

重力补偿惯性导航技术的应用与发展

胡其秦

2024 年 10 月 12 日

摘要

XXXXXXX

1 介绍

向海而兴，向海而强，自 15 世纪以来，人类就拉开了大航海时代的帷幕。随着科学家们对海洋认识的不断加深，新型航海技术日新月异，世界各国已经不再是一个个被分割的孤岛，而是相互连结的命运共同体。充分开发海洋资源，发展海洋贸易，建设海洋强国，首先是要加快海洋科技创新的步伐。但汪洋无际，复杂多变的海洋环境给航行的船只和舰艇的作业活动带来了许多难题，其中亟需解决的是水下高精度导航定位问题。水下导航的难点不光是在导航定位本身上，更是因为复杂多变的水下环境带来了不小的阻碍，让原本适用于地面的诸多方法失效于水下，比如我们常见的卫星导航，由于水体介质不利于电磁波的传播，所以目前来说在深海区域无法直接接收到有效的卫星信号。而相比之下，惯性导航依托自身的惯性器件测量输出的结果，并不需要其他外来的数据，所以能够保持较高的自主性和无源性，使之成为主要的水下导航方式。然而，惯性导航的定位精度往往与其自身的器件工艺与相应的算法有关，在没有其他参考信息进行误差修正的情况下，只能在短时间内保持一定的导航精度。随着导航解算时间的不断增加，相应的各种误差也将随时间不断积累，如果不能采取及时有效的误差修正手段，惯性导航将无法满足正常的导航精度需求，最终导致其彻底失效。因此，发展以惯导为主、多手段辅助导航系统成为水下导航定位系统的发展方向。

为了能够满足水下导航的正常需求，人们不得不从地球自身的地理特征上寻找方法，比如地形轮廓、地球磁场、地球重力场等。与陆地上不同，因为海下环境的复杂性，以目前的技术手段很难有效的成功提取海底特征；而且由于水下载体自身金属结构的特殊性，加上大量的用电设施，很容易对本就微弱的地球磁场产生进一步的干扰，增大其检测难度。无独有偶，重力场作为一种无源、不交叉重合的地球特征场，由于

其只与地球本身有关，短时间内并不会会有明显的变化，自上个世纪以来一直成为人们研究的热点，相关领域可以追溯到测绘、地质勘探、天体物理等多个研究方向。更重要的是，在哥式效应的作用下，加速度计和陀螺仪无法区分载体的加速度和重力加速度，而往往重力场的信息是通过正常重力场模型给出，这对于追求高精度的惯性导航来说，成为了制约其发展的重要影响因素之一。Gelb 认为惯性导航的极限精度取决于重力场信息的精度^[1]，Peshekhonov 也表明^[2]，地球海洋 80% 的区域的平均垂线偏差为 5"，15% 的区域的平均垂线偏差为 15"，5% 的区域可达 1'。他还指出修正垂线偏差引起的系统误差是实现 $10^{-3^\circ}/h$ 精度或更高精度惯导系统导航的必要条件。目前国际上高精度惯导的指标已经优于 $1\text{ n mail}/h$ ^[3]，但离水下无源自主导航最终实现“码头到码头 (Port-to-Port)”这一目标还有相当长的一段距离^[4]。因此如何提取出重力扰动并有效地应用于惯导中补偿，是开展重力辅助惯性导航后续研究的关键性步骤，也是其重要前提^[5]。

2 重力测量

重力测量最早可以追溯到 16 世纪，1590 年伽利略首次利用观测物体自由落体运动的方法测量到了重力加速度。历史上，惠更斯在 17 世纪推导了摆钟周期 T 与摆长 L 和重力加速度 g 的关系，从而研制出了第一架可以测定重力加速度的摆钟^[6]，为重力测量奠定了基础。在十九世纪末期，匈牙利物理学家厄缶研制出了扭秤，这标志着重力勘探技术的诞生^[7, 8]。然而，到了二十世纪三十年代，由于扭秤在测量上耗时较长且易受地形变化的影响，它逐渐被新一代的重力测量设备所替代，这些设备虽灵敏度略低，但测量速度快、稳定性强^[9]。

根据测量目标的区别，可以将重力仪分为标量重力仪、矢量重力仪以及重力梯度仪^[10]。标量重力测量通常使用一个精确的垂直加速度计来确定重力场中垂向重力异常，没有提供方向信息；矢量重力仪不仅测量重力异常的大小，还测量其方向，包含垂向和水平方向的重力扰动信息，所以测量结果往往能够更好的反映重力场的空间分布情况，在当今时代拥有更广泛的应用；重力梯度仪则是测量重力场的空间变化率（即重力势的梯度），在需要解析高频重力信号和高精度重力场研究中，能够提供更高的分辨率和丰富的细节特征，拥有更广阔的应用前景。

根据搭载的平台设备区别，重力测量可以分为地面重力测量、海洋重力测量、航空重力测量和卫星重力测量^[11-13]，表1分析了四种方式的优缺点及发展趋势。随着新一代卫星重力任务 (Challenging Minisatellite Payload, CHAMP)^[14]、重力恢复与气候实验 (Gravity Recovery and Climate Experiment, GRACE) 和重力场与稳态海洋环流探测器 (Gravity Field and Steadystate Ocean Circulation Explorer, GOCE) 等任务的出现^[12, 15, 16]，大大提高了地球重力场模型中的中、长波的信号精度。现代开展海洋重力测量的仪器是海洋重力仪，其中海洋重力测量一般采用静力法相对重力测量。由于

海洋重力仪需要安装在动基座 (如船舶、潜艇等) 进行测量工作, 需要面临恶劣海况的干扰, 各种有害加速度信息和厄特弗斯效应会影响到重力加速度的测量结果^[17]。与传统的船载重力测量手段不同, 为了获得更加真实的海洋重力数据, 近几年研究人员进一步提出水下移动重力测量, 使 AUV 搭载相关重力测量仪器平台, 与母船之间通过拖缆连接实现信息反馈, 实现水下移动重力测量实验^[18]。图1为国防科技大学研制的水下重力仪搭载“海洋四号”调查船进行的水下重力测量实验。但是这些方法需要向外发射信号或预先部署信号响应基站, 导致缺乏自主性。



图 1: “海洋四号”科考船实施水下拖拽移动重力测量实验^[19]

设计的重力仪的平台架构是否稳定, 往往决定了其测量的精度, 因此更好的平台稳定性是所有新系统开发的主要目标。文献 [20] 基于不同的稳定平台方案类型, 将当前主流的海空重力仪划分为四种^[20-25]: 第一种是双轴阻尼陀螺平台, 代表性产品包括 L & R 系列、ZLS 型、DGS 型、KSS 型、BGM 型和 CHZ 型重力仪; 第二种是双轴惯导加捷联方位平台, 代表性产品包括 Chenkan-AM 型和 GDP 型重力仪; 第三种是三轴惯导平台, 代表性产品包括 AirGrav 型、GIPS-AM 型和 GT 系列重力仪; 第四种是捷联惯导平台, 代表性产品包括 SISG 系统、SAGS 系统、SGA-WZ 型和 SAG 型捷联重力仪。其中, 前三种为物理平台, 可以有效隔离载体的角运动和振动, 因此能够提供更稳定的测量环境, 具有较好的长期稳定性和更高的作业效益。捷联式重力仪作为数学平台, 不需要水平稳定的平台, 结构相对比较简单, 可以快速响应载体的姿态变化, 便于在各种载体上集成使用; 更重要的是, 捷联式重力测量对于类似湍流类的扰动敏感性低, 即使在强烈的扰动环境中也能够进行重力测量, 而更成熟的平台稳定式弹簧重力仪对强湍流相当敏感^[26]。而且研究表明^[27-29], 如果通过消除线性漂移来减少强 IMU 漂移的影响, 则可以实现与使用稳定平台重力仪类似的水平精度。

