Московский физико-технический институт

Лабораторная работа 1.4.1-В
ИЗУЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Отчёт студента группы Б02-303
Долговой Екатерины

г.Долгопрудный, 2023

Лабораторaная работа 1.4.1

Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой; дополнительный груз; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

Теоретические сведения

Понятие о законе вращательного движения и моменте инерции

Рассмотрим точечную массу, движущуюся по окружности фиксированного радиуса r с угловой скоростью ω. Её линейная скорость $v = \omega r$. Пусть M – момент силы F. Уравнение вращательного движения такой точки:

$$Fr = \frac{d}{dt}(mr^2\omega) \to M = \frac{dL}{dt}, \tag{1}$$

где введено обозначение $L = mr^2\omega$. Величину $I = mr^2$ называют **моментом инерции точечного тела**, и здесь он играет роль, аналогичную массе тела при поступательном движении. Величину $L = I\omega$, играющую роль «вращательного импульса», называют **моментом импульса тела**. При постоянном I уравнение (1) можно записать как

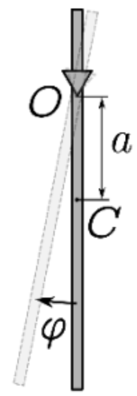


Рис. 1: Стержень как физический маятник

$$M = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

(сравним со 2-м законом Ньютона $F = \frac{dp}{dt}$,).

В случае твёрдого тела, состоящего из совокупности материальных точек, вращающихся вокруг фиксированной оси, под моментом инерции следует понимать сумму (или интеграл) по всем точкам тела:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

где r_i — расстояние от точки массой m_i до оси вращения. Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равен

$$I_c = \frac{ml^2}{12}$$

.

А момент инерции стержня, подвешенного на расстоянии a от центра масс, может быть вычислен по *теореме Гюйгенса-Штейнера*:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2. \tag{3}$$

В частности, если стержень подвесить за один из концов, то $a = l/2$ и $I = ml^2/3$.

Стержень как физический маятник

Рассмотрим колебания физического маятника — стержня, подвешенного в поле тяжести (Рис. 1). Маятник подвешен в точке O на расстоянии a до центра масс C. При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол $\varphi \ll 1$,

$$M = -mga\ sin\varphi \approx -mga\varphi. \tag{4}$$

При таких амплитудах отклонения движение свободного физического маятника будет иметь характер гармонических колебаний.

Тогда получим методом аналогии период колебаний нашего маятника из периода колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{5}$$

А для стержня длиной l, подвешенного на расстоянии a от центра, с учётом (3) получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}}. \tag{6}$$

Сравним результат с известной формулой для математического маятника

$$T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

Видно, что (6) также *не зависит* от массы маятника, однако зависимость от длины подвеса более сложная.

Определим так называемую **приведённую длину** физического маятника (длину нити математического маятника, имевшего бы тот же период колебаний):

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}. \tag{8}$$

Теорема (Гюйгенса). Если маятник подвесить за точку O', отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{\text{пр}}$ вдоль стержня, то период его качания не изменится.

Гармонические колебания

Формулу для периода колебаний маятника (5) можно получить из анализа *дифференциального уравнения гармонических колебаний*. Для стержня с моментом импульса $L = I\omega$ и угловым ускорением $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$:

$$I\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \tag{9}$$

(сравним с уравнением колебаний груза на пружине $m\ddot{x} + kx = 0$). Решением данного дифференциального уравнения являются гармонические колебания, описываемые законом

$$\varphi(t) = A\ sin(\Omega t + \alpha), \tag{10}$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ — угловая частота колебаний (это не угловая скорость вращения $\omega = \dot{\varphi}$), A — амплитуда (угловая), α — начальная фаза колебаний. Амплитуда и фаза определяются начальными условиями (тем, как отпускают маятник). Для достаточно малых амплитуд угловая частота (и период) малых колебаний не зависит ни от фазы, ни от амплитуды. Это справедливо в той мере, в которой справедливо приближение $sin\varphi \approx \varphi$, сделанное нами при выводе (6).

