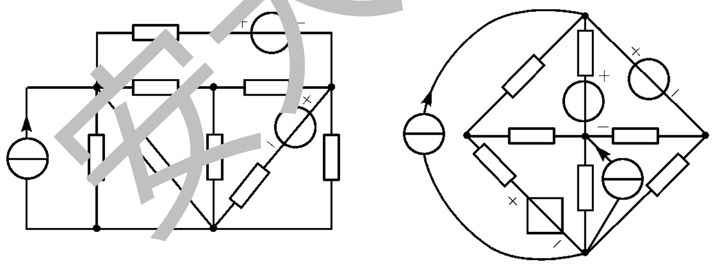
线性电阻电路方程建立的方法及电压、电流的求解，是全书的重点内容之一，是考试考研的必考内容。

知识网络图

- 电阻电路的一般分析
  - 基本概念
    - 结点
    - 支路
    - 回路
    - 电路的图
    - 树
  - 电路方程
    - KCL 独立方程
    - KVL 独立方程
  - 电路分析方法
    - 支路电流法
    - 网孔电流法
    - 回路电流法
    - 结点电压法

课后习题全解

◯ 3－1 在以下两种情况下，画出题 3－1 图所示电路的图，并说明其结点数和支路数：(1) 每个元件作为一条支路处理；(2) 电压源(独立或受控) 和电阻的串联组合，电流源和电阻的并联组合作为一条支路处理。



(a) (b)

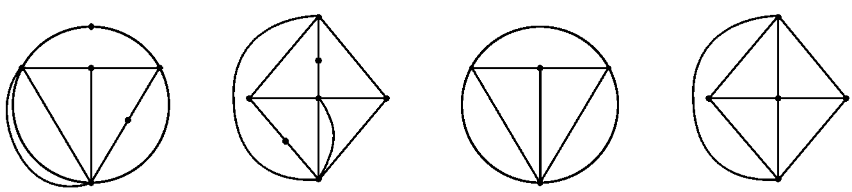
题 3－1 图

解 (1) 题 3－1 图(a) 和题 3－1 图(b) 电路的拓扑图分别如题解 3－1 图(a) 和题解 3－1 图(b) 所示。

(2) 题 3－1 图(a) 和题 3－1 图(b) 电路的拓扑图分别如题解 3－1 图(c) 和题解 3－1 图(d) 所示。

题解 3－1 图(a) 中结点数 $n = 6$，支路数 $b = 11$；题解 3－1 图(b) 中结点数 $n = 7$，支路数 $b = 12$。

题解 3－1 图(c) 中结点数 $n = 4$，支路数 $b = 8$；题解 3－1 图(d) 中结点数 $n = 5$，支路数 $b = 9$。



(a) (b) (c) (d)

题解 3－1 图

◎ 3－2 指出题 3－1 中两种情况下，KCL、KVL 独立方程各为多少？

分析 独立的 KCL 方程个数为 $n-1$，独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1$，根据公式求解即可。

解 电路题 3－1 图(a) 对应题解 3－1 图(a) 和题解 3－1 图(c) 两种情况。

题解 3－1 图(a) 中，独立的 KCL 方程个数为 $n-1=6-1=5$

独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1=11-6+1=6$

题解 3—1 图(c) 中,独立的 KCL 方程个数为 $n-1=4-1=3$

独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1=8-4+1=5$

题 3—1 图(b) 对应题解 3—1 图(b) 和题解 3—1 图(d) 两种情况。

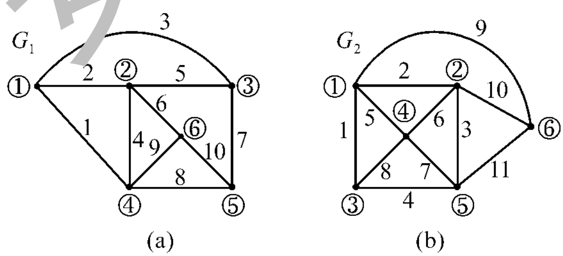
题解 3—1 图(b) 中,独立的 KCL 方程个数为 $n-1=7-1=6$

独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1=12-7+1=6$

题解 3—1 图(d) 中,独立的 KCL 方程个数为 $n-1=5-1=4$

独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1=9-5+1=5$

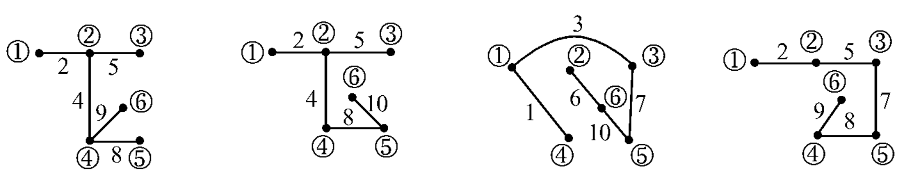
◎3—3　对题 3—3 图(a) 和题 3—3 图(b) 所示 G_1 和 G_2,各画出 4 个不同的树,树支数各为多少?



题 3—3 图

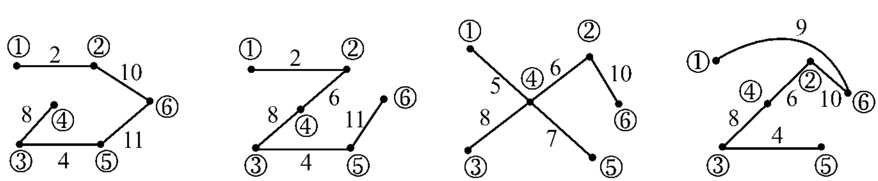
分析　遍后历所有顶点且支路数最少即构成树。

解　题 3—3 图(a) 的 4 个不同的树如题解 3—3 图(a) 所示。



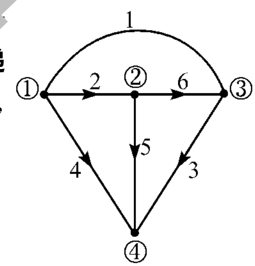
题解 3—3 图(a)

题 3—3 图(b) 的 4 个不同的树如题解 3—3 图(b) 所示。



题解 3—3 图(b)

○ 3—4 题3—4图所示桥形电路共可画出16个不同的树,试一一列出(由于结点数为4,故树支数为3,可按支路号递增的方法列出所有可能的组合,如123,124,…126,134,135…等,从中选出树)。



题3—4图

解 16个不同的树的支路组合为

(123),(124),(125),(135),(136),(145),(146),(156)

(234),(235),(236),(246),(256),(345),(346),(456)

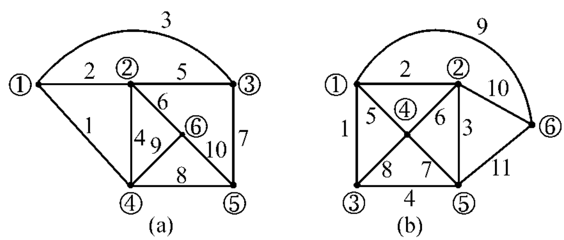
○ 3—5 对题3—3图所示的G_1和G_2,任选一树并确定其基本回路组,同时指出独立回路数和网孔数各为多少?

解 如题3—3图所示。独立回路数 = 网孔数 = 连支数。

对题3—3图(a)以如题解3—5(a)图所选树(2,5,7,8,9)为例,其基本回路组即单连支回路组为(2,3,5),(8,9,10),(5,6,7,8,9),(1,2,5,7,8),(4,5,7,8)(划线数字为连支)。

对题3—3图(b)以如题解3—5图(b)所选树(4,6,8,9,10)为例,其基本回路组即单连支回路组为

(2,9,10),(3,4,6,8),(4,6,8,10,11),(4,7,8),(1,6,8,9,10),(5,6,9,10)。



题解3—5图

○ 3—6 对题3—6图所示非平面图,设:(1)选择支路(1,2,3,4)为树;(2)选择支路(5,6,7,8)为树。问独立回路各有多少?求其基本回路组。

解 $n=5,b=10$

独立回路数 $l=b-n+1=10-5+1=6$

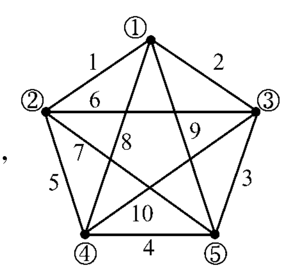
(1)以(1,2,3,4)为树,对应的基本回路组为

(1,2,3,7),(1,2,3,4,5),(1,2,6),(2,3,9),(3,4,10),

(2,3,4,8)。

(2)以(5,6,7,8)为树,对应的基本回路组为

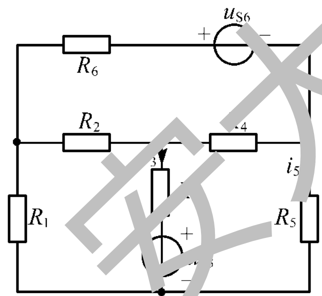
(1,5,8),(3,6,7),(4,5,7),(2,5,6,8),(5,7,8,9),(5,6,10)。



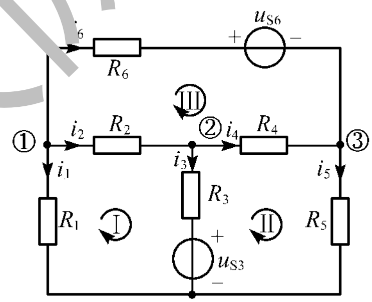
题3—6图

○ 3－7　**题 3－7 图所示电路中** $R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = R_5 = 8\Omega, R_6 = 2\Omega,$ $u_{S3} = 20\text{V}, u_{S6} = 40\text{V}$，**用支路电流法求解电流** i_5。

解　**各支路电流的参考方向如题解 3－7 图所示。**



题 3－7 图



题解 3－7 图

列支路电流方程

结点 ①　　$i_1 + i_2 + i_6 = 0$

结点 ②　　$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$

结点 ③　　$-i_4 + i_5 - i_6 = 0$

回路 Ⅰ　　$i_2R_2 + i_3R_3 - i_1R_1 = -u_{S3}$

回路 Ⅱ　　$i_4R_4 + i_5R_5 - i_3R_3 = u_{S3}$

回路 Ⅲ　　$-i_2R_2 - i_4R_4 + i_6R_6 = -u_{S6}$

代入数据，整理得

$$\begin{cases} -10i_1 + 10i_2 + 4i_3 = -20 \\ -4i_3 + 8i_4 + 8i_5 = 20 \\ -10i_2 - 8i_4 + 2i_6 = -40 \end{cases}$$

联立求解以上方程组，得　　$i_5 = -0.956\text{A}$

○ 3－8　**用网孔电流法求解题 3－7 图中电流** i_5。

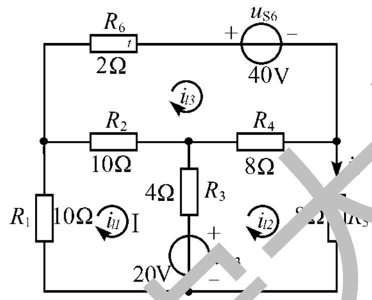
解　**设网孔电流为** i_{l1}, i_{l2}, i_{l3}，**绕行方向如题解 3－8 图所示，列网孔电流方程为**

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)i_{l1} - R_3i_{l2} - R_2i_{l3} = -u_{S3} \\ -R_3i_{l1} + (R_3 + R_4 + R_5)i_{l2} - R_4i_{l3} = u_{S3} \\ -R_2i_{l1} - R_4i_{l2} + (R_2 + R_4 + R_6)i_{l3} = -u_{S6} \end{cases}$$

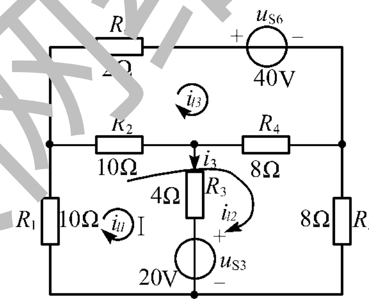
代入数据整理，得

$$\begin{cases} 24i_{l1} - 4i_{l2} - 10i_{l3} = -20 \\ -4i_{l1} + 20i_{l2} - 8i_{l3} = 20 \\ -10i_{l1} - 8i_{l2} + 20i_{l3} = -40 \end{cases}$$

解方程，得　　$i_{l2} = i_5 = -0.956\text{A}$



题解 3－8 图



题解 3－9 图

○ 3－9 **用回路电流法求解题 3－7 图中电流 i_3。**

解 取回路电流如题解 3－9 图所示，仅让 i_{l1} 流经 i_3 所在支路，那么 $i_3 = i_{l1}$。

列回路电流方程

$$\begin{cases}(R_1+R_2+R_3)i_{l1}+(R_1+R_2)i_{l2}-R_2 i_{l3}=-u_{S3}\\(R_1+R_2)i_{l1}+(R_1+R_2+R_4+R_5)i_{l2}-(R_2+R_4)i_{l3}=0\\-R_2 i_{l1}-(R_2+R_4)i_{l2}+(R_2+R_4+R_6)i_{l3}=-u_{S6}\end{cases}$$

代入数据整理，得

$$\begin{cases}24i_{l1}+20i_{l2}-10i_{l3}=-20\\20i_{l1}+36i_{l2}-18i_{l3}=0\\-10i_{l1}-18i_{l2}+20i_{l3}=-40\end{cases}$$

求解方程得 $i_{l1}=-1.552\text{A}$

所以 $i_3=i_{l1}=-1.552\text{A}$

◎3－10 **用回路电流法求解题 3－10 图中 5Ω 电阻中的电流 i。**

分析 根据回路电流法的求解准则求解即可。

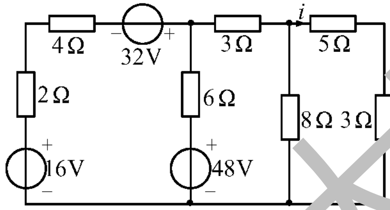
解 回路电流的参考方向如题解 3－10 图所示，$i=i_{l3}$。

列回路电流方程
$$\begin{cases}(2+4+6)i_{l1}-6i_{l2}=32-48+16\\-6i_{l1}+(6+3+8)i_{l2}-8i_{l3}=48\\-8i_{l2}+(8+5+3)i_{l3}=0\end{cases}$$

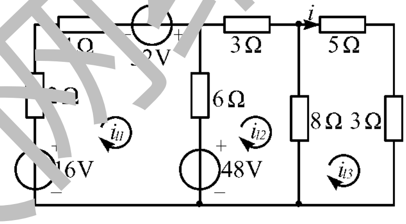
整理得
$$\begin{cases}12i_{l1}-6i_{l2}=0\\-6i_{l1}+17i_{l2}-8i_{l3}=48\\-8i_{l2}+16i_{l3}=0\end{cases}$$

求解方程组，得 $i_{l3}=2.4\text{A}$

所以 $i=i_{l3}=2.4\text{A}$



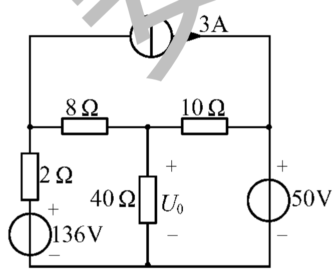
题 3－10 图



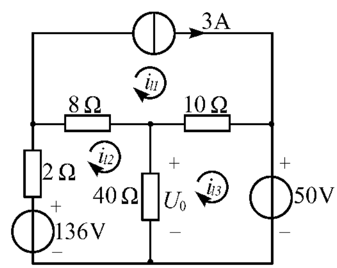
题解 3－10 图

○ 3－11　**用回路电流法求解题 3－11 图所示电路中电压 U_0。**

解　**设回路电流的参考方向如题解 3－11 图所示**，$U_0 = 40(i_{l2} - i_{l3})$。



题 3－11 图



题解 3－11 图

列回路电流方程

$$\begin{cases} i_{l1} = 3A \\ -8i_{l1} + (2+8+40)i_{l2} - 40i_{l3} = 136 \\ -10i_{l1} - 40i_{l2} + (40+10)i_{l3} = -50 \end{cases}$$

整理得

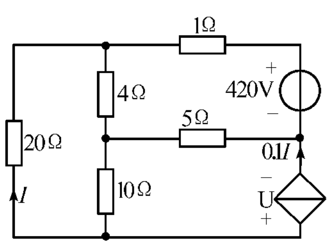
$$\begin{cases} 50i_{l2} - 40i_{l3} = 160 \\ -40i_{l2} + 50i_{l3} = -20 \end{cases}$$

求解方程，得

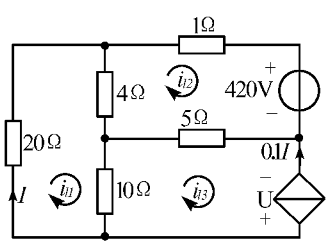
$$\begin{cases} i_{l2} = 8A \\ i_{l3} = 6A \end{cases}$$

所以　$U_0 = 40 \times (8-6) = 80V$

○ 3－12　**用回路电流法求解题 3－12 图所示电路中电压 U。**



题 3－12 图



题解 3－12 图

解　设回路电流的参考方向如题解 3－12 图所示。

列回路电流方程

$$\begin{cases}(20+4+10)i_{l1}-4i_{l2}-10i_{l3}=0\\-4i_{l1}+(4+1+5)i_{l2}-5i_{l3}=-420\\i_{l3}=-0.1I\end{cases}$$

补充方程：　$I=i_{l1}$

整理得

$$\begin{cases}35i_{l1}-4i_{l2}=0\\-3.5i_{l1}+10i_{l2}=-420\end{cases}$$

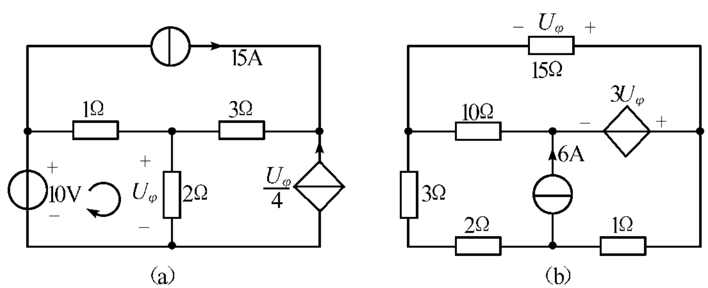
解得

$$\begin{cases}i_{l1}=-5\text{A}\\i_{l2}=-43.75\text{A}\\i_{l3}=-0.1i_{l1}=+0.5\text{A}\end{cases}$$

选最外层回路，列 KVL 方程　$20i_{l1}+1\times i_{l2}+420-U=0$

得　$U=276.25\text{V}$

○ 3－13　**用回路电流法求解题 3－13 图(a) 和题 3－13 图(b) 两电路中每个元件的功率，并作功率平衡检验。**



题 3－13 图

解　(a) **回路电流的参考方向如题解 3－13 图(a) 所示。**

列回路电流方程

$$\begin{cases}i_{l1}=15\\-1\times i_{l1}+(1+2)i_{l2}+2i_{l3}=10\\i_{l3}=\dfrac{U_\varphi}{4}\end{cases}$$

补充方程：　$U_\varphi=2\times(i_{l2}+i_{l3})$

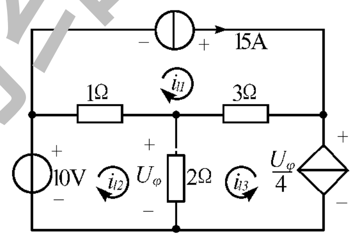
整理，得

$$\begin{cases}3i_{l2}+2i_{l3}=25\\i_{l2}=i_{l3}\end{cases}$$

求解，得　$i_{l2}=i_{l3}=5\text{A}$

各元件的功率分别为

$P_{10\text{V}}=-10i_{l2}=-50\text{W}$，**发出功率**



题解 3－13 图(a)

$P_{15A}=-15\times[3\times(i_{l1}+i_{l3})+1\times(i_{l1}-i_{l2})]$

$=-15\times[3\times20+1\times10]$

$=-1050\text{W}$,发出功率

$P_{\frac{U_\varphi}{4}}=-\frac{1}{4}U_\varphi\times[3\times(i_{l1}+i_{l3})+U_\varphi]=-5\times[3\times20+20]=-400\text{W}$,发出功率

$P_{1\Omega}=1\times(i_{l1}-i_{l2})^2=100\text{W}$

$P_{2\Omega}=\frac{U_\varphi^2}{2}=\frac{(4\times5)^2}{2}=200\text{W}$

$P_{3\Omega}=3\times(i_{l1}+i_{l3})^2=3\times20^2=1200\text{W}$

$P_{发}=50+1050+400=1500\text{W}$

$P_{吸}=100+200+1200=1500\text{W}$

满足 $P_{发}=P_{吸}$,功率守恒。

(b) 回路电流的参考方向如图题解 3－13(b) 图所示。

列回路电流方程

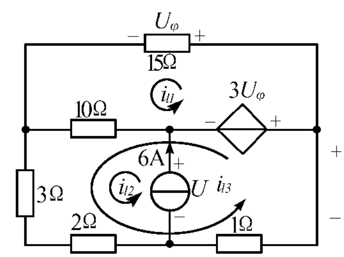
$$\begin{cases}(10+15)i_{l1}-10i_{l2}-10i_{l3}=3U_\varphi\\ i_{l2}=6\text{A}\\ -10i_{l1}+(10+3+2)i_{l2}+(10+3+2+1)i_{l3}=-3U_\varphi\end{cases}$$

补充方程: $U_\varphi=15i_{l1}$

整理,得

$$\begin{cases}-20i_{l1}-10i_{l3}=60\\ 35i_{l1}+16i_{l3}=-90\end{cases} \text{即} \begin{cases}2i_{l1}+i_{l3}=-6\\ 35i_{l1}+16i_{l3}=-90\end{cases}$$

解方程,得 $\begin{cases}i_{l1}=2\text{A}\\ i_{l2}=6\text{A}\\ i_{l3}=-10\text{A}\end{cases}$



题解 3－13 图(b)

各元件的功率分别为

$P_{15\Omega}=15\times i_{l1}^2=60\text{W}$

$P_{10\Omega}=10\times(i_{l1}-i_{l3}-i_{l2})^2=360\text{W}$

$P_{3\Omega}=3\times(i_{l2}+i_{l3})^2=48\text{W}$

$P_{2\Omega}=2\times(i_{l2}+i_{l3})^2=32\text{W}$

$P_{1\Omega}=1\times i_{l3}^2=100\text{W}$

$P_{6A}=-6U=-6\times(-3U_\varphi-1\times i_{l3})=480\text{W}$

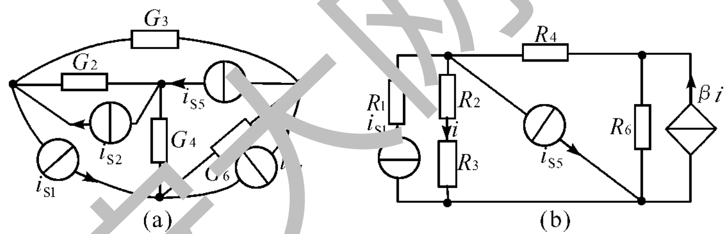
$P_{3U_\varphi}=3U_\varphi\times(i_{l3}-i_{l1})=3\times15\times2\times(-10-2)=-1080\text{W}$发出功率

$P_{吸}=60+360+48+32+100+480=1080\text{W}$

$P_{发}=1080\text{W}$

$P_{吸} = P_{发}$，功率守恒。

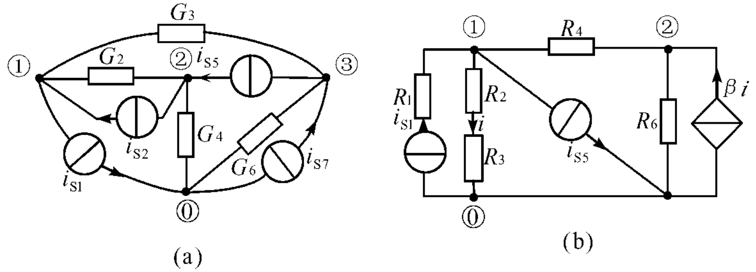
◎ 3－14　**列出题 3－14 图中电路的结点电压方程。**



题 3－14 图

分析　选取参照结点，列写结点电压方程求解即可。

解　(a) 结点的选取和编号如题解 3－14 图(a) 所示。



题解 3－14 图

设结点电压为 u_{n1}，u_{n2}，u_{n3}。

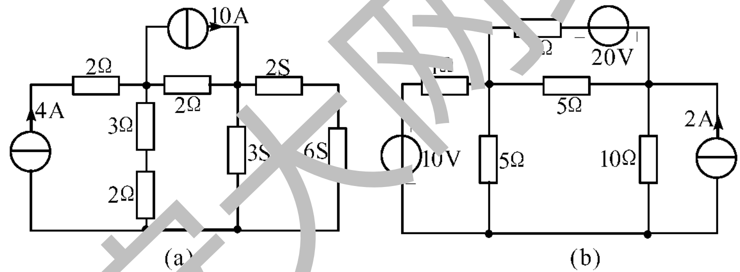
列结点电压方程
$$
\begin{cases}
(G_2 + G_3)u_{n1} - G_2 u_{n2} - G_3 u_{n3} = i_{S2} - i_{S1} \\
-G_2 u_{n1} + (G_2 + G_4)u_{n2} = i_{S5} - i_{S2} \\
-G_3 u_{n1} + (G_3 + G_6)u_{n3} = i_{S7} - i_{S5}
\end{cases}
$$

(b) 所选结点和编号如题解 3－14 图(b) 所示。

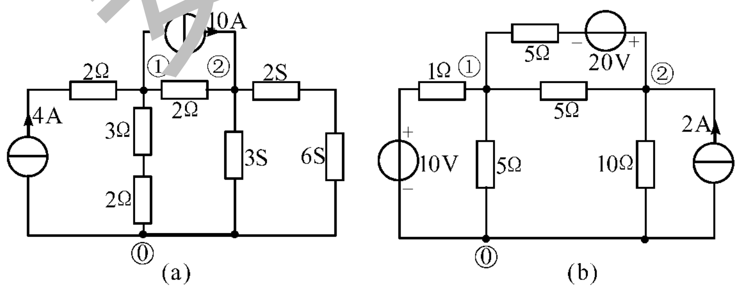
列结点电压方程
$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{R_2 + R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1} - \dfrac{1}{R_4}u_{n2} = i_{S1} - i_{S5} \\
-\dfrac{1}{R_4}u_{n1} + \left(\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_6}\right)u_{n2} = \beta i
\end{cases}
$$

补充方程：
$$
i = \frac{u_{n1}}{R_2 + R_3}
$$

○ 3－15　**列出题 3－15 图中电路的结点电压方程。**



题 3－15 **图**



题解 3－15 **图**

解　(a) **所选结点如题解** 3－15 **图**(a) **所示。**

列结点电压方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2+3}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{2}u_{n2}=4-10\\ -\dfrac{1}{2}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}}\right)u_{n2}=10\end{cases}$$

整理方程组，得

$$\begin{cases}0.7u_{n1}-0.5u_{n2}=-6\\ -0.5u_{n1}+5u_{n2}=10\end{cases}$$

(b) **所选结点如题解** 3－15 **图**(b) **所示。**

列结点电压方程

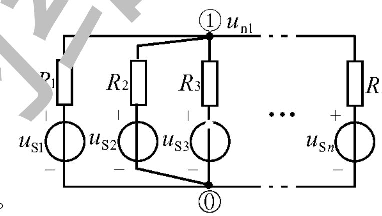
$$\begin{cases}(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n1}-(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n2}=\dfrac{10}{1}-\dfrac{20}{5}\\ -(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n1}+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10})u_{n2}=\dfrac{20}{5}+2\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}1.6u_{n1}-0.4u_{n2}=6\\ -0.4u_{n1}+0.5u_{n2}=6\end{cases}$$

◎ 3－16　**题** 3－16 **图所示为由电压源和电阻组成的一个独立结点的电路，用结点电压法证明其结点电压为**

$$u_{n1} = \frac{\sum G_k u_{Sk}}{\sum G_k}$$



题 3－16 图

此式又称弥尔曼定理。

分析 列写结点电压方程，求出 u_{n1} 即可证明之。

证明 因为只有一个独立结点，所以不存在互导。

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$= G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

$$i_{S11} = \frac{u_{S1}}{R_1} + \frac{u_{S2}}{R_2} + \cdots + \frac{u_{Sn}}{R_n} = u_{S1}G_1 + u_{S2}G_2 + \cdots + u_{Sn}G_n$$

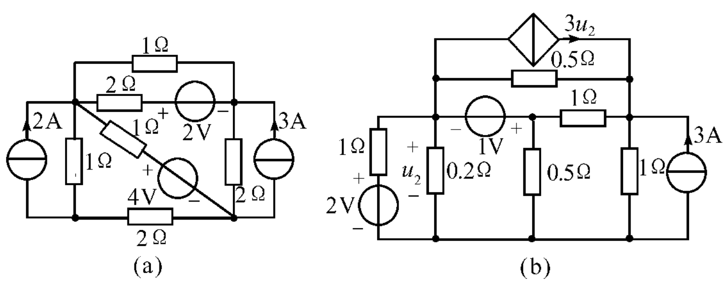
$$= \sum_{k=1}^{n} G_k u_{Sk}$$

结点电压方程为 $G_{11}u_{n1} = i_{S11}$

即 $\sum_{k=1}^{n} G_k u_{n1} = \sum_{k=1}^{n} G_k u_{Sk}$

所以 $$u_{n1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k u_{Sk}}{\sum_{k=1}^{n} G_k}$$

○ 3－17 列出题 3－17 图电路的结点电压方程。

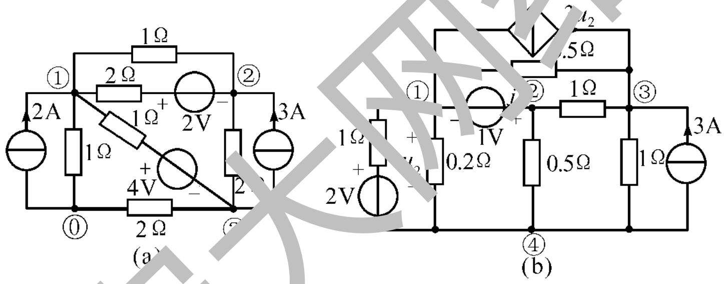


(a) (b)

题 3－17 图

解 (a) 结点编号如题解 3－17 图(a) 所示，列结点电压方程。

$$\begin{cases} (1+1+1+\frac{1}{2})u_{n1} - (1+\frac{1}{2})u_{n2} - u_{n3} = 2 + \frac{4}{1} + \frac{2}{2} \\ -(1+\frac{1}{2})u_{n1} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_{n2} - \frac{1}{2}u_{n3} = 3 - \frac{2}{2} \\ -u_{n1} - \frac{1}{2}u_{n2} + (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)u_{n3} = -\frac{4}{1} - 3 \end{cases}$$



题解 3－17 图

整理，得
$$\begin{cases}3.5u_{n1}-1.5u_{n2}-u_{n3}=7\\-1.5u_{n1}+2u_{n2}-0.5u_{n3}=2\\-u_{n1}-0.5u_{n2}+2u_{n3}=-7\end{cases}$$

(b) 结点编号如题解 3－17 图(b) 所示。

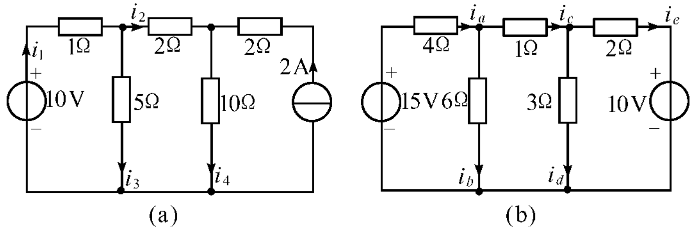
取结点 ④ 为参考点，将无伴电压源 1V 看做是电流为 i 的电流源。列结点电压方程

$$\begin{cases}(1+\dfrac{1}{0.2}+\dfrac{1}{0.5})u_{n1}-\dfrac{1}{0.5}u_{n3}=\dfrac{2}{1}-3u_2-i\\(1+\dfrac{1}{0.5})u_{n2}-u_{n3}=i\\-\dfrac{1}{0.5}u_{n1}-u_{n2}+(1+1+\dfrac{1}{0.5})u_{n3}=3+3u_2\end{cases}$$

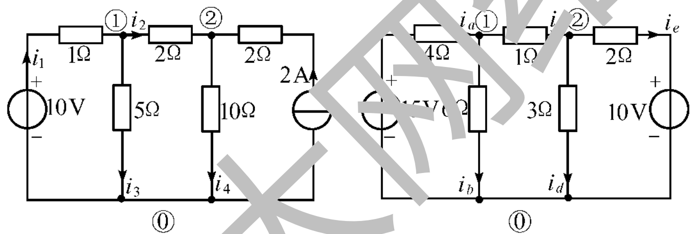
补充方程：
$$\begin{cases}u_2=u_{n1}\\u_{n2}-u_{n1}=1\end{cases}$$

整理方程组，得
$$\begin{cases}11u_{n1}-2u_{n3}=2-i\\3u_{n2}-u_{n3}=i\\-5u_{n1}-u_{n2}+4u_{n3}=3\\u_{n2}-u_{n1}=1\end{cases}$$

◎3－18　用结点电压法求解题 3－18 图所示电路中各支路电流。



题 3－18 图



(a)　　　　(b)

题解 3－18 图

解　(a) **如题解** 3－18 **图**(a) **所示,列结点电压方程**

$$\begin{cases}(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2})u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}=\frac{10}{1}\\-\frac{1}{2}u_{n1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})u_{n2}=2\end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}1.7u_{n1}-0.5u_{n2}=10\\-0.5u_{n1}+0.6u_{n2}=2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_{n1}=9.091\text{V}\\u_{n2}=10.909\text{V}\end{cases}$$

各支路电流

$$i_1=\frac{10-u_{n1}}{1}=0.909\text{A},\quad i_2=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{2}=-0.909\text{A}$$

$$i_3=\frac{u_{n1}}{5}=1.818\text{A},\quad i_4=\frac{u_{n2}}{10}=1.091\text{A}$$

(b) **如题解** 3－18 **图**(b) **所示,列结点电压方程**

$$\begin{cases}(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+1)u_{n1}-u_{n2}=\frac{15}{4}\\-u_{n1}+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n2}=\frac{10}{2}\end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases}17u_{n1}-12u_{n2}=45\\-6u_{n1}+11u_{n2}=30\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_{n1}=7.435\text{V}\\u_{n2}=6.783\text{V}\end{cases}$$

各支路电流

$$i_a=\frac{15-u_{n1}}{4}=1.891\text{A},\quad i_b=\frac{u_{n1}}{6}=1.239\text{A}$$

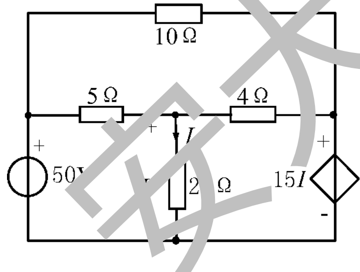
$$i_c=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{1}=0.652\text{A},\quad i_d=\frac{u_{n2}}{3}=2.261\text{A},\quad i_e=\frac{u_{n2}-10}{2}=-1.609\text{A}$$

○3－19　$I_S = 9\text{A}$，　$I_0 = -3\text{A}$。

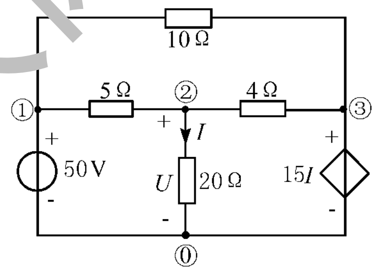
● 3－20　**用结点电压法求解题 3－20 图所示电路中电压 U。**

分析　选取参照结点，列写结点电压方程求解即可。

解　如题解 3－20 图所示，列结点电压方程



题 3－20 图



题解 3－20 图

$$\begin{cases} u_{n1} = 50 \\ -\dfrac{1}{5}u_{n1} + \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20}\right)u_{n2} - \dfrac{1}{4}u_{n3} = 0 \\ u_{n3} = 15I \end{cases}$$

补充方程：　$I = \dfrac{u_{n2}}{20}$

整理，得　$0.5u_{n2} - \dfrac{1}{4} \times 15 \times \dfrac{u_{n2}}{20} = \dfrac{50}{5}$

求得　$u_{n2} = 32\text{V}$

所以　$U = u_{n2} = 32\text{V}$

小结　结点电压方程不够的话，就要增加补充方程，补充方程一般为元件的伏安特性。

○3－21　**略**

● 3－22　**用结点电压法求解题3－22图所示电路中 u_{n1} 和 u_{n2}。你对此题有什么看法？**

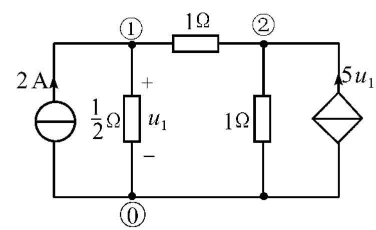
分析　列写结点电压方程求解即可。

解　如题 3－22 图所示，列结点电压方程

$$\begin{cases} (1+2)u_{n1} - u_{n2} = 2 \\ -u_{n1} + (1+1)u_{n2} = 5u_1 \end{cases}$$

补充方程：　$u_1 = u_{n1}$

整理，得
$$\begin{cases} 3u_{n1} - u_{n2} = 2 \\ -6u_{n1} + 2u_{n2} = 0 \end{cases}$$



题 3－22 图

可见该方程无解。只能说明该电路模型不切实际。

小结　方程无解，表明电路不合理。

○3－23　**略**

○3－24　**略**

第四章

电 路 定 理

学习要求

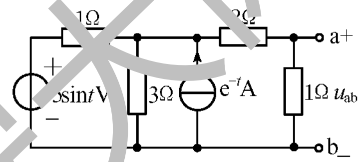
1. 掌握叠加定理、替代定理的基本内容、适用范围及条件，较熟练地应用这些定理分析电路。
2. 熟练掌握戴维宁定理、诺顿定理，熟练使用之求解电路问题。
3. 了解特勒根定理、互易定理的基本内容、适用范围及条件，会使用之求解某些类型的电路问题。
4. 逐步掌握多个定理、多种解法结合求解电路问题。

