

Московский физико-технический институт

Лабораторная работа 1.4.8
ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ
АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Отчёт студента группы Б02-303
Долговой Екатерины

г.Долгопрудный, 2023

Лабораторная работа 1.4.8

Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

Теоретические сведения

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E . Он связан с такими величинами, как механическое напряжение σ и относительное удлинение ε формулой

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1)$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют **акустической** или **звуковой**, являющейся *продольной*. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды, поэтому скорость распространения такой волны u в среде с плотностью ρ будет определяться таким соотношением:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2)$$

Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина λ звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: $\lambda \gg R$. Если стержень также не зажат с боковых сторон, то легально использовать формулу (1).

Уравнение волны в тонком стержне

Разобьём недеформированный стержень на тонкие диски толщиной Δx . Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x , сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x, t)$. Тогда слой, занимавший исходно отрезок $[x, x + \Delta x]$, изменил свой продольный размер на величину $\Delta \xi = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$. Пользуясь малостью Δx и определением производной, получим $\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$. Таким образом, относительное удлинение стержня равно

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (3)$$

Тогда из уравнения (1)

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4)$$

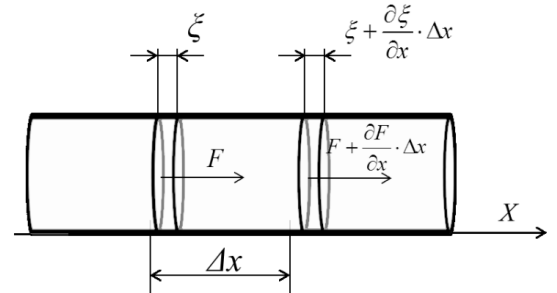


Рис. 1: Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

Напряжения, действующие на стенки рассматриваемого элемента в сечениях x и $x + \Delta x$, будут различными. Из-за этого возникнет результирующая *возвращающая сила*, стремящаяся вернуть элемент стержня в исходное состояние.

$$\Delta F = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} ES \Delta x. \quad (5)$$

Эта сила вызовет ускорение движения элемента стержня массой $\Delta m = \rho S \Delta x$ вдоль оси x :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \rho S \Delta x = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} ES \Delta x.$$

Применив (2), найдем **волновое уравнение**:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Бегущие акустические волны. Скорость волны

Произвольная функция вида $\xi(x, t) = \phi(x - ut)$ является решением волнового уравнения (6). Это можно проверить, подставив $X = x - ut$ в уравнение (6). Общее решение уравнения (6) можно записать в форме

$$\xi(x, t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut). \quad (7)$$

Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2), \quad (8)$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число (пространственная частота волны).

Пусть концы стержня не закреплены. Тогда напряжения в них должны равняться нулю. Положим координаты торцов равными $x = 0$ и $x = L$. Тогда, используя связь напряжения и деформации (4), запишем граничные условия для свободных (незакреплённых) концов стержня:

$$\sigma(0) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \sigma(L) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=L}. \quad (9)$$

Запишем первое граничное условие для (8):

$$-kA_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + kA_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = 0.$$

Полученное уравнение будет верно для любого t при двух условиях:

$$A_1 = A_2, \quad (10)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (11)$$

Если концы стержня закрепить ($\xi|_{x=0} = \xi|_{x=L} = 0$, то фазы падающей и отраженной волн будут отличаться на π .

Колебания следующего вида называют **гармоническими стоячими волнами**:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Используя второе граничное условие, получим $\sin kL = 0$, что будет верно при $k_n L = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Допустимые значения частот (**собственные частоты**):

$$f_n = \frac{uk_n}{2\pi} = n \frac{u}{2L}, n \in \mathbb{N}.$$

При совпадении внешней частоты с f_n в стержне возникнет *акустический резонанс*.

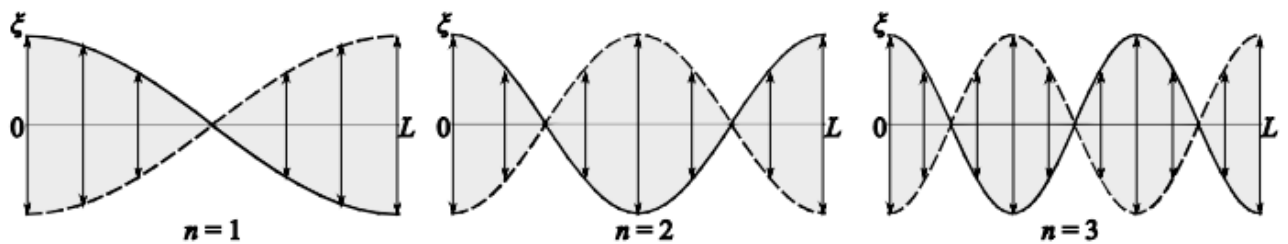


Рис. 2: Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами

Точки с максимальной амплитудой называются **пучностями**, с нулевой — **узлами**.