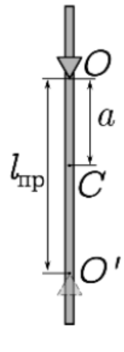


Рис. 2: К теореме Гюйгенса

Затухание колебаний

Закон (10) записан для случая идеального маятника в отсутствие затухания. В реальности же амплитуда при слабо затухающих колебаниях есть *A(t)*. Относительную убыль амплитуды за одно колебание, являющуюся характеристикой всех потерь энергии в колебательной системе $\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$ называют **декрементом затухания**. Как правило, её можно считать постоянной, и тогда, зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Величина $\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma$ это время, за которое амплитуда колебаний падает в e раз. Затухание можно считать малым, если это время велико по сравнению с временем одного колебания: $\tau_{\text{зат}} \gg$T.

Ещё одна характеристика колебательной системы —**добротность**:

$$Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T}. \tag{11}$$

Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника.

Подвесная призма остаётся неподвижной (a = const), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня.

Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня или дополнительного тела на нём, можно экспериментально проверить формулу (5) (или её частный случай (6)) и вычислить значение ускорения свободного падения g.

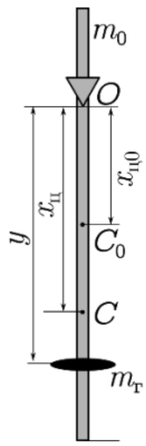


Рис. 3: Маятник с дополнительным грузом

Особенности маятника с перемещаемым грузом

Если на стержень насадить груз, то момент инерции маятника, а значит и период его колебаний, будет зависеть от положения груза относительно оси вращения.

В качестве подвижного груза в работе используется металлический цилиндр или «чечевица». Назмер груза мал по сравнению с длиной стержня, его можно считать закреплённой на стержне *точечной массой*. Пусть y — расстояние от точки подвеса O до груза (см. Рис. 3). Тогда момент инерции маятника будет равен

$$I = I_0 + m_{\text{гр}} y^2,$$

где I_0 — момент инерции маятника без груза, определяемый по формуле (3). Поскольку точка подвеса в схеме фиксирована, величина I_0 в опыте остаётся постоянной.

Т.к. y на практике измерить напрямую затруднительно, то будем измерять положение центра масс маятника с грузом ($x_{\text{ц}}$) и без него ($x_{\text{ц}0}$) с помощью подставки. Центр масс груза равен

$$y = \frac{M x_{\text{ц}} - m_0 x_{\text{ц}0}}{m_{\text{гр}}}. \tag{12}$$

где m_0 — масса маятника без груза (стержня вместе с призмой), $M = m_0 + m_{\text{гр}}$ — полная масса маятника.

Из общей формулы (5) найдём период колебаний маятника грузом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m_{\text{гр}} y^2}{g M x_{\text{ц}}}}. \tag{13}$$

Учёт влияния подвесной призмы

Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы.

Посмотрим, какую погрешность вносит наличие призмы в системе. При $a = 10$ см:

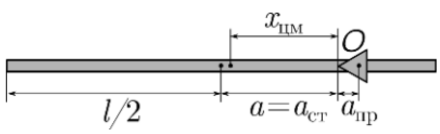


Рис. 4: Смещение центра масс из-за подвесной призмы

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}} \sim 10^{-2}$$

Это даёт погрешность почти в 1%. Поэтому влияние призмы учитываем.

Формула для периода с нужной нам поправкой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}) x_{\text{ц}}}}. \tag{14}$$

Ход работы

1. Ознакомимся с используемыми в работе измерительными приборами: линейками, штангенциркулем, секундомером. Абсолютная приборная погрешность измерения времени секндомером — 0,03 с. Для линейки — 1 мм, малого штангенциркуля — 0,05 мм, большого штангенциркуля — 0,1 мм.