知识网络图

电路定理
- 叠加定理
- 替代定理
- 戴维宁定理和诺顿定理
- 特勒根定理
- 互易定理
- 对偶原理

课后习题全解

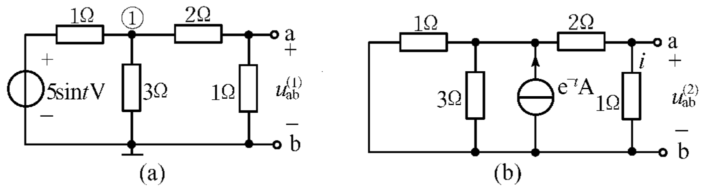
◎4－1　**应用叠加定理求题 4－1 图所示电路中电压 u_{ab}。**



题 4－1 图

分析　**先让** $5\sin t$ V **单独作用求解** $u_{ab}^{(1)}$，**再让** e^{-t} **单独作用求解** $u_{ab}^{(2)}$，$u_{ab}=u_{ab}^{(1)}+u_{ab}^{(2)}$。

解　**首先画出两个电源单独作用时的分电路如题解 4－1 图(a) 和图(b) 所示。**



题解 4－1 图

对题解 4－1 图(a) 应用结点电压法可得：

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2+1}\right)u_{n1}=\frac{5\sin t}{1}$$

解得

$$u_{n1}=\frac{5\sin t}{\frac{5}{3}}=3\sin t\,\mathrm{V}$$

$$u_{ab}^{(1)}=\frac{u_{n1}}{2+1}\times 1=\frac{1}{3}u_{n1}=\frac{1}{3}\times 3\sin t=\sin t\,\mathrm{V}$$

对题解 4－1 图(b)，应用电阻的分流公式有：

$$i=\frac{e^{-t}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2+1}+1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}e^{-t}\,\mathrm{A}$$

所以

$$u_{ab}^{(2)}=1\times i=\frac{1}{5}e^{-t}=0.2e^{-t}\,\mathrm{V}$$

故由叠加定理得

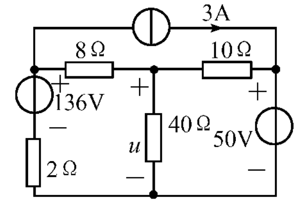
$$u_{ab}=u_{ab}^{(1)}+u_{ab}^{(2)}=\sin t+0.2e^{-t}\,\mathrm{V}$$

○ 4－2　**应用叠加定理求题 4－2 图示电路中电压 u。**

解　画出电源分别作用的分电路如题解 4 — 2 图(a) 和(b) 所示。

对题解图 4 — 2(a) 应用结点电压法有

$$\left(\frac{1}{8+2}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)u_{n1}=\frac{136}{8+2}+\frac{50}{10}$$



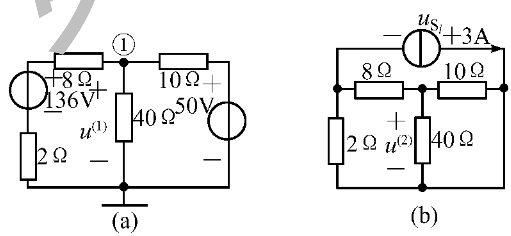
题 4 — 2 图

解得

$$u^{(1)}=u_{n1}=\frac{13.6+5}{0.1+0.025+0.1}$$

$$=\frac{18.6}{0.225}$$

$$=\frac{248}{3}=82.667\text{V}$$



题解 4 — 2 图

对题解 4 — 2 图(b)，应用电阻串并联化简方法，可求得

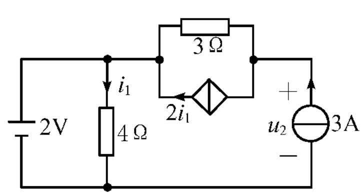
$$u_{S_i}=3\times\frac{2\times\left(8+\dfrac{10\times40}{10+40}\right)}{\left(8+\dfrac{10\times40}{10+40}\right)+2}=3\times\frac{32}{18}=\frac{16}{3}\text{V}$$

$$u^{(2)}=\frac{-u_{Si}}{2}=-\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{8}{3}\text{V}$$

所以，由叠加定理得原电路的 u 为

$$u=u^{(1)}+u^{(2)}=\frac{248}{3}-\frac{8}{3}=\frac{240}{3}=80\text{V}$$

○ 4 — 3　应用叠加定理求题 4 — 3 图所示电路中电压 u_2。



题 4 — 3 图

解　根据叠加定理，作出 2V 电压源和 3A 电流源单独作用时的分电路如题解 4 — 3 图(a) 和(b) 所示，受控源均保留在分电路中。

题解 4－3 图(a) 中 $$i_1^{(1)} = \frac{2}{4} = 0.5\text{A}$$

所以根据 KVL 有

$$u_2^{(1)} = -3\times 2i_1^{(1)} + 2 = -3\times 2\times 0.5 + 2 = -1\text{V}$$

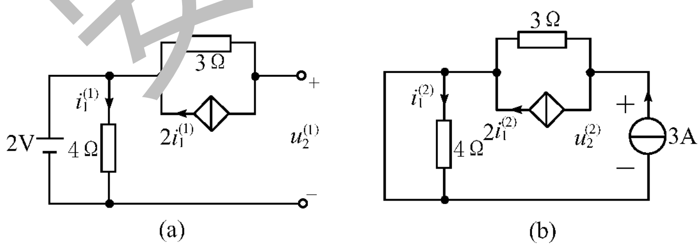
由题解 4－3 图(b)，得

$$i_1^{(2)} = 0$$

$$u_2^{(2)} = 3\times 3 = 9\text{V}$$

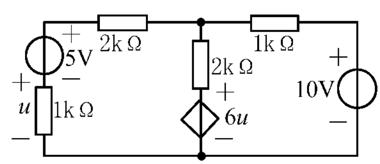
故原电路中的电压

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} = -1 + 9 = 8\text{V}$$

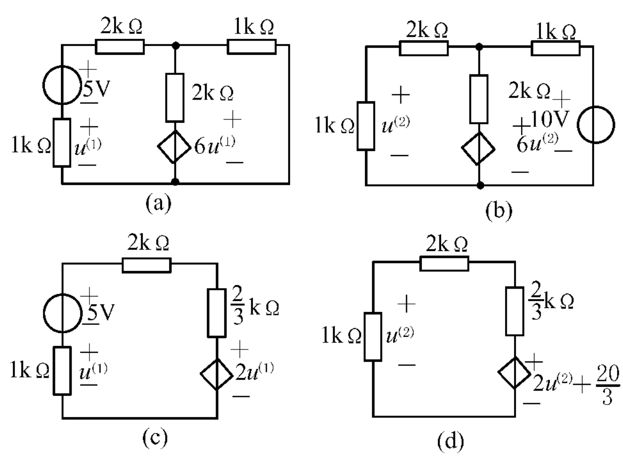


题解 4－3 图

○ 4－4　应用叠加定理求题 4－4 图所示电路中电压 u。



题 4－4 图



题解 4－4 图

解　按叠加原理，作出5V和10V电压源单独作用时的分电路如题解4—4图(a)和(b)所示，受控电压源均保留在分电路中。

应用电源等效变换把题解4—4图(a)等效为题解4—4图(c)，题解4—4图(b)等效为题解4—4图(d)。由题解4—4图(c)，得

$$u^{(1)}=\frac{2u^{(1)}-5}{1+2+\frac{2}{3}}\times 1=\frac{2u^{(1)}-5}{\frac{11}{3}}$$

从中解得

$$u^{(1)}=-3\mathrm{V}$$

由题解4—4图(d)，得

$$u^{(2)}=\frac{2u^{(2)}+\frac{20}{3}}{2+\frac{2}{3}+1}\times 1=\frac{2u^{(2)}+\frac{20}{3}}{\frac{11}{3}}$$

从中解得

$$u^{(2)}=\frac{\frac{20}{3}}{\frac{11}{3}-2}=4\mathrm{V}$$

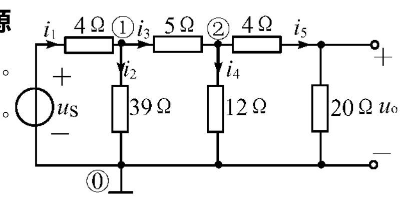
故原电路的电压

$$u=u^{(1)}+u^{(2)}=-3+4=1\mathrm{V}$$

○ 4—5　试求题4—5图所示梯形电路中各支路电流，结点电压和$\frac{u_o}{u_S}$。其中$u_S=10\mathrm{V}$。

解　由齐性定理可知，当电路中只有一个独立源时，其任意电路的响应与该独立源成正比。用齐性定理分析本题的梯形电路特别有效。现设支路电流如图所示，若给定

$$i_5=i'_5=1\mathrm{A}$$



题4—5图

则可计算出各支路电压电流分别为

$$u_o=u'_o=i'_5\times 20=20\mathrm{V}$$

$$u_{n2}=u'_{n2}=i'_5\times(4+20)=1\times 24=24\mathrm{V}$$

$$i_4=i'_4=u'_{n2}/12=24/12=2\mathrm{A}$$

$$i_3=i'_3=i'_4+i'_5=2+1=3\mathrm{A}$$

$$u_{n1}=u'_{n1}=i'_3\times 5+u'_{n2}=3\times 5+24=39\mathrm{V}$$

$$i_2=i'_2=u_{n1}/39=39/39=1\mathrm{A}$$

$$i_1=i'_1=i'_2+i'_3=1+3=4\mathrm{A}$$

$$u_S=u'_S=i'_1\times 4+u'_{n1}=4\times 4+39=55\mathrm{V}$$

即当激励 $u_S = u'_S = 55\text{V}$ 时，各电压、电流如以上计算数值，现给定 $u_S = 10\text{V}$，相当于将以上激励 u'_S 变为原来的 $\frac{10}{55}$ 倍，即 $K = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$。

故电路各支路的电流和结点电压应同时变为原来的 2/11 倍，有

$$i_1 = Ki'_1 = \frac{2}{11} \times 4 = 0.727\text{A}$$

$$i_2 = Ki'_2 = \frac{2}{11} \times 1 = \frac{2}{11}\text{A}$$

$$i_3 = Ki'_3 = \frac{2}{11} \times 3 = \frac{6}{11}\text{A}$$

$$i_4 = Ki'_4 = \frac{2}{11} \times 2 = \frac{4}{11}\text{A}$$

$$i_5 = Ki'_5 = \frac{2}{11} \times 1 = \frac{2}{11}\text{A}$$

$$u_{n1} = Ku'_{n1} = \frac{2}{11} \times 39 = \frac{78}{11}\text{V}$$

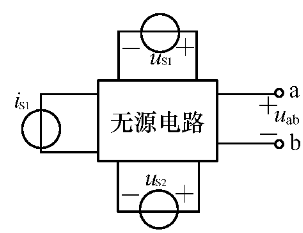
$$u_{n2} = Ku'_{n2} = \frac{2}{11} \times 24 = \frac{48}{11}\text{V}$$

$$u_o = Ku'_o = \frac{2}{11} \times 20 = \frac{40}{11}\text{V}$$

输出电压和激励的比值为

$$\frac{u_o}{u_S} = \frac{\frac{40}{11}}{10} = \frac{4}{11} = 0.364$$

◎ 4—6　题 4—6 图所示电路中，当电流源 i_{S_1} 和电压源 u_{S_1} 反方向时（u_{S_2} 不变），电压 u_{ab} 是原来的 0.5 倍；当 i_{S_1} 和 u_{S_2} 反向时（u_{S_1} 不变），电压 u_{ab} 是原来的 0.3 倍。问：仅 i_{S_1} 反向（u_{S_1}，u_{S_2} 均不变），电压 u_{ab} 应为原来的几倍？



题 4—6 图

分析　利用叠加定理求解即可。

解　根据叠加定理，设响应

$$u_{ab} = K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ①$$

式中 K_1, K_2, K_3 为未知的比例常数，将已知条件代入上式，得

$$0.5u_{ab} = -K_1 i_{S1} - K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ②$$

$$0.3u_{ab} = -K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} - K_3 u_{S2} \qquad ③$$

$$xu_{ab} = -K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ④$$

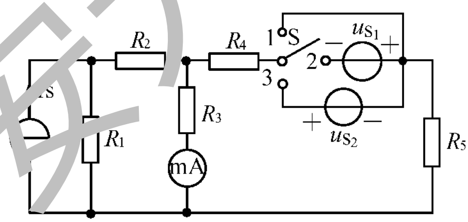
将 ①，②，③ 式相加，得

$$1.8u_{ab}=-K_1 i_S+K_2 u_{S1}+K_3 u_{S2} \qquad ⑤$$

显然⑤式等号右边的式子恰等于④式等号右边的式子。因此得所求倍数

$$x=1.8$$

◎ 4－7　题4－7图示电路中 $u_{S1}=10V$，$u_{S2}=15V$，当开关S在位置1时，毫安表的读数为 $I'=40mA$；当开关S合向位置2时，毫安表的读数为 $I''=-60mA$。如果把开关S合向位置3，毫安表的读数为多少？



题4－7图

分析　当开关S在位置1时，电路中仅有电流源作用；当S在位置2时，I_S 与 u_{S1} 同时作用；当S在位置3时，I_S 与 u_{S2} 同时作用。利用叠加定理求解即可。

解　设流过电流表的电流为 I，根据叠加定理

$$I=K_1 I_S+K_2 u_S$$

当开关S在位置1时，相当于 $u_S=0$，当开关S在位置2时，相当于 $u_S=u_{S1}$，当开关S在位置3时，相当于 $u_S=-u_{S2}$，把上述条件代入以上方程式中，可得关系式

$$40=K_1 I_S$$

$$-60=K_1 I_S+K_2 u_{S1}=40+K_2\times 10$$

从中解出　$K_2=\dfrac{-100}{10}=-10$

所以当S在位置3时，有

$$I=K_1 I_S+K_2 u_{S2}=40+(-10)\times(-15)$$
$$=190mA$$

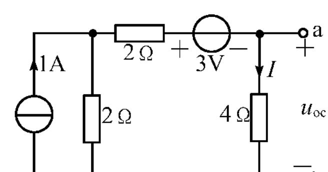
○ 4－8　求题4－8图示电路的戴维宁和诺顿等效电路。

解　求开路电压 u_{oc}。设 u_{oc} 参考方向如题4－8图所示，由KVL列方程

$$(2+4)I+3+2(I-1)=0$$

解得　$I=-\dfrac{1}{8}A$

$$u_{oc}=4\times I=4\times\left(-\frac{1}{8}\right)=-0.5V$$

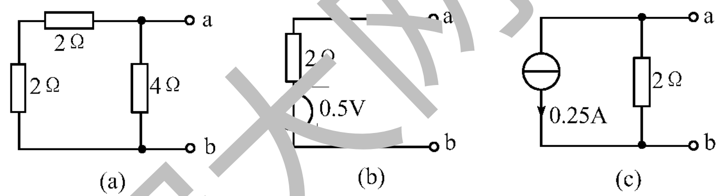


题4－8图

求等效电阻 R_{eq}。将原图中电压源短路，电流源开路，电路变为题解4－8图(a)，应用电阻串并联等

效，求得

$$R_{eq} = (2+2) // 4 = 2\Omega$$



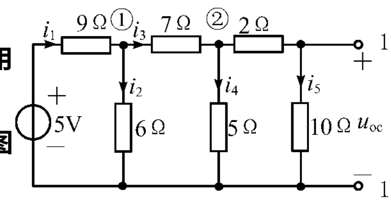
题解 4－8 图

画出戴维宁等效电路如题解 4－8 图(b) 所示，应用电源等效变换得诺顿等效电路如题解 4－8 图(c) 所示。其中

$$I_{sc} = \frac{u_{oc}}{R_{eq}} = \frac{-0.5}{2} = -0.25\text{A}$$

○ 4－9　求题 4－9 图示电路的戴维宁等效电路。

解　本题电路为梯形电路，根据齐性定理，应用"倒退法"求开路电压 u_{oc}。



题 4－9 图

设 $u_{oc} = u'_{oc} = 10\text{V}$，各支路电流如题 4－9 图所示，计算得

$$i_5 = i'_5 = \frac{10}{10} = 1\text{A}$$

$$u_{n2} = u'_{n2} = (2+10)\times 1 = 12\text{V}$$

$$i_4 = i'_4 = \frac{u'_{n2}}{5} = \frac{12}{5} = 2.4\text{A}$$

$$i_3 = i'_3 = i'_4 + i'_5 = 2.4 + 1 = 3.4\text{A}$$

$$u_{n1} = u'_{n1} = 7\times i'_3 + u'_{n2} = 7\times 3.4 + 12 = 35.8\text{V}$$

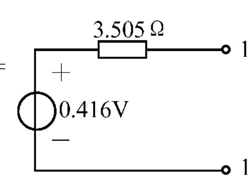
$$i_2 = i'_2 = \frac{u'_{n1}}{6} = \frac{35.8}{6} = 5.967\text{A}$$

$$i_1 = i'_2 + i'_3 = 5.967 + 3.4 = 9.367\text{A}$$

$$u_S = u'_S = 9\times i'_1 + u_{n1} = 9\times 9.367 + 35.8 = 120.1\text{V}$$

故当 $u_S = 5\text{V}$ 时，开路电压 u_{oc} 为

$$u_{oc} = Ku'_{oc} = \frac{5}{120.1}\times 10 = 0.416\text{V}$$



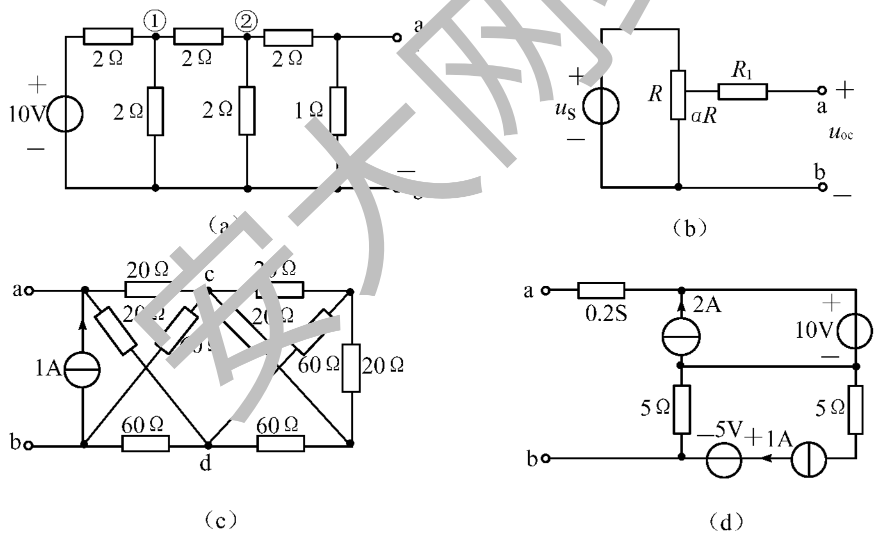
题解 4－9 图

将电路中的电压源路短，应用电阻串并联等效，求得等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{eq} = [(9 // 6 + 7) // 5 + 2] // 10 = 3.505\Omega$$

画出戴维宁等效电路如题解 4－9 图所示。

◯ 4－10　求题 4－10 图中各电路在 ab 端口的戴维宁等效电路或诺顿等效电路。



题 4－10 图

解　(a) 先求开路电压 u_{oc}。应用结点电压法，结点编号如题 4－10 图(a) 所示。

结点方程

$$\begin{cases}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}=\frac{10}{2}\\-\frac{1}{2}u_{n1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n2}=0\end{cases}$$

把以上方程加以整理有

$$\begin{cases}3u_{n1}-u_{n2}=10\\-3u_{n1}+8u_{n2}=0\end{cases}$$

应用消去法，解得

$$u_{n2}=\frac{10}{7}\text{V}$$

故开路电压

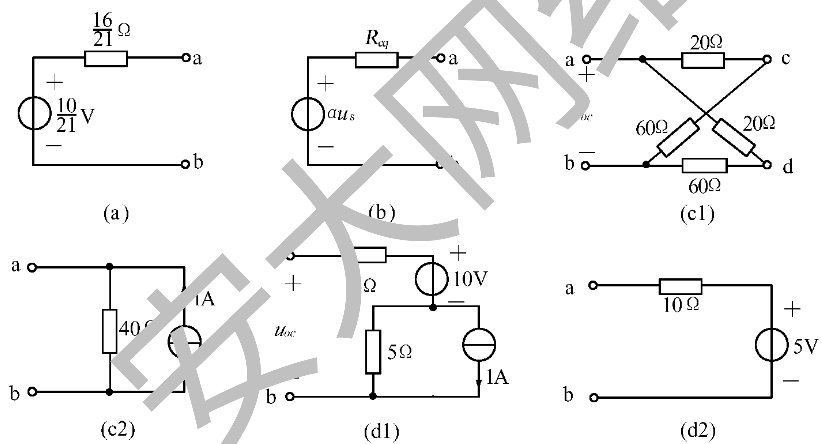
$$u_{oc}=\frac{u_{n2}}{2+1}\times 1=\frac{10}{21}\text{V}$$

再把电压源短路应用电阻串并联求等效内阻 R_{eq}

$$R_{eq}=[(2\ /\!/\ 2+2)\ /\!/\ 2+2]\ /\!/\ 1=\frac{16}{21}\Omega$$

画出戴维宁等效电路如题解 4－10 图(a) 所示。

(b) 应用电阻分压求得开路电压 u_{oc} 为：



题解 4－10 图

$$u_{oc}=\frac{u_S}{R}\times\alpha R=\alpha u_S$$

把电压源短路，可求得等效电阻为 $R_{eq}=[(R-\alpha R)\ /\!/\ \alpha R]+R_1=\alpha(1-\alpha)R+R_1$ 等效电路如题解 4－10 图(b) 所示。

(c) 这个问题用诺顿定理求解比较方便。把 ab 端口短路，显然短路电流等于电流源的电流，即 $I_{sc}=I_{ab}=1A$。

把电流源开路求等效电阻 R_{eq}。由于电路是一平衡电桥，可以把 cd 右侧电阻电路断去如题解 4－10 图(c1) 所示，则

$$R_{eq}=(20+60)\ /\!/\ (20+60)=40\Omega$$

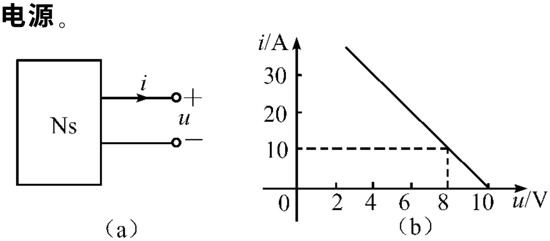
画出诺顿等效电路如题解 4－10 图(c2) 所示。

(d) 应用替代定理，题 4－10 图(d) 可以等效变换为题解 4－10 图(d1) 所示的电路。则开路电压为 $u_{oc}=10-5\times1=5V$

把题解 4－10 图(d1) 中的电压源短路，电流源开路，等效电阻 $R_{eq}=5+5=10\Omega$

画出戴维宁等效电路如题解 4－10 图(d2) 所示。

○ 4－11　题 4－11 图(a) 所示含源一端口的外特性曲线画于题 4－11 图(b) 中，求其等效电源。



题 4－11 图

解 根据戴维宁定理可知，图示含源一端口电路可以等效为题解 4－11 图所示的电源电路，其端口电压 u 和电流 i 满足关系式

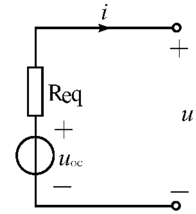
$$u = u_{oc} - R_{eq} i$$

题 4－11 图(b) 所示的含源一端口的外特性曲线方程为

$$u = 10 - \frac{1}{5} i$$

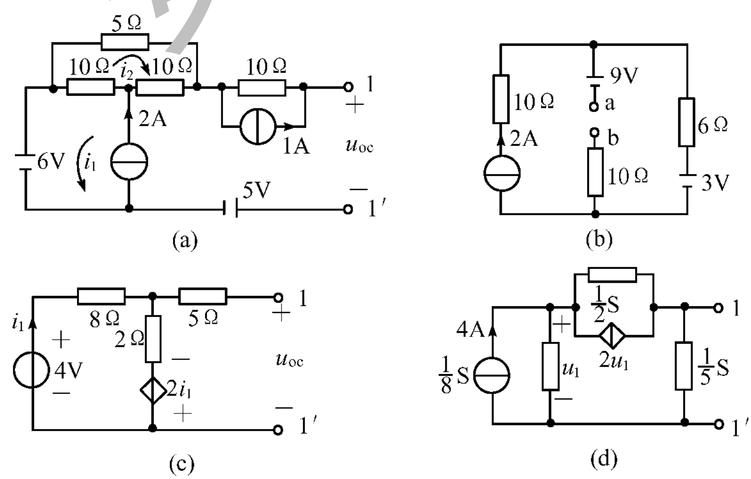
比较以上两个方程式，可得等效电源电路的参数

$$u_{oc} = 10\text{V}, R_{eq} = \frac{1}{5} = 0.2\Omega$$



题解 4－11 图

●4－12 求题 4－12 图示各电路的等效戴维宁电路或诺顿电路。



题 4－12 图

分析 利用各种电路等效变换可求解 u_{oc}、R_{eq}、i_{sc}，即可求其等效戴维宁电路或诺顿电路。

解 (a) 先求开路电压 u_{oc}。应用网孔电流法，设网孔电流 i_1，i_2，其绕行方向如题 4－12 图(a) 所示。列网孔电流方程为

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ 10i_1 + (10 + 10 + 5)i_2 = 0 \end{cases}$$

联立求解以上方程，可得

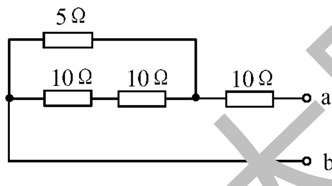
$$i_2 = \frac{-20}{25} = -0.8\text{A}$$

故开路电压为

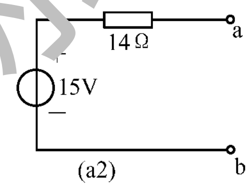
$$u_{oc} = 10 \times 1 - 5i_2 + 6 - 5 = 11 + 5 \times 0.8 = 15\text{V}$$

将电压源短接，电流源断开，得题解 4－12 图(a1) 所示电路，应用电阻串、并联

等效求得等效电阻



(a1)



(a2)

题解 4 — 12 图

$$R_{eq} = 5 \,/\!/\, (10 + 10) + 10 = 14\Omega$$

戴维宁等效电路如题解 4 — 12 图(a2) 所示。

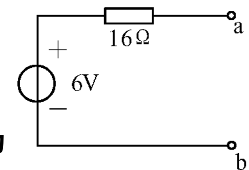
(b) 根据 KVL 求开路电压 u_{ab} 为

$$u_{ab} = -9 + 6 \times 2 + 3 = 6\text{V}$$

把 3V 电压源短路,2A 电流源断开,可以看出等效电阻为

$$R_{eq} = 10 + 6 = 16\Omega$$

戴维宁等效电路见题解 4 — 12 图(b)。



题解 4 — 12 图(b)

(c) 设开路电压参考方向如题 4—12 图(c) 所示。显然 u_{oc} 等于受控源所在支路的电压,即

$$u_{oc} = 2i_1 - 2i_1 = 0$$

由于电路中有受控源,求等效电阻时不能用电阻串、并联等效的方法,现采用求输入电阻的外加电源法。将题 4 — 12 图(c) 中 4V 独立电压源短路,在 ab 端子间加电压源 u 如题解 4 — 12 图(c1) 所示。根据 KVL 列方程。

$$\begin{cases} u = 5i - 8i_1 \\ 8i_1 + 2(i + i_1) - 2i_1 = 0 \end{cases}$$

从第二个方程中解出

$$i_1 = -\frac{2}{8}i = -\frac{1}{4}i$$

把 i_1 代入第一个方程中,可得

$$u = 5i - 8 \times \left(-\frac{1}{4}i\right) = 7i$$

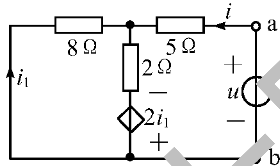
故等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 7\Omega$$

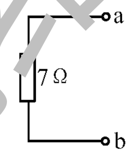
画出戴维宁等效电路如题解 4 — 12 图(c2) 所示。

(d) 先求开路电压 u_{oc}。把题 4—12 图(d) 中受控电流源与电阻的并接支路等效变换为受控电压源与电阻的串接支路如题解 4 — 12 图(d1) 所示。由 KVL 得

$$(2 + 5)i_1 + 4u_1 - u_1 = 0$$



(c1)



(c2)

题解 4－12 图

把 $u_1=(4-i_1)\times 8$ 代入上式中，解得

$$i_1=\frac{96}{17}=5.647\text{A}$$

故开路电压

$$u_{oc}=5\times i_1=5\times 5.647=28.235\text{V}$$

把题解 4－12 图(d1) 中的 1—1′ 端子短接如题解 4－12 图(d2) 所示。由 KVL 得

$$2i_{sc}+4u_1-u_1=0$$

即

$$i_{sc}=-\frac{3}{2}u_1$$

把 $u_1=8\times(4-i_{sc})$ 代入上式中，有

$$i_{sc}=-\frac{3}{2}\times 8\times(4-i_{sc})$$

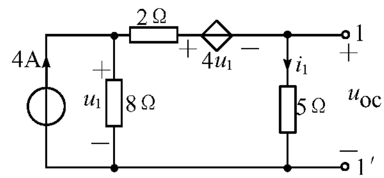
解得

$$i_{sc}=\frac{48}{11}=4.364\text{A}$$

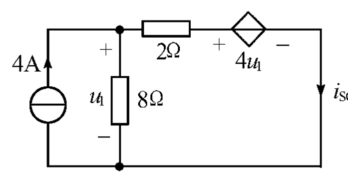
则等效电阻

$$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{28.235}{4.364}=6.471\Omega$$

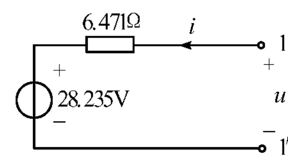
戴维宁等效电路如题解 4－12 图(d3) 所示。



(d1)



(d2)



(d3)

题解 4－12 图

小结　求戴维宁电路时，要求 u_{oc} 和 R_{eq}，求诺顿电路时，要求 i_{sc} 和 R_{eq}。

○ 4－13　求题 4－13 图示两个一端口的戴维宁或诺顿等效电路，并解释所得结果。

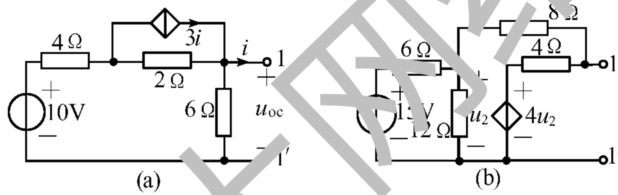
解　(a) 因为端口开路，端口电流 $i=0$，故受控电流源的电流为零，可将其断开，从而得开路电压

$$u_{oc}=\frac{10}{4+2+6}\times 6=5\text{V}$$

把端口短路，电路变为题解 4－13 图(a1) 所示电路。由 KVL 可得

$$(4+2)i_{sc}-2\times 3i_{sc}=10$$

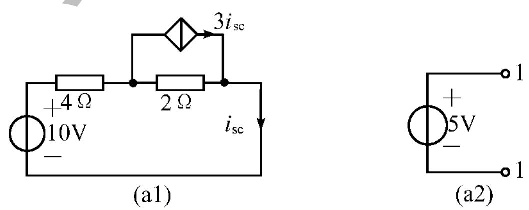
从中解出



题 4－13 图

$$i_{sc}=\frac{10}{4+2-2\times3}=\infty$$

这说明该电路的等效电阻 $R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=0$，故等效电路为题解 4－13 图(a2)所示的 5V 理想电压源。显然其诺顿等效电路是不存在的。



题解 4－13 图

(b) 把端子 1—1′ 短路。电路如题解 4－13 图(b1)所示。由题 4－13 图(b)可知 12Ω 电阻和 8Ω 电阻并联，则电压

$$u_2=\frac{15}{6+\frac{12\times8}{12+8}}\times\frac{12\times8}{12+8}=\frac{20}{3}\text{V}$$

电流 i_{sc} 为

$$i_{sc}=i_1+i_2=\frac{u_2}{8}+\frac{4u_2}{4}=\frac{9}{8}u_2=\frac{9}{8}\times\frac{20}{3}=7.5\text{A}$$

把 15V 电压源短路，应用外加电源法求等效电阻 R_{eq}，由题解 4—13 图(b2)，可得

$$u_2=\frac{u}{8+\frac{6\times12}{6+12}}\times\frac{6\times12}{6+12}=\frac{u}{8+4}\times4=\frac{u}{3}$$

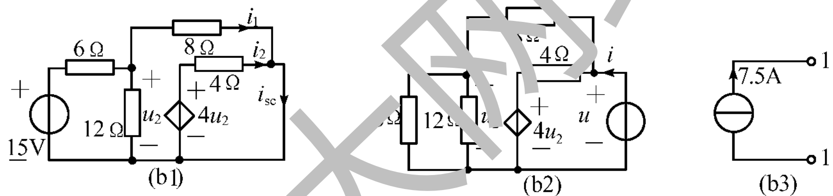
$$i=\frac{u-4u_2}{4}+\frac{u_2}{6\,/\!/\,12}=\frac{u}{4}-\frac{3}{4}u_2=\frac{u}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{u}{3}=0$$

说明该电路的等效电阻

$$R_{eq}=\frac{u}{i}=\frac{1}{0}=\infty$$

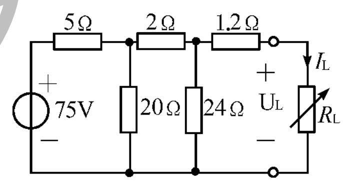
故等效电路为一电流为 7.5A 的理想电流源，即该电路只有诺顿等效电路，如

题解 4—13 图(b3) 所示，而不存在戴维宁等效电路模型。



题解 4—13 图

◎ 4—14　在题 4—14 图所示电路中，当 R_L 取 0,2,4,6,10,18,24,42,90 和 186Ω 时，求 R_L 的电压 U_L、电流 I_L 和 R_L 消耗的功率(可列表表示各结果)。



题 4—14 图

分析　将左边电路等效为戴维宁电路，即可容易求解。

解　先把 R_L 支路断开如题解 4—14 图(a) 所示。应用电源等效互换得一端口电路的戴维宁等效电路的电压和电阻为

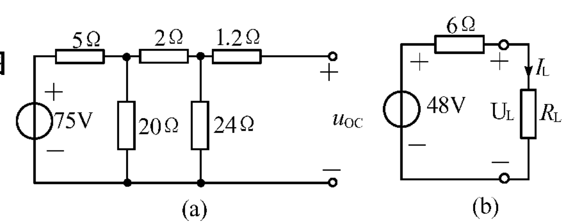
$$u_{oc} = 48\text{V},\quad R_{eq} = 6\Omega$$

接上 R_L 支路，如题解 4—14 图(b) 所示，则

$$I_L = \frac{48}{6 + R_L}$$

$$U_L = R_L I_L$$

$$P_L = R_L I_L^2$$



题解 4—14 图

把 R_L 的各个值代入，计算得 U_L、I_L、P_L 的值如下表所示。

R_L(Ω)	0	2	4	6	10	18	24	42	90	186
I_L(A)	8	6	4.8	4	3	2	1.6	1	0.5	0.25
U_L(V)	0	12	19.2	24	30	36	38.4	42	45	46.5
P_L(W)	0	72	92.16	96	90	72	61.44	42	22.5	11.625

◎ 4—15　在题 4—15 图示电路中，试问：

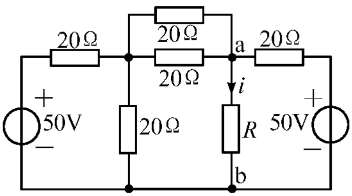
(1)R 为多大时，它吸收的功率最大？求此最大功率。

(2) 若 $R=80\Omega$，欲使 R 中电流为零，则 a，b 间应并接什么元件，其参数为多少？画出电路图。

分析 先将电路等效为戴维宁电路，然后由最大功率传输定理，即 $R=R_{eq}$ 时，P 最大，$P_{max}=\dfrac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$，即可求解。

解 (1) 自 a，b 断开 R 所在支路，应用电阻串、并联及电源等效互换将原图变为题解 4－15 图(a)，由题解 4－15 图(a) 易求得开路电压

$$u_{oc}=\frac{50-25}{10+10+20}\times(10+10)+25=37.5\text{V}$$



题 4－15 图

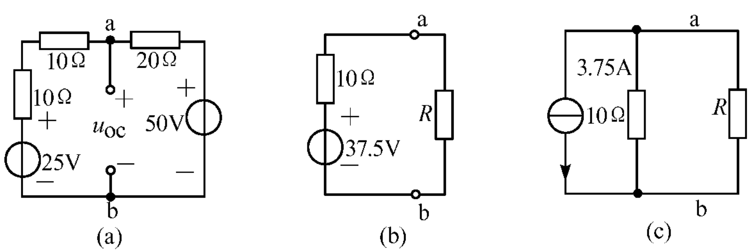
将题解 4－15 图(a) 中电压源短路，求等效电阻

$$R_{eq}=(10+10)\,/\!/\,20=10\Omega$$

最后得等效电路如题解 4－15 图(b) 所示，由最大功率传输定理可知，当 $R=R_{eq}=10\Omega$ 时，其上可获得最大功率，此时

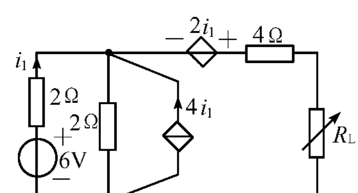
$$P_{max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}=\frac{37.5^2}{4\times 10}=35.156\text{W}$$

(2) 利用电源等效互换，题解 4－15 图(b) 电路可以变化为题解 4－15 图(c)，由 KCL 可知，在 a，b 间并接一个理想电流源，其值 $i_S=3.75\text{A}$，方向由 a 指向 b，这样 R 中的电流将为零。



题解 4－15 图

○ 4－16 题 4－16 图示电路的负载电阻 R_L 可变，试问 R_L 等于何值时可吸收最大功率？求此功率。



题 4－16 图

解 首先求出 R_L 以左部分的等效电路。断开 R_L，设 u_{oc} 如题解 4－16 图(a) 所示，并把受控电流源等效为受控电压源。由 KVL 可得

$$(2+2)i_1+8i_1=6$$

$$i_1 = \frac{6}{12} = 0.5\text{A}$$

故开路电压

$$u_{oc} = 2i_1 + 2i_1 + 8i_1 = 12i_1 = 12 \times 0.5 = 6\text{V}$$

把端口短路，如题解 4－16 图(b) 所示应用网孔电流法求短路电流 i_{sc}，网孔方程为

$$\begin{cases} (2+2)i_1 - 2i_{sc} + 8i_1 = 6 \\ -2i_1 + (2+4)i_{sc} - (2+8)i_1 = 0 \end{cases}$$