Экспериментальная установка

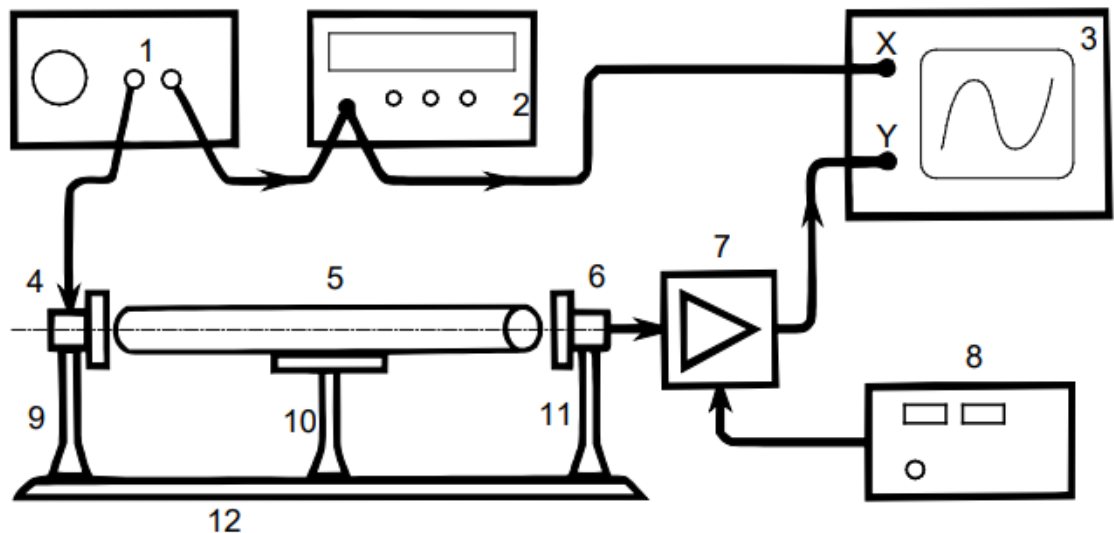


Рис. 3: Схема установки: 1 — генератор звуковой частоты, 2 — частотомер, 3 — осциллограф, 4 — электромагнит-возбудитель, 5 — образец, 6 — электромагнитприёмник, 7 — усилитель звуковой частоты, 8 — блок питания усилителя, 9, 11 — стойки крепления электромагнитов, 10 — стойка крепления образца, 12 — направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы. Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические.

Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне.

Ход работы

1. Познакомимся с основными органами управления электронного осциллографа. Проведем предварительную настройку осциллографа и звукового генератора.
2. Раздвинем датчики и поместите между ними исследуемый стержень на подставку 10. Проведем опыт сначала с медным стержнем длиной $l = (600,0 \pm 0,5)$ мм.
3. Разместим электромагниты напротив торцов стержня так, чтобы можно было производить измерения.
4. Предварительно определим диапазон частот генератора, в котором целесообразно искать резонансы: первый резонанс для меди составляет примерно 3080 Гц.
5. Медленно перестраивая звуковой генератор вблизи расчетной частоты, найдем первый резонанс.
6. Определим значение первой резонансной частоты: 3218,9 Гц. Результат запишем в таблицу 1. По нескольким измерениям можно увидеть, что флуктуации величины не превышают 0,1 Гц, тогда $\sigma_f^{\text{случ}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_f \approx \sigma_f^{\text{приб}} = 0,3$ Гц (берем утроенный последний неизменный разряд).
7. Получим резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Результаты также занесем в таблицу 1.

№ гармоники n	f , Гц
1	3218,9
2	6435,3
3	9648,4
4	12824,5
5	16057,9
6	19280,3
7	22458,7

Таблица 1

8. Определим плотность ρ_m материала стержня. Для этого взвесим на весах, измерим штангенциркулем длину и микрометром диаметр небольшого образца цилиндрической формы, изготовленного из исследуемого материала. Результаты занесем в таблицу 2.