2. Измерим длину стержня; взвесим штангу, призму и дополнительный груз на электронных весах:

$$l = (1010,0 \pm 0,1)\text{мм}$$

$$m_{\text{ст}} = (868,2 \pm 0,1)\text{г}$$

$$m_{\text{пр}} = (79,6 \pm 0,1)\text{г}$$

$$m_{\text{гр}} = (291,0 \pm 0,1)\text{г}$$

$$m_0 = m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}} = (947,8 \pm 0,1)\text{г}$$

$$M = m_0 + m_{\text{гр}} = (1238,8 \pm 0,1)\text{г}$$

3. Снимем со стержня призму и с помощью подставки определим положение центра масс пустого стержня. Центр масс оказался ровно посередине, т.е. на расстоянии $(50,5 \pm 0,2)$ см от одного из концов. Погрешность берём по толщине подставки, измеренной штангенциркулем $(1,80 \pm 0,05)$ мм.

4. Установим призму на некотором расстоянии от центра стержня, измерим точное положение $a = (30,5 \pm 0.1)$ см острия призмы относительно центра масс стержня. Измерим также положение центра масс конструкции $x_{\text{ц}0} = (28,0 \pm 0,1)$ см, сбалансировав маятник с призмой на острие вспомогательной подставки.

5. Проведём первый предварительный опыт по измерению периода колебаний (без дополнительного груза).

   а) Установим маятник на консоли и отклоним его на малый угол (не более 5). Убедимся, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.

   б) Измерим время $(t = 30,56 \pm 0,03)$ с $n = 20$ полных колебаний маятника.

   в) Вычислим период колебаний $T = t/n$ и по формуле (14) рассчитаем предварительное значение $g = 9.85$ м/с^2. Оно отличается от табличного менее, чем на 10%, поэтому опыт проведён хорошо.

6. Проведём серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера-датчика.

   а) Несколько раз повторим измерение периода фиксированного числа колебаний (например, $n = 20$), каждый раз останавливая и заново отклоняя маятник примерно на один и тот же малый угол; результаты занесём в таблицу. Результаты 3-4 измерений почти полностью совпадают, поэтому опыт останавливаем.

№ опыта	t, с
1	30,56
2	30,56
3	30,58
4	30,57

б) Вычислим среднее значение полученных результатов $\bar{t}$, оценим случайную погрешность измерения времени как среднеквадратичное отклонение полученных результатов:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{4(4-1)}\sum_i (t_i - \bar{t})^2}.$$

в) Определим приборную погрешность используемого секундомера $\sigma_t^{\text{приб}}$ и вычислим полную погрешность $\sigma_t^{\text{полн}}$ измерения времени. Формула расчёта полной погрешности:

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_t^{\text{приб}})^2 + (\sigma_t^{\text{случ}})^2}$$

$$\bar{t} = 30,57 \text{ с}$$
$$\sigma_t^{\text{случ}} = 0,005 \text{ с}$$
$$\sigma_t^{\text{приб}} = 0,03 \text{ с}$$
$$\sigma_t^{\text{полн}} = 0,03 \text{ с}$$

7. Используя погрешность $\sigma_t^{\text{полн}}$ измерения времени из предыдущего пункта и $\varepsilon_{max} \approx 0,4\%$, получим $n \approx 20$.

8. Определим положение центра масс груза y: закрепим груз на стержне в произвольном месте и измерим новое положение центра масс $x_\text{ц}$. Рассчитаем по формуле (12) y. Это будет y_0.

9. Разместим груз на маятнике и измерим положение y (через Δy относительно y_0) груза относительно точки подвеса и положение центра масс всей системы $x_\text{ц}$.

10. Проведём измерение периода колебаний маятника по $n = 20$ полным колебаниям, повторим измерения периода для 10 y. Для каждого измерения рассчитаем g по формуле (13), предварительно рассчитав момент инерции маятника I_0. Результаты занесём в таблицу.

$$I_0 = \frac{m_0 l^2}{12} + m_0 a^2 = 0,155 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

№ опыта	y, мм	$x_\text{ц}$, мм	n	t_n,	T, с	g, м/с^2
1	161	252	20	28,88	1,444	9,85
2	191	259	20	28,75	1,438	9,86
3	231	268	20	28,65	1,433	9,86
4	261	276	20	28,63	1,432	9,87
5	291	283	20	28,65	1,433	9,87
6	321	290	20	28,74	1,437	9,86
7	351	297	20	28,82	1,441	9,87
8	381	304	20	28,96	1,448	9,87
9	431	315	20	29,26	1,463	9,87
10	481	327	20	29,63	1,482	9,86

11. Проведём опыт по определению приведённой длины маятника (предварительно сняв груз):

    а) для одного значения $a = 30{,}5$ см вычислим приведённую длину физического мятника по формуле (8) $l_{\text{пр}} = 58,4$ см;

    б) не делали;

    в) проверим справедливость теоремы Гюйгенса: новый период колебаний относительно O' составил 1,469 с.