解得

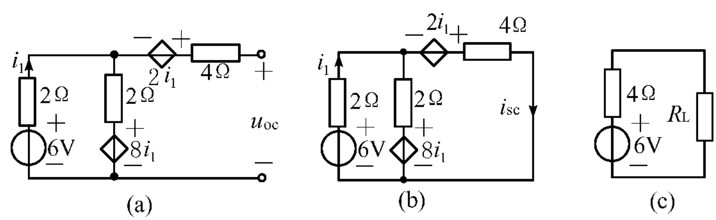
$$i_{sc} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\text{A}$$

故一端口电路的等效电阻

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{6}{3/2} = 4\Omega$$

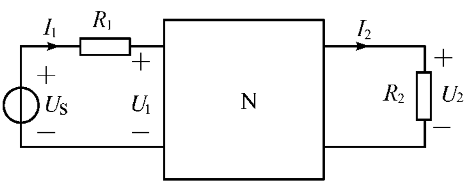
画出戴维宁等效电路，接上待求支路 R_L，如题解 4－16 图(c) 所示。由最大功率传输定理知 $R_L = R_{eq} = 4\Omega$ 时其上获得最大功率。R_L 获得的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{6^2}{4 \times 4} = \frac{36}{16} = 2.25\text{W}$$



题解 4－16 图

○ 4－17　题 4－17 图所示电路中 N(方框内部) 仅由电阻组成。对不同的输入直流电压 U_S 及不同的 R_1，R_2 值进行了两次测量，得下列数据：$R_1 = R_2 = 2\Omega$ 时，$U_S = 8\text{V}$，$I_1 = 2\text{A}$，$U_2 = 2\text{V}$；$R_1 = 1.4\Omega$，$R_2 = 0.8\Omega$ 时，$U_S = 9\text{V}$，$I_1 = 3\text{A}$，求 U_2 的值。



题 4－17 图

解　设 N 网络两个端口的电压为 U_1，U_2 如图所示。由题意可知：

第一次测量，有

$$U_1 = U_S - R_1 I_1 = 8 - 2 \times 2 = 4\text{V}$$
$$U_2 = 2\text{V}, \quad I_1 = 2\text{A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2}{2} = 1\text{A}$$

第二次测量，有

$$U_1 = U_S - R_1 I_1 = 9 - 1.4 \times 3$$
$$= 9 - 4.2 = 4.8\text{V}$$
$$I_1 = 3\text{A}$$
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_2}{0.8}$$

根据特勒根定理2，应满足

$$U_1(-I_1) + U_2 I_2 = U_1(-I_1) + U_2 I_2$$

代入数据，有

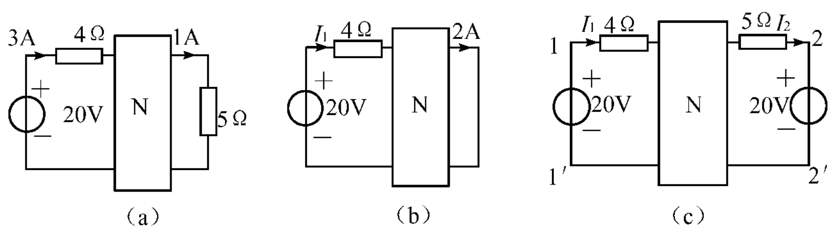
$$4 \times (-3) + 2 \times \frac{U_2}{0.8} = 4.8 \times (-2) + U_2 \times 1$$

从中解得

$$U_2 = \frac{12 - 9.6}{\frac{6}{4}} = \frac{4}{6} \times 2.4 = 1.6\text{V}$$

○4－18　$U'_1 = 3\text{V}$

● 4－19　题4－19图中网络N仅由电阻组成。根据图(a)和图(b)的已知情况，求图(c)中电流 I_1 和 I_2。



题4－19图

分析　图(a)、(b)、(c)有多处相似处，可利用叠加定理. 互易定理. 特勒根定理求解。

解　首先求电流 I_1。

对图(c)应用叠加定理。两个电源单独作用的分电路为题4－19图(a)和题解4－19图。由题4－19图(a)知

$$I_1^{(1)} = 3\text{A},\quad I_2^{(1)} = 1\text{A}$$

题解4－19图相当于把题4－19图(a)中的激励和响应互换，因此根据互易定理可得

$$I_1^{(2)} = -I_2^{(1)} = -1\text{A}$$

故题 4－19 图(c) 中的电流 I_1 为

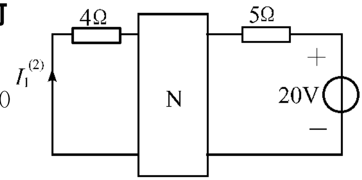
$$I_1 = I_1^{(1)} + I_2^{(1)} = 3 - 1 = 2\text{A}$$

下面求电流 I_2。

对题 4－19 图(a) 和(b) 应用特勒根定理 2,可得

$$20 \times (-I_1) + 1 \times 5 \times 2 = (-3) \times 20 + 1 \times 0$$

$$I_1 = \frac{70}{20} = 3.5\text{A}$$



题解 4－19 图

再对题 4－19 图(b) 和(c) 应用特勒根定理 2,并把前面求得的 $I_1 = 2\text{A}$ 和 $I_1 = -3.5\text{A}$ 代入,有

$$20 \times (-I_1) + (5I_2 + 20) \times 2 = 20 \times (-I_1) + 0 \times I_2$$

即

$$20 \times (-3.5) + 10I_2 + 40 = 20 \times (-2)$$

故解得

$$I_2 = \frac{-40 - 40 + 70}{10} = -1\text{A}$$

小结　一般情况下,电路中带有未知网络的,先观察电阻电路的特点,再综合利用各电路定理求解即可。

○4－20　$U_1 = 7.2\text{V}$

○ 4－21　题 4－21 图所示电路中 N 仅由电阻组成。已知图(a) 中电压 $U_1 = 1\text{V}$,电流 $I_2 = 0.5\text{A}$,求图(b) 中 I_1。

解　对图(a) 和(b) 应用特勒根定理:

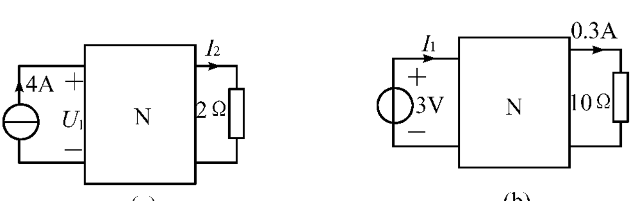
$$U_1 \times (-I_1) + 2 \times I_2 \times 0.3 = (-4) \times 3 + I_2 \times 0.3 \times 10$$

把 $U_1 = 1\text{V}, I_2 = 0.5\text{A}$ 代入上式中,有

$$-I_1 + 0.3 = -12 + 1.5$$

故解得

$$I_1 = 10.8\text{A}$$



题 4－21 图

○4－22　略

第五章

含有运算放大器的电阻电路

学习要求

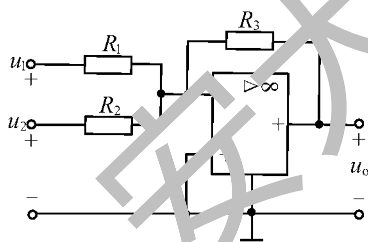
1. 理解运算放大器的电路模型：实际运算放大器、理想运算放大器。
2. 掌握含理想运算放大器电阻电路的分析方法。

知识网络图

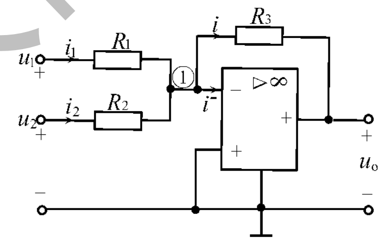
- 含有运算放大器的电阻电路
  - 运放的电路模型
    - 运放的电路图形符号
    - 运放的特性
    - 运放的电路模型
  - 比例电路
    - 反向比例器
    - 同向比例器
    - 反向加法器
    - 减法器
    - 电压跟随器
  - 含运放的电路分析
    - 分析的两条规则
    - 典型电路
      - 非倒向放大器
      - 加法器
      - 多重放大电路

课后习题全解

○ 5－1　**设题 5－1 图所示电路的输出 u_o 为 $-u_o = 3u_1 + 0.2u_2$，已知 $R_3 = 10\mathrm{k\Omega}$，求 R_1 和 R_2。**



题 5－1 图



题解 5－1 图

解　如题解 5－1 图所示运算放大器是理想运算放大器，所以应遵循两条规则。

由规则 1　$i^- = 0$，知 $i = i_1 + i_2$

即
$$\frac{u_1 - u_{n1}}{R_1} + \frac{u_2 - u_{n1}}{R_2} = \frac{u_{n1} - u_o}{R_3}$$

由规则 2　$u_{n1} = u^+ = 0$ 代入上式得 $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = \dfrac{-u_o}{R_3}$

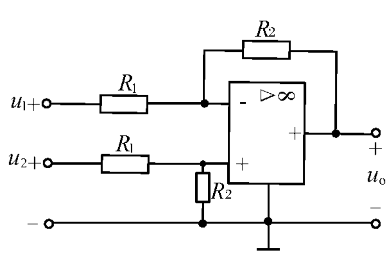
所以
$$-u_o = R_3\left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}\right)$$

与已知条件 $-u_o = 3u_1 + 0.2u_2$ 比较，有
$$\frac{R_3}{R_1} = 3,\quad \frac{R_3}{R_2} = 0.2$$

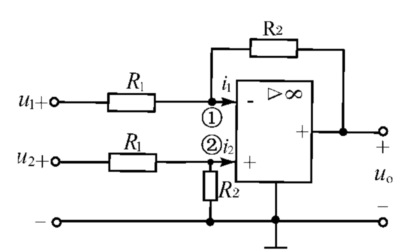
又有
$$R_3 = 10\mathrm{k\Omega}$$

所以
$$R_1 = \frac{R_3}{3} = 3.33\mathrm{k\Omega},\qquad R_2 = \frac{R_3}{0.2} = 50\mathrm{k\Omega}$$

◎5－2　**题 5－2 图所示电路起减法作用，求输出电压 u_o 和输入电压 u_1、u_2 之间的关系。**



题 5－2 图



题解 5－2 图

分析　利用虚短、虚断的规则即可求解。

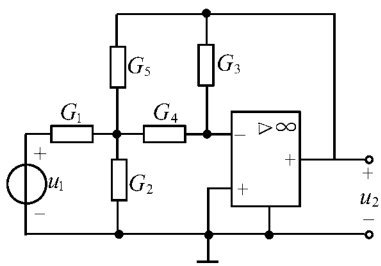
解　由题解 5－2 图知，理想运算放大器遵循两个规则

由规则 1 知
$$i_1 = i_2 = 0$$
由规则 2 知
$$u_{n1} = u_{n2}$$

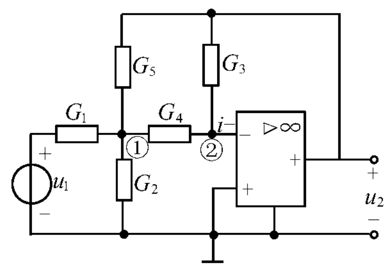
列结点电压方程
$$\begin{cases}(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2})u_{n1}-\dfrac{1}{R_2}u_o=\dfrac{u_1}{R_1} & ①\\[2ex] (\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2})u_{n2}=\dfrac{u_2}{R_1} & ②\end{cases}$$

将 $u_{n1}=u_{n2}$ 代入式②，联立式①、式②得
$$u_o=\frac{R_2}{R_1}(u_2+u_1)$$

○ 5－3　求题 5－3 图所示电路的输出电压与输入电压之比$\dfrac{u_2}{u_1}$。



题 5－3 图



题解 5－3 图

解　由题解 5－3 图列结点电压方程，并注意到规则 1，$i^- = 0$
$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_4+G_5)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_5u_2=G_1u_1\\ -G_4u_{n1}+(G_3+G_4)u_{n2}-G_3u_2=0\end{cases}$$

应用规则 2 知，$u_{n2}=0$

所以，以上两式变为
$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_4+G_5)u_{n1}-G_5u_2=G_1u_1\\[1ex] u_{n1}=-\dfrac{G_3}{G_4}u_2\end{cases}$$

从而得
$$\frac{u_2}{u_1}=-\frac{G_1G_4}{(G_1+G_2+G_4+G_5)G_3+G_4G_5}$$

○ 5－4　求题 5－4 图所示电路的电压比值$\dfrac{u_o}{u_1}$。

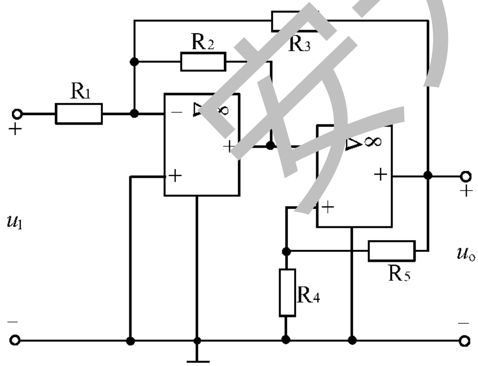
解　由题解 5－4 图列结点电压方程，并注意到 $i_1^-=0$，$i_2^-=0$，有
$$\begin{cases}(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3})u_{n1}-\dfrac{1}{R_2}u_{o1}-\dfrac{1}{R_3}u_o=\dfrac{u_1}{R_1} & ①\\[2ex] (\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5})u_{n2}-\dfrac{1}{R_5}u_o=0 & ②\end{cases}$$

由规则 2，知　　$u_{n1}=0,\quad u_{o1}=u_{n2}$

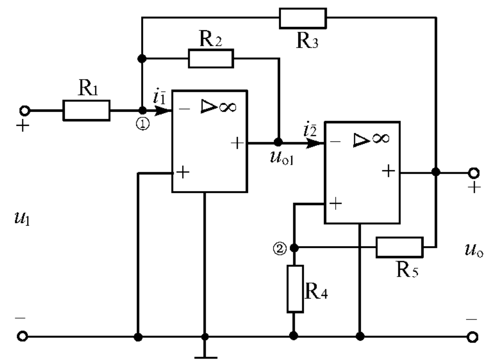
又由式 ② 得　　$u_{n2}=\dfrac{R_4}{R_4+R_5}u_o$

将以上关系式均代入式 ① 从而得到

$$\frac{u_o}{u_1}=-\frac{R_2R_3(R_4+R_5)}{R_1(R_2R_4+R_2R_5+R_3R_4)}$$

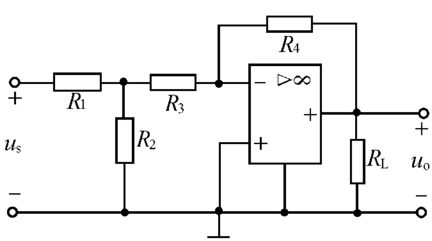


题 5－4 图

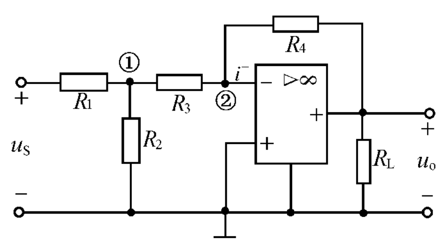


题解 5－4 图

◎5－5　求题 5－5 图所示电路的电压比$\dfrac{u_o}{u_S}$。



题 5－5 图



题解 5－5 图

分析　利用虚短、虚断规则，列写结点电压方程求解即可。

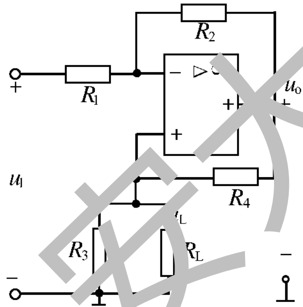
解　由题解 5－5 图列结点电压方程，并注意到 $i^-=0$，有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_3}u_{n2}=\dfrac{u_S}{R_1} & ①\\[2ex] -\dfrac{1}{R_3}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2}-\dfrac{1}{R_4}u_o=0 & ②\end{cases}$$

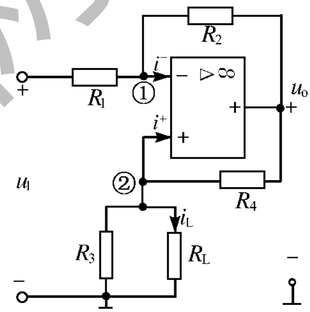
利用规则 2 知，$u_{n2}=0$ 代入上述方程中，从而得到

$$\frac{u_o}{u_S}=-\frac{R_2R_4}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

○ 5－6　**试证明题 5－6 图所示电路若满足 $R_1R_4=R_2R_3$，则电流 i_L 仅决定于 u_1 而与负载电阻 R_L 无关。**



题 5－6 图



题解 5－6 图

证明　由题解 5－6 图列结点电压方程，并注意到 $i^-=i^+=0$，有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_2}u_o=\dfrac{u_1}{R_1} & ①\\[2ex] \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_L}\right)u_{n2}-\dfrac{1}{R_4}u_o=0 & ②\end{cases}$$

应用规则 2 知，　$u_{n1}=u_{n2}$

由式 ② 得，$u_o=R_4\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_L}\right)u_{n2}$ **代入式 ①，并整理，得**

$$u_{n2}=\frac{R_2R_3R_L}{(R_2R_3-R_1R_4)R_L-R_1R_3R_4}u_1$$

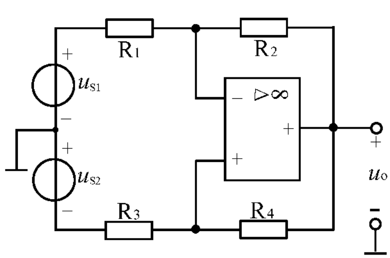
从而有

$$i_L=\frac{u_{n2}}{R_L}=\frac{R_2R_3}{(R_2R_3-R_1R_4)R_L-R_1R_3R_4}u_1$$

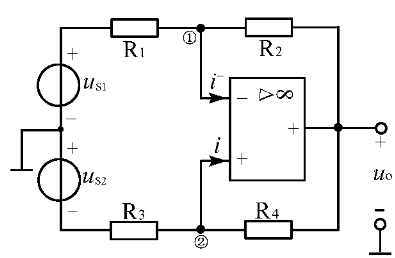
当 $R_1R_4=R_2R_3$ **时，** $i_L=\dfrac{R_2R_3}{-R_1R_3R_4}u_1=-\dfrac{R_2}{R_1R_4}u_1$

可见 i_L 仅仅决定于 u_1 而与负载电阻 R_L 无关。

○ 5－7　**求题 5－7 图所示电路的 u_o 与 u_{S1}、u_{S2} 之间的关系。**



题 5－7 图



题解 5－7 图

解　由题解 5－7 图，列结点电压方程，并注意到 $i^-=i^+=0$，有

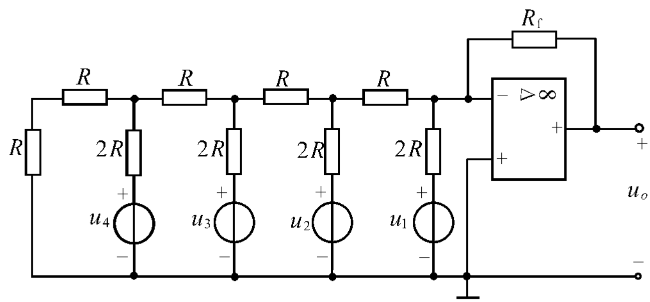
$$\begin{cases}(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2})u_{n1}-\dfrac{1}{R_2}u_o=\dfrac{1}{R_1}u_{S1}\\(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4})u_{n2}-\dfrac{1}{R_4}u_o=-\dfrac{1}{R_3}u_{S2}\end{cases}$$

应用规则 2 有 $u_{n1}=u_{n2}$ 代入上式，解得

$$u_o=\frac{R_2(R_3+R_4)u_{S1}+R_4(R_1+R_2)u_{S2}}{R_2R_3-R_1R_4}$$

○5－8 略

● 5－9 电路如题 5－9 图所示，设 $R_f=16R$，验证该电路的输出 u_o 与输入 $u_1\sim u_4$ 之间的关系为 $u_o=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$。[注：该电路为一 4 位数字－模拟转换器，常用在信息处理和自动控制领域。该电路可将 4 位二进制数字信号转换成模拟信号，例如当数字信号为 1101 时，令 $u_1=u_2=u_4=1$，$u_3=0$，则由关系式 $u_o=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$ 得模拟信号 $u_o=-(8+4+0+1)=-13$。]



题 5－9 图

分析 将左边的复杂电路等效为简单的戴维宁等效电路求解即可。

解 将理想运算放大器左端电路做等效变换(戴维宁等效)，等效电路如题解 5－9 图所示。

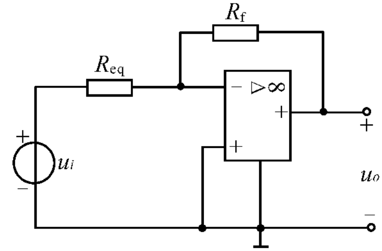
其中：$R_{eq}=R$

$$u_i=\frac{u_4}{16}+\frac{u_3}{8}+\frac{u_2}{4}+\frac{u_1}{2}$$

这是一个反向比例器，且已知 $R_f=16R$，

所以 $u_o=-\dfrac{R_f}{R_{eq}}u_i=-16u_i$

$$=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$$



题解 5－9 图

小结 此电路为数字－模拟转换器，u_1、u_2、u_3、u_4 取不同的值，可以得到不同的模拟电压值。

第六章

一阶电路

学习要求

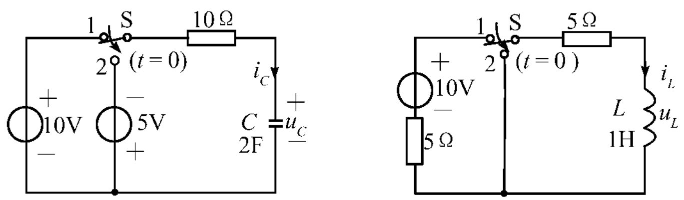
1. 了解本课程中所用电信号的时间函数表达式及时域特性,并会应用,特别是单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 的"切除"作用与"开关"作用,单位冲激信号 $\delta(t)$ 的抽样性。
2. 能写出电容元件与电感元件的伏安关系,包括微分关系与积分关系;深刻理解电容元件与电感元件初始状态 $u_C(0^-)$,$i_L(0^-)$ 的物理意义。
3. 深刻理解和掌握一阶电路零输入响应、零状态响应、全响应的定义、产生原因,并会用列写和求解一阶电路微分方程的方法求解;深刻理解电路时间常数 τ 的物理意义,并会求解。
4. 深刻理解和掌握一阶电路全响应三种分解方式的物理意义,并会进行分解。
5. 深刻理解和掌握求解一阶电路在阶跃激励下全响应的三要素公式及此公式成立的条件,并会应用此公式求解一阶电路的全响应,会画响应的波形。
6. 深刻理解和掌握一阶电路的单位冲激响应,并会求解。
7. 了解一阶电路的正弦响应,并会求解。

知识网络图

- 一阶电路
  - 动态电路的方程及初始条件
  - 动态电路的响应
    - 一阶电路的零输入响应
    - 一阶电路的零状态响应
      - 阶跃响应
      - 冲激响应
    - 一阶电路的全响应

课后习题全解

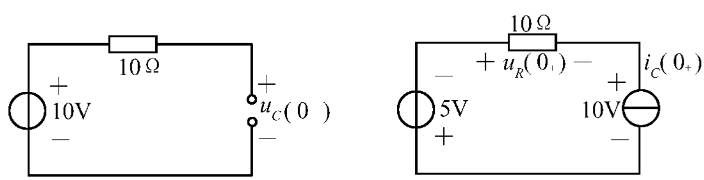
○ 6－1 **题 6－1 图(a)、(b) 所示电路开关 S 在 $t=0$ 时动作,试求电路在 $t=0_+$ 时刻电压、电流的初始值。**



(a) (b)

题 6－1 图

解 (a) **第一步 求 $t<0$ 时,即开关 S 动作前的电容电压 $u_C(0_-)$。由于开关动作前,电路处于稳定状态,对直流电路有** $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$,**故** $i_C=0$,**电容看作开路,** $t=0_-$ **时的电路如题解 6－1 图(a1) 所示,可得** $u_C(0_-)=10\mathrm{V}$。



(a1) (a2)

题解 6－1 图

第二步 根据换路时,电容电压 u_C 不会跃变,所以有

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\mathrm{V}$$

应用替代定理,用电压等于 $u_C(0_+)=10\mathrm{V}$ **的电压源代替电容元件,画出** 0_+ **时刻的等效电路如题解 6－1 图(a2) 所示。**

第三步 由 0_+ 时刻的等效电路,计算得

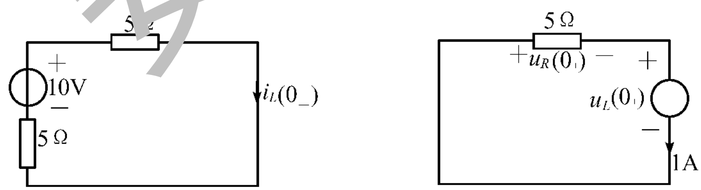
$$i_C(0_+) = -\frac{10+5}{10} = -1.5\text{A}$$

$$u_R(0_+) = 10 \times i_C(0_+) = 10 \times (-1.5) = -15\text{V}$$

换路后,i_C 和 u_R 发生了跃变。

(b) 第一步　由 $t<0$ 时的电路,求 $i_L(0_-)$ 值。由于 $t<0$ 时电路处于稳定状态,电感电流 i_L 为常量,故 $\frac{di_L}{dt}=0$,即 $u_L=0$,电感可以看作短路。$t=0_-$ 时的电路如题解 6-1 图(b1) 所示,由图可知

$$i_L(0_-) = \frac{10}{5+5} = 1\text{A}$$



(b1)　(b2)

题解 6—1 图

第二步　根据换路时,电感电流 i_L 不会跃变,所以有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

应用替代定理,用电流等于 $i_L(0_+)=1\text{A}$ 的电流源替代电感元件,画出 0_+ 时刻的等效电路如题解 6—1 图(b2) 所示。

第三步　由 0_+ 时刻的等效电路,计算得初始值。

$$u_R(0_+) = -u_L(0_+) = 5 \times i_L(0_+) = 5 \times 1 = 5\text{V}$$

$$i_R(0_+) = i_L(0_+) = 1\text{A}$$

显然电路换路后,电感电压 u_L 发生了跃变。

○6—2　题 6—2 图所示电路中开关 S 在 $t=0$ 时动作,试求各电路在 $t=0_+$ 时刻的电压、电流。已知图(d) 中的 $e(t)=100\sin(\omega t+\frac{\pi}{3})\text{V}$,$u_C(0_-)=20\text{V}$。

解　(a) 在 $t<0$ 时,电路处于稳定状态,电容看作断路,电路如题解 6—2 图(a1) 所示。电容上的电压分别为

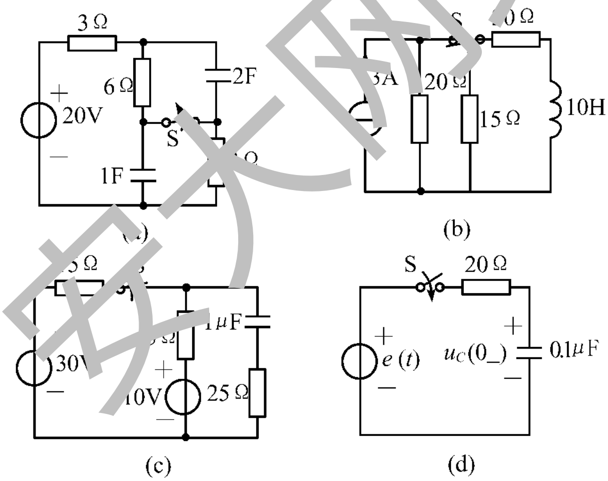
$$u_{C1}(0_-) = \frac{20}{3+6+3} \times 6 = 10\text{V}$$

$$u_{C2}(0_-) = \frac{20}{3+6+3} \times 3 = 5\text{V}$$

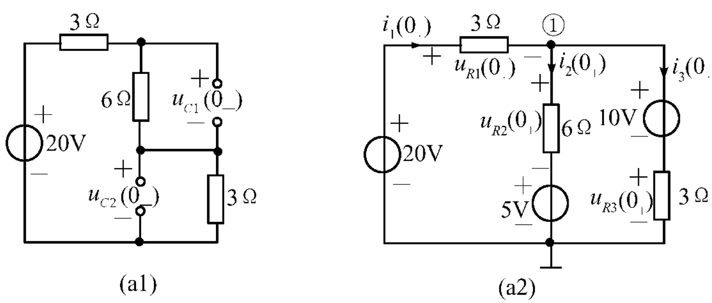
根据换路时电容电压不能跃变,得

$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 10\text{V}$$

$$u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) = 5\text{V}$$



题 6－2 **图**



题解 6－2 **图**

画出 0_+ **时刻的等效电路如题解** 6－2 **图**(a2)**所示。由图可得结点电压** $u_{n1}(0_+)$ **为**

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u_{n1}(0_+) = \frac{20}{3}+\frac{10}{3}+\frac{5}{6}$$

$$u_{n1}(0_+) = \frac{10+\dfrac{5}{6}}{\dfrac{5}{6}} = 13\text{V}$$

故各支路电流为

$$i_1(0_+) = \frac{20-u_{n1}(0_+)}{3} = \frac{20-13}{3} = \frac{7}{3}\text{A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_{n1}(0_+)-5}{6} = \frac{13-5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\text{A}$$

$$i_3(0_+) = \frac{u_{n1}(0_+) - 10}{3} = \frac{13-10}{3} = 1\text{A}$$

电阻上的电压为

$$u_{R1}(0_+) = 3 \times i_1(0_+) = 3 \times \frac{7}{3} = 7\text{V}$$

$$u_{R2}(0_+) = 6 \times i_2(0_+) = 6 \times \frac{4}{3} = 8\text{V}$$

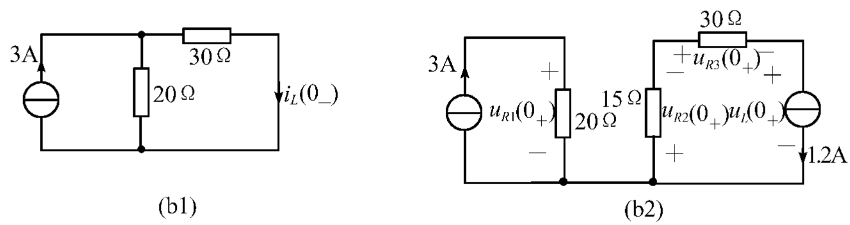
$$u_{R3}(0_+) = 3 \times i_3(0_+) = 3 \times 1 = 3\text{V}$$

(b) 在 $t < 0$ 时，电路处于稳定状态，电感看作短路，电路如题解 6－2 图(b1)所示。根据分流关系有

$$i_L(0_-) = \frac{3 \times 20}{20 + 30} = 1.2\text{A}$$

根据换路时，电感电流不能跃变，得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2\text{A}$$



题解 6－2 图

$t = 0_+$ 时的等效电路如题解 6－2 图(b2)所示，由图可知

$$u_{R1}(0_+) = 20 \times 3 = 60\text{V}$$

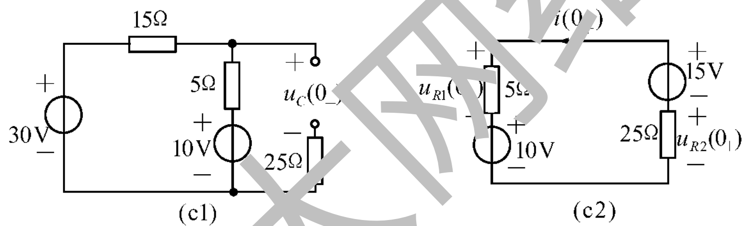
$$u_{R2}(0_+) = 1.2 \times 15 = 18\text{V}$$

$$u_{R3}(0_+) = 30 \times 1.2 = 36\text{V}$$

$$u_L(0_+) = -u_{R2}(0_+) - u_{R3}(0_+) = -(18 + 36) = -54\text{V}$$

(c) $t < 0$ 时，电路处于稳定状态，电容看作开路，电路如题解 6－2 图(c1)所示。电容上的电压为

$$u_C(0_-) = \frac{30 - 10}{15 + 5} \times 5 + 10 = 15\text{V}$$



题解 6－2 图

根据 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 15V$，画出 $t = 0_+$ 时的等效电路如题解 6－2 图(c2)所示。由图可得

$$i(0_+) = \frac{15-10}{25+5} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}\text{A}$$

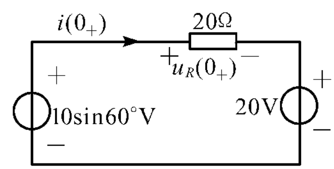
$$u_{R1}(0_+) = 5 \times i(0_+) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\text{A}$$

$$u_{R2}(0_+) = -25 \times i(0_+) = -25 \times \frac{1}{6} = -\frac{25}{6}\text{V}$$

(d) 由题意知 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 20V$，$t = 0_+$ 时的等效电路如题解 6－2 图(d)所示。由图可知

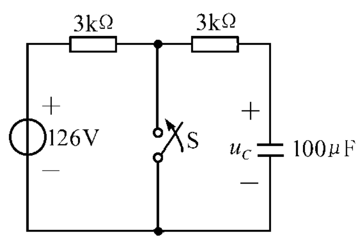
$$i(0_+) = \frac{100\sin 60° - 20}{20} = \frac{50\sqrt{3} - 20}{20} = 3.33\text{A}$$

$$u_R(0_+) = 20 \times i(0_+) = 66.6\text{V}$$

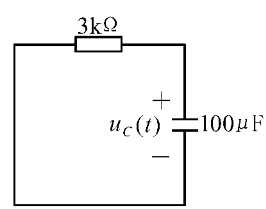


题解 6－2 图(d)

◎ 6－3　题 6－3 图示电路在 $t = 0$ 时开关 S 闭合，求 $u_C(t)$。



题 6－3 图



题解 6－3 图

分析　开关 S 断开时，电容两端电压为 126V，则当开关 S 闭合时，$u_C(0_+)$ 为 126V，电压源被短路，$t \geqslant 0$ 后为一 RC 电路，根据公式求解即可。

解　先求初始值 $u_C(0_+)$。由图可知 $t = 0_-$ 时，$u_C(0_-) = 126V$，根据换路时电容电压连续，可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 126\text{V}$$

$t \geqslant 0$ 后的电路如题解 6－3 图所示，这是一个一阶 RC 电路的零输入响应问题，应有

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

由题解 6－3 图可知时间常数

$$\tau = RC = 3 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0.3\text{s}$$

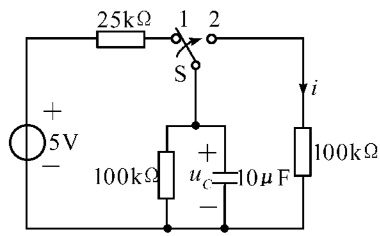
故 $t \geqslant 0$ 后的 $u_C(t)$ 为 $\quad u_C(t) = 126e^{-\frac{10}{3}t}\text{V}$

◎ 6－4　如题 6－4 图所示，开关 S 原在位置 1 已久，$t = 0$ 时合向位置 2，求 $u_C(t)$ 和 $i(t)$。

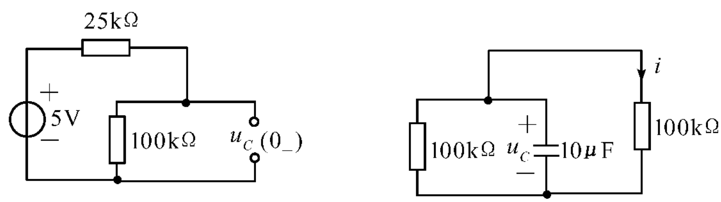
分析　S 位于位置 1 时，电容两端电压为电阻 100kΩ 两端的电压，S 位于位置 2 时，电容同两个 100kΩ 电阻并联，可容易求解。

解　$t < 0$ 时的电路如题解 6－4 图(a) 所示。由题解 6－4 图(a) 可知

$$u_C(0_-) = \frac{5}{100 + 25} \times 100 = 4\text{V}$$



题 6－4 图



(a)　　　　(b)

题解 6－4 图

故可得电容电压的初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\text{V}$$

$t > 0$ 后的电路如题解 6－4 图(b) 所示，这是一个一阶 RC 电路的零输入电路。由于从电容两端看去的等效电阻为 $R_0 = 100 \,//\, 100 = 50\text{k}\Omega$，故有时间常数

$$\tau = R_0C = 50 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}\text{s}$$

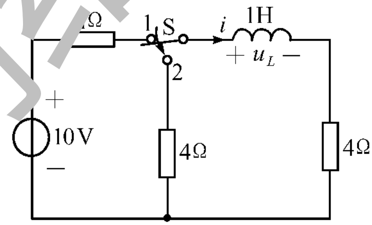
电容电压

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=4\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V}$$

电流

$$i(t)=\frac{u_C(t)}{100}=0.04\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}$$

○ 6－5　题 6－5 图中开关 S 在位置 1 已久，$t=0$ 时合向位置 2，求换路后的 $i(t)$ 和 $u_L(t)$。



题 6－5 图

解　$t<0$ 时的电路如题解 6－5 图(a) 所示。由题解 6－5 图(a) 可知

$$i_L(0_-)=\frac{10}{1+4}=2\mathrm{A}$$

根据换路时 i_L 不能跃变，有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\mathrm{A}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－5 图(b) 所示。这是一个一阶 RL 零输入电路，其时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}\mathrm{s}$$

(a)　　　　　　　　(b)