№ опыта	m , г	l , мм	d , мм	ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
1	29,457	29,8	11,93	8843
2	29,116	29,9	11,82	8874
3	40,363	40,0	12,03	8878
4	30,119	30,1	11,93	8952
5	41,370	41,6	11,95	8867
6	39,393	39,9	11,91	8862
7	40,994	40,0	12,10	8913

Таблица 2

$$\bar{\rho}_M = 8884 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\varepsilon_{\rho_M}^{\text{КОСВ}} = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (2\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_l)^2} = 0,003 \rightarrow \sigma_{\rho_M}^{\text{КОСВ}} = \varepsilon_{\rho_M}^{\text{КОСВ}} \bar{\rho}_M = 27 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_M}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 7} \sum_i (\bar{\rho}_M - \rho_{M_i})^2} = 14 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_M} = \sqrt{(\sigma_{\rho_M}^{\text{КОСВ}})^2 + (\sigma_{\rho_M}^{\text{случ}})^2} = 30 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Окончательный результат:

$$\rho_M = (8880 \pm 30) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Видим, что наше значение попадает в диапазон табличных $8800 - 8900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

9. Определим среднее значение диаметра исследуемого стержня $2R = d = 11,95$ мм, измерив его штангенциркулем в нескольких местах (см. таблицу 2). Возьмем минимальную $\lambda = \frac{2}{7}L = 17,1$ см, соответствующую седьмой гармонике. Отношение $\frac{R}{\lambda} = \frac{d}{2\lambda} = 0,03 \ll 1$, т.е. приблизить стержень моделью тонкого стержня вполне справедливо.

10. Повторим опыты 2-10 для стального и дюралюминиевого стержней:

а) Для стали:

Первый резонанс ищем в районе 4170 Гц: находим его на значениях 4129,3 Гц. Результат запишем в таблицу 3. По нескольким измерениям можно увидеть, что флуктуации величины не превышают 0,1 Гц, тогда $\sigma_f^{\text{случ}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_f \approx \sigma_f^{\text{приб}} = 0,3$ Гц (берем утроенный последний неизменный разряд). Получим резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Результаты запишем в таблицу 3.

№ гармоники n	f , Гц
1	4129,3
2	8301,3
3	12418,1
4	16556,2
5	20664,3
6	24829,1
7	29094,8

Таблица 3

Определим плотность ρ_c материала стержня. Для этого взвесим на весах, измерим штангенциркулем длину и микрометром диаметр небольшого образца цилиндрической формы, изготовленного из исследуемого материала. Результаты занесем в таблицу 4.

№ опыта	m , г	l , мм	d , мм	ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
1	40,0	35,193	11,95	7845
2	40,1	35,197	11,96	7813
3	42,1	36,925	11,82	7993
4	41,3	37,092	11,98	7968
5	39,9	34,950	11,99	7758
6	32,5	28,112	11,75	7977
7	30,0	26,031	11,96	7724
8	30,3	26,163	11,95	7699

Таблица 4

$$\bar{\rho}_c = 7847 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\varepsilon_{\rho_c}^{\text{косв}} = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (2\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_l)^2} = 0,003 \rightarrow \sigma_{\rho_c}^{\text{косв}} = \varepsilon_{\rho_c}^{\text{косв}} \bar{\rho}_c = 24 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_c}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{7 \cdot 8} \sum_i (\bar{\rho}_c - \rho_{c_i})^2} = 15 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_c} = \sqrt{(\sigma_{\rho_c}^{\text{косв}})^2 + (\sigma_{\rho_c}^{\text{случ}})^2} = 30 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Окончательный результат:

$$\rho_c = (7850 \pm 30) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Видим, что наше значение попадает в диапазон табличных $7700 - 7900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Определим среднее значение диаметра исследуемого стержня $2R = d = 11,92$ мм, измерив его штангенциркулем в нескольких местах (см. таблицу 4). Возьмем минимальную $\lambda = \frac{2}{7}L = 17,1$ см, соответствующую седьмой гармонике. Отношение $\frac{R}{\lambda} = \frac{d}{2\lambda} = 0,03 \ll 1$, т.е. приблизить стержень моделью тонкого стержня вполне справедливо.