12. Амплитуда уменьшается примерно в 2 раза за время 471,21 с. Определим параметры колебательной системы: время затухания $\tau_{\text{зат}} \approx 680$, декремент затухания $\gamma \approx 1,47 \cdot 10^{-3}$, добротность $Q \approx 1400$.

13. Усредним значение g (пункт 10) и оценим погрешность ег измерения:

$$\overline{g} = \frac{1}{10}\sum_i g_i = 9,86 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_g^{\text{приб}} = \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + (\varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_{x_{\text{ц}}})^2 + (\varepsilon_{I_0})^2 + (\varepsilon_{m_{\text{гр}}})^2 + (2\varepsilon_y)^2} = 0,016$$

$$\sigma_g^{\text{приб}} = \overline{g}\varepsilon_g^{\text{приб}} = 0,15 \text{ м/с}^2$$

$$\sigma_g^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\sum_i (g_i - \overline{g})^2} = 0,009 \text{ м/с}^2$$

$$\sigma_g = \sqrt{(\sigma_g^{\text{приб}})^2 + (\sigma_g^{\text{случ}})^2} = 0,15 \text{ м/с}^2$$

$$g = (9,86 \pm 0,15) \text{ м/с}^2$$

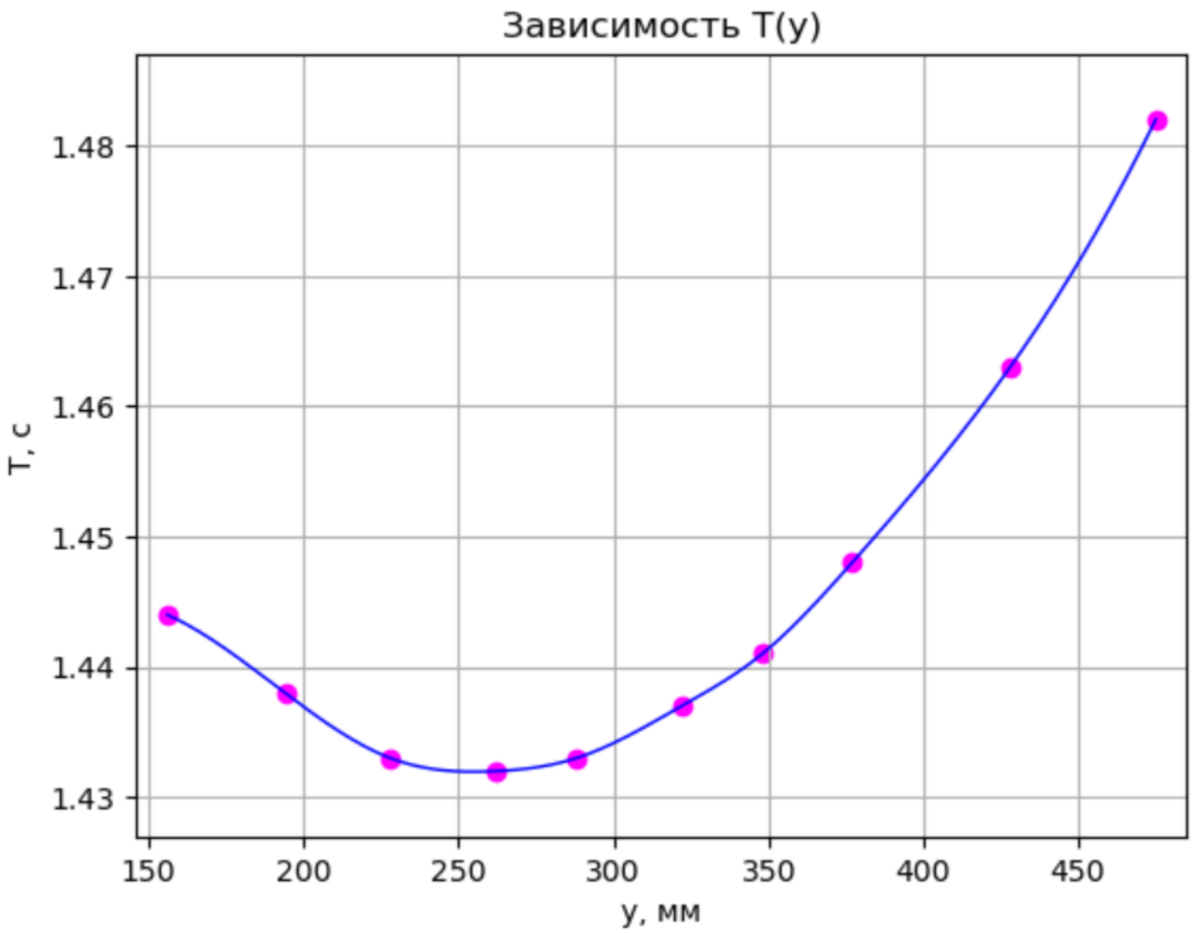
14. Построим график зависимости периода колебаний T от положения груза y. Видим, что зависимость имеет минимум около значения y = 250 мм. Из расчётов можно получить ожидаемый минимум в точке y = 259 мм (в формулу (13) мы подставили $Mx_{\text{ц}} = m_0 x_{\text{ц}0} + m_{\text{гр}} y$, нашли производную по y от полученного выражения и приравняли её к нулю).