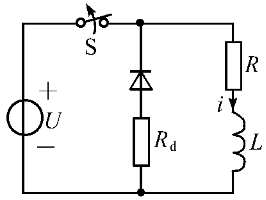
题解 6－5 图

故电感电流和电压分别为

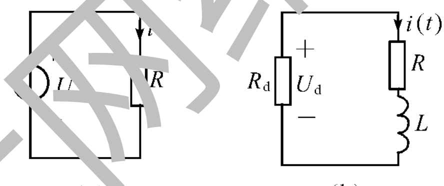
$$i(t)=i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=2\mathrm{e}^{-8t}\mathrm{A}$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=1\times 2\mathrm{e}^{-8t}\times(-8)=-16\mathrm{e}^{-8t}\mathrm{V}$$

○ 6－6　题 6－6 图示电路为发电机的励磁电路，励磁绕组的参数为 $R=40\Omega$，$L=1.5\mathrm{H}$，接在 $U=120\mathrm{V}$ 的直流电源上。当打开开关 S 时，要求绕组两端电压不超过正常工作电压的 2.5 倍，并使电流在 0.05 s 内衰减到初值的 5%，试求并联放电电阻 R_d 为多大？（图中二级管的作用是，当开关 S 闭合时，放电电阻 R_d 中无电流，当 S 打开后，绕组电流将通过 R_d 衰减到零，此时二极管如同短路。）



题 6－6 图



(a)　　(b)

题解 6－6 图

解　$t<0$ 时，电路处于稳定状态，此时二极管反向偏置不导通，R_d 中无电流，电路如题解 6－6 图(a) 所示，故

$$i(0_-)=i_L(0_-)=\frac{U}{R}=\frac{120}{40}=3\text{A}$$

开关 S 打开，电感电流不能跃变，因此有

$$i(0_+)=i_L(0_+)=i(0_-)=3\text{A}$$

$t>0$ 后，二极管处于导通状态，电路如题解 6－6 图(b) 所示。由图知，绕组两端的最大电压 $U_d(0_+)$ 为

$$U_d(0_+)=-R_d\times i(0_+)=-R_d\times 3=-3R_d$$

因为要求

$$|U_d(0_+)|=3R_d<120\times 2.5=300\text{V}$$

故有 $R_d<100\Omega$。

又因为，要求在 0.05s 内，$i(t)$ 衰减至初值的 5%，所以有

$$i(0.05)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{0.05}{\tau}}=i_L(0_+)\times 5\%$$

把 $\tau=\dfrac{L}{R_0}=\dfrac{1.5}{R_d+40}$ 代入上式中，有

$$\mathrm{e}^{-\frac{R_d+40}{1.5}\times 0.05}=\frac{5}{100}$$

解得　$$R_d=30\ln 20-40=49.87\approx 50\Omega$$

考虑到以上两个要求，R_d 的值应取

$$R_d=50\Omega$$

○ 6－7　一个高压电容器原先已充电，其电压为 10kV，从电路中断开以后，经过 15min 它的电压降低为 3.2kV，问：

(1) 再经过 15min 电压将降为多少？

(2) 如果电容 $C=15\mu\text{F}$，那么它的绝缘电阻为多少？

(3) 需经过多少时间，可使电压降至 30V 以下？

(4) 如果以一根电阻为 0.2Ω 的导线将电容接地放电，最大放电电流是多少？若认为在 5τ 时间内放电完毕，那么放电的平均功率是多少？

(5) 如果以 $100\text{k}\Omega$ 的电阻将其放电，应放电多少时间？并重答(4)。

解　根据题意，这个高压电容器为非理想电容，其电路模型如题解 6－7 图所示，且有

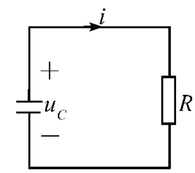
$$u_C(0_+) = 10\text{kV}$$

$t > 0$ 时，
$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-\frac{t}{\tau}}\text{kV}$$

由于经过 $t = 15\text{min}$，$u_C(t) = 3.2\text{kV}$，所以有

$$3.2 = 10e^{-\frac{15\times 60}{\tau}}$$

从中可解得
$$\tau = RC = \frac{15\times 60}{\ln\frac{100}{32}} = 789.866\text{s}$$



题解 6－7 图

(1) 再过 15min，即 $t = (15+15)\times 60\text{s}$ 时

$$u_C(t) = 10e^{-\frac{t}{\tau}} = 10\times e^{-\frac{30\times 60}{789.866}} = 1.024\text{kV}$$

(2) 根据 $\tau = RC$，可得绝缘电阻

$$R = \frac{\tau}{\text{C}} = \frac{789.866}{15\times 10^{-6}} = 52.658\text{M}\Omega$$

(3) 当 u_C 降至 30V 时，有 $30 = 10\times 10^3 e^{-\frac{t}{789.866}}$ 从中解得放电时间 t 为

$$t = \tau\ln\frac{1000}{3} = 789.866\times\ln\frac{1000}{3} = 4588.44s = 76.474\text{min}$$

(4) 用电阻为 0.2Ω 的导线将电容接地放电，这时电路的等效电阻为绝缘电阻和导线电阻的并接，即

$$R_0 = R\ /\!/\ 0.2 = 52.658\times 10^6\ /\!/\ 0.2 \approx 0.2\Omega$$

因为 $t = 0_+$ 时放电电流最大，所以

$$I_{\max} = \frac{u_C(0_+)}{R_0} = \frac{10\times 10^3}{0.2} = 50\text{kA}$$

时间常数

$$\tau = R_0\text{C} = 0.2\times 15\times 10^{-6} = 3\times 10^{-6} = 3\mu\text{s}$$

在 5τ 时间内，电容若放电完毕，放出的总能量为

$$W_C = \frac{1}{2}\text{C}u_C{}^2(0_+) = \frac{1}{2}\times 15\times 10^{-6}\times(10\times 10^3)^2 = 750\text{J}$$

则放电的平均功率为

$$\overline{P} = \frac{W_C}{5\tau} = \frac{750}{5\times 3\times 10^{-6}} = 50\text{MW}$$

(5) 如果以 $100\text{k}\Omega$ 电阻将其放电，这时电路的放电电阻为

$$R_0 = 100\times 10^3\ /\!/\ 52.658\times 10^6 \approx 100\times 10^3\,\Omega$$

最大放电电流为

$$I_{\max}=\frac{u_C(0_+)}{R_0}=\frac{10\times10^3}{100\times10^3}=0.1\text{A}$$

电路的时间常数

$$\tau=R_0C=100\times10^3\times15\times10^{-6}=1.5\text{s}$$

放电时间为

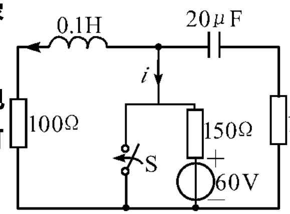
$$t=5\tau=5\times1.5=7.5\text{s}$$

所以放电的平均功率为

$$\overline{P}=\frac{W_C}{5\tau}=\frac{750}{7.5}=100\text{W}$$

◎ 6－8 题 6－8 图示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 闭合，求电流 i。

分析 电路处于稳定状态时，电感相当于短路，电容相当于开路。



题 6－8 图

解 $t=0_-$ 时，电路处于稳定状态，电容看作开路，电感相当于短路。电路如题解 6－8 图(a) 所示，可得

$$i_L(0_-)=\frac{60}{100+150}=0.24\text{A}$$

$$u_C(0_-)=100\times i_L(0_-)=100\times0.24=24\text{V}$$

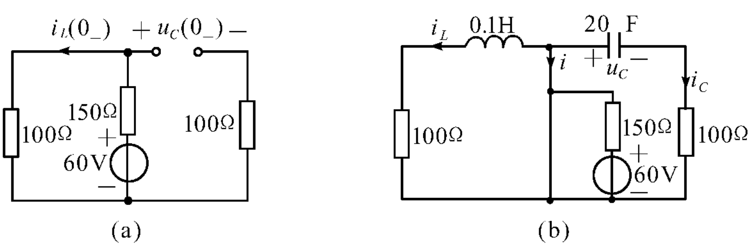
换路时，由于电容电压和电感电流不能跃变，所以有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0.24\text{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=24\text{V}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－8 图(b) 所示，短路线把电路分成了三个相互独立的回路。由 R、L 串联回路可得

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=0.24\mathrm{e}^{-\frac{100}{0.1}t}=0.24e^{-1000t}\text{A}$$



题解 6－8 图

由 R、C 串联回路可得

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=24\mathrm{e}^{-\frac{t}{20\times10^{-6}\times100}}=24\mathrm{e}^{-500t}\text{V}$$

$$i_C=-\frac{u_C(t)}{100}=-\frac{24\mathrm{e}^{-500t}}{100}=-0.24\mathrm{e}^{-500t}$$

故根据 KCL，电流 $i(t)$ 为

$$i(t)=-[i_L(t)+i_C(t)]=0.34[e^{-500t}-e^{-1000t}]\mathrm{A},\quad t>0$$

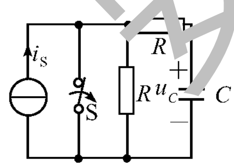
○ 6－9　题 6－9 图所示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 打开，求 u_C 和电流源发出的功率。

解　$t<0$ 时，由于电流源被短路，所以可得电容 C 的初始电压值为

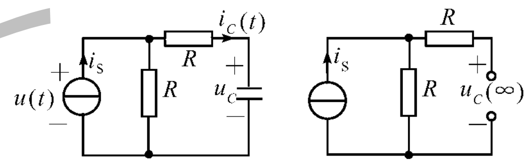
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－9 图(a) 所示。故这是一个求零状态响应问题。一阶 RC 零状态电路的响应为

$$u_C(t)=u_C(\infty)[1-e^{-\frac{t}{\tau}}]$$



题 6－9 图



(a)　(b)

题解 6－9 图

式中，$u_C(\infty)$ 是 $t\to\infty$ 时，电路达到稳定状态，电容上的电压，τ 为电路的时间常数。当 $t\to\infty$ 时，电容相当于开路，如题解 6－9 图(b) 所示，则

$$u_C(\infty)=Ri_S$$

时间常数 τ 为

$$\tau=R_0C=(R+R)C=2RC$$

所以有
$$u_C(t)=Ri_S(1-e^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{V},\quad t>0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=C(-Ri_S\,e^{-\frac{t}{2RC}})(-\frac{1}{2RC})=\frac{1}{2}i_S\,e^{-\frac{t}{2RC}}\ \mathrm{A},\quad t>0$$

电流源两端的电压为

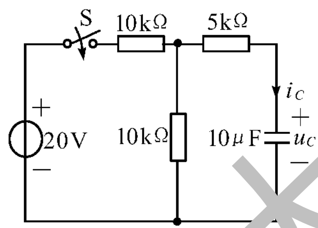
$$u(t)=Ri_C(t)+u_C(t)=R\times\frac{1}{2}i_S\,e^{-\frac{t}{2RC}}+Ri_S(1-e^{-\frac{t}{2RC}})$$

$$=Ri_S(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{V},\quad t>0$$

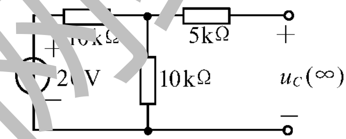
则电流源发出的功率为

$$P=i_Su(t)=Ri_S^2(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{W},\quad t>0$$

○ 6－10　题 6－10 图所示电路中开关 S 闭合前，电容电压 u_C 为零。在 $t=0$ 时 S 闭合，求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$。



题 6－10 图



题解 6－10 图

解　由题意可知,$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$,这是一个求零状态响应的问题。在 $t \to \infty$ 时电路如题解 6－10 图所示,由题解 6－10 图可得

$$u_C(\infty) = \frac{20}{10+10} \times 10 = 10\text{V}$$

等效电阻

$$R_0 = [(10 \mathbin{/\!/} 10) + 5] = 10\text{k}\Omega$$

所以时间常数

$$\tau = R_0 C = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = \frac{1}{10}\text{s}$$

则 $t > 0$ 时,电容电压

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 10(1 - \mathrm{e}^{-10t})\text{V}$$

电容电流为

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-10t}\text{mA}, \quad t > 0$$

○ 6－11　题 6－11 图所示电路中开关 S 打开前已处稳定状态。$t = 0$ 开关 S 打开,求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_L(t)$ 和电压源发出的功率。

解　由题 6－11 图可知,$t < 0$ 时,电感支路被短路,故有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$,这是一个求零状态响应问题。当 $t \to \infty$ 时,电感看作短路,电路如题解 6－11 图所示。应用叠加定理求得 $i_L(\infty)$ 为

$$i_L(\infty) = \frac{10}{2+3+5} + \frac{2 \times 2}{2+3+5} = 1.4\text{A}$$

从电感两端向电路看去的等效电阻为

$$R_0 = 2 + 3 + 5 = 10\Omega$$

则时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.2}{10} = \frac{1}{50}\text{s}$$

故 $t > 0$ 后的电感电流为

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 1.4(1 - \mathrm{e}^{-50t})\text{A}$$

电感电压

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 14e^{-50t}\,V,\quad t > 0$$

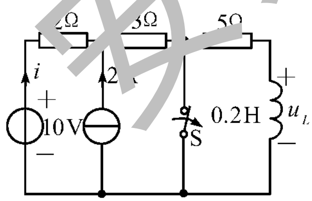
10V 电压源中的电流 i 为

$$i = i_L - 2 = -0.6 - 1.4e^{-50t}\,A,\quad t > 0$$

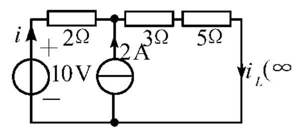
电压源发出的功率为：

$$P = 10 \times i = -6 - 14e^{-50t}\,W,\quad t > 0$$

即，电压源实际的吸收功率。

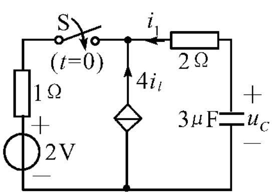


题 6－11 图

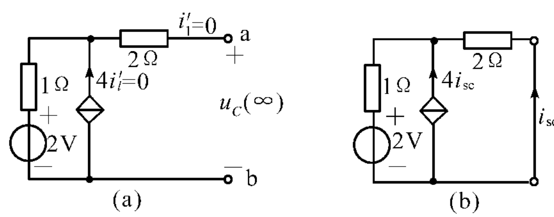


题解 6－11 图

○ 6－12　题 6－12 图所示电路中开关闭合前电容无初始储能，$t = 0$ 时开关 S 闭合，求 $t \geqslant 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$。



题 6－12 图



题解 6－12 图

解　由题意知 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$，这是一个求零状态响应的问题。当 $t \to \infty$ 时，电容看作开路，受控电流源的电流为零，亦看作开路，电路如题解 6－12 图(a)所示。故有

$$u_C(\infty) = 2V$$

求 a、b 端口的等效电阻。用开路短路法求。题解 6－12 图(b) 所示电路中

$$(4i_{sc} + i_{sc}) \times 1 + 2i_{sc} = 2$$

解得

$$i_{sc} = \frac{2}{7}A$$

则等效电阻

$$R_0 = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{u_C(\infty)}{i_{sc}} = \frac{2}{\frac{2}{7}} = 7\Omega$$

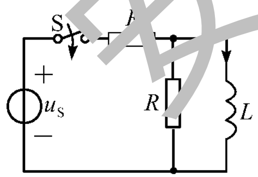
故时间常数

$$\tau = R_0 C = 7 \times 3 \times 10^{-6} = 21 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

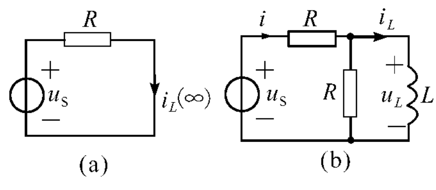
所以 $t > 0$ 后，电容电压

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - \mathrm{e}^{-\frac{10^6 t}{21}})\,\mathrm{V}$$

○ 6－13　题 6－13 图所示电路中 $t = 0$ 时开关 S 闭合，求 i_L 和电源发出的功率。



题 6－13 图



题解 6－13 图

解　显然 $t < 0$ 时，由于开关是打开的，电感中无电流，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

这是一个求零状态响应的问题。由 $t \to \infty$ 时的稳态电路如题解 6－13 图(a) 可得

$$i_L(\infty) = \frac{u_S}{R}$$

由 $t > 0$ 后的电路如题解 6－13 图(b) 可知，从电感两端向电路看去的等效电阻为

$$R_0 = R \mathbin{/\!/} R = \frac{R}{2}$$

从而有时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{2L}{R}\,\mathrm{s}$$

则 $t > 0$ 后，电感电流

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{u_S}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}})\,\mathrm{A}$$

电感电压 u_L 为

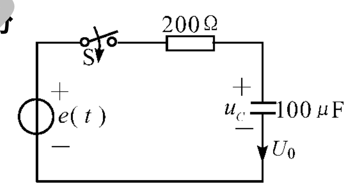
$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_S}{2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\,\mathrm{V}, \quad t > 0$$

由题解 6－13 图(b) 可知，电压源发出的功率

$$P = u_S i = u_S \times (i_L + \frac{u_L}{R}) = \frac{u_S^2}{R}(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}})\,\mathrm{W}, \quad t > 0$$

6－14　题 6－14 图所示电路中 $e(t)=\sqrt{2}\times 220\cos(314t+30^\circ)\text{V}$，$t=0$ 时合上开关 S，求：(1) u_C；(2) U_0 为何值时，暂态分量为零。

分析　电源电压为交流电压，由 KVL 列写电路的微分方程求解即可。



题 6－14 图

解　由题意可知，电容电压的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$$

(1) $t>0$ 时，由 KVL 得电路的微分方程为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t)$$

其通解为　$u_C=u'_C+u''_C$

u'_C 为对应齐次方程的通解，即

$$u'_C=k\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

把 $\tau=RC=200\times 100\times 10^{-6}=0.02\text{s}$ 代入上式中，有 $u'_C=ke^{-50t}$。

u''_C 为非齐次方程的特解，设 $u''_C=U_\text{m}\cos(\omega t+\theta)$ 并代入微分方程中，有

$$U_\text{m}\cos(\omega t+\theta)-\omega RCU_\text{m}\sin(\omega t+\theta)=\sqrt{2}\times 220\cos(314t+30^\circ)$$

用待定系数法确定 U_m 和 θ。引入 $\tan\varphi=\omega CR$，有

$$\sin\varphi=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$

再令 $|Z|=\sqrt{1+(\omega CR)^2}$，则上面等式变为

$$\begin{aligned}U_\text{m}[\cos(\omega t+\theta)-\omega RC\sin(\omega t+\theta)]&=U_\text{m}|Z|[\cos(\omega t+\theta)\cos\varphi-\sin(\omega t+\theta)\sin\varphi]\\&=U_\text{m}|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)\end{aligned}$$

于是，得

$$U_\text{m}|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)=\sqrt{2}\times 220\times\cos(314t+30^\circ)$$

比较等式两边，可求得各待定系数为

$$U_\text{m}=\frac{\sqrt{2}\times 220}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}=\frac{\sqrt{2}\times 220}{\sqrt{1+(200\times 314\times 100\times 10^{-6})^2}}=34.6\sqrt{2}\text{V}$$

$$\omega=314\text{rad/s}$$

$$\theta=30^\circ-\varphi=30^\circ-\arctan(\omega RC)=30^\circ-80.95^\circ=-50.95^\circ\text{V}$$

所以，特解

$$u''_C=34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95^\circ)\text{V}$$

方程的通解为

$$u_C(t)=u'_C+u''_C=k\mathrm{e}^{-50t}+34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95^\circ)\text{V}$$

代入初条件 $u_C(0_+) = U_0$，得常数

$$k = U_0 - 34.6\sqrt{2}\cos(-50.95°) = U_0 - 30.825$$

因而电压 u_C 为

$$u_C(t) = (U_0 - 30.825)\mathrm{e}^{-50t} + 34.6\sqrt{2}\cos(314t - 50.95°)\mathrm{V}, \quad t > 0$$

（2）由 $u_C(t)$ 可知，当 $U_0 = 30.825\mathrm{V}$ 时，

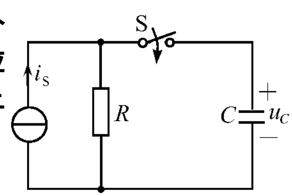
$$u_C(t) = 34.6\sqrt{2}\cos(314t - 50.95°)\mathrm{V}$$

无暂态分量。

小结 本题分析较为简单，求解方程特解时要选定正确的方法，利用特定系数法较为容易。

○ 6－15 题 6－15 图所示电路中 $i_S = 6\mathrm{A}$，$R = 2\Omega$，$C = 1F$，$t = 0$ 时闭合开关 S，在下列两种情况下，求 u_C，i_C 以及电流源发出的功率：(1)$u_C(0_-) = 3\mathrm{V}$；(2)$u_C(0_-) = 15\mathrm{V}$。

解 由题意知：$u_C(0_+) = u_C(0_-) \neq 0$，$t > 0$ 后，电路有外加激励电源的作用，即本问题为一阶电路的全响应问题。对线性电路而言，其全响应等于零输入响应与零状态响应之和，即



题 6－15 图

$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

由图可知 $t \to \infty$ 时，

$$u_C(\infty) = Ri_S = 2 \times 6 = 12\mathrm{V}$$

时间常数

$$\tau = RC = 2 \times 1 = 2\mathrm{s}$$

（1）当 $u_C(0_-) = 3\mathrm{V}$ 时

$$u_C(t) = 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 12(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}) = 12 - 9\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{V}, \quad t > 0$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 1 \times (-9)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \times (-\frac{1}{2})$$

$$= 4.5\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{A}, \quad t > 0$$

由于电流源的端电压等于 $u_C(t)$，故电流源发出的功率为

$$P_{(t)} = i_S u_C(t) = 6 \times (12 - 9\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}) = 72 - 54\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{W}, \quad t > 0$$

（2）当 $u_C(0_-) = 15\mathrm{V}$ 时，零输入响应为

$$u_{C1}(t) = 15\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

零状态响应仍为

$$u_{C2}(t) = 12(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})$$

所以电容电压的全响应应为

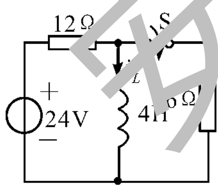
$$u_C(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)=12+3e^{-0.5t}\,\mathrm{V},\quad t>0$$

则

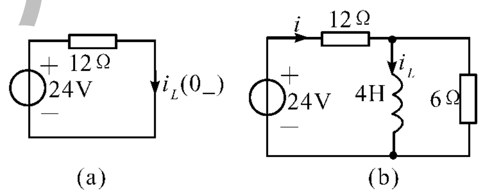
$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=1\times 3e^{-0.5t}\times(-0.5)=-1.5e^{-0.5t}\,\mathrm{A},\quad t>0$$

$$P(t)=i_S u_C(t)=6\times(12+3e^{-0.5t})=72+18e^{-0.5t}\,\mathrm{W},\quad t>0$$

○ 6－16　题 6－16 图所示电路中直流电压源的电压为 24V，且电路原已达稳定，$t=0$ 时合上开关 S，求：(1) 电感电流 i_L；(2) 直流电压源发出的功率。



题 6－16 图



题解 6－16 图

解　(1) 计算初始值。$t<0$ 时，电路如题解 6－16 图(a) 所示，因此，有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{24}{12}=2\mathrm{A}$$

$t>0$ 的电路如题解 6－16 图(b) 所示，可知

$$i_L(\infty)=\frac{24}{12}=2\mathrm{A}$$

时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{4}{12\,/\!/\,6}=\frac{4}{4}=1\mathrm{s}$$

利用三要素公式得

$$i_L(t)=2+(2-2)e^{-t}=2\mathrm{A}$$

以上结果说明，当电路的 $f(\infty)=f(0_+)$ 时，过渡时间为零，电路直接进入稳定状态。

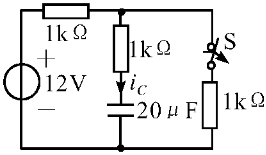
(2) 由题解 6－16 图(b) 所示电路可得

$$i(t)=\frac{24+6i_L(t)}{12+6}=2\mathrm{A}$$

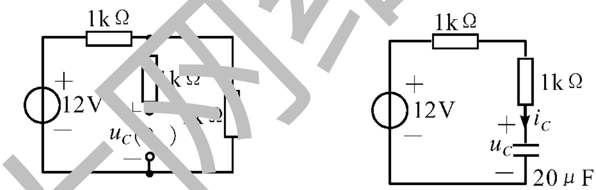
所以电压源发出的功率

$$P=24\times i=24\times 2=48\mathrm{W}$$

○ 6－17　题 6－17 图所示电路中，开关 S 打开以前已达稳定，$t=0$ 时，开关 S 打开。求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_C(t)$，并求 $t=2\mathrm{ms}$ 时电容的能量。



题 6—17 图



(a) (b)

题解 6—17 图

解 $t<0$ 时的电路，如题解 6—17 图(a) 所示，则

$$u_C(0_-)=\frac{12\times 1}{1+1}=6\text{V}$$

所以初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6—17 图(b) 所示。当 $t\to\infty$ 时，电容看作断路，有

$$u_C(\infty)=12\text{V}$$

时间常数

$$\tau=R_0C=(1+1)\times 10^3\times 20\times 10^{-6}=0.04\text{s}$$

利用三要素公式，得

$$u_C(t)=12+(6-12)\text{e}^{-\frac{t}{0.04}}=12-6\text{e}^{-25t}\text{V},\quad t>0$$

电容电流

$$i_C(t)=C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=3\times\text{e}^{-25t}\text{mA},\quad t>0$$

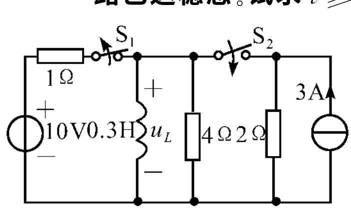
$t=2\text{ms}$ 时，

$$u_C(2\text{ms})=12-6\text{e}^{-25\times 2\times 10^{-3}}=12-6\text{e}^{-0.05}=6.293\text{V}$$

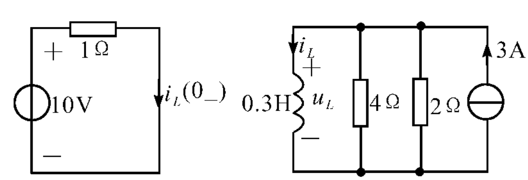
电容的储能为

$$W_C(2\text{ms})=\frac{1}{2}Cu_C^2(2\text{ms})=\frac{1}{2}\times 20\times 10^{-6}\times 6.293^2=396\times 10^{-6}\text{J}$$

● 6—18 题 6—18 图所示电路中 $t=0$ 时开关 S_1 打开，S_2 闭合，在开关动作前，电路已达稳态。试求 $t\geqslant 0$ 时的 $u_L(t)$、$i_L(t)$。



题 6—18 图



(a) (b)

题解 6—18 图

分析　$t<0$ 时，电感相当于短路，$t\geqslant 0$ 时，电路为一阶 RL 并联电路。

解　$t<0$ 时，电路处于稳态，电路如题解 6－18 图(a) 所示，则

$$i_L(0_-)=\frac{10}{1}=10\text{A}$$

故电感电流的初值为

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=10\text{A}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－18 图(b) 所示。当 $t\to\infty$ 时，电感看作短路，因此

$$i_L(\infty)=3\text{A}$$

时间常数

$$\tau=\frac{L}{R_o}=\frac{0.3}{4\,/\!/\,2}=\frac{9}{40}\text{s}$$

根据三要素公式，有

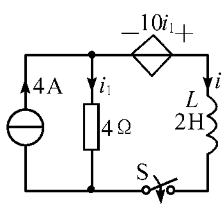
$$i_L(t)=3+(10-3)\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}=3+7\text{e}^{-\frac{40t}{9}}\text{A},\quad t>0$$

则电感电压

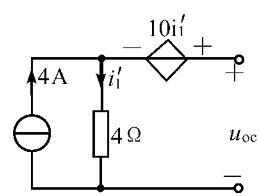
$$u_L(t)=L\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t}=0.3\times 7\text{e}^{-\frac{40t}{9}}\times\left(-\frac{40}{9}\right)=-\frac{28}{3}\text{e}^{-\frac{40t}{9}}\text{V},\quad t>0$$

小结　含有开关的电路，关键分析开头状态变动时刻，此刻电容两端电压不变，流过电感的电流不变。

◎ 6－19　题 6－19 图所示电路中，开关原打开，$t=0$ 时将开关 S 闭合，已知 $i_L(0_-)=0$，求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$。



题 6－19 图



题解 6－19 图

分析　$t<0$ 时，电感两端没有电流通过，S 闭合后，$i_L(0_+)=0$。

解　由题意知：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，$t\to\infty$ 时，L 看作短路，由 KVL 得

$$10i_1(\infty)+4i_1(\infty)=0$$

解得 $i_1(\infty)=0$，所以 i_L 的稳态值为电流源的电流，即 $i_L(\infty)=4\text{A}$

把电感断开，电路如题解 6－19 图所示。由题解 6－19 图知，开路电压

$$u_{oc}=10{i_1}'+4{i_1}'=14{i_1}'=14\times 4=56\text{V}$$

由开路、短路法可求得等效电阻 $R_0=\dfrac{u_{oc}}{i_{sc}}=\dfrac{u_{oc}}{i_L(\infty)}=\dfrac{56}{4}=14\Omega$

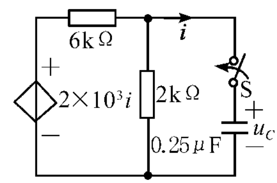
故电路的电间常数 $\tau = \dfrac{L}{R_0} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}\mathrm{s}$

利用三要素公式，可得

$$i_L(t) = 4 + (0-4)\mathrm{e}^{-7t} = 4(1-\mathrm{e}^{-7t})\mathrm{A},\quad t > 0$$

○ 6－20　题 6－20 图所示电路中，已知 $u_C(0_-) = 6\mathrm{V}$，$t = 0$ 时将开关 S 闭合，求 $t > 0$ 时的电流 i。

解　由题意知电容电压的初始值为



题 6－20 图

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\mathrm{V}$$

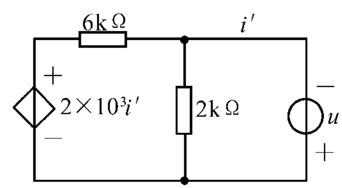
$t \to \infty$ 时，由于电路中无独立电源，故必有

$$u_C(\infty) = 0$$

把电容断开，外加电压源，如题解 6－20 图所示，由 KVL 得

$$\begin{aligned} u' &= -2\times 10^3 i' + 6\times 10^3 \left(i' - \frac{u'}{2\times 10^3}\right) \\ &= 4\times 10^3 i' - 3u' \end{aligned}$$

从中解出



题解 6－20 图

$$u' = 10^3 i'$$

故电路的等效电阻

$$R_0 = \frac{u'}{i'} = 10^3\Omega$$

电路的时间常数

$$\tau = R_0 C = 10^3 \times 0.25\times 10^{-6} = 0.25\times 10^{-3}\mathrm{s}$$

由三要素公式，可得电容电压

$$u_C(t) = 6\mathrm{e}^{-\frac{10^3 t}{0.25}} = 6\mathrm{e}^{-4\times 10^3 t}\mathrm{V},\quad t > 0$$

所以电容电流

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -6\times 10^{-3}\mathrm{e}^{-4\times 10^3 t}\mathrm{A} = -6\mathrm{e}^{-4000t}\mathrm{mA},\quad t > 0$$

○ 6－21　题 6－21 图所示电路中，已知 $i_S = 10\varepsilon(t)\mathrm{A}$，$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = 2\Omega$，$C = 1\mu F$，$u_C(0_-) = 2\mathrm{V}$，$g = 0.25\mathrm{S}$。求全响应 $i_1(t)$，$i_C(t)$，$u_C(t)$。

解　把电容断开，如题解 6－21 图(a) 所示，先求 $t > 0$ 时一端口电路的戴维宁等效电路。由 KVL，得

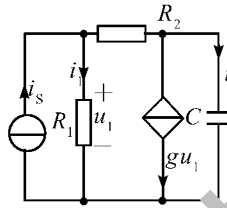
$$u_{oc} = u_1' - R_2 g u_1'$$

由 KCL 得

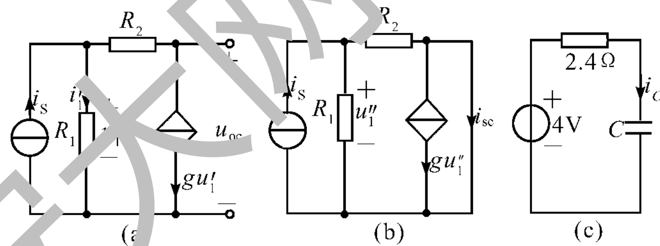
$$\frac{u_1'}{R_1} + g u_1' = i_S$$

联立求解以上两个方程，解得

$$u_{oc} = (1 - R_2 g)\frac{i_S R_1}{1 + R_1 g} = (1 - 2 \times 0.25) \times \frac{10 \times 1}{1 + 1 \times 0.25} = 4\text{V}$$



题 6－21 图



题解 6－21 图

把端口短路，如题解 6－21 图(b) 所示，得短路电流

$$i_{sc} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_S - g u_1'' = \frac{R_1 i_S}{R_1 + R_2}(1 - gR_2) = \frac{1 \times 10}{1 + 2} \times (1 - 0.25 \times 2) = \frac{5}{3}\text{A}$$

故等效电阻

$$R_0 = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{12}{5} = 2.4\Omega$$

等效电路如题解 6－21 图(c) 所示。显然

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$$

$$u_C(\infty) = u_{oc} = 4\text{V}$$

$$\tau = R_0 C = 2.4 \times 1 \times 10^{-6} = 2.4 \times 10^{-6}\text{s}$$

代入三要素公式中，得电容电压

$$u_C(t) = 4 + (2 - 4)e^{-\frac{10^6 t}{2.4}} = 4 - 2e^{-4.17 \times 10^5 t}\text{V}, \quad t > 0$$

电容电流为

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0.833e^{-4.17 \times 10^5 t}\text{A}, \quad t > 0$$

在原电路中，应用 KCL，有

$$i_1 + g u_1 + i_C = i_S$$

把 $u_1 = R_1 i_1$ 代入，解得电流

$$i_1(t) = \frac{i_S - i_C}{1 + R_1 g} = \frac{10 - 0.833e^{-4.17 \times 10^5 t}}{1 + 0.25} = 8 - 0.667e^{-4.17 \times 10^5 t}\text{A}, \quad t > 0$$

○ 6－22　题 6－22 图(a) 所示电路中的电压 $u(t)$ 的波形如题 6－22 图(b) 所示，试求电流 $i(t)$。

解　将电路的工作过程分段。

在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 区间，为电路的零状态的响应，

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{1}{2 /\!/ 3} = \frac{5}{6}\text{s}$$

稳态值为

$$i_L = \frac{2}{2} = 1\text{A}$$

故电流

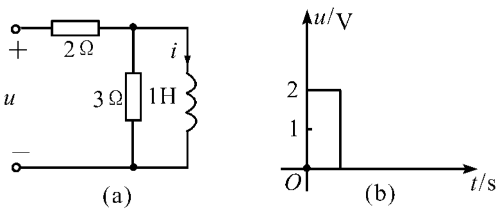
$$i(t) = (1 - e^{-\frac{6}{5}t})\text{A}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

在 $1 \leqslant t < \infty$ 区间，为电路的零输入响应，此时的初值为

$$i_L(1) = (1 - e^{-\frac{6}{5}}) = 0.699\text{A}$$

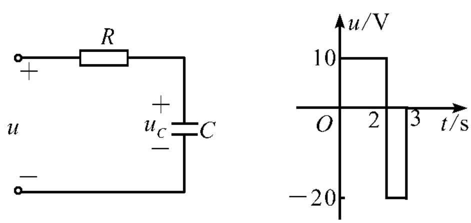
故有

$$i(t) = i_L(t) = 0.699e^{-\frac{6}{5}(t-1)}\text{A}, \quad t > 1\text{s}$$



题 6－22 图

◎ 6－23　RC 电路中，电容 C 原未充电，所加 $u(t)$ 的波形如题 6－23 图所示，其中 $R = 1000\Omega, C = 10\mu F$。求：(1) 电容电压 u_C；(2) 用分段形式写出 u_C；(3) 用一个表达式写出 u_C。



题 6－23 图

分析　电源电压是分段的，对电路分段求解即可。

解　(1) 分段求解。在 $0 \leqslant t < 2$ 区间，RC 电路的零状态响应为

$$u_C(t) = 10(1 - e^{-100t})\text{V}$$

$t = 2\text{s}$ 时，

$$u_C(2) = 10(1 - e^{-100\times 2}) \approx 10\text{V}$$

在 $2 \leqslant t < 3$ 区间，RC 的全响应为

$$u_C(t) = -20 + [10 - (-20)]e^{-100(t-2)} = -20 + 30e^{-100(t-2)}\,\text{V}$$

$t = 3\text{s}$ 时，

$$u_C(3) = -20 + 30e^{-100(3-2)} \approx -20\text{V}$$

在 $3 \leqslant t < \infty$ 区间，RC 的零输入响应为

$$u_C(t) = u_C(3)e^{-100(t-3)} = -20e^{-100(t-3)}\,\text{V}$$

(2) 分段形成的 u_C：

$$u_C(t)\begin{cases} 10(1 - e^{-100t})\,\text{V}, & 0 \leqslant t < 2\text{s} \\ -20 + 30e^{-100(t-2)}\,\text{V}, & 2 \leqslant t < 3\text{s} \\ -20e^{-100(t-3)}\,\text{V}, & 3 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

(3) 用阶跃函数表示激励，有

$$u_S(t) = 10\varepsilon(t) - 30\varepsilon(t-2) + 20\varepsilon(t-3)\,\text{V}$$

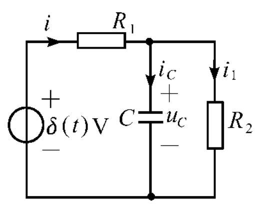
而 RC 串联电路的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) = (1 - e^{-100t})\varepsilon(t)\,\text{V}$$

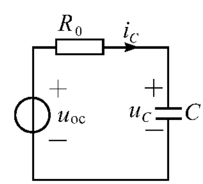
根据电路的线性时不变特性，有

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 10s(t) - 30s(t-2) + 20s(t-3) \\ &= 10(1-e^{-100t})\varepsilon(t) - 30(1-e^{-100(t-2)})\varepsilon(t-2) + 20(1-e^{-100(t-3)})\varepsilon(t-3)\,\text{V} \end{aligned}$$