б) Для дюралюминия:

Первый резонанс ищем в районе 4290 Гц: находим его на значениях 4373,6 Гц. Результат запишем в таблицу 5. По нескольким измерениям можно увидеть, что флуктуации величины не превышают 0,1 Гц, тогда $\sigma_f^{\text{случ}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_f \approx \sigma_f^{\text{приб}} = 0,3$ Гц (берем утроенный последний неизменный разряд). Получим резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Результаты запишем в таблицу 5.

№ гармоники n	f , Гц
1	4373,6
2	8655,7
3	13110,8
4	17006,3
5	21258,5
6	25425,9
7	29643,6

Таблица 5

Определим плотность ρ_d материала стержня. Для этого взвесим на весах, измерим штангенциркулем длину и микрометром диаметр небольшого образца цилиндрической формы, изготовленного из исследуемого материала. Результаты занесем в таблицу 6.

№ опыта	m , г	l , мм	d , мм	ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
1	9,266	30,7	11,75	2783
2	9,489	29,9	12,05	2783
3	12,456	41,3	11,75	2781
4	13,239	40,9	12,15	2792
5	8,995	30,0	11,73	2775
6	12,189	41,8	11,84	2648
7	12,484	41,4	11,75	2781
8	9,198	30,1	11,86	2766

Таблица 6

$$\bar{\rho}_d = 2761 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\varepsilon_{\rho_d}^{\text{косв}} = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (2\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_l)^2} = 0,003 \rightarrow \sigma_{\rho_d}^{\text{косв}} = \varepsilon_{\rho_d}^{\text{косв}} \bar{\rho}_d = 8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_d}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{7 \cdot 8} \sum_i (\bar{\rho}_d - \rho_{c_i})^2} = 18 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\rho_d} = \sqrt{(\sigma_{\rho_d}^{\text{косв}})^2 + (\sigma_{\rho_d}^{\text{случ}})^2} = 20 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Окончательный результат:

$$\rho_d = (2760 \pm 20) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Видим, что наше значение попадает в диапазон табличных $2500 - 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Определим среднее значение диаметра исследуемого стержня $2R = d = 11,88$ мм, измерив его штангенциркулем в нескольких местах (см. таблицу 6). Возьмем минимальную $\lambda = \frac{2}{7}L = 17,1$ см, соответствующую седьмой гармонике. Отношение $\frac{R}{\lambda} = \frac{d}{2\lambda} = 0,03 \ll 1$, т.е. приблизить стержень моделью тонкого стержня вполне справедливо.

- Для стержня из дюрала проведем дополнительный опыт: перестраивая генератор, добьемся возбуждения первой гармоники f_1 резонансных колебаний в стержне при «половинной» частоте генератора $f = \frac{f_1}{2}$. Видим «бабочку» (см. рис. 4). Она получается из-за того, что по оси ОУ отображается сигнал собственных колебаний стержня

f_1 , регистрируемый с помощью датчика частотометра, а по оси OX — частота генератора $f_1/2$. Откуда отношение частот по x и y составляет 1:2.