15. Построим график, откладывая по оси абсцисс величину $u = T^2 x_{\text{ц}}$, а по оси ординат величину $v = y^2$. Видим, что экспериментальные точки графика хорошо ложатся на прямую линию.

16. Методом наименьших квадратов найдём k, b в зависимости u = kv + b и оценим их погрешности.

$$k = \frac{< uv > - < u >< v >}{< v^2 > - < v >^2} = 0,938 \text{ с}^2/\text{м}$$

$$b =< u > -k < v >= 0,5009 \text{ м} \cdot \text{с}^2$$



$$\sigma_k^{\text{МНК}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{<y^2> - <y>^2}{<x^2> - <x>^2} - k^2} = 0,002 \text{ с}^2/\text{м}$$

$$\sigma_b = \sigma_k^{\text{МНК}}\sqrt{<x^2> - <x>^2} = 0,0001 \text{ м} \cdot \text{с}^2$$

С другой стороны, k равно (из формулы (13))

$$k = \frac{4\pi^2 \overline{m_{\text{гр}}}}{\overline{g}\overline{M}} \to \overline{g} = \frac{4\pi^2 \overline{m_{\text{гр}}}}{k\overline{M}} = 9,89 \text{ м/с}^2$$

17. Оценим погрешности измерения g:

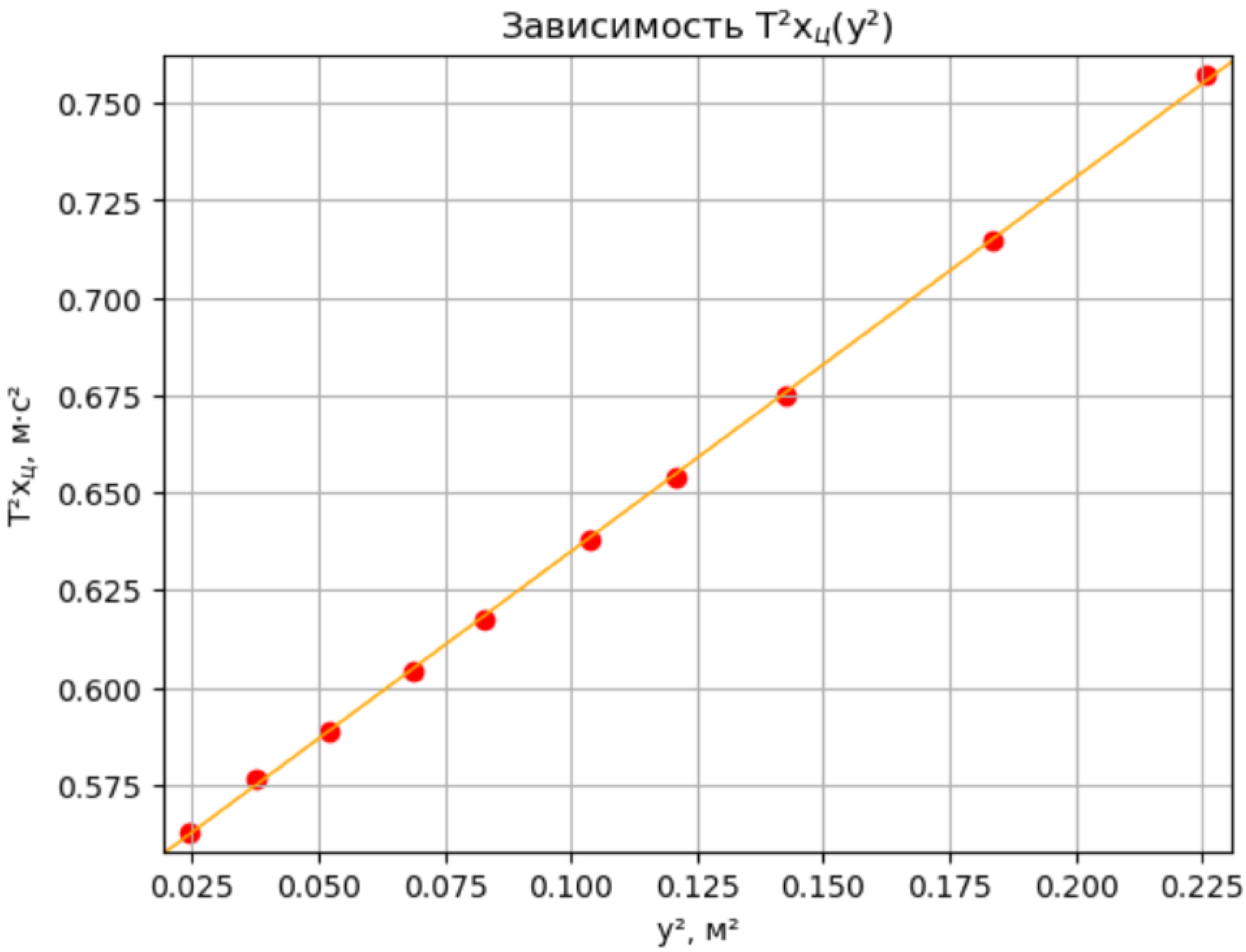
$$\varepsilon_k^{\text{МНК}} = \frac{\sigma_k^{\text{МНК}}}{k} = 0,002$$

$$\varepsilon_k^{\text{косв}} = \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + (\varepsilon_{x_\text{ц}})^2 + (2\varepsilon_y)^2} = 0,015$$

$$\varepsilon_g \approx \varepsilon_k = \sqrt{(\varepsilon_k^{\text{МНК}})^2 + (\varepsilon_k^{\text{косв}})^2} \approx 0,015 \to \sigma_g = \varepsilon_g \overline{g} = 0,15 \text{ м/с}^2$$

Таким образом, получаем

$$g = (9,89 \pm 0,15) \text{ м/с}^2$$



18. Видим, что более точное значение среднего g получено с помощью усреднения. Тем не менее, метод МНК даёт не столь далёкий от правды результат.

Вывод

На примере измерения периода свободных колебаний физического маятника мы познакомились с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями. Нами была проверена справедливость формулы для периода колебаний физического маятника. Также мы определили значение свободного падения и убедились в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника. Мы нашли значение g и оценили погрешность его измерения. Дополнительно было установлено, что в данном эксперименте метод наименьших квадратов даёт менее точный результат, чем метод непосредственного усреднения. Это обсуловлено тем, что чисто статистический МНК игнорирует погрешности измерений по оси абсцисс.