○ 6－24　题 6－24 图所示电路中，$u_C(0_-) = 0$，$R_1 = 3\text{k}\Omega$，$R_2 = 6\text{k}\Omega$，$C = 2.5\mu F$，试求电路的冲激响应 i_C，i_1 和 u_C。



题 6－24 图



题解 6－24 图

解　应用戴维宁定理把原电路变化为题解 6－24 图所示的电路。其中

$$u_{oc} = \frac{R_2\delta(t)}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}\delta(t)\,\text{V}$$

$$R_0 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 2\text{k}\Omega$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[\frac{400}{3}e^{-200t}\varepsilon(t)\right] \\ &= 2.5\times 10^{-6}\times\left[\frac{400}{3}\delta(t) + \frac{400}{3}e^{-200t}\varepsilon(t)\times(-200)\varepsilon(t)\right] \\ &= 0.333\delta(t) - 66.66e^{(-200)t}\,\text{mA} \end{aligned}$$

回到题 6－24 图所示原电路求 $i_1(t)$：

$$i_1(t)=\frac{u_C(t)}{R_2}$$

$$=\frac{\frac{400}{3}\mathrm{e}^{-200t}\cdot\varepsilon(t)}{6\times10^3}$$

$$=22.22\mathrm{e}^{-200t}\cdot\varepsilon(t)$$

利用阶跃响应求冲激响应。

由于阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 和冲激函数 $\delta(t)$ 之间满足关系

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

因此线性电路中阶跃响应 $s(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 之间满足

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

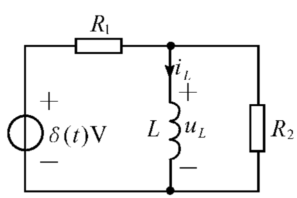
设题解 6－24 图中电路的电压源 $u_{\mathrm{oc}}=\frac{2}{3}\varepsilon(t)$。其阶跃响应为

$$s_{u_C}(t)=\frac{2}{3}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_0C}})\varepsilon(t)=\frac{2}{3}(1-\mathrm{e}^{-200t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

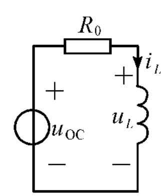
则冲激响应为

$$u_C(t)=\frac{\mathrm{d}s_{u_C}(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-200t}\times(-200)\varepsilon(t)=\frac{400}{3}\mathrm{e}^{-200t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

◎6－25 题 6－25 图所示电路中，$i_L(0_-)=0$，$R_1=60\Omega$，$R_2=40\Omega$，$L=100\mathrm{mH}$，试求冲激响应 i_L，u_L。



题 6－25 图



题解 6－25 图

分析 先将电路等效为戴维宁电路即可容易求解。

解 应用戴维宁定理把原电路变为题解 6－25 图所示的等效电路。其中

$$u_{\mathrm{oc}}=\frac{R_2\delta(t)}{R_1+R_2}=\frac{40\delta(t)}{60+40}=0.4\delta(t)\mathrm{V}$$

$$R_0=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{60\times40}{60+40}=24\Omega$$

应用 KVL，可得电路方程

$$R_0i_L+u_L=u_{\mathrm{oc}}$$

即

$$R_0 i_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0.4\delta(t),\quad t > 0_-$$

把上式在 0_- 与 0_+ 时间域积分，得

$$\int_{0_-}^{0_+} R_0 i_L \mathrm{d}t + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \int_{0_-}^{0_+} 0.4\delta(t)\mathrm{d}t = 0.4$$

考虑到 $i_L(t)$ 不是冲激函数，有$\int_{0_-}^{0_+} \mathrm{R}_{0L}\,\mathrm{d}t = 0$，上式积分为

$$L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 0.4$$

因 $i_L(0_-) = 0$，所以有

$$i_L(0_+) = \frac{0.4}{L} = \frac{0.4}{100\times 10^{-3}} = 4\mathrm{A}$$

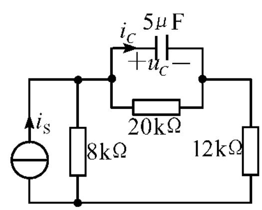
则电路的冲激响应为

$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) = 4\mathrm{e}^{-240t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

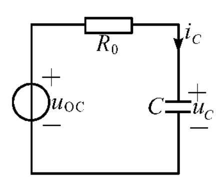
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 100\times 10^{-3}\times[4\delta(t) + 4\mathrm{e}^{-240t}\times(-240)\varepsilon(t)]$$

$$= 0.4\delta(t) - 96\mathrm{e}^{-240t}\varepsilon(t)\mathrm{V},\quad t > 0_-$$

● 6－26　题 6－26 图所示电路中，电容原来充电，求当 i_S 给定下列情况时的 u_C 和 i_C：(1)$i_S = 25\varepsilon(t)\mathrm{mA}$；(2)$i_S = \delta(t)\mathrm{mA}$。



题 6－26 图



题解 6－26 图

分析　先将电路等效为戴维宁电路，再进行求解即可。

解　题 6－26 图所示电路的戴维宁等效电路如题解 6－26 图所示，其中

$$u_{oc} = \frac{8\times i_S}{8+20+12}\times 20\times 10^3 = \frac{160\times 10^3 i_S}{40} = 40\times 10^3 i_S$$

$$R_0 = \frac{20\times(8+12)}{8+12+20} = \frac{20\times 20}{40} = 10\mathrm{k\Omega}$$

(1) 当 $i_S = 25\varepsilon(t)\mathrm{mA}$ 时，　$u_{oc} = 4\times 10^3\times 25\times 10^{-3}\varepsilon(t) = 100\varepsilon(t)\mathrm{V}$

时间常数

$$\tau = R_0 C = 10\times 10^3\times 5\times 10^{-6} = 5\times 10^{-2}\mathrm{s}$$

所以电容电压为

$$u_C(t) = u_{oc}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 100(1 - e^{-20t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 10e^{-20t}\varepsilon(t)\mathrm{mA}$$

(2) 当 $i_S = \varepsilon(t)\mathrm{mA}$ 时，根据线性电路的齐性定理，(1) 中电路的单位阶跃响应应为

$$Su_C(t) = \frac{100}{25}(1 - e^{-20t})\varepsilon(t) = 4(1 - e^{-20t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

所以单位冲激响应为

$$u_C(t) = \frac{\mathrm{d}Su_C(t)}{\mathrm{d}t} = -4e^{-20t}\times(-20)\varepsilon(t) = 80e^{-20t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0.4\delta(t) - 8e^{-20t}\varepsilon(t)\mathrm{mA},\quad t > 0_-$$

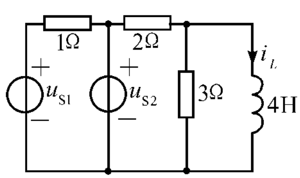
小结　单位冲激响应 $h(t)$ 同单位阶跃响应的关系为 $h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$，$S(t) = \int h(\xi)\mathrm{d}\xi$。

○ 6－27　(1) $u_C(t) = \frac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$

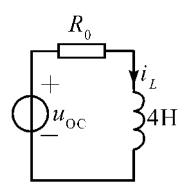
(2) $u_C(t) = [\frac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}(t)} + 2e^{-\frac{10^3}{9}(t)}]\varepsilon(t)\mathrm{V}$

(3) $u_C(t) = [\frac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}(t-2)}]\varepsilon(t-2) + 2e^{-\frac{10^3}{9}t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$

◎ 6－28　题 6－28 图所示电路中，$u_{S1} = \varepsilon(t)\mathrm{V}$，$u_{S2} = 5\varepsilon(t)\mathrm{V}$，试求电路响应 $i_L(t)$。



题 6－28 图



题解 6－28 图

分析　将左边复杂电路等效为戴维宁电路即可容易求解。

解　原电路的戴维宁等效电路如题解 6－28 图所示，由于 u_{S_1} 所在支路对电感电流没有影响，可以断开，所以有

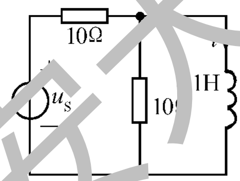
$$u_{oc} = \frac{u_{S_2}\times 3}{2+3} = 0.6u_{S_2} = 3\varepsilon(t)$$

$$R_0 = 2 \mathbin{/\!/} 3 = 1.2\Omega$$

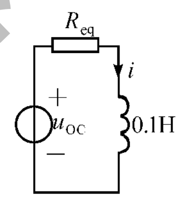
电路的时间常数 $\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{4}{1.2} = \frac{10}{3}\mathrm{s}$

故电感电流为 $i_L(t)=\dfrac{u_{oc}}{R_0}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=2.5(1-\mathrm{e}^{-0.\,t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$

◯6－29　题 6－29 图所示电路中电压 $u_S=[50\varepsilon(t)+2\delta(t)]\mathrm{V}$，求 $t>0$ 时电感支路的电流 $i(t)$。



题 6－29 图



题解 6－29 图

解　原图可以等效为题解 6－29 图所示的电路，其中

$$u_{oc}=\frac{1}{2}u_S=25\varepsilon(t)+\delta(t)\mathrm{V}$$

$$R_{eq}=10\,/\!/\,10=5\Omega$$

电路的时间常数有

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{0.1}{5}=\frac{1}{50}\mathrm{s}$$

因此电路的单位阶跃响应为

$$s_i(t)=\frac{1}{R_0}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)=0.2(1-\mathrm{e}^{-50t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

根据线性电路的叠加性和齐次性，把 u_{oc} 看成是两个激励源之和，因此当 $25\varepsilon(t)$ 作用时，有

$$i'(t)=25s_i(t)=5(1-\mathrm{e}^{-50t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

当 $\delta(t)$ 作用时，

$$i''(t)=\frac{\mathrm{d}s_i(t)}{\mathrm{d}t}=-0.2\mathrm{e}^{-50t}\times(-50)\varepsilon(t)=10\mathrm{e}^{-50t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

所以当两部分激励共同作用时，响应 $i(t)$ 为

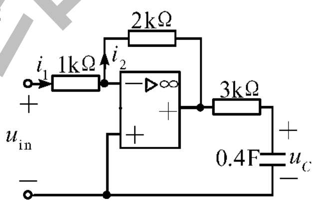
$$\begin{aligned}i(t)&=i'(t)+i''(t)\\&=[5(1-\mathrm{e}^{-50t})+10\mathrm{e}^{-50t}]\varepsilon(t)\\&=(5+5\mathrm{e}^{-50t})\varepsilon(t)\mathrm{A}\end{aligned}$$

◯ 6－30　$u_2(t)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}$

◯6－31　略

◯ 6－32　题 6－32 图所示电路中含有理想运算放大器，试求零状态响应 $u_C(t)$，已知 $u_{in}=5\varepsilon(t)\mathrm{V}$。

解 先求从电容两端看进去的一端口电路的戴维宁等效电路。把电容断开，根据理想运算放大器的性质可知



题 6－32 图

$$i_1 = i_2 = \frac{u_{in}}{1\times10^3} = \frac{5\varepsilon(t)}{1\times10^3} = 5\varepsilon(t)\,\mathrm{mA}$$

$$u_{oc} = -2\times10^3\times i_2 = -10\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

外加电压源如题解 6－32 图(a) 所示，求等效电阻。由题解 6－32 图(a) 可知

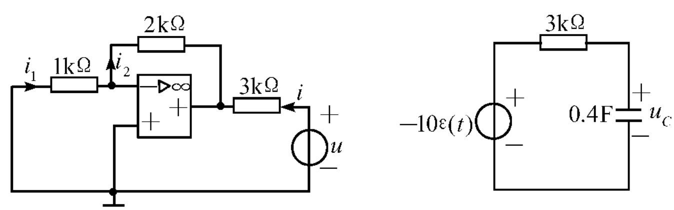
$$i_1 = i_2 = 0,\quad u = 3\times10^3 i$$

所以等效电阻为 $R_0 = \dfrac{u}{i} = 3\times10^3\,\Omega$

等效电路如题解 6－32 图(b) 所示。因此有

$$u_C(t) = u_{oc}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = -10(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_0C}})\varepsilon(t)$$

$$= -10(1-\mathrm{e}^{-\frac{10^{-2}}{12}t})\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$



(a) (b)

题解 6－32 图

第七章

二阶电路

学习要求

1. 了解二阶电路的定义，会从电路结构直观判断二阶电路。
2. 会列写简单二阶电路的微分方程。
3. 了解二阶电路零输入响应、阶跃响应、冲激响应的定义与求解方法。
4. 深刻理解和掌握二阶电路零输入响应的 4 种性质与电路参数的关系。
5. 深刻掌握二阶非齐次方程的求解。

知识网络图

- 二阶电路
  - 二阶微分方程
  - 二阶电路
    - 二阶电路的零输入响应
    - 二阶电路的零状态响应
      - 阶跃响应
      - 冲激响应
    - 二阶电路的全响应

课后习题全解

○7－1　**电路如题 7－1 图所示，开关未动作前电路已达稳态，$t=0$ 时开关 S 打开。求** $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}$。

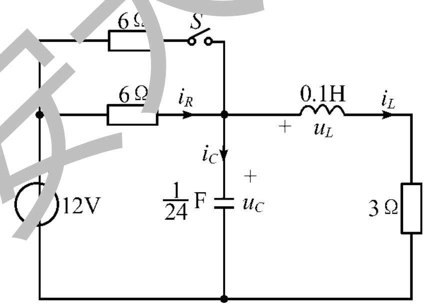


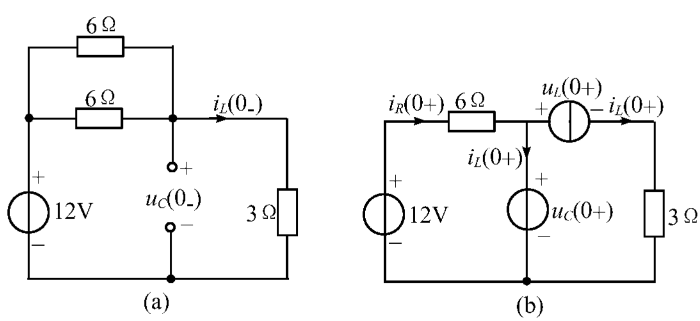
图 7－1

解　①$t<0$ **时，电路处于稳态，如题解 7－1 图**(a)**所示，求** $u_C(0_-)$，$i_L(0_-)$。

由题解图 7－1 图(a)**知**　$i_L(0_-)=\dfrac{12}{6/\!/6+3}=2\text{A}$，$u_C(0_-)=3\times i_L(0_-)=6\text{V}$

根据换路定律，得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}，u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$$



题解 7－1 图

②**画** 0_+ **时刻的电路图如题解 7－1 图**(b)**所示。**

$$i_R(0_+)=\frac{12-u_C(0_+)}{6}=1\text{A}$$

$$C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=i_C(0_+)=i_R(0_+)-i_L(0_+)=-1\text{A}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{1}{C}i_C(0_+)=-24\mathrm{V/s}$$

而

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=u_L(0_+)=u_C(0_+)-3i_L(0_+)=0$$

所以

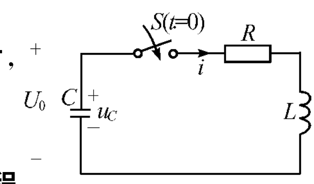
$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{12-u_C(0_+)}{6}\right)\right|_{0_+}=-\frac{1}{6}\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=-\frac{1}{6}\times(-24)=4\mathrm{A/s}$$

◎7－2　题 7－2 图所示电路中，电容原先已充电，$u_C(0_-)=U_0=6\mathrm{V}$，$R=2.5\Omega$，$L=0.25\mathrm{H}$，$C=0.25\mathrm{F}$。试求：

(1) 开关闭合后的 $u_C(t)$、$i(t)$；

(2) 使电路在临界阻尼下放电，当 L 和 C 不变时，电阻 R 应为何值？



题 7－2 图

分析　此为 RLC 串联电路，列写微分方程求解即可。

解　(1)开关闭合后如题解 7－2 图所示，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=-C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

该微分方程对应的特征方程为　$LCp^2+RCp+1=0$

将已知条件 $L=0.25H$，$C=0.25F$，$R=2.5\Omega$ 代入得

$$0.0625p^2+0.625p+1=0$$

即　$$p^2+10p+16=0$$

解得　$$p_1=-8,\quad p_2=-2$$

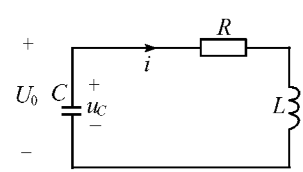
电路处于过阻尼状态，设微分方程的通解为

$$u_C(t)=A_1\mathrm{e}^{-8t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

代入初始值 $u_C(0_+)=6\mathrm{V}$，$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$，得

$$A_1+A_2=6,\quad -8A_1-2A_2=0$$

解得　$$A_1=-2,\quad A_2=8$$



题解 7－2 图

所以

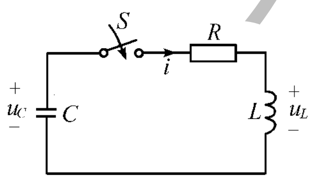
$$u_C(t)=8e^{-2t}-2e^{-8t}\text{V},\quad i(t)=-C\frac{du_C}{dt}=4\times(e^{-2t}-e^{-8t})\text{A}$$

(2)要使电路在临界阻尼下放电，应满足

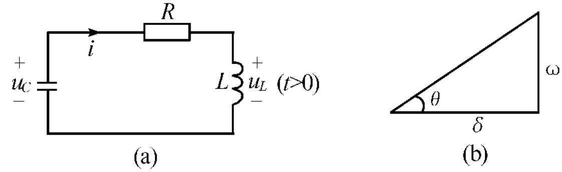
$$(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}=0$$

$$R=\sqrt{\frac{L}{C}}=2\sqrt{\frac{0.25}{0.25}}=2\Omega$$

○7—3　已知题 7—3 图所示电路中 $R=1\text{k}\Omega$，$C=2\mu\text{F}$，$L=2.5\text{H}$。设电容原先已充电且 $u_C(0_-)=10\text{V}$。在 $t=0$ 时开关 S 闭合。试求 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_L(t)$以及 S 闭合后的 i_{max}。



题 7—3 图



题解 7—3 图

解　$t>0$ 电路如题解 7—3 图(a)所示，电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

方程的特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

代入已知条件：

$$R=1000\Omega,C=2\mu\text{F}=2\times10^{-6}\text{F},L=2.5\text{H}$$

解得

$$p_1=-200+\text{j}400,\quad p_2=-200-\text{j}400$$

因 p_1 和 p_2 为一对共轭复根，故电路处于欠阻尼状态。
微分方程的通解为

$$u_C(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)\varepsilon(t)$$

式中

$$\omega=400,\quad \delta=200$$

将初始条件

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\text{V},C\frac{du_C}{dt}\bigg|_{0_+}=-i_L(0_+)=0$$

代入，得

$$A\sin\theta = u_C(0_+) = 10\text{V},\quad -\delta A\sin\theta + \omega A\cos\theta = \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = 0$$

解得　　$\theta = \arctan\dfrac{\omega}{\delta} = \arctan 2 = 63.4°$，　$A = \dfrac{u_C(0_+)}{\sin\theta} = 11.18$

故

$$u_C(t) = 11.18\mathrm{e}^{-200t}\sin(400t + 63.4°)\text{V}$$

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CA[-\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \theta) + \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \theta)\cdot\omega]$$

$$= CA\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\omega^2 + \delta^2}\sin(\omega t + \theta - \arctan\frac{\omega}{\delta})$$

如题解 7—3 图(b)，因为 $\theta = \arctan\dfrac{\omega}{\delta}$，$A = \dfrac{u_C(0_+)}{\sin\theta}$，$\sin\theta = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}$ 于是

$i(t) = CA\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\omega^2 + \delta^2}\sin\omega t = C\dfrac{u_C(0_+)}{\omega}(\omega^2 + \delta^2)e^{-\delta t}\sin\omega t = 10\mathrm{e}^{-200t}\sin 400t$ mA

$u_C(t)$ 与 $u_L(t)$ 方向相反，故其相位之和为 0，幅值大小一致，因此

$$u_L = -A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t - \theta) = -11.18\mathrm{e}^{-200t}\sin(400t - 63.4°)\text{V}$$

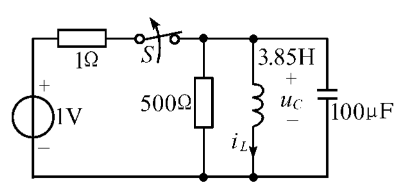
当 $\dfrac{\mathrm{d}i(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = 0$，即 $\dfrac{u_L(t)}{L} = 0$ 时，$400t - 63.4° = 0$

解得

$$t = \frac{63.4\times\pi}{400\times 180} = 2.768\times 10^{-3}\text{s}$$

电流达最大值，$i_{\max} = 10\mathrm{e}^{-200\times 2.768\times 10^{-3}}\sin(400\times 2.768\times 10^{-3}) = 5.142\text{mA}$

○7—4　题 7—4 图所示电路中开关 S 闭合已久，$t=0$ 时，S 打开。求 u_C、i_L。



题 7—4 图

解　$t>0$，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = 0$$

特征方程为

$$LCp^2 + \frac{L}{R}p + 1 = 0$$

将已知条件：$L = 3.85\text{H}$，$R = 500\Omega$，$C = 100\times 10^{-6}\text{F}$ 代入，解得

$$p_1 = -10 + \mathrm{j}49.97,\quad p_2 = -10 - \mathrm{j}49.97$$

设方程的通解为

$$i_L(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \theta)$$ 式中 $\delta = 10$，$\omega = 49.97$

将初始条件：　$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \dfrac{1}{1} = 1\text{A}$，　$u_C(0_+) = L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = 0$

代入可得
$$\begin{cases} A\sin\theta=1 \\ -A\delta\sin\theta+A\omega\cos\theta=0 \end{cases}$$

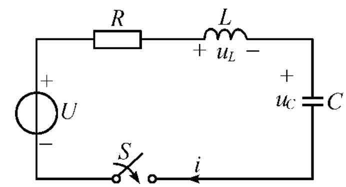
解得

$$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\frac{49.97}{10}=78.68°,\quad A=\frac{1}{\sin\theta}=1.02$$

故
$$i_L(t)=1.02e^{-10t}\sin(49.97t+78.68°)\text{A}$$

$$u_C(t)=u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-LA\sqrt{\delta^2+\omega^2}e^{-\delta t}\sin\omega t=-200.1\mathrm{e}^{-10t}\sin 49.97t\text{V}$$

◎7−5 电路如题7−5图所示，$t=0$ 时开关 S 闭合，设 $u_C(0_-)=0, i(0_-)=0, L=1\text{H}, C=1\mu\text{F}, U=100\text{V}$。若：(1)电阻 $R=3\text{k}\Omega$；(2)$R=2\text{k}\Omega$；(3)$R=200\Omega$。试分别求在上述电阻值时电路中的电流 i 和电压 u_C。



题7−5图

分析 电路为RLC串联电路，列写微分方程求解即可。

解 $t>0$ 电路如题解7−5图所示，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U$$

设 $u_C(t)$ 的解为 $\quad u_C=u'_C+u''_C$

其中 u'_C 为方程的特解，$u'_C=U=100\text{V}$

u''_C 为对应的齐次方程的通解。

根据特征方程 $\quad LCp^2+RCp+1=0$

可得
$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \qquad ①$$

(1)当 $R=3000\Omega$ 时，将已知条件代入式①，

$$p_1=-381.97,\quad p_2=-2618.03$$

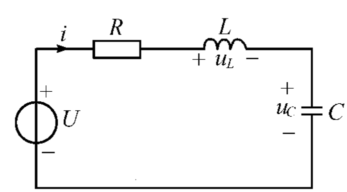
可见电路处于过阻尼状态，设 $\quad u''_C=\mathrm{A}_1\mathrm{e}^{-381.97t}+\mathrm{A}_2\mathrm{e}^{-2618.03t}$

所以
$$u_C(t)=100+A_1\mathrm{e}^{-381.97t}+A_2\mathrm{e}^{-2618.03t}$$

利用初始条件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

$$i(0_+)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=i(0_-)=0$$

可得
$$100+A_1+A_2=0$$
$$-381.97A_1-2618.03A_2=0$$



题解7−5图

解得
$$A_1=-117,\quad A_2=17$$

所以 $u_C(t)=100-117\mathrm{e}^{-381.97t}+17\mathrm{e}^{-2618.03t}\text{V}$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=44.69\mathrm{e}^{-381.97t}-44.51\mathrm{e}^{-2618.03t}\,\mathrm{mA}$$

(2)当 $R=2000\Omega$ 时，将已知条件代入式①，得

$$p_1=p_2=-1000$$

即电路处于临界阻尼状态。设 $u''_C=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-1000t}$，

利用初始条件：$u_C(0_+)=0$，$i(0_+)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

可得 $$A_1=-100,\quad A_2=-10^5$$

所以 $$u_C(t)=100-(100+10^5t)\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{V}$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=100t\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{A}$$

(3)当 $R=200\Omega$ 时，将已知条件代入式①，得

$$p_1=-100+\mathrm{j}995,\quad p_2=-100-\mathrm{j}995$$

可见电路处于欠阻尼状态，设 u''_C 的形式为 $u''=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$

其中 $$\delta=100,\quad \omega=995$$

利用初始条件：$u_C(0_+)=0$，$i(0_+)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

可得 $$\begin{cases}100+A\sin\theta=0\\-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta=0\end{cases}$$

解得 $\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\frac{995}{100}=84.26°$，$A=-\frac{100}{\sin\theta}=-\frac{100}{\sin 84.26°}=-100.5$

所以 $$u_C(t)=100-100.5\mathrm{e}^{-100t}\sin(955t+84.26°)\,\mathrm{V}$$

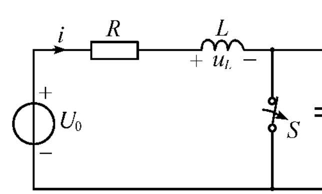
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0.01\mathrm{e}^{-100t}[\sin(995t+84.3°)-\cos(995t+84.3°)]\,\mathrm{A}$$

○7－6　题 7－6 图所示电路中 $R=3\Omega$，$L=6\mathrm{mH}$，$C=1\mu\mathrm{F}$，$U_0=12\mathrm{V}$，电路已处稳态。设开关 S 在 $t=0$ 时打开，试求 $u_L(t)$。

解　由题意可知电路的初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{U_0}{R}=\frac{12}{3}=4\mathrm{A}$$



题 7－6 图

$t>0$，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_0$$

设 $$u_C=u'_C+u''_C$$

其中 u'_C 为方程的特解，$u'_C=U_0=12\mathrm{V}$；u''_C 为对应的齐次方程的解，先求特征根。

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-250\pm j12.91\times10^3$$

即 $\qquad p_1=-250+j12.91\times10^3,\quad p_2=-250-j12.91\times10^3$

有 $$u''_C=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$$

式中 $$\delta=250,\quad \omega=12.91\times10^3$$

利用初始条件,有 $$\begin{cases}12+A\sin\theta=0\\ C[-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta]=4\end{cases}$$

解得 $$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta-\dfrac{4}{12C}}=\arctan(-0.039)=-2.22^\circ$$

$$A=-\frac{12}{\sin\theta}=309.84$$

所以 $\qquad u_C(t)=12+309.84e^{-250t}\sin(12.91\times10^3t-2.22^\circ)\mathrm{V}$

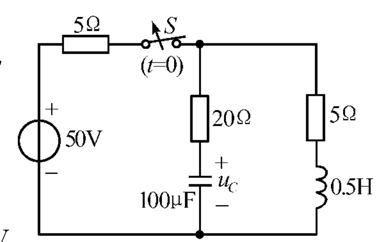
$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=-CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}e^{-\delta t}\sin\omega t=-4e^{-250t}\sin(12.91\times10^3t)\mathrm{A}$$

电感电压: $$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=4L\sqrt{\delta^2+\omega^2}e^{-\delta t}sin(\omega t-\theta)$$

$$=309.84e^{-250t}\sin(12.91\times10^3t+2.22^\circ)\mathrm{V}$$

◎7—7 **题 7—7 图所示电路在开关 S 打开之前已达稳态;$t=0$ 时,开关 S 打开,求 $t>0$ 时的 u_C。**

分析 $t<0$ 时,电感相当于短路,电容相当于开路,S 打开后,即 $t\geqslant0$ 时,电路为一 RLC 串联电路,再列写微分方程求解即可。



题 7—7 图

解 ①**确定初始值**

$t<0$ 时,如题解 7—7 图(a)所示。

$$i_L(0_-)=\frac{50}{5+5}=5\mathrm{A},\quad u_C(0_-)=5i_L(0_-)=25\mathrm{V}$$

由换路定律,知电路的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=25\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=-C\frac{du_C}{dt}\Big|_{0_+}=i_L(0_-)=5\mathrm{A}$$

②$t>0$ 后,如题解 7—7 图(b),电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+(R_1+R_2)C\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

即 $$0.5\times100\times10^{-6}\frac{d^2u_C}{dt^2}+(20+5)\times100\times10^{-6}\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

整理，得　　$$5\frac{d^2u_C}{dt^2}+250\frac{du_C}{dt}+10^5u_C=0$$

对应的特征方程为　　$$5p^2+250p+10^5=0$$

解得　　$$p_1=-25+j139.19,\quad p_2=-25-j139.19$$

从而　　$$u_C(t)=Ae^{-25t}\sin(139.19t+\theta)$$

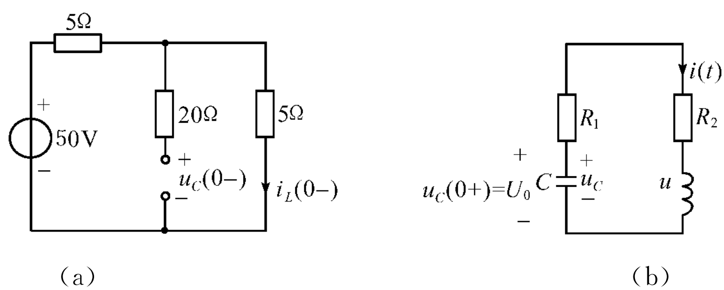
应用初始条件：$$\begin{cases}u_C(0_+)=25\\ C\dfrac{du_C}{dt}\Big|_{0_+}=5\end{cases}$$

得到　　$$\begin{cases}A\sin\theta=25\\ C\times(-25A\sin\theta+139.19A\cos\theta)=5\end{cases}$$

解得　　$$\theta=\arctan\frac{139.19}{25-\frac{1}{5C}}=\arctan(-0.07)=-4.03°$$

$$A=\frac{25}{\sin\theta}=\frac{25}{\sin(-4.03°)}=-355.61$$

所以　　$$u_C(t)=-355.61e^{-25t}\sin(139.19t-4.03°)\text{V}$$

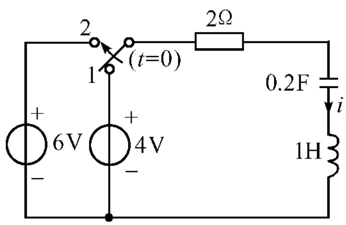


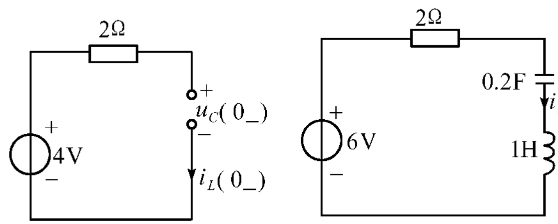
(a)　　　　　　　　(b)

题解 7－7 图

○7－8　题 7－8 图所示电路在开关 S 动作前已达稳态；$t=0$ 时 S 由 1 接至 2，求 $t>0$ 时的 i_L。

解　①确定初始值，$t<0$ 时，如题解 7－8 图(a)。





(a)　　　　(b)

题 7－8 图　　　　题解 7－8 图

$$u_C(0_-)=4\text{V}\quad i_L(0_-)=0$$

由换路定律知电路的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V},\quad i_L(0_+)=-C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=i_L(0_-)=0$$

②$t>0$，如题 7－8 图(b)。

电路的微分方程为 $\quad LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=6$

设 $\quad u_C(t)=u'_C+u''_C$

其中，$u'_C=6\text{V}$，u''_C为对应的齐次方程的通解。

特征方程为 $\quad LCp^2+RCp+1=0$

将已知条件代入，$\quad L=1\text{H},C=0.2\text{F},R=2\Omega$，有 $0.2p^2+0.4p+1=0$

解得 $\quad p_1=-1+\mathrm{j}2,\quad p_2=-1-\mathrm{j}2$

可见，电路处于欠阻尼状态，那么 $u''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$（其中 $\delta=1,\omega=2$）

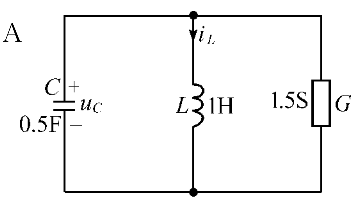
利用初始条件：$\quad u_C(0_+)=4\text{V},\quad C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

得 $\quad \theta=\arctan2=63.43°,\quad A=\frac{4-6}{\sin\theta}=-2.236$

所以 $\quad u_C(t)=u'_C+u''_C=6-2.236\mathrm{e}^{-t}\sin(2t+63.43°)\text{V}$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-t}\sin\omega t=\mathrm{e}^{-t}\sin2t\text{A}$$

◯7－9　题 7－9 图所示 GLC 并联电路中，已知 $u_C(0_+)=1\text{V}$，$i_L(0_+)=2\text{A}$。求 $t>0$ 时的 i_L。



题 7－9 图

解　由题意知，电路的初始值为

$$u_C(0_+)=1\text{V},\quad i_L(0_+)=2\text{A}$$

电路的微分方程为 $\quad LC\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0$

对应的特征方程为 $\quad LCp^2+GLp+1=0$

代入已知条件：$\quad 0.5p^2+1.5p+1=0$

解得 $p_1=-1,p_2=-2$，可见电路处于过阻尼状态，

令 $\quad i_L=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

代入初始条件，得 $\quad A_1+A_2=2$

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=L\times(-A_1-2A_2)=1$$

解得 $\quad A_1=5,\quad A_2=-3$

故电感电流为 $\quad i_L(t)=5\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}A$

◯7－10　题 7－10 图所示电路中 $G=5\text{S},L=0.25\text{H},C=1\text{F}$。求：(1) $i_S(t)=\varepsilon(t)A$

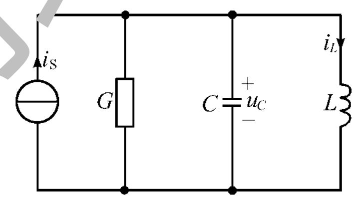
时，电路的阶跃响应 $i_L(t)$；(2) $i_S(t)=\delta(t)A$ 时，电路的冲激响应 $u_C(t)$。

解　(1) $i_S(t)=\varepsilon(t)A$ 时，

电路的初始值为 $u_C(0_+)=0, i_L(0_+)=0$

$t>0$，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_S$$



题 7－10 图

设　$$i_L=i'_L+i''_L$$

其中 $i'_L=i_S=\varepsilon(t)$，i''_L 为对应的齐次方程的通解

特征方程为　$$LCp^2+GLp+1=0$$

代入已知条件　$$0.25p^2+1.25p+1=0$$

解得　$$p_1=-1,\quad p_2=-4$$

那么　$$i''_L=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-4t}$$

代入初始条件，有
$$\begin{cases}1+A_1+A_2=0\\ L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0.25\times(-A_1-4A_2)=0\end{cases}$$

解得　$$A_1=-\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$$

所以　$$i_L(t)=(1-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

(2) 当 $i_S=\delta(t)$ 时，利用冲激响应和阶跃响应的关系，对(1)中结果求导，得

$$i_L(t)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{A}$$

$$u_C(t)=u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0.25[-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{16}{3}\mathrm{e}^{-4t}]=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{V}$$

○7－11　当 $u_S(t)$ 为下列情况时，求题 7－11 图所示电路的响应 u_C：

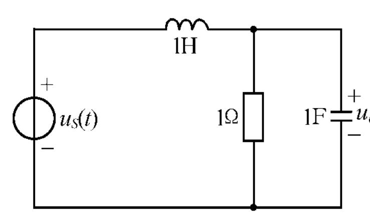
(1) $u_S(t)=10\varepsilon(t)\mathrm{V}$；(2) $u_S(t)=10\delta(t)\mathrm{V}$。

解　(1) 当 $u_S(t)=10\varepsilon(t)\mathrm{V}$ 时，电路的初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$t>0$ 电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$



题 7－11 图

设　$$u_C=u'_C+u''_C$$

其中，$u'_C=u_S=10\varepsilon(t)$，$u''_C$ 为对应的齐次方程的通解。

特征方程为 $$LCp^2+\frac{L}{R}p+1=0$$

代入已知条件有 $$p^2+p+1=0$$

解得 $$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad p_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

可见电路处于欠阻尼状态 $u_C''=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$

式中，$\delta=\frac{1}{2}$，$\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$，利用初始条件确定 A，θ。

由初始条件 $u_C(0_+)=0$，$C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$，有

$$\begin{cases}10+A\sin\theta=0\\ C\times(-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta)=0\end{cases}$$

解得

$$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\sqrt{3}=60^\circ,\quad A=-\frac{10}{\sin\theta}=-\frac{20}{\sqrt{3}}$$

所以 $$u_C(t)=10-\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ)\mathrm{V}$$

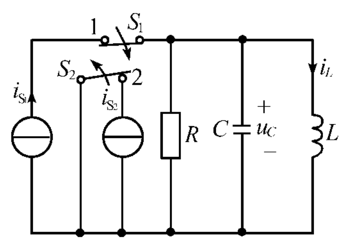
(2)当 $u_S(t)=10\delta(t)\mathrm{V}$ 时，利用冲激响应和阶跃响应的关系，对(1)中 $u_C(t)$ 求导，即为所求的 $u_C(t)$。

所以

$$u_C(t)=-A\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\delta^2+\omega^2}\sin\omega t=\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\mathrm{V}$$

●7－12　题 7－12 图所示并联电路中，在 $t=0$ 时开关 S_1 由位置 1 接至位置 2，S_2 由位置 2 接至位置 1。已知 $i_{S_1}=1\mathrm{A}$，$i_{S_2}=5\mathrm{A}$，$R=5\Omega$，$C=0.1\mathrm{F}$，$L=2\mathrm{H}$。求 $t\geqslant0$ 时的 $i_L(t)$。