2.1 国外捷联式重力仪研究现状

上个世纪五六十年代, 捷联式重力仪主要以测量标量重力为主^[30-32], 1958 年美国空军首次在加利福尼亚州爱德华兹空军基地上空进行了机载 L & R 海洋重力仪的第

表 1: 重力测量的基本方法

测量方法	优点	缺点	发展趋势
地面重力测量	精度高，可以提供绝对重力值或详细的重力异常数据	效率低，覆盖区域有限，不适合大范围快速测量	地面重力测量仪器变得更加轻便和自动化，动态性能和实时性能表现更好，测量效率提高
海洋重力测量	适用于大面积海洋区域的重力场调查	受海况影响较大，精度可能受到船体运动和海洋噪声的影响	结合卫星遥感技术，提高海洋重力测量的动态性能和实时性，精度和稳定性有更好的发展
航空重力测量	覆盖面积广，数据获取速度快，适用于难以到达的地区	成本较高，受天气条件限制，精度可能受到飞行高度和速度的影响	随着无人机技术的发展，航空重力测量将会更加灵活和经济；采集的数据会得到快速处理和实时应用
卫星重力测量	全球覆盖，可以监测到偏远或难以接近的地区	空间分辨率较低，受大气和卫星轨道误差的影响	卫星重力测量的分辨率和精度会持续提高；出现多卫星联合观测的模式，提高全球重力场数据的获取频率和覆盖范围的能力

一次测试,并且获得了5分钟平均重力读数,精度优于10mGal。1965年,美国空军将L & R重力仪装配平衡架并搭载在CH-3E直升机上进行位置确定,测量载体高度。随着80年代差分全球定位系统(Differential Global Position System,DGPS)的高速发展,航空重力测量的精度问题逐渐得到解决^[32-35],因此大量的关于捷联式重力仪的相关研究和测试开始展开。以加拿大Calgary大学的基于捷联惯导系统的航空标量重力测量系统(Strapdown Inertial Scalar Gravimetry,SISG)、德国巴伐利亚自然与人文科学学院的SAGS系统、德国iMAR Navigation gmbH(iMAR)系列捷联式重力仪和俄罗斯莫斯科重力测量技术公司的GT-X型重力仪为代表^[29, 36-40]。

2.2 国内捷联式重力仪研究现状

由于种种原因,我国在重力测量领域起步较晚,自1969年以来,先后引进了一批国外制造的海洋重力仪,其中以前西德的产品居多。自21世纪第二个十年以来,中国在重力仪研制领域取得了快速进展。北京航天控制仪器所于2010年开始了平台式和捷联式航空重力仪的研制,SGA型捷联式重力仪和SAG-2M型海洋重力仪在海洋试验中都取得了优于1mGal内符合精度的测试结果^[41]。中国第一台捷联式机载标量重力仪SGA-WZ于2010年在国防科技大学(NUDT)惯性技术实验室研制成功^[19],并在2012年受邀参加格陵兰岛进行的航空飞行测试。此后,基于丰富的技术及经验,在第一代的基础上持续改进和创新,目前已实现了四代五型捷联式重力仪的研制工作,分别是第二代SGA-WZ02重力仪,基于“捷联+平台”理念的第三代重力仪SGA-WZ03、第三代水下重力仪以及第四代SGA-WZ04和第五代SGA-WZ05捷联式重力仪,目前优于0.6mGal的动态重复测量精度使得其性能达到了国际先进水平。2018年,向阳红6号科考船搭载6个型号的海洋重力仪(CHZ-、SAG-2M、SGA-WZ、ZL11、俄罗斯GT-2M和美国LCR)在南海海域开展对比试验,试验结果表明,国产重力仪精度接近GT-2M重力仪,高于LCR重力仪^[42]。

在为我国重力仪研制工作取得重大突破而感到鼓舞的同时,也应该清楚地认识到与西方发达国家之间的差距。特别是重力仪作为各国之间重要的战略型武器,我们国家如何在保持独立自主、自立根生的同时,打破信息封锁、紧跟世界前沿,需要所有的科技工作者共同努力。

3 重力扰动定义及测量方法

3.1 定义

假设地球可以被近似为一个绕其短轴均匀旋转的椭球体,并且这个椭球体的表面是一个等势面,那么正常重力可以用Somigliana公式的泰勒级数展开来计算^[43]。但是实际上地球并非一个理想的旋转椭球体,真实的重力与正常重力之间必然会存在一个

偏差，如图2所示。在图 a 中 H 代表大地水准面高， N 代表大地水准面相对于椭球表面的高度， h_t 代表地形高度。我们通常将真实重力与正常重力之间的差值定义为重力扰动 $\delta g = g - g_0$ ，在东北天坐标系下，重力扰动在正常重力方向下的投影为重力异常 $\Delta g = -\delta g_U$ ，真实重力与正常重力在水平方向的夹角称作垂线偏差，并定义在卯酉圈方向上的分量记为 η ，在子午圈方向上的分量记为 ζ 。当垂线偏差满足小角度条件 (即重力扰动水平分量远小于正常重力大小) 时，有如下的近似关系

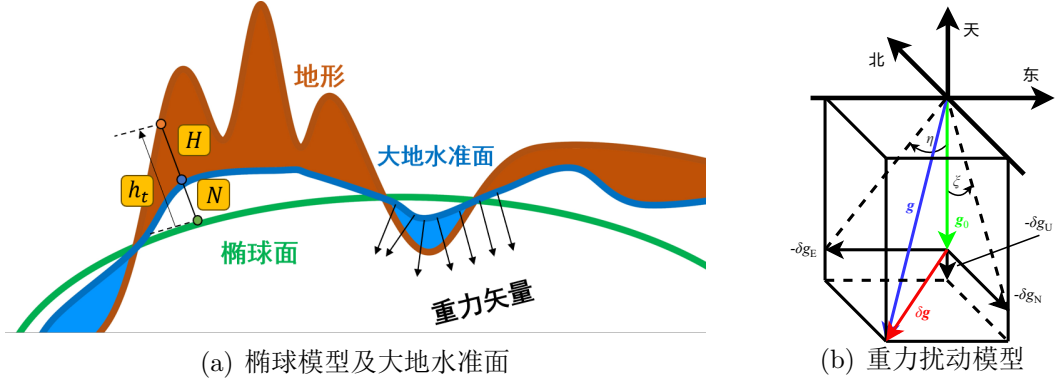


图 2

$$\begin{aligned}\eta &\approx -\delta g_E / \gamma \\ \xi &\approx -\delta g_N / \gamma\end{aligned}\quad (1)$$

根据几何关系可知，真实重力与正常重力、垂线偏差和重力异常之间的关系为

$$\begin{aligned}g^n &= \gamma^n + \delta g^n \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \delta g_E & \delta g_N & \delta g_U \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -\gamma\eta & -\gamma\xi & -\gamma - \Delta g \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (2)$$

因此，对于 1arcsec 的垂线偏差，大约会产生 5mGal 的水平重力误差^[44]，这对于高精度惯导来说，补偿是必要的。

3.2 测量方法

在使用捷联式重力仪进行重力扰动的测量中，主要有两种方法进行测量^[45]，分别是直接测量和间接测量。

直接测量就是根据牛顿第二定律，利用测得的物体运动加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 减去惯性测量单元 (IMU) 所测得的比力 \mathbf{f} 的量作为实测的重力，于是有的文献将其称呼为“加速度计测量法”^[27]，如式3所示

$$\mathbf{g} = \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f} \quad (3)$$

其中，物体的运动加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 一般通过卫星观测值进行相应的微分处理得到的。进一步的，重力扰动的处理流程如图3所示