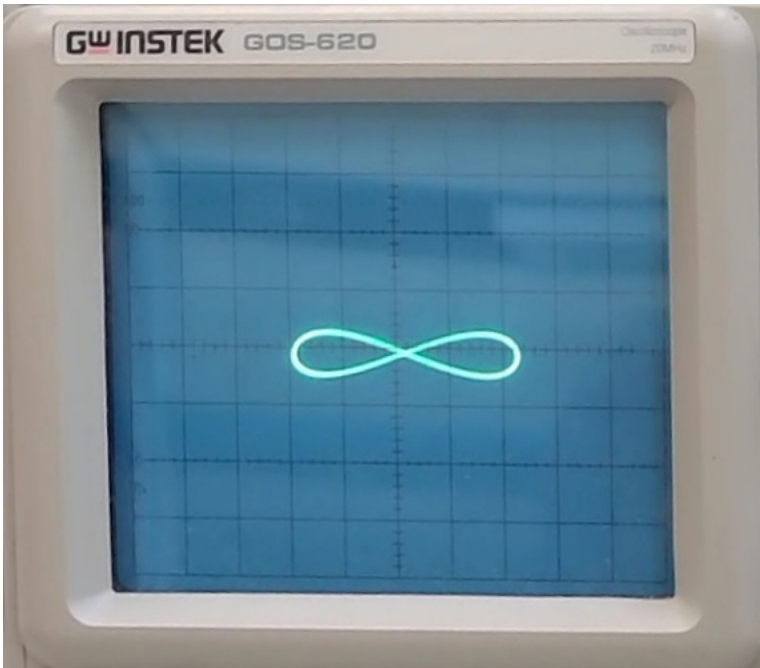
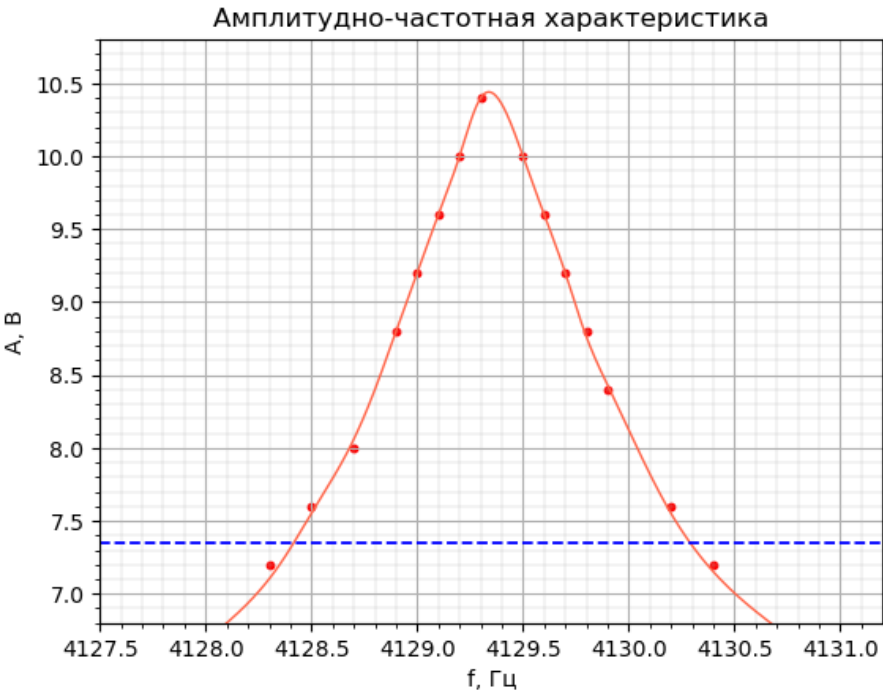


Рис. 4: «Бабочка» на экране осциллографа

12. Определим добротность стержня как колебательной системы, измерив амплитудно-частотную характеристику стального стержня $A(f)$ вблизи первого резонанса. Построим график АЧХ. Синей пунктирной линией отмечен уровень $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$.

f , Гц	4128,3	4128,5	4128,7	4128,9	4129,0	4129,1	4129,2	4129,3	4129,5	4129,6	4129,7	4129,8	4129,9	4130,2	4130,4
A , В	7,2	7,6	8,0	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,0	9,6	9,2	8,8	8,4	7,6	7,2



Ширина максимума функции $A(f)$ связана с добротностью Q стержня как колебательной системы формулой

$$Q = \frac{f_1}{\Delta f},$$

где Δf — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$.

Из графика найдем $\Delta \bar{f} = (4130,3 - 4128,4) \text{ Гц} = 1,9 \text{ Гц}$. $\sigma_{\Delta f} = \sqrt{2}\sigma_f = 0,4 \text{ Гц}$. Резонансная частота составляет $f_1 = (4129,3 \pm 0,3) \text{ Гц}$.

$$\bar{Q} = \frac{\bar{f}_1}{\Delta \bar{f}} = 2173$$

$$\varepsilon_Q = \sqrt{(\varepsilon_{f_1})^2 + (\varepsilon_{\Delta f})^2} = 0,2$$