分析　$t<0$ 时，S_1 处于位置 1，S_2 处于位置 2，电感相当于短路，电容相当于开路，$t\geqslant0$ 后，开关状态改变，电容电压与电感电流不变。



题 7－12 图

解　$t<0$ 时，如题解 7－12 图(a)知：

$$i_L(0_-)=i_{S1}=1\text{A}, \quad u_C(0_-)=0$$

由换路定律确定初始值为

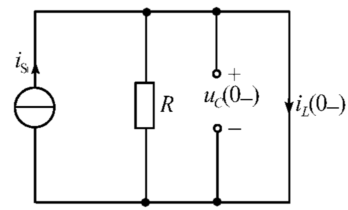
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0, \quad i_L(0_+)=i_L(0_-)=1\text{A}$$

$t\geqslant 0$ 时，如题解 7－12 图(b)列电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_{S2}$$

设　　$i_L=i'_L+i''_L$

其中，$i'_L=i_{S2}=5\text{A}$，i''_L 为对应的齐次方程的通解。



(a)

对应的特征方程为 $LCp^2+\frac{L}{R}p+1=0$

代入已知条件，得 $0.2p^2+0.4p+1=0$

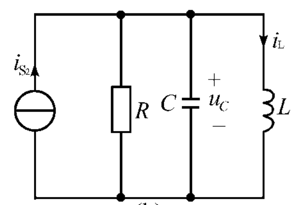
解得　　$p_1=-1+\mathrm{j}2, \quad p_2=-1-\mathrm{j}2$

说明电路处于欠阻尼状态

$i''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$，式中 $\delta=1, \omega=2$

利用初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+)=L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0 \\ i_L(0_+)=1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} L\times(-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta)=0 \\ 5+A\sin\theta=1 \end{cases}$



(b)

题解 7－12 图

解得　　$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan 2=63.43°$

$$A=\frac{1-5}{\sin\theta}=-4.472$$

所以　　$i_L(t)=5-4.472\mathrm{e}^{-t}\sin(2t+63.43°)\text{A}$

小结　列写微分方程再进行求解是解一般 RLC 串联，RLC 并联二阶电路的基本方法。

第八章

相　量　法

学习要求

1. 熟悉正弦量的振幅（最大值）、角频率、相位和初相位。
2. 熟练掌握正弦量的瞬时值、有效值和相位差。
3. 熟悉正弦量的波形。
4. 熟练掌握正弦量的相量和相量图。
5. 熟练掌握基尔霍夫定律和电路元件电压、电流关系的相量形式。

知识网络图

相量法
- 复数
- 特殊相量—正弦量
- 相量法的基础
- 电路定律的相量形式
  - KVL 与 KCL 定律
  - 伏安特性

课后习题全解

○8－1　将下列复数化为极坐标形式：

(1) $F_1=-5-\mathrm{j}5$；　(2) $F_2=-4+\mathrm{j}3$；　(3) $F_3=20+\mathrm{j}40$；

(4) $F_4=\mathrm{j}10$；　(5) $F_5=-3$；　(6) $F_6=2.78+\mathrm{j}9.20$。

解　(1) $F_1=-5-\mathrm{j}5=\alpha\underline{/\theta}$

$\alpha=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\dfrac{-5}{-5}=-135°$　　（F_1 在第三象限）

故 F_1 的极坐标形式为

$F_1=5\sqrt{2}\angle -135°$

(2) $F_2=-4+\mathrm{j}3=\sqrt{(-4)^2+3^2}\angle \arctan(3/-4)$

$=5\angle 143.13°$（F_2 在第二象限）

(3) $F_3=20+\mathrm{j}40=\sqrt{20^2+40^2}\angle \arctan(40/20)$

$=44.72\angle 63.43°$（F_3 在第一象限）

(4) $F_4=10\mathrm{j}=10\angle 90°$（$F_4$ 在虚轴上）

(5) $F_5=-3=3\angle 180°$（F_5 在实轴上）

(6) $F_6=2.78+\mathrm{j}9.20=\sqrt{2.78^2+9.20^2}\angle \arctan(9.20/2.78)$

$=9.61\angle 73.19°$（F_6 在第一象限）

○8－2　将下列复数化为代数形式：

(1) $F_1=10\angle -73°$；　(2) $F_2=15\angle 112.6°$；　(3) $F_3=1.2\angle 152°$；

(4) $F_4=10\angle -90°$；　(5) $F_5=5\angle -180°$；　(6) $F_6=10\angle -135°$。

解　(1) $F_1=10\angle -73°=10\cos(-73°)+\mathrm{j}10\sin(-73°)=2.92-\mathrm{j}9.56$

(2) $F_2=15\angle 112.6°=15\cos 112.6°+\mathrm{j}15\sin 112.6°=-5.76+\mathrm{j}13.85$

(3) $F_3=1.2\angle 152°=1.2\cos 152°+\mathrm{j}1.2\sin 152°=-1.06+\mathrm{j}0.56$

(4) $F_4=10\angle -90°=-\mathrm{j}10$

(5) $F_5=5\angle -180°=-5$

(6) $F_6=10\angle -135°=10\cos(-135°)+\mathrm{j}10\sin(-135°)=-7.07-\mathrm{j}7.07$

○8－3　若 $100\angle 0°+A\angle 60°=175\angle \psi$，求 A 和 ψ。

解　　原式 $=100+A\cos 60°+\mathrm{j}A\sin 60°=175\cos\psi+\mathrm{j}175\sin\psi$

根据复数相等的定义，应有实部和实部相等，即

$$A\cos 60°+100=175\cos\psi$$

虚部和虚部相等，即

$$A\sin 60°=175\sin\psi$$

把以上两式平方相加，得

$$A^2+100A-20625=0$$

解得

$$A=\frac{-100\pm\sqrt{100^2+4\times 20625}}{2}=\begin{cases}102.07\\-202.069（舍去）\end{cases}$$

所以

$$\sin\psi=\frac{A\sin 60^\circ}{175}=\frac{102.07\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{175}=0.505$$

$$\psi=30.34^\circ$$

◎8－4　**求** 8－1 **题中的** $F_2\cdot F_6$ **和** F_2/F_6。

分析　两个相量相乘将其模值相乘，幅角相加即可，两个相量相除将其模值相除，幅角相减即可。

解　$F_2\times F_6=(-4+\mathrm{j}3)\times(2.78+\mathrm{j}9.20)=5\angle 143.13^\circ\times 9.61\angle 73.19^\circ$

$=48.05\angle 216.32^\circ=48.05\angle -143.68^\circ$

$$F_2/F_6=\frac{-4+\mathrm{j}3}{2.78+\mathrm{j}9.20}=\frac{5\angle 143.13^\circ}{9.61\angle 73.19^\circ}=0.52\angle 69.94^\circ$$

○8－5　**求** 8－2 **题中的** F_1+F_5 **和** F_1/F_5。

解　$F_1+F_5=10\angle -73^\circ+5\angle -180^\circ$

$=10\cos(-73^\circ)+\mathrm{j}10\sin(-73^\circ)-5$

$=-2.08-\mathrm{j}9.56=9.78\angle -102.27^\circ$

$$F_1/F_5=\frac{10\angle -73^\circ}{5\angle -180^\circ}=2\angle -73^\circ+180^\circ=2\angle -107^\circ$$

○8－6　**若已知** $i_1=-5\cos(314t+60^\circ)\mathrm{A}$，$i_2=10\sin(314t+60^\circ)\mathrm{A}$，$i_3=4\cos(314t+60^\circ)\mathrm{A}$。(1)**写出上述电流的相量，并绘出它们的相量图**；(2)i_1 **与** i_2 **和** i_1 **与** i_3 **的相位差**；(3)**绘出** i_1 **的波形图**；(4)**若将** i_1 **表达式中的负号去掉将意味着什么**？(5)**求** i_1 **的周期** T **和频率** f。

解　(1)

$$i_1=-5\cos(314t+60^\circ)=5\cos(314t+60^\circ-180^\circ)$$
$$=5\cos(314t-120^\circ)$$
$$i_2=10\sin(314t+60^\circ)=10\cos(314t-30^\circ)$$

故 i_1，i_2 **和** i_3 **的相量表示式为**

$$\dot I_1=\frac{5}{\sqrt2}\angle -120^\circ\ \mathrm{A},\qquad \dot I_2=\frac{10}{\sqrt2}\angle -30^\circ\ \mathrm{A},\qquad \dot I_3=\frac{4}{\sqrt2}\angle 60^\circ\ \mathrm{A}$$

其向量图如题解 8－6 **图**(a)**所示**。

(2)

$$\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=-120^\circ-(-30^\circ)=-90^\circ$$
$$\varphi_{13}=\varphi_1-\varphi_3=-120^\circ-60^\circ=-180^\circ$$

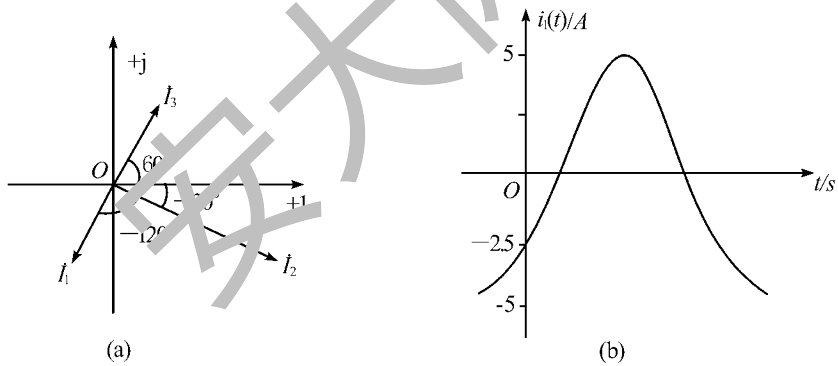
(3)$i_1(t)$**的波形图见题解** 8－6 **图**(b)**所示**。

(4)**若将** $i_1(t)$**中的负号去掉，意味着** i_1 **的初相位超前了** 180°，**即** i_1 **的参考方向反向**。

(5)$i_1(t)$**的周期和频率分别为**

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{314}=0.02s=20\text{ms}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{0.02}=50\text{Hz}$$



题解 8－6 图

○8－7 **若已知两个同频正弦电压的相量分别为**

$$\dot U_1=50\angle 30^\circ\ \text{V},\qquad \dot U_2=-100\angle -150^\circ\ \text{V}$$

其频率 $f=100\text{Hz}$。**求：**

(1)**写出** u_1，u_2 **的时域形式；**

(2)u_1 **与** u_2 **的相位差。**

解 (1)

$$u_1(t)=50\sqrt2\cos(2\pi ft+30^\circ)=50\sqrt2\cos(628t+30^\circ)\text{V}$$

$$\begin{aligned}u_2(t)&=-100\sqrt2\cos(2\pi ft-150^\circ)\\&=100\sqrt2\cos(628t-150^\circ+180^\circ)\\&=100\sqrt2\cos(628t+30^\circ)\text{V}\end{aligned}$$

(2)**因为**

$$\dot U_1=50\angle 30^\circ\ \text{V},\qquad \dot U_2=-100\angle -150^\circ\ \text{V}=100\angle 30^\circ\ \text{V}$$

故相位差为 $\varphi=30^\circ-30^\circ=0^\circ$，**即** u_1 **与** u_2 **同相位。**

○8－8 **已知：**

$$u_1=220\sqrt2\cos(314t-120^\circ)\text{V},\quad u_2=220\sqrt2\cos(314t+30^\circ)\text{V}$$

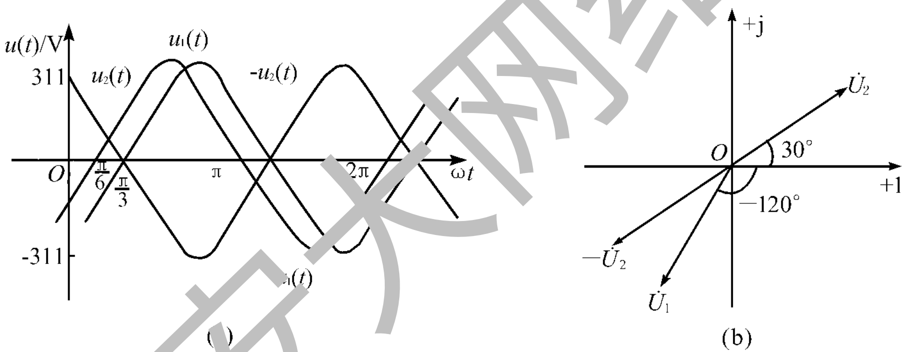
(1)**画出它们的波形图，求出它们的有效值、频率** f **和周期** T；

(2)**写出它们的相量并画出其相量图，求出它们的相位差；**

(3)**如果把电压** u_2 **的参考方向反向，重新回答**(1)、(2)。

解 (1)**波形图如题解** 8－8 **图**(a)**所示。**

有效值为



题解 8－8 **图**

$$u_1=u_2=220\text{V}$$

频率

$$f_1=f_2=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{314}{2\pi}=50\text{Hz}$$

周期

$$T_1=T_2=\frac{1}{f}=\frac{1}{50}=0.02\text{s}$$

(2)u_1 **和** u_2 **的相量形式为**

$$\dot{U}_1=220\angle-120^\circ,\qquad \dot{U}_2=220\angle 30^\circ$$

故相位差为

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2=-120^\circ-30^\circ=-150^\circ$$

相量图见题解 8－8 **图**(b)**所示。**

(3)u_2 **的参考方向反向**,$u_2(t)$**变为**$-u_2(t)$,**有效值、频率和周期均不变**,$-u_2(t)$**的相量为**

$$\dot{U}_2=220\angle 30^\circ-180^\circ=220\angle-150^\circ\ \text{V}$$

故 u_1 **和** u_2 **的相位差为**

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2=-120^\circ-(-150^\circ)=30^\circ$$

波形图和相量图见题解 8－8 **图**(a)**和**(b)。

○8－9　**已知一段电路的电压、电流为**:$u=10\sin(10^3t-20^\circ)\text{V}$,$i=2\cos(10^3t-50^\circ)\text{A}$。

(1)**画出它们的波形图和相量图**;

(2)**求它们的相位差**。

解　(1)　$u=10\sin(10^3t-20^\circ)=10\cos(10^3t-110^\circ)\text{V}$

故 u **和** i **的相量分别为**

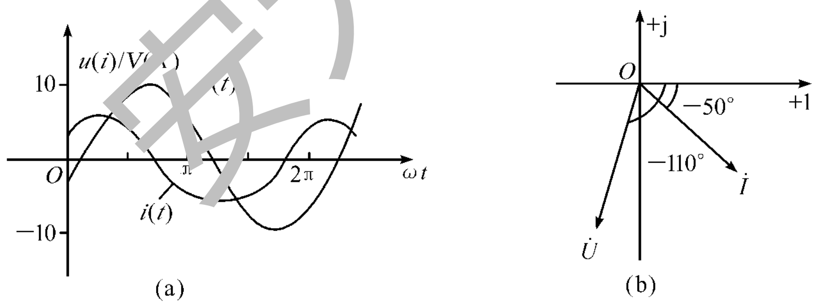
$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle-110^{\circ}\ \mathrm{V},\quad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle-50^{\circ}\ \mathrm{A}$$

其波形图和相量图见题图解 8—9(a)和(b)所示。

(2)相位差

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-110^{\circ}-(-50^{\circ})=-60^{\circ}$$

电压落后于电流 60°。



题解 8—9 图

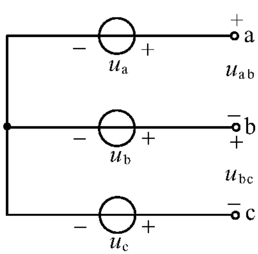
●8—10　已知题 8—10 图,示三个电压源的电压分别为:

$$u_a=220\sqrt{2}\cos(\omega t+10^{\circ})\mathrm{V}$$

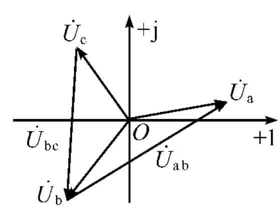
$$u_b=220\sqrt{2}\cos(\omega t-110^{\circ})\mathrm{V}$$

$$u_c=220\sqrt{2}\cos(\omega t+130^{\circ})\mathrm{V}$$

求(1)3 个电压的和;(2)u_{ab},u_{bc};(3)画出它们的相量图。



题 8—10 图



题解 8—10 图

分析　求解电压和利用相量法求解即可。

解　u_a,u_b,u_c 的相量为

$$\dot{U}_a=220\angle10^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_b=220\angle-110^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_c=220\angle130^{\circ}\ \mathrm{V}$$

(1)应用相量法有

$$\dot{U}_a+\dot{U}_b+\dot{U}_c=220\ \angle 10^\circ+220\ \angle -110^\circ+220\ \angle 130^\circ=0$$

三个电压的和为零,即

$$u_a(t)+u_b(t)+u_c(t)=0$$

(2) $$\dot{U}_{ab}=\dot{U}_a-\dot{U}_b=220\ \angle 10^\circ-220\ \angle -110^\circ=220\sqrt{3}\angle 40^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{bc}=\dot{U}_b-\dot{U}_c=220\ \angle -110^\circ-220\ \angle 130^\circ=220\sqrt{3}\angle -80^\circ\ \text{V}$$

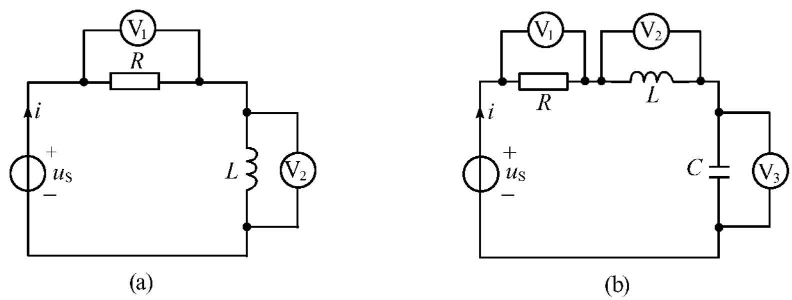
所以 $$u_{ab}=220\sqrt{6}\cos(\omega t+40^\circ)\text{V}$$

$$u_{bc}=220\sqrt{6}\cos(\omega t-80^\circ)\text{V}$$

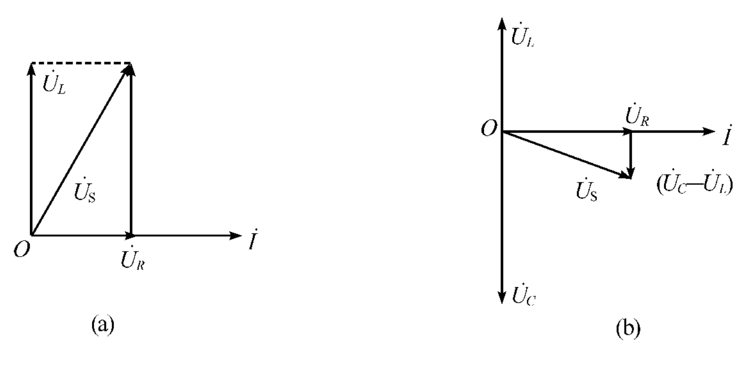
(3)相量图如题解 8－10 图所示。

小结 确定各电压之间的相位,模值关系即可容易画出相量图,画出正确的相量图对解决相量类问题至关重要。

◎8－11 已知题 8－11 图(a)中电压表读数 V_1:30V;V_2:60V;题 8－11 图(b)中的 V_1:15V;V_2:80V;V_3:100V。(电压表的读数为正弦电压的有效值。)求图中电压 U_S。



题 8－11 图



题解 8－11 图

分析 根据各相量之间的相位关系,画出相量图,求解即可。

解 利用相量图求解。设电流 $\dot{I}=I\angle 0^\circ$ A 为参考向量，电阻电压 $\dot{U}_R$ 与 $\dot{I}$ 同相位，电感电压 $\dot{U}_L$ 超前 $\dot{I}$ 90° 电容电压 $\dot{U}_C$ 要滞后 $\dot{I}$ 90°，总电压 $\dot{U}_S$ 与各元件电压相量构成一直角三角形。题解 8—11 图(a)和(b)为对应题 8—11 图(a)和(b)的相量图。由题解 8—11 图(a)可得

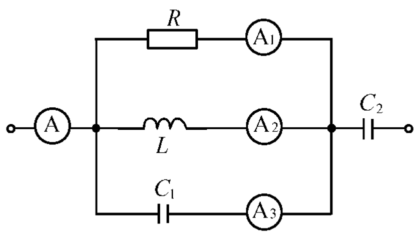
$$U_S=\sqrt{U_R^2+U_L^2}=\sqrt{30^2+60^2}=67.08\text{V}$$

由题解 8—11 图(b)可得

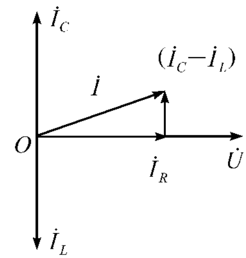
$$U_S=\sqrt{U_R^2+(U_C-U_L)^2}=\sqrt{15^2+(100-80)^2}=25\text{V}$$

○8—12 已知题 8—12 图，图示正弦电流电路中，电流表的读数分别为 A_1：5A；A_2：20A；A_3：25A。

求：(1)图中电流表 A 的读数；(2)如果维持 A_1 的读数不变，而把电源的频率提高一倍，再求电流表 A 的读数。



题 8—12 图



题解 8—12 图

解 利用相量图求解。设以 $\dot{U}=U\angle 0^\circ=\dot{U}_R=\dot{U}_L=\dot{U}_C$ 为参考向量，根据元件电压、电流的相位关系知，$\dot{I}_R$ 和 $\dot{U}$ 同相位，$\dot{I}_C$ 超前 $\dot{U}90^\circ$，$\dot{I}_L$ 滞后 $\dot{U}90^\circ$，相量图如题解 8—12 图所示，总电流 $\dot{I}$ 与 $\dot{I}_R$，$\dot{I}_C$ 和 $\dot{I}_L$ 组成一个直角三角形。故电流表的读数为

$$\text{A}=\sqrt{I_R^2+(I_C-I_L)^2}\text{A}$$

即

(1) $$\text{A}=\sqrt{5^2+(25-20)^2}=7.07\text{A}$$

(2) $$\text{A}=\sqrt{5^2+(50-10)^2}=40.31\text{A}$$

○8—13 $R=30\Omega$，$L=127.4\text{mH}$

◎8—14 某一元件的电压、电流(关联参考方向)分别为下述 4 种情况时，它可能是什么元件？

(1) $\begin{cases}u=10\cos(10t+45^\circ)\text{V}\\ i=2\sin(10t+135^\circ)\text{A}\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}u=10\sin(100t)\text{V}\\ i=2\cos(100t)\text{A}\end{cases}$；

$$(3)\begin{cases}u=-10\cos t\text{V}\\ i=-\sin t\text{A}\end{cases};\qquad (4)\begin{cases}u=10\cos(314t+45^\circ)\text{V}\\ i=2\cos(314t)\text{A}\end{cases}。$$

分析 根电压、电流之间的相位关系，即可确定元件为何种元件。

解 (1)把电流变为余弦形式有

$$i=2\cos(10t+135^\circ-90^\circ)=2\cos(10t+45^\circ)\text{A}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{V},\qquad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 0^\circ\ \Omega$$

即电压、电流同相位，根据元件电压、电流相位关系可知，这是一个 5Ω 的电阻元件。

(2)把电压变为余弦形式有

$$u=10\cos(100t-90^\circ)\text{V}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ\ \text{V},\qquad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle -90^\circ\ \Omega$$

即 $\dot{U}$ 滞后于 $\dot{I}\,90^\circ$，根据元件电压、电流相位关系可知，这是一个 $X_C=5\Omega$ 的电容元件，其参数 C 为

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{100\times 5}=2\times 10^{-3}\text{F}$$

(3)把电流用余弦表示为

$$i=-\cos(t-90^\circ)\text{A}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U}=\frac{-10}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{V},\qquad \dot{I}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{-10\angle 0^\circ}{-1\angle -90^\circ}=10\angle 90^\circ\ \Omega$$

即 $\dot{U}$ 超前 $\dot{I}\,90^\circ$，根据元件电压、电流相位可知，这是一个 $X_L=10\Omega$ 的电感。其参数 L 为

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{10}{1}=10\text{H}$$

(4) u 和 i 的相量为

$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{V}\qquad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 45^\circ=\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\text{j})=R+\text{j}X_L$$

即这是一个 $R=\frac{5}{\sqrt{2}}\Omega$ 的电阻和 $X_L=\frac{5}{\sqrt{2}}\Omega$ 的电感的串联组合。其参数 L 为

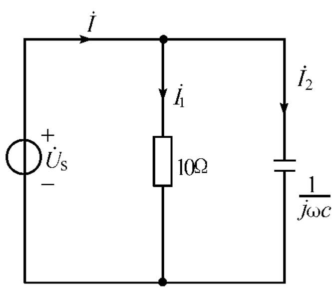
$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{5/\sqrt{2}}{314}=11.3\text{mH}$$

○8－15　$R=66.144\Omega$，$i(t)=\sqrt{2}\cos(10^3 t-20.7^\circ)\text{A}$

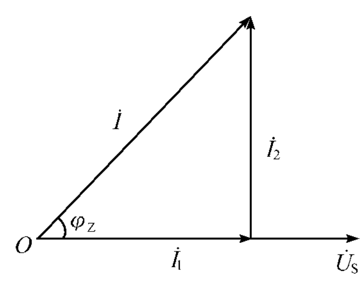
●8－16　**已知题 8－16 图，图示电路中 $I_1=I_2=10\text{A}$。求 $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_S$。**

分析　画出相量图，根据各相位关系求解即可。

解　设 $\dot{U}_S$ 为参考相量。$\dot{I}_1$ 与 $\dot{U}_S$ 同相位，$\dot{I}_2$ 超前 $\dot{U}_S 90^\circ$，相量图如题解 8－16 图所示。由相量图可知



题 8－16 图



题解 8－16 图

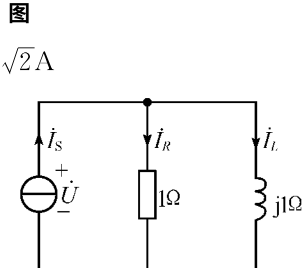
$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\text{A}$$

$$\varphi_z=\arctan\frac{I_2}{I_1}=\arctan 1=45^\circ$$

由电路图知

$$U_S=RI_1=10\times 10=100\text{V}$$

故 $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}$ 分别为



题 8－17 图

$$\dot{U}_S = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I} = I \angle \varphi_z = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

小结　选取合适的参考相量,画正确的相量图是解本题的关键。

○8－17　$\dot{U} = \sqrt{2} \angle 45^\circ$ V

第九章

正弦稳态电路的分析

学习要求

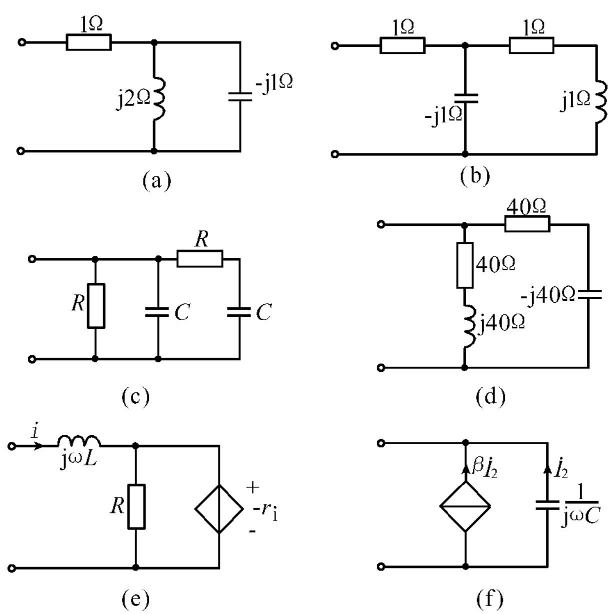
1. 深刻理解和掌握阻抗 Z 与导纳 Y 的定义及其物理意义，并会计算；能对阻抗 Z 与导纳 Y 进行相互等效变换；会求解单口电路的输入阻抗 Z。
2. 会画简单电路的相量图，并会应用相量图对电路进行定性或定量的分析计算。
3. 会用相量法对正弦稳态电路进行分析计算；包括阻抗的串联与并联，叠加定理法，网孔法，回路法，结点法，等效电源定理法，各种等效变换原理，互易定理，特勒根定理的应用等。
4. 会计算正弦稳态电路中的功率，包括平均功率，无功功率，视在功率，复功率。
5. 深刻理解和掌握最大功率传输定理的内容与意义，并会求解与应用。
6. 了解电路谐振的定义、条件、固有谐振频率以及谐振时电路的性质，并会应用。

知识网络图

- 正弦稳态电路的分析
  - 基本概念
    - 阻抗
    - 导纳
    - 相量图
  - 阻抗导纳的连接形式
    - 串联
    - 并联
  - 正弦稳态电路
    - 分析
    - 功率问题
      - 瞬时功率
      - 平均功率
      - 无功功率
      - 视在功率
  - 复功率和最大功率传输
  - 谐振
    - 串联电路谐振
    - 并联电路谐振

课后习题全解

○9－1　**试求题 9－1 图所示各电路的输入阻抗 Z 和导纳 Y。**



题 9－1 图

解 (a) $Z=1+\dfrac{j2(-j1)}{j2+(-j1)}=1-j2\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{1-j2}=\frac{1}{5}+j\,\frac{2}{5}=0.2+j0.4S$$

(b) $Z=1+\dfrac{(-j1)(1+j)}{-j1+1+j1}=2-j\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{2-j}=\frac{2}{5}+j\,\frac{1}{5}=0.4+j0.2S$$

(c) $Y=\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{1}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{j\omega C}{1+j\omega RC}S$

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{j\omega C}{1+j\omega RC}}=\frac{R-j\,\dfrac{1}{\omega C}}{3+j(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})}\Omega$$

(d) $Z=\dfrac{(40+j40)(40-j40)}{40+j40+40-j40}=40\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=0.025S$$

(e) **用外施激励法，如题解** 9－1 **图**(a)**所示。**

列 KVL **方程** $\dot{I}\,j\omega L+(-r\dot{I})=\dot{U}$ **即** $(j\omega L-r)\dot{I}=\dot{U}$

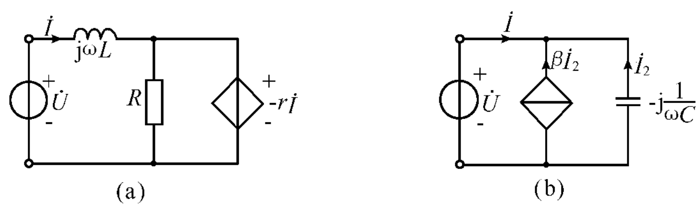
所以 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=(j\omega L-r)\Omega$， $Y=\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{j\omega L-r}=\dfrac{-j\omega L-r}{r^2+(\omega L)^2}S$

(f) **用外施激励法，如题解** 9－1 **图**(b)**所示。**

列 KCL **方程** $\dot{I}=-\beta\dot{I}_2-\dot{I}_2$ **得** $\dot{I}_2=\dfrac{1}{-(1+\beta)}\dot{I}$

所以 $\dot{U}=-\dot{I}_2\cdot(-j\,\dfrac{1}{\omega C})=\dfrac{1}{1+\beta}\cdot(-j\,\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}=\dfrac{-j}{\omega C(1+\beta)}\dot{I}$

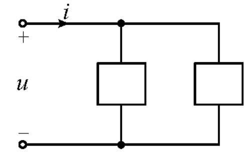
即有 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=-\dfrac{j}{\omega C(1+\beta)}\Omega$， $Y=\dfrac{1}{Z}=j\omega C(1+\beta)S$



题解 9－1 **图**

◯9—2　已知题 9—2 图所示电路中 $u=50\sin(10t+\pi/4)$ V，$i=400\cos(10t+\pi/6)$ A。试求电路中合适的元件值(等效)。

解　由已知条件，知



题 9—2 图

$$\dot{U}=\frac{50}{\sqrt{2}}(\angle 45^\circ-\angle 90^\circ)=\frac{50}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ\ \text{V},\quad \dot{I}=\frac{400}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ\ \text{A}$$

$$Y_{in}=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=8\angle 75^\circ=2.07+j7.73\text{S}=G+jX_C$$

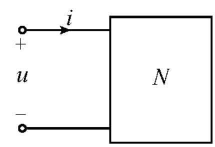
即题 9—2 图所示的两并联元件为电导和电容，其参数为

$$G=2.07\text{S},\quad X_C=7.73=\frac{1}{\omega C}$$

所以

$$C=\frac{7.73}{\omega}=0.773\text{F}$$

◯9—3　题 9—3 图中 N 为不含独立源的一端口，端口电压 u、电流 i 分别如下列各式所示。试求每一种情况下的输入阻抗 Z 和导纳 Y，并给出等效电路图(包括元件的参数值)。



题 9—3 图

(1) $\begin{cases}u=200\cos(314t)\text{V}\\ i=10\cos(314t)\text{A}\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}u=10\cos(10t+45^\circ)\text{V}\\ i=2\cos(10t-90^\circ)\text{A}\end{cases}$；

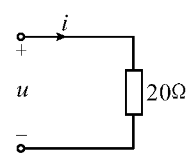
(3) $\begin{cases}u=100\cos(2t+60^\circ)\text{V}\\ i=5\cos(2t-30^\circ)\text{A}\end{cases}$；

(4) $\begin{cases}u=40\cos(100t+17^\circ)\text{V}\\ i=8\sin(100t+\pi/2)\text{A}\end{cases}$。

解　(1)$\dot{U}=200/\sqrt{2}\angle 0^\circ$，　$\dot{I}=10/\sqrt{2}\angle 0^\circ$ A

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=20\Omega=Z_{in},\quad Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=0.05\text{S}$$

即等效电路为 20Ω 的电阻，如题解 9—3 图(a)所示。



题解 9—3 图(a)

(2)$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$，　$\dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ$ A

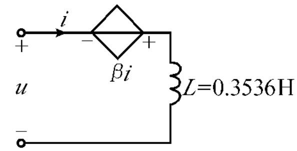
$$Z_{in}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 135^\circ=-3.536+j3.536\Omega$$

$$Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=\frac{1}{5}\angle -135^\circ=-0.141-j0.141\text{S}$$

因为 Z_{in} 的实部为负值,不可能为电阻,只由受控源所致。

等效电路如题解 9—3 图(b)所示。

其中 $\beta=3.536$, $L=\dfrac{3.536}{\omega}=0.3536\text{H}$



题解 9—3 图(b)

(3)$\dot{U}=\dfrac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ$ V, $\dot{I}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\angle -30^\circ$ A

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=20\angle 90^\circ=\text{j}20\Omega,\quad Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=-\text{j}0.05\text{S}$$

等效电路为一电感,$L=\dfrac{20}{\omega}=\dfrac{20}{2}=10\text{H}$,如题解 9—3 图(c)所示。

(4)$\dot{U}=\dfrac{40}{\sqrt{2}}\angle 17^\circ$,$\dot{I}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}(\angle 90^\circ-\angle 90^\circ)=\dfrac{8}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ$ A

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 17^\circ=4.78+\text{j}1.46\Omega$$

$$Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=\frac{1}{5}\angle -17^\circ=0.191-\text{j}0.0585\text{S}$$

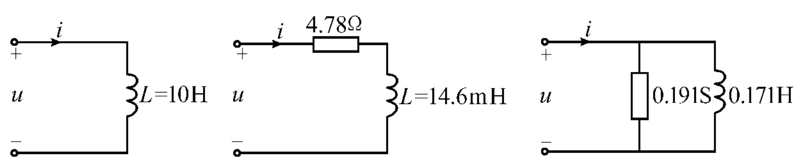
等效电路为 $R=4.78\Omega$ 的电阻和 $X_L=1.46\Omega$ 的电感串联,如题解 9—3 图(d1)所示。

$$L=\frac{1.46}{\omega}=\frac{1.46}{100}=14.6\text{mH}$$

也可看做是由 $G=0.191\text{S}$ 和一电感并联等效,如题解 9—3 图(d2)所示。

即

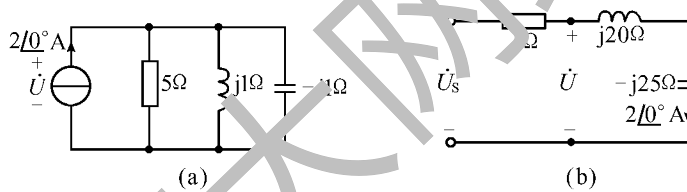
$$\frac{1}{\omega L}=0.0585,\quad L=\frac{1}{100\times 0.0585}=0.171\text{H}$$



(c) (d1) (d2)

题解 9—3 图

○9－4　**求题 9－4 图中的电压 $\dot{U}$，并画出电路的相量图。**



题 9－4 图

解　(a)

$$Y=\frac{1}{5}+\frac{1}{j1}+\frac{1}{-j1}=0.2\text{S}$$

所以

$$\dot{U}=\frac{\dot{I}}{Y}=\frac{2\angle 0^\circ}{0.2}=10\text{V}$$

以 $\dot{U}=U\angle 0^\circ$ **为参考方向，**

由 KCL **方程**　$\dot{I}_S=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$

作相量图如题解 9－4 **图**(a)**所示。**

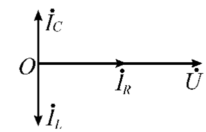
(b)**由** KVL **得**

$\dot{U}=2\angle 0^\circ\times(j20-j25)=-j10\text{V}$

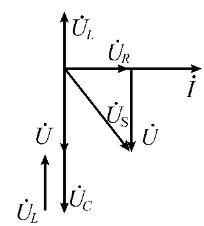
以 $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ A **为参考方向，**

由 KVL **方程**　$\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$ **或** $\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}$

作相量图如题解 9－4 **图**(b)**所示。**



(a)



(b)

题解 9－4 图

○9－5　**已知题** 9－5 **图所示电路图** $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ A，**求电压** $\dot{U}_S$，**并作电路的相量图。**

分析　$\dot{U}_R=\dot{I}R$，$\dot{U}_L=j\dot{I}X_L$，$\dot{U}_C=-j\dot{I}X_C$，**根据公式求解即可。**