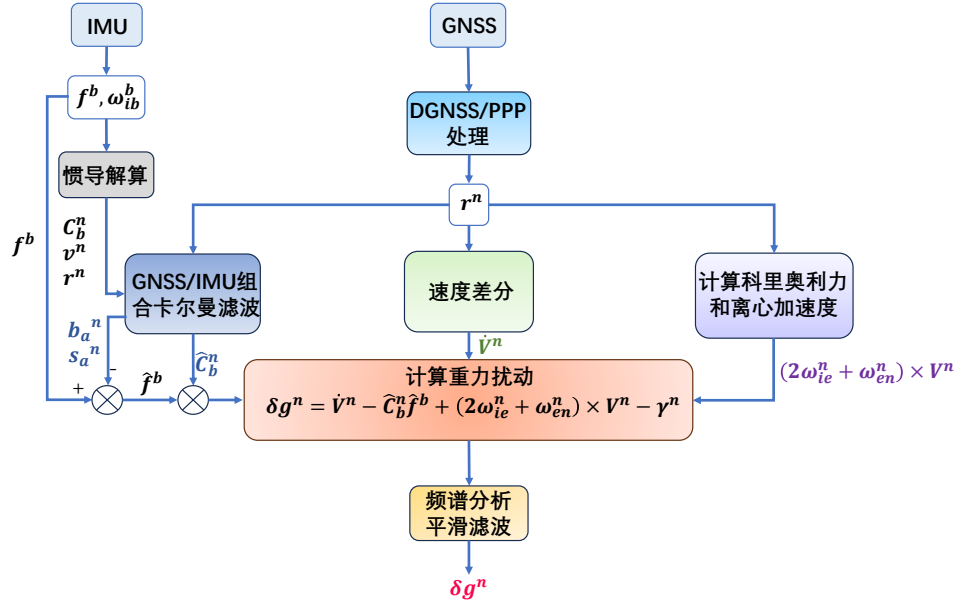


图 3: 直接测量

间接测量就相对比较复杂，如图4所示，它是基于构建的惯性导航参数误差的卡尔曼滤波器而间接得到的。除了姿态误差、速度误差、位置误差和传感器误差之外，额外增加了重力扰动的矢量误差 $[\delta g^n]$ 项，其具体的维数与模型构建的方式有关。由于 IMU 测量得到的位置是通过对其输出进行积分，那么包含重力扰动在内的误差值就可以从观测到的位置差异中估计出来。然而这种方法在构建卡尔曼状态方程时，最好能够将其与其它误差源进行区分，使其不相互影响。常见的方法是将其构建为高斯-马尔可夫模型^[44, 46] 和自回归模型 (AR)^[36, 47]。间接测量相比于直接测量，由于采用卡尔曼滤波器，其积分形式相比于直接测量的微分形式来说，数值上更稳定，得到的是理论最优估计值；但是同时，间接测量的方法极其依赖于其构建的模型，如果构建的模型不够准确，那么很难将有效的重力扰动从频谱中进行分离；并且如果采用低通滤波对测量数据进行处理，反而会失去一部分重力场的短波信息^[48]；更重要的是，由于使用卡尔曼滤波器对重力扰动估计需要先验值，那么最终估计得到的结果将会受限于先验假设的影响。但是相比之下，采用直接法则简单高效，更容易应用于 GNSS/IMU 集成的软件之上^[49]。

4 重力扰动对惯导解算的误差影响

美军早在 20 世纪 50 年代末就已经开启重力辅助惯导技术研究，为了减弱惯导系统的舒勒振荡误差影响，当时主要聚焦于实现惯导系统力学编排中的扰动重力矢量参

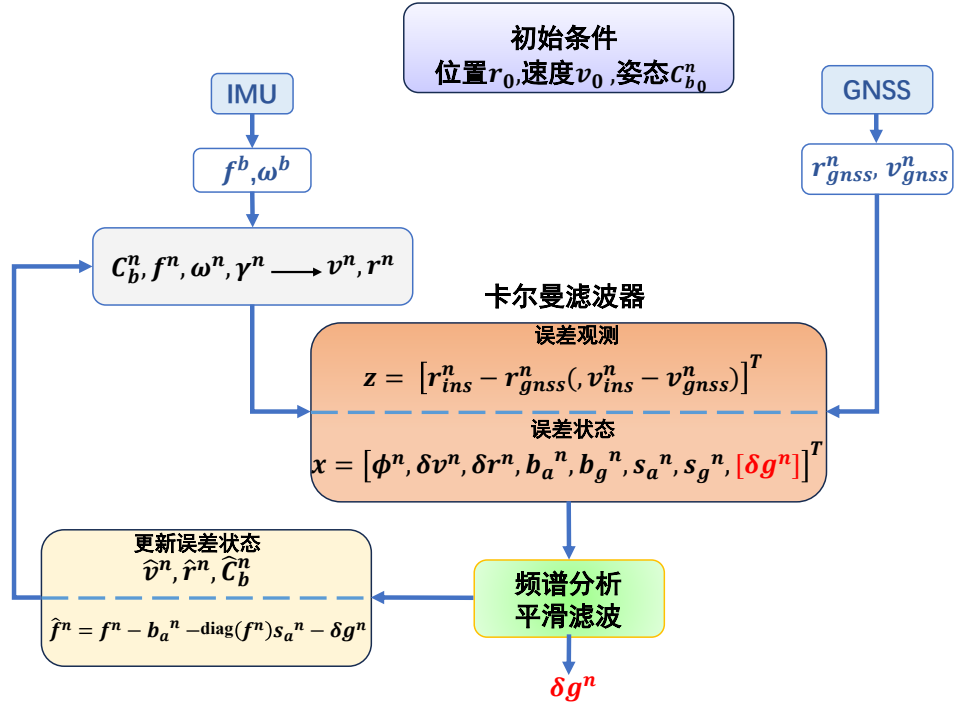


图 4: 间接测量

数 (特别是垂线偏差) 精确补偿。黄谟涛等人提出^[5], 将重力辅助惯性导航技术划分为重力补偿和重力修正两个发展阶段, 其中重力补偿技术是指在惯导解算回路中加入重力扰动信息以改善惯导系统的力学编排, 达到抑制误差发散的趋势。下面我们将围绕重力扰动对惯导解算过程的影响机理进行分析。

4.1 重力扰动的误差模型

在惯性导航中, 我们常常通过构建位置、速度和姿态误差的微分方程来描述误差源随时间传播的规律。根据第 3 节描述的重力扰动模型, 在惯导解算的速度微分方程中, 有

$$\delta \dot{g}^n = \dot{v}^n - C_b^n f^b + (2w_{ie}^n + w_{en}^n) \times v^n - \gamma^n \quad (4)$$

在北-东-地坐标系下, 可以得到其分量表示:

$$\begin{cases} \delta g_N = \dot{v}_N - f_N + (2w_{ie} \sin L + \frac{v_E \tan L}{R_N + h})v_E - \frac{v_N v_D}{R_M + h} \\ \delta g_E = \dot{v}_E - f_E - (\frac{v_E}{R_N + h} + 2w_{ie} \cos L)(v_D + v_N \tan L) \\ \delta g_D = \dot{v}_D - f_D + \left[(2w_{ie} \cos L + \frac{v_E}{R_N + h})v_E \right] + \frac{v_N^2}{R_M + h} - \gamma \end{cases} \quad (5)$$

其中, R_N 和 R_M 分别表示卯酉圈半径和子午圈半径, L 代表纬度, w_{ie} 表示地球自转角速度, 等式 δg_D 右边的 $[\cdot]$ 为厄特弗斯效应项^[50]。

于是，由式4可以进一步得到重力扰动的误差模型，

$$\begin{aligned} d\delta g^n = & \delta \dot{v}^n + [\phi^n \times] C_b^n f^b - C_b^n \delta f^b + \\ & (2\delta w_{ie}^n + \delta w_{en}^n) \times v^n + (2w_{ie}^n + w_{en}^n) \times \delta v^n - \delta \gamma^n \end{aligned} \quad (6)$$