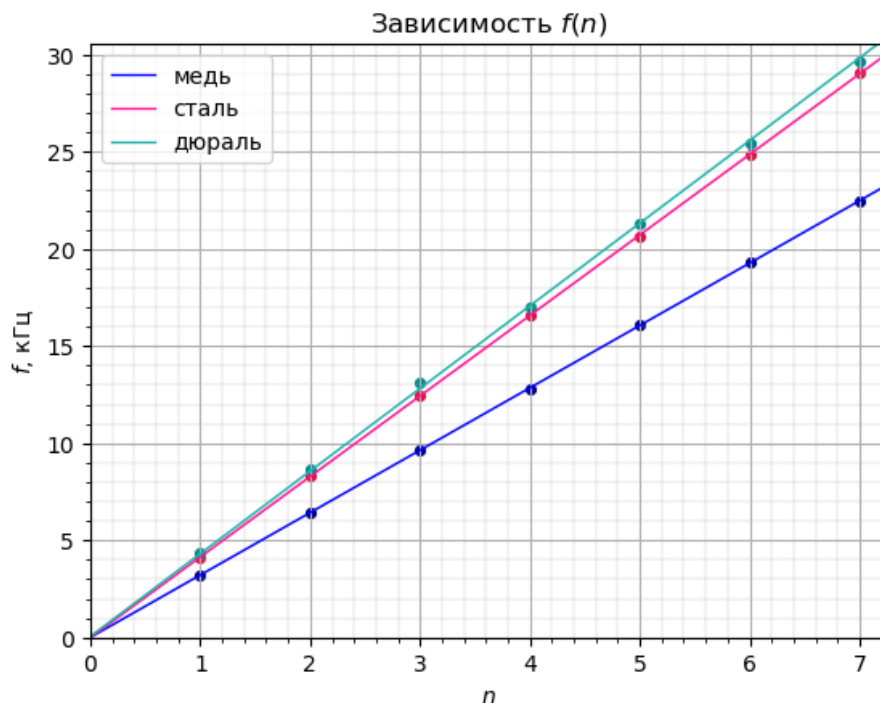
$$\sigma_Q = \varepsilon_Q \bar{Q} = 456 \approx 500$$

Окончательный результат:

$$Q = (2200 \pm 500)$$

13. Не делали.

14. Для каждого стержня построим графики зависимости частоты от номера гармоники $f(n)$ в одной системе координат. Видим, что все точки хорошо ложатся на прямую, проходящую через начало координат.



15. По МНК найдем скорости звука u для всех трех металлов ($f(n) = k \cdot n$):

$$f = \frac{u}{\frac{2L}{n}} \Rightarrow k = \frac{u}{2L}$$

$$\bar{u} = 2k\bar{L}$$

$$\sigma_u^{\text{случ}} = \bar{u}\varepsilon_k = \bar{u}\frac{\sigma_k}{k} = 2\bar{L}\sigma_k$$

$$\sigma_u^{\text{косв}} = \bar{u}\varepsilon_L$$

$$\sigma_u = \sqrt{(\sigma_u^{\text{случ}})^2 + (\sigma_u^{\text{косв}})^2}$$

	медь	сталь	дюраль
$k, \text{ Гц}$	3211	4144	4253
$\sigma_k, \text{ Гц}$	1	4	14
$\bar{u}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	3853	4973	5103
$\sigma_u^{\text{случ}}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	1	5	17
$\sigma_u^{\text{косв}}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	3	4	4
$\sigma_u, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	3	6	17

Окончательные результаты:

$$u_{\text{м}} = (3853 \pm 3) \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$u_{\text{с}} = (4973 \pm 6) \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$u_{\text{д}} = (5103 \pm 17) \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

16. Найдем модули Юнга для трех стержней:

$$\bar{E} = \bar{\rho}\bar{u}^2$$

$$\varepsilon_E = \sqrt{(\varepsilon_{\rho})^2 + (2\varepsilon_u)^2}$$

$$\sigma_E = \bar{E}\varepsilon_E$$

$\bar{E}, \text{ ГПа}$	131,8	194,1	71,9
$\varepsilon_E, 10^{-3}$	4	4	9
$\sigma_E, \text{ ГПа}$	0,5	0,8	0,6

Окончательный результат:

$$E_{\text{м}} = (131,8 \pm 0,5) \text{ ГПа}$$

$$E_{\text{с}} = (194,1 \pm 0,8) \text{ ГПа}$$

$$E_{\text{д}} = (71,9 \pm 0,6) \text{ ГПа}$$

Видим, что значения для стали лежат в пределах табличных (190 — 210 ГПа), аналогично значения для дюралюминия попадают в диапазон 71 — 73 ГПа. Значения для меди слегка далеки от табличного интервала 115 — 125 ГПа, это может быть обусловлено наличием иных примесей в материале стержня (т.н. противокоррозионных соединений).

17. Не делали.

Вывод

Мы исследовали явление акустического резонанса в тонком стержне, измерили скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров, нашли модули Юнга различных материалов.