解　**由** KVL **得** $\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=\dot{I}(R+jX_L-jX_C)$

$=2\angle 0^{\circ\circ}\times(4+j3-j5)=2\angle 0^\circ\times(4-j2)$

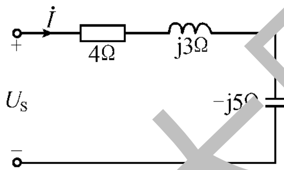
$=2\angle 0^\circ\times 4.47\angle -26.565^\circ=8.94\angle -26.565^\circ$ V

以 $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ **为参考向量，作相量图如题解** 9－5 **图所示。**

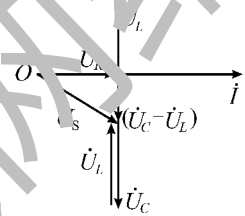
○9－6　**题** 9－6 **图电路中，**$I_2=10$A，$U_S=\frac{10}{\sqrt{2}}$V，**求电流** $\dot{I}$ **和电压** $\dot{U}_S$，**并画出电路的相量图。**

分析　**根据相位关系，应用相量法求解即可。**

解　**如题解** 9－6 **图**(a)**所示，**



题9—5图



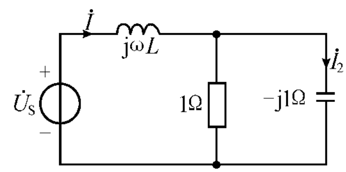
题解9—5图

设

$$\dot{U}=U\angle 0^\circ\ \text{V}=10\times 1\angle 0^\circ=10\angle 0^\circ\ \text{V}$$

则

$$\dot{I}_2=10\angle 90^\circ\ \text{A},\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{1}=10\angle 0^\circ\ \text{A}$$



题9—6图

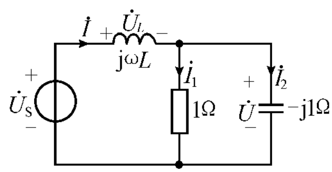
相量图如题解9—6图(b)所示。

$$\dot{I}=\sqrt{10^2+10^2}\angle 45^\circ=10\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

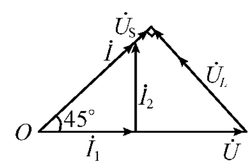
又

$$U_L=\sqrt{U^2-U_S^2}=\sqrt{10^2-\frac{10^2}{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}\text{V}=U_S$$

可见 $\dot{U}_S$ 与 $\dot{I}$ 同相位,所以 $\dot{U}_S=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$ V。



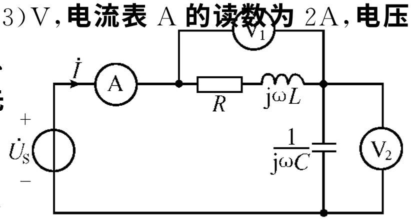
(a)



(b)

题解9—6图

◎9—7 题9—7图中已知 $u_S=200\sqrt{2}\cos(314+\pi/3)$V,电流表A的读数为2A,电压表 V_1、V_2 的读数均为200V。求参数 R、L、C,并作出该电路的相量图(提示:可先作相量图辅助计算)。



题9—7图

分析 电流表、电压表的读数均为有效值 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$,根据向量关系求解即可。

解 以 $\dot{I}$ 为参考向量作相量图如题解9—7图所示。

$$U_1=U_2=U_S=200\text{V}$$

所以由 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$ 组成的向量三角形为等边三角形。

可见 $U_R=U_1\cos30°=200\cos30°=100\sqrt{3}\text{V}$

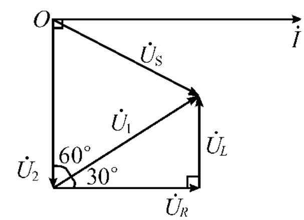
$$R=\frac{U_R}{I}=\frac{100\sqrt{3}}{2}=86.6\Omega$$

$$X_L=\frac{U_L}{I}=\frac{U_1\cos30°}{2}=50\Omega$$

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{50}{314}=0.159\text{H}$$

$$X_C=\frac{U_2}{I}=\frac{200}{2}=100\Omega$$

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{314\times100}=31.85\mu\text{F}$$



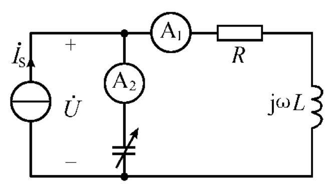
题解 9－7 图

○9－8　题 9－8 图中 $i_S=14\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)$mA，调节电容，使电压 $\dot{U}=U\angle\psi$，电流表 A_1 的读数 50mA。求电流表 A_2 的读数。

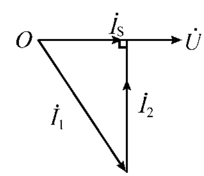
解　相量图如题解 9－8 图所示（由题意，$\dot{U}$ 与 $\dot{I}_S$ 同相位）

$$I_2=\sqrt{I_1^2-I_S^2}=\sqrt{50^2-14^2}=48\text{mA}$$

即 A_2 的读数为 48mA。

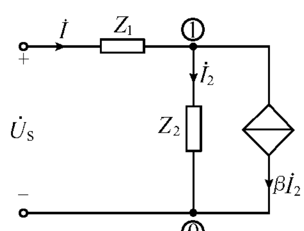


题 9－8 图

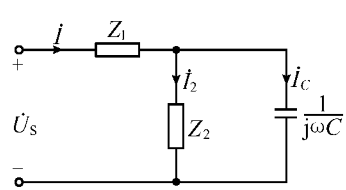


题解 9－8 图

○9－9　题 9－9 图中 $Z_1=(10+\text{j}50)\Omega$，$Z_2=(400+\text{j}1000)\Omega$，如果要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°（正交），β 应等于多少？如果把图中 CCCS 换为可变电容 C，求 ωC。



题 9－9 图



题解 9－9 图

解 由 KCL，可得

$$\dot{I}=\dot{I}_2+\beta\dot{I}_2=(1+\beta)\dot{I}_2$$

由 KVL，可得

$$\dot{U}_S=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=Z_1(1+\beta)\dot{I}_2+Z_2\dot{I}_2=[Z_1(1+\beta)+Z_2]\dot{I}_2$$

$$=\{10(1+\beta)+400+j[50(1+\beta)+1000]\}\dot{I}_2$$

要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°，则 $10(1+\beta)+400=0$

$$\beta=-41$$

此时 $\dot{U}_S=-j1000\dot{I}_2$

如果把 CCCS 换成可变电容，如题解 9－9 图所示。

$$\dot{I}=\dot{I}_2+\dot{I}_C=\dot{I}_2+(\dot{I}_2Z_2)j\omega C=(1+j\omega CZ_2)\dot{I}_2$$

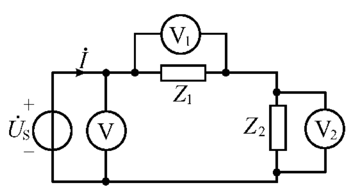
$$\dot{U}_S=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=Z_1(1+j\omega CZ_2)\dot{I}_2+Z_2\dot{I}_2=(Z_1+Z_2+j\omega CZ_1Z_2)\dot{I}_2$$

$$=[410-3\times10^4\omega C+j(1050-46\times10^3\omega C)]\dot{I}_2$$

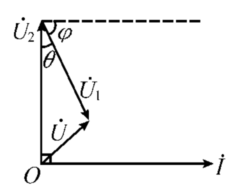
要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°，则 $410-3\times10^4\omega C=0$

得 $$\omega C=\frac{410}{3\times10^4}=1.37\times10^{-2}\text{S}$$

○9－10 已知题 9－10 图电路中 $Z_2=j60\Omega$，各交流电表的读数分别为 V：100V；V_1：171V；V_2：240V。求阻抗 Z_1。



题 9－10 图



题解 9－10 图

解 以 $\dot{I}$ 为参考向量，由 KVL 方程 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$ 即 $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$，作相量图如题解 9－10 图所示。

根据余弦定量： $$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{U_1^2+U_2^2-U^2}{2U_1U_2}=\frac{171^2+240^2-100^2}{2\times171\times240}=0.936$$

$$\theta=\arccos(0.936)=20.58°,\quad \varphi=90°-\theta=69.42°$$

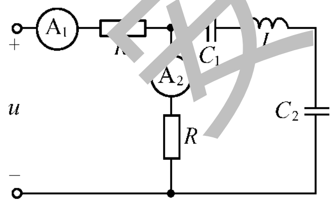
所以 $$\dot{U}_1=171\angle-69.42°\ \text{V}$$

又 $$\dot{I}=\frac{\dot{U}_2}{Z_2}=\frac{j240}{j60}=4\angle0°\ \text{A}$$

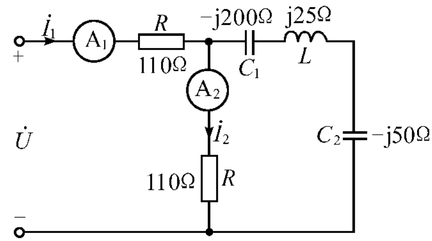
所以

$$Z_1=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}}=\frac{171\angle-69.42^\circ}{4\angle0^\circ}=42.75\angle-69.42^\circ=15.03-\mathrm{j}40.02\Omega$$

●9－11 **已知题9－11图电路中** $u=220\sqrt{2}\cos(250t+20^\circ)\,\mathrm{V}$，$R=110\Omega$，$C_1=20\mu\mathrm{F}$，$C_2=80\mu\mathrm{F}$，$L=1\mathrm{H}$。**求电路中各电流表的读数和电路的输入阻抗，画出电路的相量图。**



题9－11图



题解9－11图(a)

分析 根据各元件的伏安特性求解即可。

解 $X_{C1}=\dfrac{1}{\omega C_1}=200\Omega$，$X_L=\omega L=250\Omega$，$X_{C2}=\dfrac{1}{\omega C_2}=50\Omega$

由题解9－11图(a)可见，LC串联支路 $Z_{LC}=-\mathrm{j}200+\mathrm{j}250-\mathrm{j}50=0$

所以LC支路相当于短路，那么有 $I_2=0$，即A_2的读数为0。

$I_1=\dfrac{U}{R}=\dfrac{220}{110}=2\mathrm{A}$，即$A_1$的读数为2A。

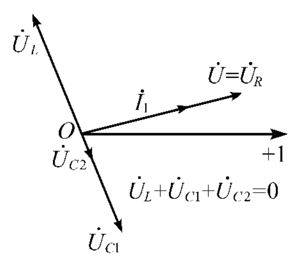
$$Z_{\mathrm{in}}=R=110\Omega$$

各向量为 $\dot{U}=220\angle20^\circ\ \mathrm{V}$，$\dot{I}_1=2\angle20^\circ\ \mathrm{V}$

$\dot{U}_{C1}=-\mathrm{j}200\times\dot{I}_1=400\angle-17^\circ\ \mathrm{V}$

$\dot{U}_{C2}=-\mathrm{j}50\times\dot{I}_1=100\angle-17^\circ\ \mathrm{V}$

$\dot{U}_L=\mathrm{j}250\times\dot{I}_1=500\angle110^\circ\ {}^\circ\mathrm{V}$

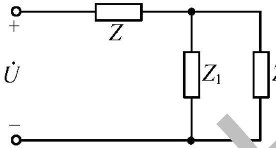


题解9－11图(b)

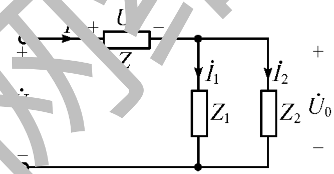
相量图如题解9－11图(b)所示。

小结 $X_C=\dfrac{1}{\omega C}$，$X_L=\omega L$ 分别为电容、电感的阻抗，电路中各电流表的读数均为有效值。

○9－12 **已知题9－12图电路中** $U=8\mathrm{V}$，$Z=(1-\mathrm{j}0.5)\Omega$，$Z_1=(1+\mathrm{j}1)\Omega$，$Z_2=(3-\mathrm{j}1)\Omega$。**求各支路的电流和电路输入导纳，画出电路的相量图。**



题 9－12 图



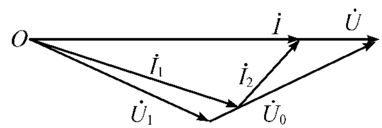
题解 9－12 图(a)

解 设电路电压、电流的参考方向如题解 9－12 图(a)所示。

$$Z_{12}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(1+j)(3-j)}{1+j+3-j}=1+j0.5\Omega$$

$$Z_{in}=Z+Z_{12}=1-j0.5+1+j0.5=2\Omega,\quad Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=0.5\text{S}$$

设 $\dot U=8\angle 0^\circ$ V　　则 $\dot I=\dfrac{\dot U}{Z_{in}}=4\angle 0^\circ$ A



题解 9－12 图(b)

$$\dot I_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot I=\sqrt{10}\angle -18.435^\circ \text{ A}$$（分流公式）

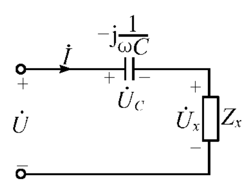
$$\dot I_2=\dot I-\dot I_1=4\angle 0^\circ-\sqrt{10}\angle -18.435^\circ=\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot U_0=\dot I Z_{12}=4\angle 0^\circ\times(1+j0.5)=4.47\angle 26.565^\circ \text{ V}$$

$$\dot U_1=\dot I Z=4\angle 0^\circ\times(1-j0.5)=4.47\angle -26.565^\circ \text{ V}$$

相量图如题解 9－12 图(b)所示。

○9－13 已知题 9－13 图电路中，$U=100$V，$U_C=100\sqrt{3}$V，$X_C=-100\sqrt{3}\Omega$，阻抗 Z_x 的阻抗角 $|\varphi_x|=60^\circ$。求 Z_x 和电路的输入阻抗。



题 9－13 图

解 设以电流 $\dot I$ 作为参考向量，且有

$$\dot I=\frac{U_C}{|X_C|}\angle 0^\circ=1\angle 0^\circ \text{ A}$$

又因为 $\dot U=\dot U_C+\dot U_x$，且知 $U=100<U_C=100\sqrt{3}$

所以，可知 Z_x 应为电感性阻抗，即有 $\varphi_x=60^\circ$

作相量图如题解 9－13 图所示。

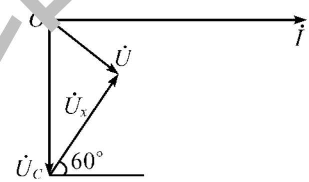
根据余弦定理，有 $U^2=U_C^2+U_x^2-2U_CU_x\cos 30^\circ$

即

$$100^2=(100\sqrt{3})^2+U_x^2-2\times 100\sqrt{3}U_x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

整理，得

$$U_x^2-300U_x+20\ 000=0$$



题解 9－13 图

解得

$$U_{x1}=200\text{V},\quad U_{x2}=100\text{V}$$

即有

$$200\angle 60^\circ=Z_{x1}\cdot\dot{I}=Z_x\cdot 1\angle 0^\circ$$

得

$$Z_{x1}=200\angle 60^\circ=100+\text{j}100\sqrt{3}\Omega$$

同理

$$100\angle 60^\circ=Z_x\cdot 1\angle 0^\circ$$

得

$$Z_{x2}=100\angle 60^\circ=50+\text{j}50\sqrt{3}\Omega$$

电路的输入阻抗为

$$Z_{\text{in1}}=-\text{j}X_C+Z_{x1}=-\text{j}100\sqrt{3}+200\angle 60^\circ=100\Omega$$

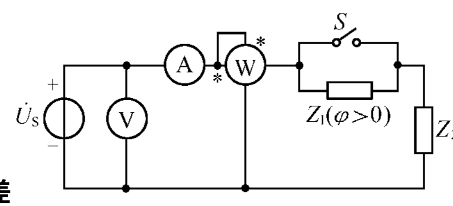
$$Z_{\text{in2}}=-\text{j}X_C+Z_{x2}=-\text{j}100\sqrt{3}+100\angle 60^\circ=50-\text{j}50\sqrt{3}\Omega$$

○9－14 题 9－14 图电路中，当 S 闭合时，各表读数如下：V 为 220V、A 为 10A、W 为 1000W；当 S 打开时，各表读数依次为 220V、12A 和 1600W。求阻抗 Z_1 和 Z_2，设 Z_1 为感性。

解 开关闭合时，由 $P=UI\cos\varphi$，得

$$\cos\varphi=\frac{P}{UI}=\frac{1000}{220\times 10}=\frac{5}{11}=0.4545$$

$$\varphi=\arccos 0.4545=\pm 62.964^\circ$$



题 9－14 图

φ 为 Z_2 的阻抗角（φ 为 $\dot{U}$ 和 $\dot{I}$ 的相位差角）

所以

$$Z_2=\frac{U}{I}\angle\varphi=\frac{220}{10}\angle\pm 62.964^\circ=10\pm\text{j}19.596\Omega$$

当开关 S 打开后，有

$$\cos\varphi'=\frac{P}{UI}=\frac{1600}{220\times 12}=0.606$$

$$\varphi'=\pm 52.695^\circ$$

即总阻抗

$$Z=Z_1+Z_2=\frac{U}{I}\angle\varphi=\frac{220}{12}\angle\pm 52.695^\circ=11.11\pm\text{j}14.58\Omega$$

所以，有

$$Z_1=Z-Z_2$$

又因 Z_1 为感性,即　　$Z_1=R_1+\mathrm{j}X_1,\quad X_1>0$

所以 Z_2 只能取　　$Z_2=10-\mathrm{j}19.596\Omega$

因此

$$Z_1=11.11+\mathrm{j}14.58-(10-\mathrm{j}19.596)$$

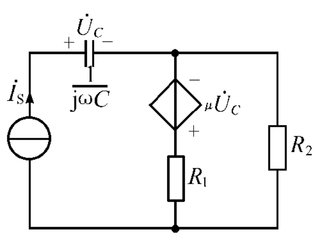
即

$$Z_1=1.11+\mathrm{j}5.016=5.137\angle 77.52^\circ\ \Omega$$

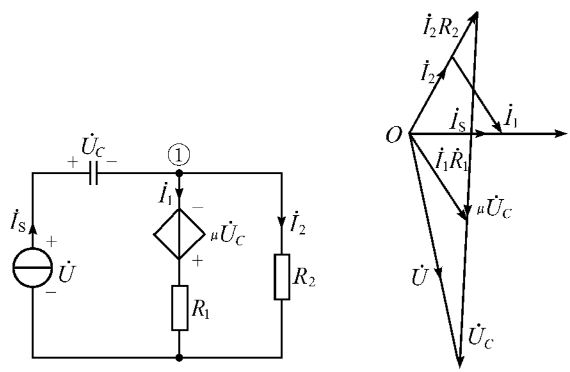
或

$$Z_1=1.11+\mathrm{j}34.176=34.194\angle 88.14^\circ\ \Omega$$

○9—15　**已知题9—15图电路中**,$I_S=10\mathrm{A},\omega=5000\mathrm{rad/s},R_1=R_2=10\Omega,C=10\mu\mathrm{F}$,$\mu=0.5$。**求各支路电流并作出电路的相量图。**



题9—15图



(a)　　(b)

题解9—15图

解　**应用结点电压法如题解9—15图(a)所示,列结点电压方程如下:(设** $\dot I_S=10\angle 0^\circ$ A)

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)\dot U_{n1}=\dot I_S-\dfrac{\mu\dot U_C}{R_1}\\ \dot U_C=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot I_S\end{cases}$$

解得

$$\dot U_{n1}=\frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\mu}{R_1}\cdot\dfrac{1}{\omega C}+1\right)\dot I_S}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

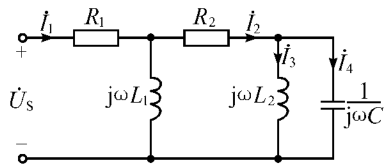
代入已知条件,得　　$\dot U_{n1}=50+\mathrm{j}50=50\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \mathrm{V}$

各支路电流为

$$\dot I_2=\frac{\dot U_{n1}}{R_2}=5+j5\text{A}\qquad \dot I=\dot I_1-\dot I_2=5-j5\text{A}$$

电路的相量图如题解 9－15 图(b)所示。

○9－16　已知题 9－16 图电路中，$R_1=100\Omega$，$L_1=1\text{H}$，$R_2=200\Omega$，$L_2=1\text{H}$，电压 $U_S=100\sqrt{2}\text{V}$，$\omega=100\text{rad/s}$，$I_2=0$。求其他各支路电流。



题 9－16 图

解　$X_{L1}=\omega L_1=100\Omega$，　$X_{L2}=\omega L_2=100\Omega$

令　$\dot U_S=100\sqrt{2}\angle 0°\ \text{V}$

由 $I_2=0$，知 $U_{R_2}=0$，那么 R_2 可看做短接线（也可看做开路）故有

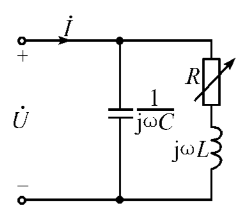
$$\dot I_1=\frac{\dot U_S}{R_1+jX_{L1}}=\frac{100\sqrt{2}\angle 0°}{100+j100}=1\angle -45°\ \text{A}$$

$$\dot U_{L1}=\dot U_{L2}=jX_{L1}\dot I_1=j100\times 1\angle -45°=100\angle 45°\ \text{V}$$

$$\dot I_3=\frac{\dot U_{L2}}{jX_{L2}}=\frac{100\angle 45°}{j100}=1\angle -45°\ \text{A}$$

$$\dot I_4=-\dot I_3=-1\angle -45°=1\angle -45°\ \text{A}$$

○9－17　如果题 9－17 图所示电路中 R 改变时电流 I 保持不变，L、C 应满足什么条件？



题 9－17 图

解　输入导纳为

$$Y_{in}=j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L}=\frac{1+j\omega CR-\omega^2LC}{R+j\omega L}$$

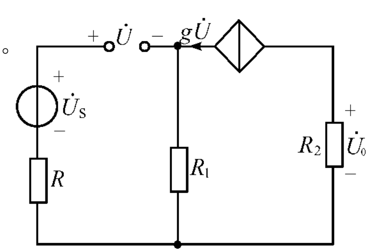
$$=\frac{j\omega C(R-j\frac{1}{\omega C}+j\omega L)}{R+j\omega L}=j\omega C\cdot\frac{R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{R+j\omega L}$$

$\dot I=Y_{in}\dot U$，要使 $\dot I$ 不随 R 改变，则 Y_{in} 不随 R 改变

所以有　$j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=j\omega L$

即 $\omega L-\frac{1}{\omega C}=\omega L$，从而 $LC=\frac{1}{2\omega^2}$，此时 $Y_{in}=j\omega C$。

○9－18　求题 9－18 图电路电阻 R_2 的端电压 $\dot U_o$



题 9－18 图

解　如题 9－18 图由 KVL 知，$\dot U+g\dot UR_1=\dot U_S$

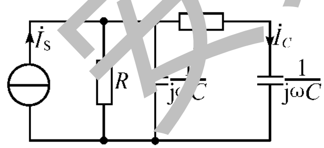
得　$$\dot U=\frac{\dot U_S}{1+R_1g}$$

$$\dot{U}_o=-g\dot{U}\cdot R_2=-\frac{R_2 g\dot{U}_s}{1+R_1 g}$$

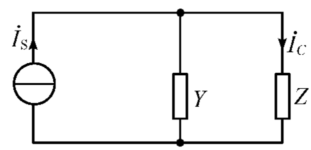
●9－19 题 9－19 图所示电路中，已知 $I_S=60\text{mA}$，$R=1\text{k}\Omega$，$C=1\mu\text{F}$。如果电流源的角频率可变，问在什么频率时，流经最右端电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 为最大？求此电流。

分析 要使电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 最大，先求出 $\dot{I}_C$ 的函数表达式，再进行分析。

解 题 9－19 图等效如题解 9－19 图所示电路。



题 9－19 图



题解 9－19 图

Y 为 RC 并联支路的导纳即 $\quad Y=\frac{1}{R}+\text{j}\omega C$

Z 为 RC 串联支路的阻抗即 $\quad Z=R-\text{j}\frac{1}{\omega C}$

$$\dot{I}_C=\frac{\frac{1}{Y}}{\frac{1}{Y}+Z}\dot{I}_S=\frac{\dot{I}_S}{1+YZ}\text{（分流公式）}$$

要使 $\dot{I}_C$ 有效值最大，需使 $1+YZ$ 的模值最小，而

$$1+YZ=1+\left(\frac{1}{R}+\text{j}\omega C\right)\left(R-\text{j}\frac{1}{\omega C}\right)=1+1+1+\text{j}\left(\omega CR-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

显然，当 $\omega CR-\frac{1}{\omega CR}=0$ 时 $|1+YZ|$ 最小，此时 $\omega=\frac{1}{RC}$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi RC}=\frac{1}{2\pi\times10^3\times10^{-6}}=159.155\text{Hz}$$

$$I_{C\max}=\frac{1}{3}I_S=\frac{1}{3}\times60=20\text{mA}$$

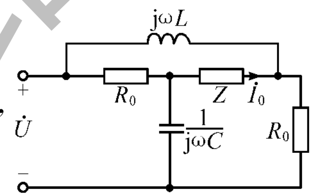
小结 一般复杂电路先进行等效化简，可容易求解。

○9－20 已知题 9－20 图电路中的电压源为正弦量，$L=1\text{mH}$，$R_0=1\text{k}\Omega$，$Z=(3+\text{j}5)\Omega$。试求：(1)当 $I_0=0$ 时，C 值为多少？(2)当条件(1)满足时，试证明输入阻抗为 R_0。

解 (1)题 9－20 图为电桥电路，当 $\dot{I}_0=0$ 时电桥处于平衡状态。

此时 $$R_0^2=\text{j}\omega L\times\frac{1}{\text{j}\omega C}=\frac{L}{C}$$

$$C=\frac{L}{R_0^2}=\frac{1\times10^{-3}}{(10^3)^2}=10^{-9}\,\mathrm{F}=1000\mathrm{pF}$$



题 9－20 图

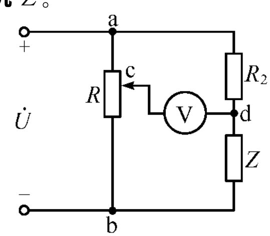
(2)当 $\dot I_0=0$ 时，可以看做开路(或把 Z 看做短接线)，

输入阻抗为 $Z_{in}=(R_0-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C})\,/\!/\,(R_0+\mathrm{j}\omega L)$

$$=\frac{R_0^2+R_0\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})+\frac{L}{C}}{2R_0+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

把 $\frac{L}{C}=R_0^2$ 代入上式，得 $Z_{in}=R_0\cdot\dfrac{2R_0+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{2R_0+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})}=R_0$

○9－21 在题 9－21 图电路中，已知 $U=100\mathrm{V}$，$R_2=6.5\Omega$，$R=20\Omega$，当调节触点 C 使 $R_{ac}=4\Omega$ 时，电压表的读数最小，其值为 30V。求阻抗 Z。



题 9－21 图

解 列 KVL 方程 $\dot U_{cd}=\dot U_{ad}-\dot U_{ac}=\frac{\dot U}{R_2+Z}R_2-\frac{\dot U}{R}\cdot R_{ac}$

设 $\dot U=100\angle0^\circ$ V，当调节触点 C，只改变 R_{ac}，对 $\dot U_{cd}$ 而言，只改变实部，虚部不变，因此当 $\dot U_{cd}$ 的实部为零时，电压表的读数最小，即

$$\pm\mathrm{j}30=\frac{100\angle0^\circ}{6.5+Z}\times6.5-\frac{100\angle0^\circ}{20}\times4$$

解得

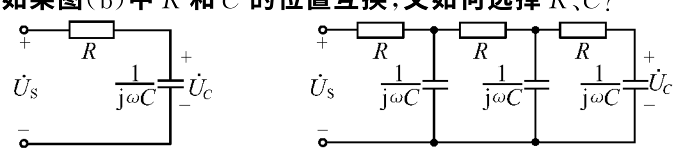
$$Z=\frac{650}{20\pm\mathrm{j}30}-6.5=10\mp\mathrm{j}15-6.5=3.5\mp\mathrm{j}15\Omega$$

●9－22 题 9－22 图(a)和(b)电路是阻容移相装置。

(1)如果要求图(a)中 $\dot U_C$ 滞后电压 $\dot U_S$ 的角度为 $\pi/3$，参数 R、C 应如何选择？

(2)如果要求图(b)中 $\dot U_C$ 滞后 $\dot U_S$ 的角度为 π，即反相，R、C 应如何选择。

(3)如果图(b)中 R 和 C 的位置互换，又如何选择 R、C?



(a)　　(b)

题 9－22 图

分析 根据相量图求解图(a)即可。对于图(b)，运用倒退法求解即可。

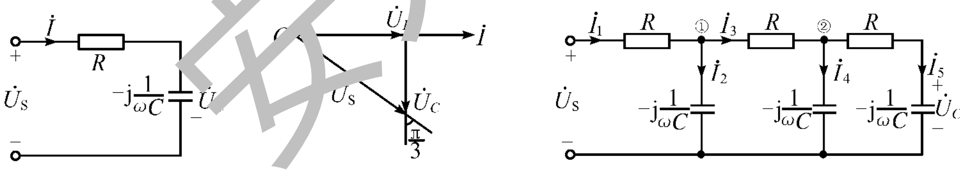
解 (1)如题解 9－22 图(a)所示。

以 $\dot{I}$ 为参考向量，作相量图如题解 9－22 图(b)所示。

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{U_R}{U_C}=\frac{R}{\dfrac{1}{\omega C}}=\omega RC$$

所以

$$\omega RC=\sqrt{3}$$



(a)　　(b)　　(c)

题解 9－22 图

(2)各支路电流参考方向如题解 9－22 图(c)所示，用倒退法计算。

为计算方便设 $\dot{U}_C=1\angle 0°$ V，则

$$\dot{I}_5=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C=\mathrm{j}\omega C$$

$$\dot{U}_{n2}=R\dot{I}_5+\dot{U}_C=\mathrm{j}\omega RC+1$$

$$\dot{I}_4=\mathrm{j}\omega C\cdot\dot{U}_{n2}=\mathrm{j}\omega C(1+\mathrm{j}\omega RC)=\mathrm{j}\omega C-\omega^2C^2R$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_4+\dot{I}_5=2\mathrm{j}\omega C-\omega^2C^2R$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{n1}&=\dot{I}_3R+\dot{U}_{n2}=2\mathrm{j}\omega RC-\omega^2C^2R^2+\mathrm{j}\omega RC+1\\&=3\mathrm{j}\omega RC-\omega^2C^2R^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_2&=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_{n1}=\mathrm{j}\omega C(3\mathrm{j}\omega RC-\omega^2C^2R^2+1)\\&=-3\omega^2C^2R-\mathrm{j}\omega^3C^3R^2+\mathrm{j}\omega C\end{aligned}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=-4\omega^2C^2R-\mathrm{j}\omega^3C^3R^2+3\mathrm{j}\omega C$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_S&=\dot{I}_1R+\dot{U}_{n1}=-\mathrm{j}R^3\omega^3C^3-5R^2\omega^2C^2+\mathrm{j}6R\omega C+1\\&=(1-5R^2\omega^2C^2)+\mathrm{j}[6R\omega C-(R\omega C)^3]\end{aligned}$$

若使 $\dot{U}_C$ 滞后 $\dot{U}_S$ 的角度 π，则上式中的虚部为零，实部为负值，则 $\dot{U}_S$ 超前 $\dot{U}_C$ 的角度为 π，故

$$6R\omega C-(R\omega C)^3=0$$

解得

$$\begin{cases}\omega RC=0\\\omega RC=\sqrt{6}\end{cases}$$

当 $\omega RC=0$ 时，有 $\dot{U}_S=1$ 不合题意，舍去；

当 $\omega RC=\sqrt{6}$时，有 $\dot{U}_S=-29$ 满足要求。

所以
$$\omega RC=\sqrt{6}$$

(3)若(2)中 R 和 C 互换位置，采用与(2)同样的方法，得到

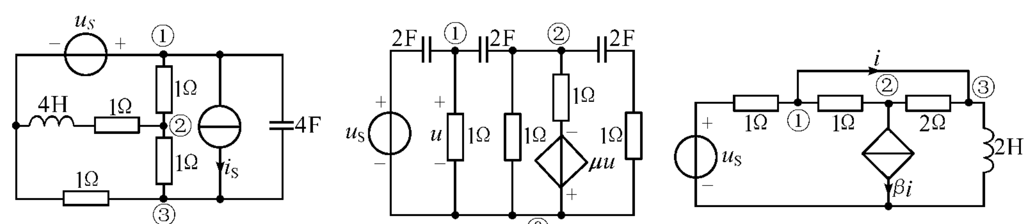
$$\dot{U}_S=1-\frac{5}{(\omega RC)^2}+\mathrm{j}\left[\left(\frac{1}{\omega RC}\right)^3-\frac{6}{\omega RC}\right]$$

令虚部为零，解得
$$\begin{cases}\omega RC\to\infty \text{ 舍去}\\ \omega RC=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{cases}$$

当 $\omega RC=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$时，$\dot{U}_S=-29$ 满足要求。

小结 求解相位关系问题，只要尽量列出二者之间的函数表达式之间的关系，再进行分析即可。

○9－23 列出题 9－23 图所示电路的回路电流方程和结点电压方程。已知 $u_S=14.14\cos(2t)$ V，$i_S=1.414\cos(2t+30°)$ A。



(a) (b) (c)

题 9－23 图

解 (a)
$$\dot{U}_S=10\angle 0°\ \text{V},\quad \dot{I}_S=1\angle 30°\ \text{A}$$

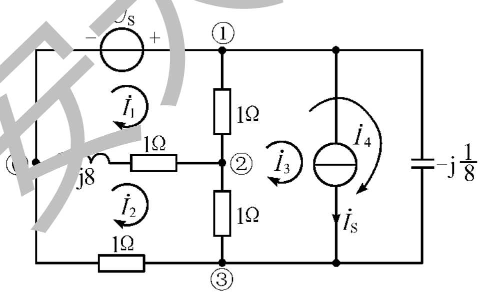
题 9－23 图(a)对应的相量模型如题解 9－23 图(a)所示，结点编号如题解 9－23 图(a)所示。结点电压方程为

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=\dot{U}_S=10\angle 0°\ \text{V}\\ -\dot{U}_{n1}+\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{j}8}+1+1\right)\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=0\\ -\mathrm{j}8\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}+(1+1+\mathrm{j}8)\dot{U}_{n3}=1\angle 30°\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=10\angle 0^\circ \\ \left(2+\dfrac{1}{1+j8}\right)\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=10\angle 0^\circ \\ -\dot{U}_{n2}+(2+j8)\dot{U}_{n3}=1\angle 30^\circ+j80(80\angle 90^\circ)\end{cases}$$

回路电流方程为(回路电流的参考方向如题解 9—23 **图**(a)**所示)**



题解 9—23 **图**(a)

$$\begin{cases}(2+j8)\dot{I}_1-(1+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_3-\dot{I}_4=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ \\ -(1+j8)\dot{I}_1+(3+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_3-\dot{I}_4=0 \\ \dot{I}_3=\dot{I}_S=1\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1-\dot{I}_2+2\dot{I}_3+\left(2-j\dfrac{1}{8}\right)\dot{I}_4=0\end{cases}$$

整理,得

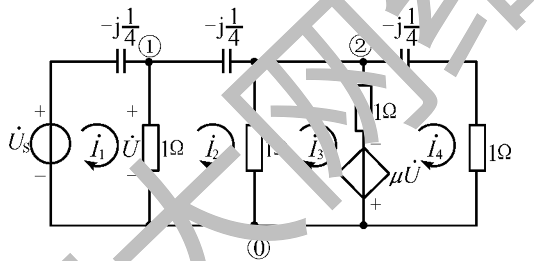
$$\begin{cases}(2+j8)\dot{I}_1-(1+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_4=10\angle 0^\circ+1\angle 30^\circ \\ -(1+j8)\dot{I}_1+(3+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_4=1\angle 30^\circ \\ \dot{I}_3=1\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1-\dot{I}_2+\left(2-j\dfrac{1}{8}\right)\dot{I}_4=-2\angle 30^\circ\end{cases}$$

(b) $\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\ \text{V}$

题 9—23 **图**(b)**对应的相量模型如题解** 9—23 **图**(b)**所示,结点编号和回路电流的参考方向如题解** 9—23 **图**(b)**所示。**

回路电流方程为

$$\begin{cases}(1-j0.25)\dot{I}_1-\dot{I}_2=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ \\ -\dot{I}_1+(2-j0.25)\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ -\dot{I}_2+2\dot{I}_3-\dot{I}_4=\mu\dot{U} \\ -\dot{I}_3+(2-j0.25)\dot{I}_4=-\mu\dot{U}\end{cases}$$



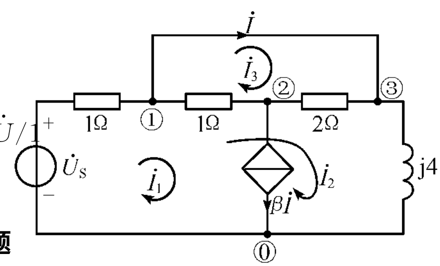
题解 9－23 图(b)

补充方程 $\dot{U}=1\times(\dot{I}_1-\dot{I}_2)$

结点电压方程为

$$\begin{cases}(1+\mathrm{j}8)\dot{U}_{n1}-\mathrm{j}4\dot{U}_{n2}=\mathrm{j}4\dot{U}_S=40\angle 90^\circ\\ -\mathrm{j}4\dot{U}_{n1}+\left(2+\mathrm{j}4+\dfrac{1}{1-\mathrm{j}0.25}\right)\dot{U}_{n2}=-\mu\dot{U}/1\end{cases}$$

补充方程 $\dot{U}=\dot{U}_{n1}$



题解 9－23 图(c)

(c) 题 9－23 图(c)对应的相量模型如题解 9－23 图(c)所示，回路电流的参考方向和结点编号如题解 9－23 图(c)所示。回路电流方程为

$$\begin{cases}\dot{I}_1=\beta\dot{I}\\ 2\dot{I}_1+(4+\mathrm{j}4)\dot{I}_2-3\dot{I}_3=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\\ -\dot{I}_1-3\dot{I}_2+3\dot{I}_3=0\end{cases}$$