其中， $d\delta g^n$ 代表重力扰动的误差， $[\phi^n \times]$ 是姿态误差 ϕ^n 的反对称矩阵， $\delta \gamma^n$ 代表正常重力的模型误差

进一步的，当考虑惯性导航系统和卫星导航系统存在同步时间差 dT 时^[10]，式6可以重新写作

$$\begin{aligned} d\delta g^n = & \delta \dot{v}^n + [\phi^n \times] C_b^n f^b - C_b^n \delta f^b + (2\delta w_{ie}^n + \delta w_{en}^n) \times v^n \\ & + \ddot{v}^n dT + (2w_{ie}^n + w_{en}^n) \times \delta v^n - \delta \gamma^n \end{aligned} \quad (7)$$

随着实时运动学差分 GNSS 技术的不断改进，采用实时运动学差分 GNSS 技术的定位精度和速度精度分别小于 0.01m 和 0.03m/s。根据前面的分析，在式6中由差分 GNSS 引起的最后三项误差均低于 1mGal；当时间同步误差限制在 $50\mu s$ 时，由同步时间差引起的 $\ddot{v}^n dT$ 误差项可维持在 1mGal 以内^[51]。因此，捷联式重力扰动的误差主要由动态加速度误差 $\delta \dot{v}^n$ 、姿态误差 $[\phi^n \times] C_b^n f^b$ 和比力误差 $C_b^n \delta f^b$ 引起。

4.2 对速度的影响

加速度计的测量误差模型为：

$$\delta f^b = b_a + \kappa_a f^b + N_a f^b + w_a \quad (8)$$

其中 b_a 表示加速度计零偏， κ_a 为加速度计的比例因子误差矩阵， N_a 为交轴耦合误差矩阵，其元素表示三轴加速度计之间的非正交误差， w_a 表示加速度计测量值的白噪声。

由式4可知，重力扰动最直接影响的是加速度计对于速度的测量，特别体现在水平通道的影响上。水平速度在经过积分计算后，最终对载体位置的解算产生影响。文献 [52] 通过设定不同大小重力扰动的仿真试验，发现当重力扰动大于 100mGal 时，纯惯性导航在一天内计算的最大位置误差将超过 4 海里，但作者设计的仿真缺少对误差传播特性的定量分析。相反，文献 [53] 将重力扰动建模为一阶马尔可夫模型，借助相关性分析，定量的确定了重力扰动引起的位置误差量级。除此之外，由于速度误差受到比力测量精度和重力扰动的共同影响，换言之，重力扰动在水平分量的速度误差传播通道与加速度计的零偏相同，故可将重力扰动等效为加速度计零偏。常路宾等人结合这个特点^[54]，具体研究了水平方向上加速度计零偏和重力扰动的关系，并结合两者之间的量级关系制定了相应的补偿策略。

4.3 对姿态的影响

在与 GNSS 集成的捷联惯导系统中，理论和实验证明，垂线偏差的引入会带来倾斜误差，因此需要进行垂线偏差补偿以提高姿态精度^[55, 56]。陀螺的测量误差模型为：

$$\delta \mathbf{w}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \boldsymbol{\kappa}_g \delta \mathbf{w}_{ib}^b + \mathbf{N}_g \delta \mathbf{w}_{ib}^b + \mathbf{w}_g \quad (9)$$

将惯导解算中的姿态误差微分方程展开，如式子10所示

$$\begin{cases} \dot{\phi}_N = -\frac{w_e \sin L}{R_M + h} \delta r_N + \frac{v_E}{(R_N + h)^2} \delta r_D + \frac{1}{R_N + h} \delta v_E \\ \quad - \left(w_e \sin L + \frac{v_E \tan L}{R_N + h} \right) \phi_E + \frac{v_N}{R_M + h} \phi_D - \delta w_{ib,N}^n \\ \dot{\phi}_E = -\frac{v_N}{(R_M + h)^2} \delta r_D - \frac{1}{R_M + h} \delta v_N \\ \quad + \left(w_e \sin L + \frac{v_E \tan L}{R_N + h} \right) \phi_N + \left(w_e \cos L + \frac{v_E}{R_N + h} \right) \phi_D - \delta w_{ib,E}^n \\ \dot{\phi}_D = -\left[\frac{w_e \cos L}{R_M + h} + \frac{v_E \sec^2 L}{(R_M + h)(R_N + h)} \right] \delta r_N - \frac{v_E \tan L}{(R_N + h)^2} \delta r_D - \frac{\tan L}{R_N + h} \delta v_E \\ \quad - \frac{v_N}{R_M + h} \phi_N - \left(w_e \cos L + \frac{v_E}{R_N + h} \right) \phi_E - \delta w_{ib,D}^n \end{cases} \quad (10)$$

虽然姿态误差微分方程中没有直接体现重力扰动的表达式，但是结合前面重力扰动对速度误差的分析可以知道，重力扰动通过影响速度误差进而影响位置误差，最终二者共同影响姿态误差。此外，相关研究表明，当载体运动时，如果速度较大，姿态误差则主要由水平重力扰动的中低频分量 ($\lambda_0 > 30\text{km}$) 引起；随着载体速度减小，高频分量则占主导地位，换句话说，低速运动的载体所经历的重力场细节特征作用更加明显，对姿态误差影响更大，因此确定水平重力扰动的高频信号是进一步提高重力补偿精度的关键^[44, 57]。

4.4 对初始对准的影响

在惯导系统进行初始对准时期，在初始条件 $v_D = v_E = 0, \dot{v}_D = \dot{v}_E = 0, f_D = f_E = 0, f_U = \gamma$ 下，如果我们事先并不考虑重力扰动项^[58]，而视作重力模型误差，将其带入速度误差微方程，可以得到

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_N = -f_D \phi_E + \delta g_N + \delta f_N \\ \delta \dot{v}_E = f_D \phi_N + \delta g_E + \delta f_E \end{cases} \quad (11)$$

于是，北向和东向姿态角误差可以写作

$$\begin{cases} \phi_N = \frac{\delta \dot{v}_E - \delta f_E - \delta g_E}{\gamma} = -\zeta + \frac{\delta f_N}{\gamma} \\ \phi_E = \frac{-\delta \dot{v}_N + \delta g_N + \delta f_N}{\gamma} = \eta - \frac{\delta f_E}{\gamma} \end{cases} \quad (12)$$

而根据姿态角误差微分方程10可以得到

$$\begin{cases} \dot{\phi}_N = -\phi_E w_e \sin L - \delta w_{ib,N}^n \\ \dot{\phi}_E = \phi_N w_e \sin L + \phi_D w_e \cos L - \delta w_{ib,E}^n \\ \dot{\phi}_D = -\phi_E w_e \cos L - \delta w_{ib,D}^n \end{cases} \quad (13)$$

结合式13中第二项，并将12代入求解，得到

$$\begin{aligned} \phi_D &= \frac{p\dot{h}i_E - \phi_N w_e \sin L + \delta w_{ib,E}^n}{w_e \cos L} \\ &= \frac{-\dot{\zeta} + \frac{\delta \dot{f}_N}{\gamma}}{w_e \cos L} - \left(\eta - \frac{\delta f_E}{\gamma}\right) \tan L + \frac{\delta w_{ib,E}^n}{w_e \cos L} \end{aligned} \quad (14)$$

而当我们通过滤波等其它方法得到收敛的 $\dot{\zeta}$ 和 $\delta \dot{f}_N$ 时^[59]，最终可以得到

$$\phi_D = \left(\eta - \frac{\delta f_E}{\gamma}\right) \tan L + \frac{\delta w_{ib,E}^n}{w_e \cos L} \quad (15)$$

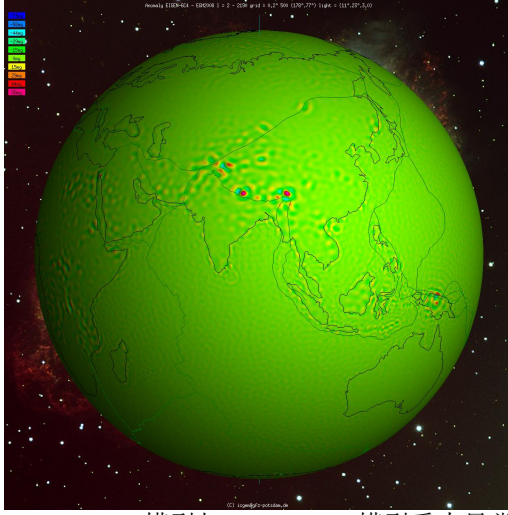
也就是说，在初始对准时，天向姿态角误差会与东向垂线偏差有关。

为了分析重力扰动对初始对准过程的影响，朱婧设计了一种海洋重力场信息与激光陀螺姿态测量系统 (Attitude & Heading Measurement System, AHMS)^[57]，并对于在不同工作模式下 DOV 对初始对准精度的影响进行了分析和仿真验证，结果表明，单轴旋转系统的对准精度随 DOV 增大而降低，随着对准时间的增加，引起的姿态误差趋于计算的理论值。同样的，文献 [60] 结合单轴旋转惯导的旋转调制方法，对初始对准过程中的姿态误差进行了精细对准，并推导出了考虑 IMU 和 DOV 耦合的理论极限误差方程。在此基础之上，张盼盼进一步地借助双轴旋转惯导的优势^[61]，将加速度计的漂移进行准确的估计后，通过静态仿真实验验证了重力扰动对北向和东向姿态误差的影响，并通过补偿重力扰动，成功减小了姿态误差。但是相反，文献 [62] 使用 EGM2008 模型在初始对准过程进行重力扰动补偿后，得到的惯导精度反而更差。可能存在的原因是，作者在试验过程中没有厘清加速度计零偏和重力扰动的耦合关系，所以对重力扰动进行补偿后相当于引入了额外的误差。不拘泥于传统的对准方法，文献 [60] 提出了基于双重对准的相对估计方法，通过在 INS 中进行双重对准和姿态跟踪，提高了垂线偏差估计的精度和效率。但是该方法由于关注于 DOV 的估计，对于系统中的其他误差源的影响可能并没有充分考虑。

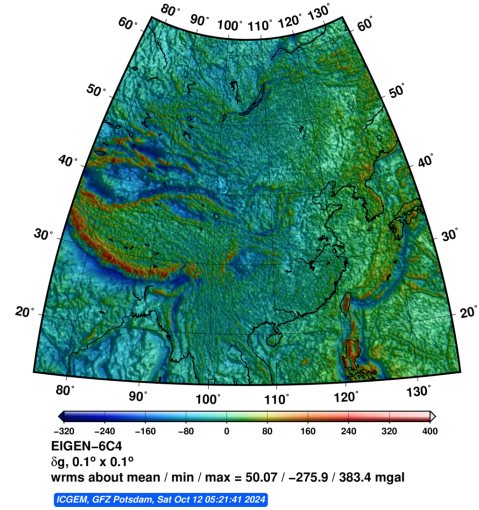
5 现有的补偿方法及策略

5.1 球谐模型补偿

上个世纪 70 年代起，越来越多的卫星用于重力场的重建，其中 GEM(Goddard Earth Model) 和 TEG(Texas Earth Gravity models) 模型开发团队在联合重力建模工



(a) EIGEN-6C4 模型与 EGM2008 模型重力异常差值



(b) EIGEN-6C4 重力扰动网格计算结果

图 5: 利用球谐模型提取重力扰动值^[73]

作上取得了重大进展^[15, 63]，但是其分辨率精度并不能满足实际需求。之后相继出现了 EGM96, EGM2008 和 EIGEN-6C 使得全球重力场模型的实际应用成为可能。大约自 1991 年以来，雷达测高已用于以厘米精度扫描海洋表面，有的工作在具有非常高空间分辨率但重复率相当适中的大地测量模式下，有的则是在具有高时间重复率但相对粗糙的地面轨迹网格的海洋学模式下。但是构建海洋重力场模型的不确定因素在于目前对海洋地形的模拟不足，即海面与大地水准面之间的高度差，而基于测高的海洋大地水准面和重力场模型是计算组合重力场模型的重要数据源^[64, 65]。中国于 2011 年发射了海洋-2A(Haiyang-2A, HY-2A) 卫星，并于 2016 年改变轨道执行探测海洋重力异常的大地测量任务。几项调查证明^[66-72, 72]，HY-2A 具有接近其他测高卫星的精度。目前国际上可以准确估计重力场信息的公开球谐函数模型有美国国家地理空间情报局 (National Geospatial-Intelligence Agency, NGA) 发布的 EGM2008 和由德国波茨坦地球科学研究中心 German Research Centre for Geosciences(GFZ Potsdam) 发布的 EIGEN-6C4，图5所示为 EIGEN-6C4 模型与 EGM2008 模型在亚洲地区重力异常的差值结果。

在球坐标系下，重力扰动势可以表示为：

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (16)$$

其中 G 代表牛顿引力常数， M 代表地球的质量， θ 是极坐标角，可由 $\theta = \frac{\pi}{2} - L$ 计算， λ 是地理经度， R_e 是参考椭球的地球长半轴， R 为计算点到椭球中心的矢量长度， \bar{C}_{nm}^* 和 \bar{S}_{nm}^* 表示 n 阶和 m 阶的球谐模型的系数， $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ 是归一化德相关勒让德函数 (Legendre)。根据重力与重力势的几何关系和定义，对重力扰动势求导即可计算出垂线偏差，进而也可以求解得到水平方向的重力扰动。

正常来说,只要确定了系数 \bar{C}_{nm}^* 和 \bar{S}_{nm}^* ,就可以计算垂线偏差和重力扰动,但是
在实际应用中,由于数据的全球分布相对不足,且系数众多,使得该解仅局限于截断
的低次展开,仅能反映全球重力场的长波长特征。此外,由于部分地区重力数据的缺
失,导致局部重力场球谐模型在缺乏高频信息的情况下精度较差。而文献 [60] 提出了一
种基于路径重力异常补偿的新的 DOV 计算方法,将 Vening-Meinesz 公式进行离散
处理^[74-76],解决了计算效率低下和对卫星信息依赖性的问题。

文献 [77] 论证了高分辨率球面调和引力模型比传统引力模型更能准确地表征地
球重力场。在此基础上,文献 [78] 提出了两种从离线数据库中插值,直接使用球谐模
型计算重力矢量地重力补偿方法,有效地降低了舒勒振荡。相较于使用全球模型,相
关人员结合实测数据,精细化了地方区域的球谐函数模型^[79, 80],极大的提升了模型的
精度,但是显而易见的是,该方法仅限于特定的区域。为了进一步提高重力补偿的实
时性,文献 [52] 提出了一种基于反向传播神经网络 (back-propagation neural network
(BPNN)) 的重力预测模型,通过将规划航区内重力扰动信息作为数据集进行训练,用
于纯惯导解算的实时补偿,其效果与用球谐模型补偿想同。缺点是因为其只关注于实
时地去获取补偿数值,而忽略了其补偿的具体方案,并且只适用于预先规划的区域。
同样的,文献 [81] 利用小波神经网络对格网区域内重力扰动数据进行预测,相比于反
距离加权插值结果,进行重力扰动补偿后其速度误差最大减小约 0.2m/s,最大位置误
差减小约 3000m。