补充方程 $\dot{I}=\dot{I}_3$

结点电压方程为

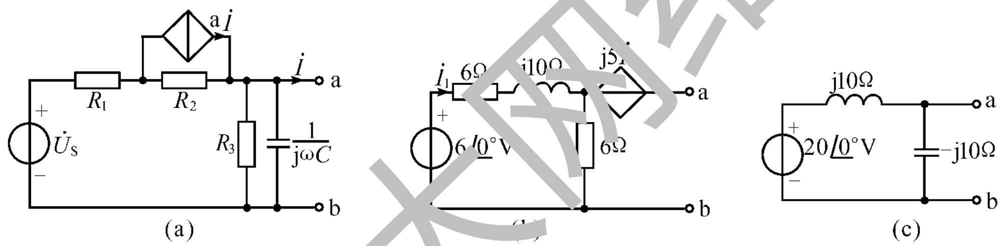
$$\begin{cases}2\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}=\dfrac{\dot{U}_S}{1}-\dot{I}=10\angle 0^\circ-\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}+1.5\dot{U}_{n2}-0.5\dot{U}_{n3}=\beta\dot{I}\\ -0.5\dot{U}_{n2}+(0.5-\mathrm{j}0.25)\dot{U}_{n3}=\dot{I}\end{cases}$$

补充方程 $\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n3}=0$

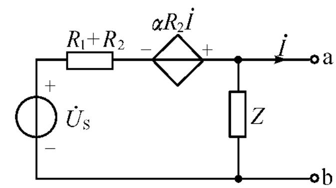
○9－24 求题 9－24 图所示一端口的戴维宁(或诺顿)等效电路。

解 (a)将题 9－24 图(a)作等效变换，如题解 9－24 图(a1)所示。

$$Z=R_3/\!/\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=\frac{R_3\times\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_3+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{R_3}{\mathrm{j}\omega CR_3+1}$$



题 9－24 图



题解 9－24 图(a1)

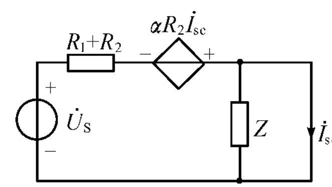
①求 $\dot{U}_{oc}$

因为 $\dot{I}=0$

所以 $\alpha R_2\dot{I}=0$，$\dot{U}_{oc}=\dfrac{\dot{U}_S}{R_1+R_2+Z}\cdot Z$

所以 $\dot{U}_{oc}=\dfrac{\dot{U}_S R_3}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$

②求短路电流 $\dot{I}_{sc}$ 如题解 9－24 图(a2)所示。



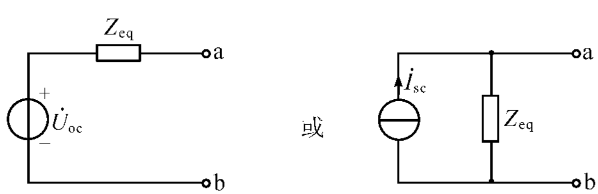
题解 9－24 图(a2)

列 KVL 方程

$$(R_1+R_2)\dot{I}_{sc}-\alpha R_2\dot{I}_{sc}=\dot{U}_S$$

$$\dot{I}_{sc}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+R_2-\alpha R_2}$$

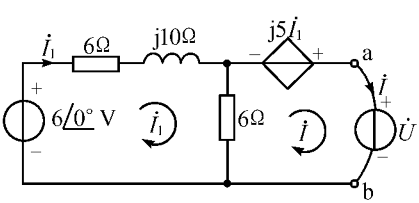
③求 Z_{eq}，并画出等效电路如题解 9－24 图(a3)所示。



题解 9－24 图(a3)

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}}=\frac{R_3(R_1+R_2-\alpha R_2)}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$$

(b)通过 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 的关系求 $\dot{U}_{oc}$ 和 Z_{eq}，如题解 9－24 图(b1)所示。



题解 9－24 图(b1)

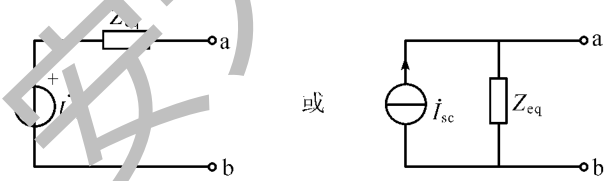
列回路电流方程

$$\begin{cases}(12+\mathrm{j}10)\dot{I}_1-6\dot{I}=6\angle 0^\circ\ \mathrm{V}\\ -6\dot{I}_1+6\dot{I}=\mathrm{j}5\dot{I}_1-\dot{U}\end{cases}$$

整理方程，得 $\dot{U}=3\angle 0^\circ-3\dot{I}$

可见 $\dot{U}_{oc}=3\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$， $Z_{eq}=3\Omega$

等效电路图如题解 9－24 **图**(b2)**所示**。



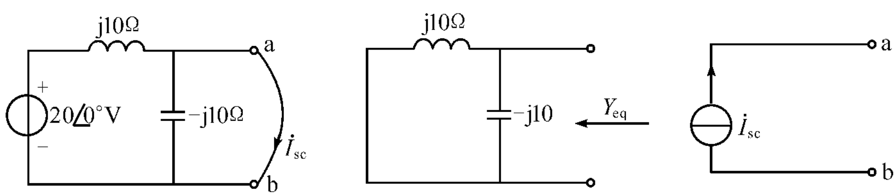
题解 9－24 **图**(b2)

(c)①**求** $\dot{I}_{sc}$ **如题解** 9－24 **图**(c1)**所示**。 $\dot{I}_{sc}=\dfrac{20\angle 0^\circ}{\mathrm{j}10}=-\mathrm{j}2\mathrm{A}$

②**求** Y_{eq}，**如题解** 9－24 **图**(c2)**所示**。

$$Y_{eq}=\frac{1}{\mathrm{j}10}+\frac{1}{-\mathrm{j}10}=0$$

可见该电路的等效电路为理想的电流源，如题解 9－24 **图**(c3)**所示**。



(c1) (c2) (c3)

题解 9－24 **图**

◎9－25 **设** $R_1=R_2=1\mathrm{k}\Omega$，$C_1=1\mu\mathrm{F}$，$C_2=0.01\mu\mathrm{F}$。**求题** 9－25 **图所示电路的** $\dot{U}_2/\dot{U}_1$。

分析 **根据理想运放虚短、虚断的规则求解即可。**

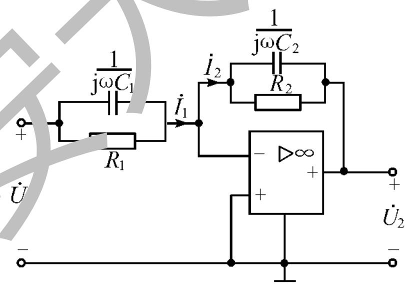
解 **令** $Z_1=\dfrac{R_1\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}{R_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}=\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega C_1R_1}$

$$Z_2=\frac{R_2\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega C_2R_2}$$

利用理想运放的规则 1,2,有

$$\frac{\dot{U}_1}{Z_1}=-\frac{\dot{U}_2}{Z_2}\quad(\dot{I}_1=\dot{I}_2)$$

则$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=-\dfrac{Z_2}{Z_1}=-\dfrac{R_2(1+\mathrm{j}\omega C_1R_1)}{R_1(1+\mathrm{j}\omega C_2R_2)}$代入已知条件,得$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=-\dfrac{10^5+\mathrm{j}100\omega}{10^5+\mathrm{j}\omega}$



题 9—25 图

◯9—26 求题 9—26 图所示电路的 $\dot{U}_2/\dot{U}_1$。

解 为了书写方便,R_1,R_2,R_3 用电导 G_1,G_2,G_3 替代($G_1=\dfrac{1}{R_1},G_2=\dfrac{1}{R_2},G_3=\dfrac{1}{R_3}$)。

由题 9—26 图列结点电压方程,并注意到理想运算的规则 1,有

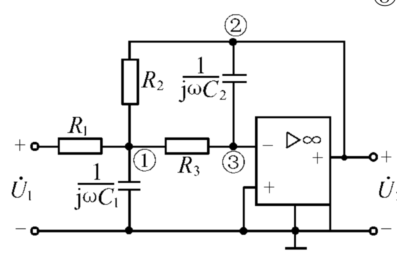
$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_3+\mathrm{j}\omega C_1)\dot{U}_{n1}-G_2\dot{U}_{n2}-G_3\dot{U}_{n3}=G_1\dot{U}_1 & ① \\ \dot{U}_{n2}=\dot{U}_2 & ② \\ -G_3\dot{U}_{n1}-\mathrm{j}\omega C_2\dot{U}_{n2}+(G_3+\mathrm{j}\omega C_2)\dot{U}_{n3}=0 & ③\end{cases}$$

利用规则 2,$\dot{U}_{n3}=0$,代入式③,得

$$\dot{U}_{n1}=-\frac{\mathrm{j}\omega C_2}{G_3}\dot{U}_{n2}\qquad ④$$

将②④代入①,并整理,得

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{-G_1G_3}{G_2G_3-\omega^2C_1C_2+\mathrm{j}\omega C_2(G_1+G_2+G_3)}$$

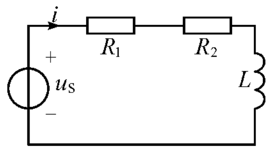


题 9—26 图

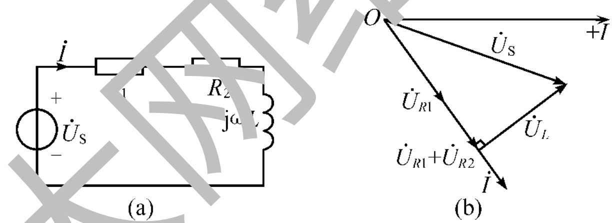
◎9—27 题 9—27 图所示电路中 $u_S=141.4\cos(314t-30°)\mathrm{V},R_1=3\Omega,R_2=2\Omega,L=9.55\mathrm{mH}$。试求各元件的端电压并作电路的相量图,计算电源发出的复功率。

分析 电源发出的复功率 $\bar{S}=\dot{U}_S\cdot\dot{I}^*$,进行求解即可。

解 原电路图对应的相量模型如题解 9—27 图(a)所示。



题 9—27 图



题 9—27 图

$$\omega L=314\times9.55\times10^{-3}\approx3\Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+R_2+j\omega L}=\frac{100\angle-30^\circ}{3+2+j3}=17.15\angle-60.96^\circ\ \text{A}$$

各元件的端电压为

$$\dot{U}_{R1}=R_1\dot{I}=3\times17.15\angle-60.96^\circ=51.45\angle-60.96^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{R2}=R_2\dot{I}=2\times17.15\angle-60.96^\circ=34.3\angle-60.96^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=j3\times17.15\angle-60.96^\circ=51.45\angle29.04^\circ\ \text{V}$$

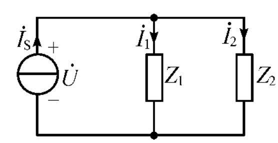
相量图如题解 9—27 图(b)所示。

电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_S\cdot\dot{I}^*=100\angle-30^\circ\times17.15\angle60.96^\circ=1470.66+j882.26\text{V}\cdot\text{A}$$

○9—28 题 9—28 图电路中 $i_S=\sqrt{2}\cos(10^4t)\text{A}$，$Z_1=(10+j50)\Omega$，$Z_2=-j50\Omega$。求 Z_1、Z_2 吸收的复功率，并验证整个电路复功率守恒，即有 $\sum\overline{S}=0$。

解 用分流公式



题 9—28 图

$$\dot{I}_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{-j50}{10+j50-j50}\times1\angle0^\circ$$

$$=-j5\text{A}(\dot{I}_S=1\angle0^\circ\ \text{A})$$

$$\dot{I}_2=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{10+j50}{10+j50-j50}=1+j5=\sqrt{26}\angle87.69^\circ$$

A

Z_1，Z_2 吸收的复功率为

$$\overline{S_1}=I_1^2Z_1=25\times(10+j50)=250+j1250\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\overline{S_2}=I_2^2Z_2=26\times(-j50)=-j1300\text{V}\cdot\text{A}$$

电流源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}\dot{I}_S^*=(\dot{I}\ Z_1)\cdot\dot{I}_S^*=[-j5\times(10+j50)]\times1\angle0^\circ=250-j50\text{V}\cdot\text{A}$$

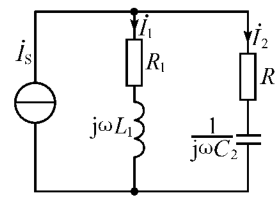
显然 $\overline{S_1}+\overline{S_2}=\overline{S}$，复功率守恒。

○9—29 题 9—29 图所示电路中 $I_S=10\text{A}$，$\omega=1000\text{rad/s}$，$R_1=10\Omega$，$j\omega L_1=j25\Omega$，R_2

$=5\Omega$，$-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_2}=-\mathrm{j}15\Omega$。**求各支路吸收的复功率和电路的功率因数。**

解

$$\dot{I}_S=10\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$



题 9－29 图

令

$$Z_1=R_1+\mathrm{j}\omega L_1=10+\mathrm{j}25\Omega$$

$$Z_2=R_2-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}=5-\mathrm{j}15\Omega$$

应用分流公式

$$\dot{I}_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15}\times 10$$

$$=8.77\angle -105.25^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{10+\mathrm{j}25}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15}\times 10=14.936\angle 34.51^\circ\ \mathrm{A}$$

各支路吸收的复功率为

$$\overline{S_1}=Z_1I_1^2=(10+\mathrm{j}25)\times 8.77^2=769.13+\mathrm{j}1922.82\mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S_2}=Z_2I_2^2=(5-\mathrm{j}15)\times 14.936^2=1115.42-\mathrm{j}3346.26\mathrm{V\cdot A}$$

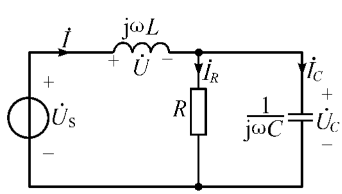
电流源发出的复功率为

$$\overline{S}=\overline{S_1}+\overline{S_2}=1884.55-\mathrm{j}1423.42=2361.7\angle -37.064^\circ\ \mathrm{V\cdot A}$$

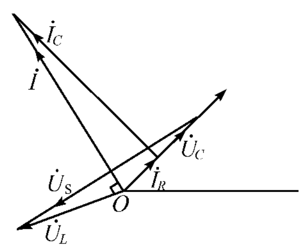
电路的功率因数为

$$\cos\varphi=\cos(-37.064^\circ)=0.798$$

○9－30　**题** 9－30 **图所示电路中** $R=2\Omega$，$\omega L=3\Omega$，$\omega C=2\mathrm{S}$，$\dot{U}_C=10\angle 45^\circ\ \mathrm{V}$。**求各元件的电压、电流和电源发出的复功率。**



题 9－30 图



题解 9－30 图

解　**相量示意图如题解** 9－30 **图所示。**

$$\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C=\mathrm{j}2\times 10\angle 45^\circ=20\angle 135^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}_C}{R}=\frac{10\angle 45^\circ}{2}=5\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C=5\angle 45^\circ+20\angle 135^\circ=20.62\angle 120.96^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}3\times 20.62\angle 120.96^\circ=61.86\angle -149.04^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_S=\dot{U}_L+\dot{U}_C=61.86\angle -149.04^\circ+10\angle 45^\circ=52.217\angle -151.7^\circ\ \mathrm{V}$$

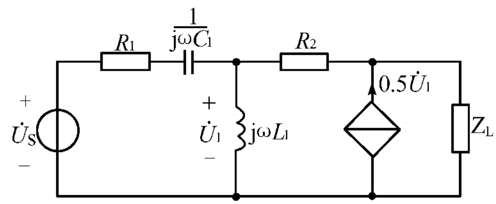
电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_S\cdot\dot{I}^*=52.217\angle -151.7^\circ\times 20.62\angle -120.96^\circ$$
$$=1076.71\angle 87.34^\circ=49.97+\mathrm{j}1075.55\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$$

○9－31 $\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_S}=0.28[illegible]\angle -98.13^\circ$

$\overline{S}=120+\mathrm{j}16$[illegible] $\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$

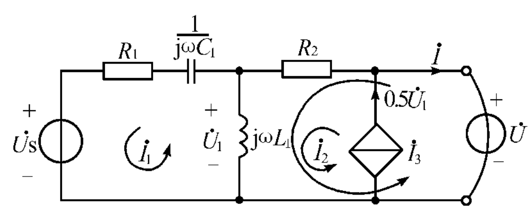
●9－32 **题** 9－32 **图所示电路中** $R_1=1\Omega$，$C_1=10^3\mu\mathrm{F}$；$L_1=0.4\mathrm{mH}$，$R_2=2\Omega$，$\dot{U}_S=10\angle -45^\circ\ \mathrm{V}$，$\omega=10^3$ rad s。**求** Z_L（**可任意变动**）**能获得的最大功率**。



题 9－32 **图**

分析　先求电路的戴维宁等效电路，然后即可容易求解。

解　先求戴维宁等效电路，如题解 9－32 **图**(a)**所示。**



题解 9－32 **图**(a)

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}=-\mathrm{j}\Omega,\quad \mathrm{j}\omega L_1=\mathrm{j}0.4\Omega,\quad R_1=1\Omega,\quad R_2=2\Omega,\quad \dot{U}_S=10\angle -45^\circ\ \mathrm{V}$$

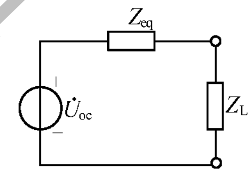
利用 $\dot{U}$ **与** $\dot{I}$ **的关系确定** $\dot{U}_{oc}$ **和** Z_{eq}。

列回路电流方程
$$\begin{cases}(1-\mathrm{j}+\mathrm{j}0.4)\dot{I}_1-\mathrm{j}0.4\dot{I}_2-\mathrm{j}0.4\dot{I}_3=-10\angle -45^\circ\\ \dot{I}_2=0.5\dot{U}_1\\ -\mathrm{j}0.4\dot{I}_1+(2+\mathrm{j}0.4)\dot{I}_2+(2+\mathrm{j}0.4)\dot{I}_3=\dot{U}\end{cases}$$

补充方程

$$\dot U_1 = \mathrm{j}0.4(\dot I_2+\dot I_3-\dot I_1)$$

$$\dot I_3 = -\dot I$$



题解 9－32 图(b)

代入上式，并整理，得

$$\dot U = -(2+\mathrm{j})\dot I + 5\sqrt2\,\mathrm{j}$$

从而

$$\dot U_{oc} = 5\sqrt2\,\mathrm{j} = 5\sqrt2\angle -90^\circ\ \mathrm{V},\ Z_{eq} = 2+\mathrm{j}\Omega$$

等效电路如题解 9－32 图(b)所示。

根据正弦交流电路的最大功率传输定理可知，当 $Z_L = Z_{eq}^*$ 时，获最大功率。

从而有

$$Z_L = 2-\mathrm{j}\Omega$$

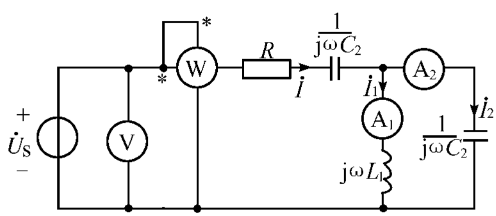
且

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4\times R_{eq}} = \frac{(5\sqrt2)^2}{4\times2} = 6.25\mathrm{W}$$

小结　**正弦交流电路的最大功率传输定理为 $Z_L = Z_{eq}^*$ 时，获得最大功率，$P_{max} = \dfrac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$。**

○9－33　$P_{max} = 12.5\mathrm{W}$

○9－34　**题 9－34 图电路中已知：$\dfrac{1}{\omega C_2} = 1.5\omega L_1$，$R = 1\Omega$，$\omega = 10^4\mathrm{rad/s}$，电压表的读数为 10V，电流表 A_1 的读数为 30A。求图中电流表 A_2、功率表 W 的读数和电路的输入阻抗 Z_{in}。**



题 9－34 图

解　**令** $\dot I_1 = 30\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$

由图知　　$\mathrm{j}\omega L_1\cdot\dot I_1 = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\cdot\dot I_2$　　**又** $\dfrac{1}{\omega C_2} = 1.5\omega L_1$（**已知**）

所以 $\dot I_2 = -\dfrac{\dot I_1}{1.5} = -20\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$，**即表 A_2 的读数为 20A。**

总电流　　$\dot I = \dot I_1 + \dot I_2 = 30\angle 0^\circ - 20\angle 0^\circ = 10\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$

所以功率表的读数为 $$P=I^2R=10^2\times1=100\text{W}$$

又 $$U=10\text{V},\quad P=UI\cos\varphi$$

得 $$\cos\varphi=\frac{100}{10\times10}=1$$

从而 $\varphi=0$，说明 $\dot U_S$ 和 $\dot I$ 同相位，则输入阻抗为

$$Z=\frac{\dot U_S}{\dot I}=\frac{10\angle0^\circ}{10\angle0^\circ}=1\Omega$$

◎9－35　题 9－35 图中的独立电源为同频正弦量，当 S 打开时，电压表的读数为 25V。电路中的阻抗为 $Z_1=(6+\text{j}12)\Omega$，$Z_2=2Z_1$。求 S 闭合后电压表的读数。

分析　先将电路等效为戴维宁电路即可，电压表的读数为有效值。

解　将 S 打开的状态作戴维宁等效。

①当 S 打开时，电压表的读数是实际开路电压 U_{oc}，设

$$\dot U_{oc}=25\angle0^\circ\ \text{V}$$

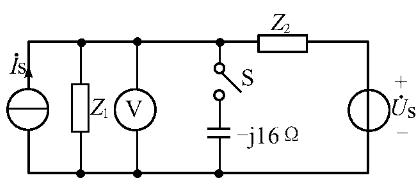
②求 Z_{eq}（将独立源置零）

$$Z_{eq}=Z_1/\!/Z_2=\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{2}{3}Z_1=\frac{2}{3}(6+\text{j}12\Omega)=4+\text{j}8\Omega$$

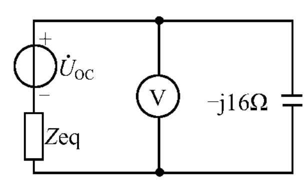
③开关 S 闭合后的等效电路如题解 9－35 图所示。

$$\dot U=\frac{\dot U_{oc}}{Z_{eq}-\text{j}16}\times(-\text{j}16)=\frac{25\angle0^\circ}{4+\text{j}8-\text{j}16}\times(-\text{j}16)=44.72\angle-26.5650^\circ\ \text{V}$$

即电压表的读数为 44.72V。

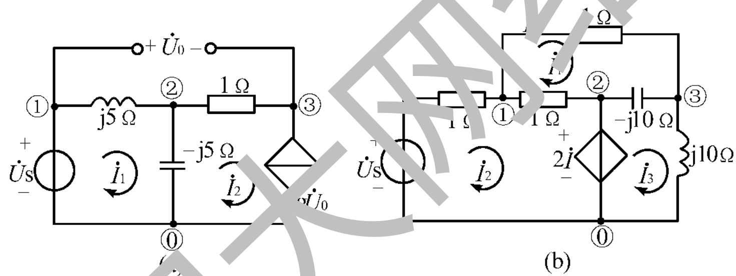


题 9－35 图



题解 9－35 图

○9－36　列出题 9－36 图电路的结点电压方程和网孔电流（顺时针）方程。



题 9－36 图

解 结点的编号和网孔电流的参考方向如题 9－36 图所示。

(a)**结点电压方程**

$$\begin{cases}\dot U_{n1}=\dot U_S\\ -\dfrac{1}{j5}\dot U_{n1}+(\dfrac{1}{j5}+j\dfrac{1}{5}+1)\dot U_{n2}-\dot U_{n3}=0\\ -\dot U_{n2}+\dot U_{n3}=-g\dot U_0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot U_0=\dot U_{n1}-\dot U_{n3}$$

网孔电流方程

$$\begin{cases}j5\dot I_2=\dot U_S\\ \dot I_2=g\dot U_0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot U_0=j5\dot I_1+\dot I_2$$

(b)**结点电压方程**

$$\begin{cases}3\dot U_{n1}-\dot U_{n2}-\dot U_{n3}=\dot U_S\\ \dot U_{n2}=2\dot I\\ -\dot U_{n1}-j0.1\dot U_{n2}+\dot U_{n3}=0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot I=\frac{\dot U_{n3}-\dot U_{n1}}{1}=\dot U_{n3}-\dot U_{n1}$$

网孔电流方程

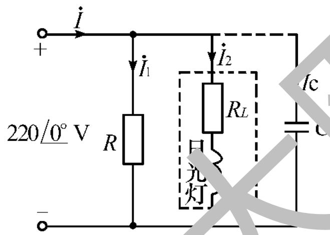
$$\begin{cases}(2-j10)\dot I_1-\dot I_2+j10\dot I_3=0\\ -\dot I_1+2\dot I_2=\dot U_S-2\dot I\\ j10\dot I_1=2\dot I\end{cases}$$

补充方程

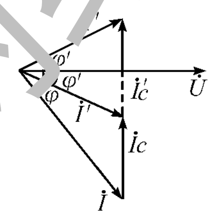
$$\dot I=-\dot I_1$$

○9－37　$\dot I=91.79\angle -11.31^\circ$ A，　$\cos\varphi=0.981$

◎9－38　**如题** 9－38 **图所示，功率为** 60W，**功率因数为** 0.5 **的日光灯（感性）负载与功率为** 100W **的白炽灯各** 50 **只并联在** 220V **的正弦电源上**（$f=50$Hz）。**如果要把电路的功率因数提高到** 0.92，**应并联多大电容**？



题 9－38 图



题解 9－38 图

分析　功率因数 $\lambda=\cos\varphi$，根据元件的伏安特性及功率定义求解即可。

解　由题解 9－38 图可知，当 $\dot{I}'$ 超前 $\dot{U}$ 时，电路呈容性，而此时电容 C 也较大，一般从经济的角度选 C 较小值（指达到同样的功率因数时）。即 $\cos\varphi'=0.92$

取 $\varphi'=-23.07°$

从题解 9－38 图的几何关系知

$$I_C=I\sin\varphi-I'\sin\varphi'=\omega CU$$

又 $I=\dfrac{P}{U\cos\varphi}$，$I'=\dfrac{P}{U\cos\varphi'}$（并电容前后有功功率 P 不变），代入上式，得

$$C=\frac{P}{\omega U_2}(\tan\varphi-\tan\varphi')$$

并电容前：$\tan\varphi=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{50\times60\tan\varphi_1}{50\times(60+100)}(\cos\varphi_1$

$$=0.5)=\frac{50\times60\times\tan60°}{50\times(60+100)}=0.6495$$

并电容后：$\tan\varphi'=\tan23.07°=0.4259$

$\omega=2\pi f=314\text{rad/s}$，$U=220\text{V}$，代入上式，得

$$C=\frac{50\times(60+100)}{314\times220^2}(0.6495-0.4259)=117.7\times10^{-6}\text{F}=117.7\mu\text{F}$$

○9－39　已知题 9－39 图电路 $I_1=10\text{A}$，$I_2=20\text{A}$，其功率因数分别为 $\lambda_1=\cos\varphi_1=0.8(\varphi_1<0)$，$\lambda_2=\cos\varphi_2=0.5(\varphi_2>0)$，端电压 $U=100\text{V}$，$\omega=1000\text{rad/s}$。(1)求图中电流表、功率表的读数和电路的功率因数；(2)若电源的额定电流为 30A，那么还能并联多大的电阻？求并联该电阻后功率表的读数和电路的功率因数；(3)如使原电路的功率提高到 $\lambda=0.9$，需要并联多大电容？

解　(1)令 $\dot{U}=100\angle0°\ \text{V}$

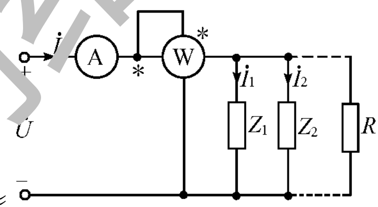
由已知条件，知：$\varphi_1=\arccos(0.8)=-36.87°$（容性）

$\varphi_2=\arccos(0.5)=60°$（感性）

则 $\dot{I}_1=10\angle36.87°\ \text{A}$，　$\dot{I}_2=20\angle-60°\ \text{A}$

KCL：$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 36.87^\circ+20\angle -60^\circ$

$=21.264\angle -32.166^\circ$ A



题 9－39 图

即电流表的读数为 21.264A；

电路的功率因数 $\lambda=\cos(-32.166^\circ)=0.847$；

功率表的读数为 $P=100\times 21.264\times 0.847\approx 1800$W。

(2)并联电阻 R 后

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_R=10\angle 36.87^\circ+20\angle -60^\circ+\frac{100}{R}=18+\frac{100}{R}-\mathrm{j}11.32$$

当 $I=30$A 时，
$$30^2=\left(18+\frac{100}{R}\right)^2+11.32^2$$

解得
$$R=10.22\Omega$$

即电源的额定电流为 30A，还能并联 10.22Ω 的电阻。

则
$$\dot{I}=18+\frac{100}{10.22}-\mathrm{j}11.32=30\angle -22.167^\circ\ \mathrm{A}$$

功率因数
$$\lambda=\cos(-22.167^\circ)=0.926$$

此时功率表的读数为 $P=100\times 30\times 0.926=2778$W

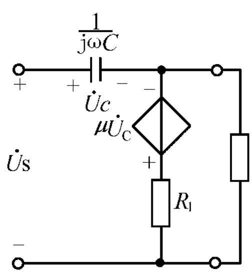
(3)原电路 $\cos\varphi=0.847$，即 $\tan\varphi=0.627$

现 $\cos\varphi'=0.9$，即 $\tan\varphi'=0.484$

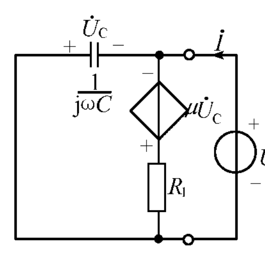
需并电容 C 为

$$C=\frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi-\tan\varphi')=\frac{1800}{10^3\times 100^2}\times(0.627-0.484)=25.8\mu\mathrm{F}$$

◎9－40 求题 9－40 图电路中 Z 的最佳匹配值。



题 9－40 图



题解 9－40 图

分析 最佳匹配时，$Z=Z_{eq}^*$，利用此公式求解即可。

解 求 Z 的最佳匹配值，实际上是求将 Z 支路断开后的等效阻抗值，最佳匹配时

$$Z=Z_{eq}^*$$

用外施激励法求 Z_{eq}（Z 支路断开，独立源置零，外加激励），如题解 9－40 图所

示。

$$\dot I=\mathrm{j}\omega\dot CU+\frac{\dot U+\mu\dot U}{R_1}=(\mathrm{j}\omega C+\frac{1-\mu}{R_1})\dot U(\dot U_C=-\dot U)$$

所以 $Z_{eq}=\frac{\dot U}{\dot I}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C+\frac{1-\mu}{R_1}}=\frac{R_1}{1-\mu+\mathrm{j}\omega CR_1}=\frac{R_1(1-\mu-\mathrm{j}\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$

故 Z 的最佳匹配值为 $Z=Z_{eq}^*=\frac{R_1(1-\mu+\mathrm{j}\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$

○9—41 $$C=\frac{1}{(5\times10^3)^2\times400\times10-3)}=0.1\mu\mathrm{F}.$$

$$i=0.2\sqrt2\cos(5000t)\mathrm{A},u_R=\sqrt2\cos(5000t)\mathrm{V}$$

$$u_L=400\sqrt2\cos(5000t+90^\circ)\mathrm{V},u_C=400\sqrt2\cos(5000t-90^\circ)\mathrm{V}$$

○9—42 RLC 串联电路的端电压 $u=10\sqrt2\cos(2500t+10^\circ)\mathrm{V}$，当 $C=8\mu\mathrm{F}$ 时，电路中吸收的功率为最大，$P_{max}=100\mathrm{W}$。(1)求电感 L 和 Q 值；(2)作出电路的相量图。

解 由题意知，电路吸收的最大功率为 $P_{max}=UI$ 即 $\cos\varphi=1$，此时电路发生了串联谐振。

(1)根据谐振的条件 $\omega_0L=\frac{1}{\omega_0C}$ 得 $L=\frac{1}{\omega_0^2C}$，代入已知条件，得

$$L=\frac{1}{(2500)^2\times8\times10^{-6}}=0.02\mathrm{H}$$

又 $P_{max}=I^2R=\frac{U^2}{R}=100\mathrm{W}$

得 $$R=\frac{U^2}{100}=\frac{10^2}{100}=1\Omega(\text{谐振时 } U_R=U=10\mathrm{V})$$

则电路的品质因数 $Q=\frac{\omega_0L}{R}=\frac{2500\times0.02}{1}=50$

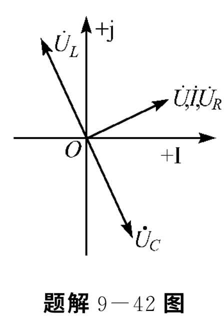
(2)各元件的电压和电路的电流为

$$\dot I=\frac{\dot U}{R}=10\angle10^\circ\ \mathrm{A}(\dot U=10\angle10^\circ\ \mathrm{A})$$

$$\dot U_R=\dot U=10\angle10^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot U_L=\mathrm{j}Q\dot U=\mathrm{j}50\times10\angle10^\circ=500\angle100^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot U_C=-\dot U_L=500\angle-80^\circ\ \mathrm{V}$$



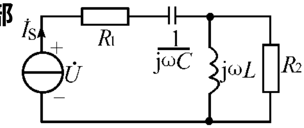
题解 9—42 图

电路的相量图如题解 9—42 图所示。

○9—43 $\dot I=10\angle0^\circ$ A， $\dot I_C=0.318\angle-90^\circ$ A， $\dot I_C=0.318$

$\angle 90^\circ$ A

◎9－44　**题 9－44 图电路中，$I_S=1\text{A}$，当 $\omega=1000\text{rad/s}$ 时电路发生谐振，$R_1=R_2=100\Omega$，$L=0.2\text{H}$。求 C 值和电流源端电压 $\dot{U}$。**



题 9－44 **图**

分析　**先求解电路的输入阻抗 Z_{in}，电路谐振时 Z_{in} 的虚部为 0，求解即可。**

解　**电路的输入端阻抗为**

$$Z_{in}=R_1-\text{j}\frac{1}{\omega C}+\frac{R_2\cdot \text{j}\omega L}{R_2+\text{j}\omega L}$$

$$=\left[R_1+\frac{(\omega L)^2R_2}{R_2^2+(\omega L)^2}\right]+\text{j}\left[\frac{\omega L R_2^2}{R_2^2+(\omega L)^2}-\frac{1}{\omega C}\right]$$

当电路发生谐振时，Z_{in} 的虚部为零，即

$$\frac{\omega_0 L R_2^2}{R_2^2+(\omega_0 L)^2}-\frac{1}{\omega_0 C}=0$$

得 $C=\dfrac{R_2^2+(\omega_0 L)^2}{\omega_0^2 L R_2^2}$**，将已知条件代入，得**

$$C=\frac{100^2+(10^3\times 0.2)^2}{(10^3)^2\times 0.2\times 100^2}=25\times 10^{-6}=25\mu\text{F}$$

则

$$Z_{in}=R_1+\frac{(\omega_0 L)^2R_2}{R_2^2+(\omega_0 L)^2}=100+\frac{(10^3\times 0.2)^2\times 100}{100^2+(10^3\times 0.2)^2}=180\Omega$$

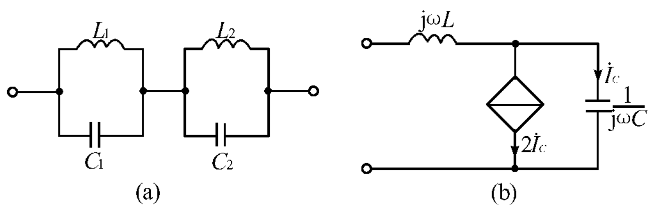
从而

$$\dot{U}=\dot{I}_S\times 180$$

设 $\dot{I}_S=1\angle 0^\circ$ A　**则**　$\dot{U}=180\angle 0^\circ$ V

○9－45　**略**

●9－46　**求题** 9－46 **图电路的谐振频率。**



题 9－46 **图**

分析　**根据谐振定义求解即可。**

解　**由题** 9－46 **图**(a)**可知，**

当 $Y_1=\text{j}(\omega C_1-\dfrac{1}{\omega L_1})=0$，$Y_2=\text{j}(\omega C_2-\dfrac{1}{\omega L_2})=0$

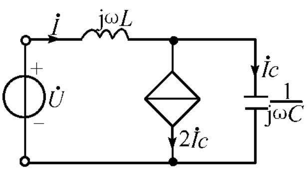
即 $\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$，$\omega_2=\dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$时，电路发生并联谐振。

电路的总阻抗为 $Z=\dfrac{1}{Y_1}+\dfrac{1}{Y_2}=\dfrac{Y_1+Y_2}{Y_1Y_2}=\dfrac{\mathrm{j}\left[\omega(C_1+C_2)-\dfrac{1}{\omega L_1}-\dfrac{1}{\omega L_2}\right]}{-(\omega C_1-\dfrac{1}{\omega L_1})(\omega C_2-\dfrac{1}{\omega L_2})}$

即当 $\omega(C_1+C_2)-\dfrac{1}{\omega L_1}-\dfrac{1}{\omega L_2}=0$，$Z=0$，电路发生串联谐振，

此时
$$\omega=\sqrt{\frac{L_1+L_2}{(C_1+C_2)L_1L_2}}$$

(b)用外施激励法，先求输入阻抗 Z_{in}，如题解 9－46 图所示。



题解 9－46 图

由 KCL，知 $\dot I=2\dot I_C+\dot I_C=3\dot I_C$ ①

由 KVL，知 $\mathrm{j}\omega L\dot I+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I_C=\dot U$ ②

式①代入式②并整理，得 $\dot U=\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{3\omega C})\dot I$

所以
$$Z_{in}=\frac{\dot U}{\dot I}=\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{3\omega C})$$

当电路发生谐振时，有 $\omega L-\dfrac{1}{3\omega C}=0$

所以
$$\omega=\frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

小结 LC 并联发生谐振时，$\omega C=\dfrac{1}{\omega L}$。电路发生谐振时，输入阻抗 Z_{in} 的虚部为 0。