5.2 动态测量补偿

文献 [82] 揭示了重力扰动、重力扰动率和重力扰动梯度之间的内在耦合关系,建
立了能准确反映重力扰动时变特性的状态空间模型,并针对旋转惯导系统,提出了一
种自主高精度重力扰动实时估计和补偿的方案,车载试验的水平定位精度优于 50m。
该方法的优势在于其利用了激光多普勒测速仪、气压高度计测量的导航信息不受重力
扰动影响这一特点,从而隔离了重力扰动与导航信息的耦合,在建立准确的测量模型
基础上,由于旋转惯导能够绕 z 轴和 x 轴周期性旋转,加快了惯性传感器偏差和重力
扰动分量的分离速度,因此可以在不需要车辆爬升的情况下实现 z 轴加速度计偏差与
向上重力扰动的分离,从而有效地对于旋转惯导的输出结果进行动态补偿。钟明飞等
人通过建立包含重力扰动的惯导系统误差模型^[83],得到了垂向重力扰动对惯性系统的
姿态影响无需考虑的结论;同时他们还利用垂线偏差数据库进行了补偿,但是效果不
明显。而对加速度计施加一个噪声驱动项后,利用卡尔曼滤波技术对残余误差进行实
时估计后,补偿精度有较大提升。

5.3 滤波估计补偿

垂线偏差会对引入姿态解算误差, 文献 [84] 为了解决捷联惯导动态测量的问题, 利用衰减记忆卡尔曼滤波器估计 DOV 补偿后的姿态角, 并将其作为基准与捷联惯导系统得到的姿态角进行差分, 得到最终轨迹上的垂线偏差值。但是, 该方法没有基于初始对准的过程对姿态误差进行研究, 如果初始对准的结果不准确, 可能会导致整个导航过程中误差的积累。文献 [85] 则基于船舶起伏模型并使用 Rao-Blackwellised filter 滤波器来对遗传算法的参数进行识别得到了更为精确的重力估计值。周潇等人使用卡尔曼滤波对重力扰动进行了估计并补偿^[86], 但是忽略了与重力扰动耦合的加速度计零偏, 且仅验证了常值重力扰动的影响和补偿情况, 在实际场景中应用提升效果可能不明显。除了对惯性导航系统参数进行补偿外, 文献 [87] 分析了重力异常与惯性/卫星组合导航高度的结果影响, 并将其作为一阶高斯-马尔可夫过程加入到卡尔曼滤波器的状态估计中, 有效降低了重力异常对高度估计的影响, 但仍可能存在其他误差来源未被考虑, 可能影响最终的估计精度。

5.4 多源融合补偿

无论是球谐模型还是实时测量, 单一的测量手段都无法充分描述真实重力场信息, 通过融合不同的数据源信息可以进一步地补充重力场的细节, 提高数据的可靠性^[88]。

5.5 智能决策算法补偿

除了以上具体的方法外, 相关研究人员针对不同场景和地理环境提出了相应的补偿方法, 比如文献 [89] 研究的在极区环境下实现重力扰动补偿。文献 [58] 提出了多源重力数据融合算法 (Multi-source gravity data fusion algorithm, MSGDFA) 通过相关处理, 对由零偏导致的误差进行消除。在此基础上, 作者又增加了预测模型, 以提高算法的实时性。

6 总结与展望

目前大部分的应用重力补偿方法是基于球谐模型的补偿方法, 但是使用该方法对设备硬件的计算或者存储成本是一个很大的挑战, 因此不能满足现有的实时补偿, 往往应用于导航后处理; 目前现有的补偿策略方法相对比较单一, 建议能够完善重力扰动对惯导系统的影响机理分析, 建立实时有效的误差评估方法, 根据不同的性能效果采取更为有效的补偿方法。

6.1 致谢

感谢博客园博主@望舒提供的部分代码参考，开源促进世界进步！

6.2 联系作者

作者 QQ 邮箱1141470651@qq.com，欢迎进行讨论交流 (> w <), good luck!。

6.3 写作心得

哈哈哈哈哈，没有么好写的心得，加油吧，一起！加油加油!!! 哈哈哈哈哈，加油加油!!!

参考文献

- [1] A Gelb. Geodetic and geophysical uncertainties-fundamental limitations on terrestrial inertial navigation. In *Control and Flight Dynamics Conference*, page 847, 1968.
- [2] VG Peshekhonov. Problem of the vertical deflection in high-precision inertial navigation. *Gyroscopy and Navigation*, 11:255–262, 2020.
- [3] Yan Qu. Current Status and Development Trend of Gyroscopes in Inertial Navigation in China. *Journal of Sensor Technology and Application*, 09:234–240, 01 2021.
- [4] J Moryl. Advanced submarine navigation systems. *Oceanographic Literature Review*, 5(44):523, 1997.
- [5] Motao HUANG, Yongzhong OUYANG, Shaofeng BIAN, Shanshan LI, et al. Analysis and Reflections on the Development of Underwater Gravity-Aided Inertial Navigation Technology in the United States and Russia. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, pages 1–19, 2024.
- [6] Harry AM Snelders. Christiaan Huygens and Newton’s theory of gravitation. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 43(2):209–222, 1989.
- [7] Zoltán Szabó. The history of the 125 year old eötvös torsion balance. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 51:273–293, 2016.
- [8] Alexey V Veryaskin. *Gravity, magnetic and electromagnetic gradiometry: strategic technologies in the 21st century*. IOP Publishing, 2021.

- [9] Daiyong CHEN. *Research on Non-sensitive Degree of Freedom FeedbackControl for Superconducting Gravity Gradiometer*. PhD thesis, Huazhong University of Science and Technology, 2022.
- [10] KP Schwarz and M Wei. Some unsolved problems in airborne gravimetry. In *Gravity and Geoid: Joint Symposium of the International Gravity Commission and the International Geoid Commission*, pages 131–150. Springer, 1995.
- [11] Christian Hirt, Sten Claessens, Thomas Fecher, Michael Kuhn, Roland Pail, and Moritz Rexer. New ultrahigh-resolution picture of earth’s gravity field. *Geophysical research letters*, 40(16):4279–4283, 2013.
- [12] Wei LIANG, Jiancheng LI, Xinyu XU, Shengjun ZHANG, and Yongqi ZHAO. A high-resolution earth’s gravity field model sgg-ugm-2 from goce, grace, satellite altimetry, and egm2008. *Engineering*, 6(8):860–878, 2020.
- [13] Jay Hyoun Kwon and Ch Jekeli. A new approach for airborne vector gravimetry using gps/ins. *Journal of Geodesy*, 74(10):690–700, 2001.
- [14] Ch Reigber, Hermann Lühr, and P Schwintzer. Champ mission status. *Advances in space research*, 30(2):129–134, 2002.
- [15] BD Tapley, CK Shum, JC Ries, SR Poole, PAM Abusali, SV Bettadpur, RJ Eanes, MC Kim, HJ Rim, and BE Schutz. The teg-3 geopotential model. In *Gravity, Geoid and Marine Geodesy: International Symposium No. 117 Tokyo, Japan, September 30–October 5, 1996*, pages 453–460. Springer, 1997.
- [16] MR Drinkwater, Rune Floberghagen, R Haagmans, D Muzi, and A Popescu. Vii: Closing session: Goc: Esa’s first earth explorer core mission. *Space science reviews*, 108(1):419–432, 2003.
- [17] Jin LI, Yue CHENG, and Ningyang WEI. Research status of Marine gravimeter. In *The 9th plenary meeting of the Ship Mechanics Academic Committee of the Chinese Society of Naval Architecture and Engineering*, pages 145–150. China Ship Scientific Research Center;State Key Laboratory of Deep-sea Manned Equipment;, 2018.
- [18] Zhiqiang ZHANG. *Theory Method and Appliaction of Underwater Mobile Gravity Measurement*. PhD thesis, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 2020.

- [19] Meiping WU, Shaokun CAI, Ruihang YU, and Juliang CAO. Research Progress on Strapdown Gravimetry Technology. *Navigation and Control*, 19(Z1):161–169, 2020.
- [20] Min LIU, Motao HUANG, Yongzhong OUYANG, et al. Development and prospect of air-sea gravity survey and its applications, part : Sensor, plan and design of survey. *Hydrographic Surveying and Charting*, 37(3):1–11, 2017.
- [21] Lucien Lacoste, Neal Clarkson, and George Hamilton. Lacoste and romberg stabilized platform shipboard gravity meter. *Geophysics*, 32(1):99–109, 1967.
- [22] Jie ZONG. Nonlinear problem of CHZ gravimeter in dynamic gravity measurement. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 16(1):7–15, 1987.
- [23] Pinghua HU, Ming ZHAO, He HUANG, et al. Review on the Development of Airborne/Marine Gravimetry Instruments. *Navigation Positioning and Timing*, 4(4):10–19, 2017.
- [24] Shanyan ZHANG, Xiqi LI, and Chujian LIANG. Newly Developed CHZ Sea-Gravimeter. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 16(1):1–6, 1987.
- [25] Herbert D Valliant. The LaCoste & Romberg air/sea gravity meter: an overview. *Handbook of geophysical exploration at sea*, pages 141–177, 2019.
- [26] David Becker. *Advanced calibration methods for strapdown airborne gravimetry*. Number 51. Technische Universität Darmstadt, 2016.
- [27] Felix Johann, David Becker, Matthias Becker, René Forsberg, and Majid Kadir. The direct method in strapdown airborne gravimetry—a review. *ZfV-Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, (zfv 5/2019), 2019.
- [28] M Wei and KP Schwarz. Flight test results from a strapdown airborne gravity system. *Journal of Geodesy*, 72:323–332, 1998.
- [29] L Bastos, P Tomé, T Cunha, MJ Fernandes, and S Cunha. Gravity anomalies from airborne Measurements—Experiments using a low cost IMU device. In *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000: GGG2000 IAG International Symposium Banff, Alberta, Canada July 31–August 4, 2000*, pages 253–258. Springer, 2002.
- [30] VG Peshekhonov, OA Stepanov, VG Rozentsvein, AA Krasnov, and AV Sokolov. State-of-the-art strapdown airborne gravimeters: Analysis of the development, Gyroscopy and Navigation, vol. 13, no. 4, 2022.

- [31] Lloyd GD Thompson. Airborne gravity meter test. *Journal of Geophysical Research*, 64(4):488–488, 1959.
- [32] Lloyd GD Thompson and Lucien JB LaCoste. Aerial gravity measurements. *Journal of Geophysical Research*, 65(1):305–322, 1960.
- [33] JM Brozena, GL Mader, and MF Peters. Interferometric Global Positioning System: Three-dimensional positioning source for airborne gravimetry. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 94(B9):12153–12162, 1989.
- [34] KP Schwarz. A comparison of GPS kinematic models for the determination of position and velocity along a trajectory. *Manuscripta geodaetica*, 14:345–353, 1989.
- [35] Alfred Kleusberg, Derrick Peyton, and David Wells. Airborne gravimetry and the global positioning system. In *IEEE Symposium on Position Location and Navigation. A Decade of Excellence in the Navigation Sciences*, pages 273–278. IEEE, 1990.
- [36] Alexander Mark Bruton. *Improving the accuracy and resolution of SINS/DGPS airborne gravimetry*, volume 20145. University of Calgary Calgary, Alberta, 2000.
- [37] Uwe Meyer, Gerd Boedecker, and Hartmut Pflug. *ANGEL Airborne Navigation and Gravimetry Ensemble & Laboratory: Introduction and first airborne tests*. Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2003.
- [38] Gerd Boedecker and Andrea Stürze. SAGS4—Strapdown airborne gravimetry system analysis. *Observation of the Earth System from SPACE*, pages 463–478, 2006.
- [39] VN Berzhitskii, MA Ermakov, VN Ilyin, Yu L Smoller, S Sh Yurist, Yu V Bolotin, AA Golovan, NA Parusnikov, EV Gavrov, DA Rekunov, et al. Airborne strapdown gravimeter GT-X. pages 20–23, 2010.
- [40] M Hoss, A Dreyer, EL von Hinueber, R Urli, and F Lapeyrade. 1.3 Innovative Inertial Measurement Data Acquisition and Processing for Aircraft Surveying up to Airborne Gravimetry. *Proceedings-ettc2020*, pages 38–47, 2020.
- [41] Rui XIU, Gang GUO, Zhengbing XUE, Dongming LI, and Haibing LI. Technical Current Situation and New Application of Marine/aviation Gravimeter. *Navigation and Control*, pages 35–43, 2019.

- [42] Yuan YUAN, Jinyao GAO, Zhaocai WU, Zhongyan SHEN, and Guochao WU. Performance estimate of some prototypes of inertial platform and strapdown marine gravimeters. Technical report, Springer, 2020.
- [43] Carlo Somigliana. Teoria generale del campo gravitazionale dell’ellissoide di rotazione. *Memorie della Società Astronomia Italiana, Vol. 4, p. 425*, 4:425, 1929.
- [44] Christopher Jekeli. Airborne vector gravimetry using precise, position-aided inertial measurement units. *Bulletin géodésique*, 69:1–11, 1994.
- [45] C Jekeli and R Garcia. GPS phase accelerations for moving-base vector gravimetry. *Journal of Geodesy*, 71:630–639, 1997.
- [46] Stanley K Jordan. Self-consistent statistical models for the gravity anomaly, vertical deflections, and undulation of the geoid. *Journal of Geophysical Research*, 77(20):3660–3670, 1972.
- [47] Sameh Nassar, KLAUS-PETER SCHWARZ, NASER EL-SHEIMY, and Aboelmagd Noureldin. Modeling inertial sensor errors using autoregressive (AR) models. *Navigation*, 51(4):259–268, 2004.
- [48] K P Schwarz and Zuofa Li. An introduction to airborne gravimetry and its boundary value problems. *Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid*, pages 312–358, 1997.
- [49] Christopher Jekeli. *Inertial navigation systems with geodetic applications*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2023.
- [50] Raymond B Harlan. Eotvos corrections for airborne gravimetry. *Journal of Geophysical Research*, 73(14):4675–4679, 1968.
- [51] Shiwen Hao, Zhili Zhang, Zhaofa Zhou, Zhenjun Chang, Zhihao Xu, Hui Duan, and Ziqi Li. Methods for gravity anomaly and dov determination based on mpgac for land vehicles. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024.
- [52] Duanyang Gao, Baiqing Hu, Fangjun Qin, Lubin Chang, and Xu Lyu. A real-time gravity compensation method for ins based on bpnn. *IEEE Sensors Journal*, 21(12):13584–13593, 2021.
- [53] Jing WANG, Gongliu YANG, Xiangyun LI, and Xiao ZHOU. Error indicator analysis for gravity disturbing vector’s influence on inertial navigation system. *Journal of Chinese Inertial Technology*, pages 285–290, 2016.

- [54] Lubin CHANG, Fangjun QIN, and Meiping WU. Gravity disturbance compensation for inertial navigation system. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 68(10):3751–3765, 2018.
- [55] DOROTA A GREJNER-BRZEZINSKA and Jin Wang. Gravity modeling for high-accuracy gps/ins integration. *Navigation*, 45(3):209–220, 1998.
- [56] Dongkai Dai, Xingshu Wang, Dejun Zhan, Shiqiao Qin, and Zongsheng Huang. Dynamic measurement of high-frequency deflections of the vertical based on the observation of ins/gnss integration attitude error. *Journal of Applied Geophysics*, 119:89–98, 2015.
- [57] Jing ZHU. *Study on Gravity aided Technologies in Shipborne Attitude Measurement with Ring Laser Gyro*. PhD thesis, National University of Defense Technology, 2018.
- [58] Kaixin LUO. *Research on Key Technologies of Ocean Gravity-Aided Inertial Navigation*. PhD thesis, National University of Defense Technology, 2023.
- [59] Tomás Soler, Jen-Yu Han, and Neil D Weston. On deflection of the vertical components and their transformations. *Journal of surveying engineering*, 140(2):04014005, 2014.
- [60] Shiwen Hao, Zhili Zhang, Zhaofa Zhou, Zhenjun Chang, Zhihao Xu, and Xinyu Li. Analysis of dov estimation in initial alignment based on single-axis rotating sins. *Measurement*, 204:112047, 2022.
- [61] Panpan Zhang, Lin Wu, Lifeng Bao, Bo Wang, Hui Liu, Qianqian Li, and Yong Wang. Gravity disturbance compensation for dual-axis rotary modulation inertial navigation system. *Frontiers in Marine Science*, 10:1086225, 2023.
- [62] Junbo Tie, Meiping Wu, Juliang Cao, Junxiang Lian, and Shaokun Cai. The impact of initial alignment on compensation for deflection of vertical in inertial navigation. In *2017 IEEE International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS) and IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM)*, pages 381–386. IEEE, 2017.
- [63] FJ Lerch, CA Wagner, DE Smith, ML Andson, JE Brownd, and JA Richardson. Gravitational field models for the earth (gem 1 and 2). Technical report, 1972.
- [64] Nikolaos K Pavlis, Simon A Holmes, Steve C Kenyon, and John K Factor. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008). *Journal of geophysical research: solid earth*, 117(B4), 2012.

- [65] Frank Flechtner, Christoph Reigber, Reiner Rummel, and Georges Balmino. Satellite gravimetry: a review of its realization. *Surveys in Geophysics*, 42(5):1029–1074, 2021.
- [66] Xingwei Jiang, Yongjun Jia, and Youguang Zhang. Measurement analyses and evaluations of sea-level heights using the hy-2a satellite’ s radar altimeter. *Acta Oceanologica Sinica*, 38(11):134–139, 2019.
- [67] Qiankun Liu, Ke Xu, Maofei Jiang, and Jiaming Wang. Preliminary marine gravity field from hy-2a/gm altimeter data. *Acta Oceanologica Sinica*, 39:127–134, 2020.
- [68] Xiaoyun Wan, Richard Fiifi Annan, Shuanggen Jin, and Xiaoqi Gong. Vertical deflections and gravity disturbances derived from hy-2a data. *Remote Sensing*, 12(14):2287, 2020.
- [69] Shengjun Zhang, Ole Baltazar Andersen, Xiangxue Kong, and Hang Li. Inversion and validation of improved marine gravity field recovery in south china sea by incorporating hy-2a altimeter waveform data. *Remote Sensing*, 12(5):802, 2020.
- [70] Chengcheng Zhu, Jinyun Guo, Cheinway Hwang, Jinyao Gao, Jiajia Yuan, and Xin Liu. How hy-2a/gm altimeter performs in marine gravity derivation: assessment in the south china sea. *Geophysical Journal International*, 219(2):1056–1064, 2019.
- [71] Hui Ji, Jinyun Guo, Chengcheng Zhu, Jiajia Yuan, Xin Liu, and Guowei Li. On deflections of vertical determined from hy-2a/gm altimetry data in the bay of bengal. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 14:12048–12060, 2021.
- [72] Jinyun Guo, Hongxin Luo, Chengcheng Zhu, Hui Ji, Guowei Li, and Xin Liu. Accuracy comparison of marine gravity derived from hy-2a/gm and cryosat-2 altimetry data: a case study in the gulf of mexico. *Geophysical Journal International*, 230(2):1267–1279, 2022.
- [73] E Sinem Ince, Franz Barthelmes, Sven Reißland, Kirsten Elger, Christoph Förste, Frank Flechtner, and Harald Schuh. Icgem–15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. *Earth system science data*, 11(2):647–674, 2019.
- [74] JS Ning, DB Chao, and JC Li. The spherical convolution form of vening-meinesz formula. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 23(3):161–166, 1994.

- [75] JY Chen. Methods for computing deflections of the vertical by modifying vening-meinesz'function. *Bulletin géodésique*, 56:9–26, 1982.
- [76] Jinsheng NING, Chunxi GUO, Bin WANG, and Huimin WANG. Refined determination of vertical deflection in china mainland area. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 31(12):1035–1038, 2006.
- [77] Jing Wang, Gongliu Yang, Xiangyun Li, and Xiao Zhou. Application of the spherical harmonic gravity model in high precision inertial navigation systems. *Measurement Science and Technology*, 27(9):095103, 2016.
- [78] Ruonan WU, Qiuping WU, Fengtian HAN, Tianyi LIU, Peida HU, and Haixia LI. Gravity compensation using EGM2008 for high-precision long-term inertial navigation systems. *Sensors*, 16(12):2177, 2016.
- [79] Zhuangsheng Zhu, Bo Zhao, Yiyang Guo, and Xiangyang Zhou. Research on gravity vertical deflection on attitude of position and orientation system and compensation method. *Aerospace science and technology*, 85:495–504, 2019.
- [80] Jun Weng, Jianning Liu, Mingxing Jiao, and Ke Kou. Analysis and on-line compensation of gravity disturbance in a high-precision inertial navigation system. *GPS Solutions*, 24:1–8, 2020.
- [81] Xiao ZHOU, Gongliu YANG, and Qingzhong CAI. Compensation on gravity disturbance for high-precision ins based on wavelet neural network. *Journal of Chinese Inertial Technology*, pages 571–576, 2016.
- [82] Jie Yang, Xinlong Wang, Bin Wang, and Xiaodong Hu. An autonomous and high-accuracy gravity disturbance compensation scheme for rotary inertial navigation system. *Measurement Science and Technology*, 35(8):086302, 2024.
- [83] Mingfei ZHONG, Dejun ZHAN, Rong XU, and Lin ZHONG. Research on The Effects of Gravity Disturbances on High-Precision RLG Attitude Measurement System. In *The 6th China Satellite Navigation Academic Conference*, pages 77–81. China Satellite Maritime Tracking and Controlling Department, Jiangyin 214431, China; College of Opto-electronics Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China, 2015.
- [84] Wen An, Jiangning Xu, Hongyang He, and Pengfei Jiang. A method of deflection of the vertical measurement based on attitude difference compensation. *IEEE Sensors Journal*, 21(12):13125–13136, 2021.

- [85] Oleg A Stepanov, Dmitry A Koshaev, Andrei V Motorin, Anton A Krasnov, and Alexander V Sokolov. Algorithms for integrated processing of marine gravimeter data and gnss measurements. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):500–505, 2020.
- [86] Xiao ZHOU, Gongliu YANG, Jing WANG, et al. Estimation and compensation for gravity disturbance based on kalman filtering in inertial navigation. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 23(06):721–726, 2015.
- [87] Hao Xiong, Yingwei Zhao, Xingshu Wang, Dongkai Dai, Jiaying Zheng, and Dejun Zhan. An analysis of the effect of gravity anomaly to height estimation in high-precision ins/gnss integrated navigation systems. *IEEE Sensors journal*, 19(7):2713–2721, 2018.
- [88] WANG Hubiao, Yong WANG, Yang LU, and Jingang ZHAN. Inversion of Marine Gravity anomalies by Combining Multi-altimeter Data and Shipborne gravimetric Data. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, (01):81–85, 2005.
- [89] Qian LI, Dezhao WANG, Yuren JI, et al. Gravity disturbance influence analysis and compensation on high-precision ins in polar region. *Journal of Chinese Inertial Technology*, pages 429–436, 444, 2022.