Московский физико-технический институт

Лабораторная работа 1.2.4
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Отчет студента группы Б02-303
Долговой Екатерины

г.Долгопрудный, 2023

Лабораторaная работа 1.2.4

Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

В работе используются: установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), набор исследуемых твердых тел, секундомер.

Теоретические сведения

Тензор инерции $\hat{I}$ — матрица, связывающая величину момента импульса $\vec{L}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Эллипсоид инерции — поверхность, характеризующая величины моментов инерции твердого тела относительно множества возможных осей вращения, проходящих через одну точку O. Если точка O совпадает с центром масс, то эллипсоид называется *центральным.*

Зная эллипсоид инерции, можно определить момент инерции относительно любой оси. Для этого достаточно задать радиус вектор $\vec{r}$ вдоль нее, тогда

$$I = \frac{1}{r^2}. \tag{1}$$

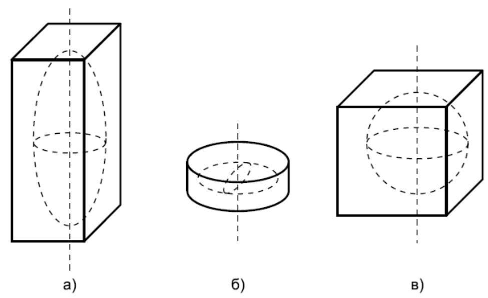


Рис. 1: Эллипсоиды инерции параллелепипеда, диска и куба

В главных осях эллипсоид инерции принимает вид:

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2. \tag{2}$$

В данной работе используется устройство, изображённое на схеме (см. рис. 2). Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

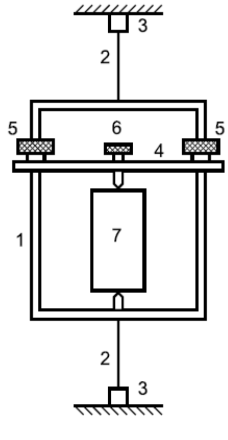


Рис. 2: Схема установки

Уравнение крутильных колебаний рамки с телом:

$$(I_{\text{тела}} + I_{\text{рамки}})\frac{d^2\varphi}{dt^2} + f\varphi = 0, \tag{3}$$

где $I_{\text{тела}}$ и $I_{\text{рамки}}$ — моменты инерции тела и рамки относительно оси, φ — угол поворота рамки, f — модуль кручения проволоки.

Период крутильных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{тела}} + I_{\text{рамки}}}{f}}. \tag{4}$$

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед (см. рис. 3). В нем оси AA', BB' и CC' являются главными. При вращении относительно диагонали DD' момент инерции I_d будет равен

$$I_d = I_x\frac{a^2}{d^2} + I_y\frac{b^2}{d^2} + I_z\frac{c^2}{d^2}. \tag{5}$$

Из (5) следует

$$I_d(a^2 + b^2 + c^2) = I_x a^2 + I_y b^2 + I_z c^2. \tag{6}$$

Используя (4), получим

$$T_d^2(a^2 + b^2 + c^2) = T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2. \tag{7}$$

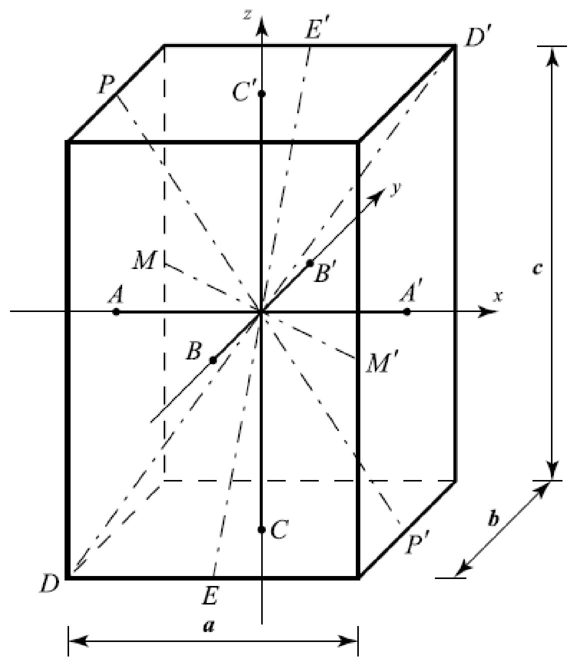


Рис. 3: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Аналогично получим такие формулы:

$$T_e^2(b^2 + c^2) = T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2; \tag{8}$$

$$T_p^2(a^2 + c^2) = T_x^2 a^2 + T_z^2 c^2; \tag{9}$$

$$T_m^2(a^2 + b^2) = T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2. \tag{10}$$

Эти соотношения будем проверять экспериментально.

Ход работы

1. Ознакомимся с установкой для получения крутильных колебаний. Проверим: 1) хорошо ли натянута проволока, 2) жестко ли закреплена на ней рамка, 3) нормально ли работает устройство для возбуждения крутильных колебаний, 4) не возникает ли колебаний в вертикальной плоскости.

2. Научимся закреплять тела в рамке.

3. Перед каждой серией измерений будем брать такую амплитуду, что при уменьшении ее в 2 раза период остается тем же. Амплитуда 10° вполне подходит, поэтому будем использовать ее.

4. Для пустой рамки и всех тел при различных их положениях относительно оси колебаний определим период колебаний по времени 10-15 колебаний, повторяя каждое измерение не менее, чем 3 раза. Занесем данные в таблицу 1.

t — время $N = 10$ колебаний
T — период колебаний
Расчетная формула: $\bar{T} = \frac{\bar{t}}{N}$

$$\sigma_t^{\text{приб}} = 0,03 \text{ с}$$

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 3} \sum_i (t_i - \bar{t})}$$

$$\sigma_t = \sqrt{(\sigma_t^{\text{случ}})^2 + (\sigma_t^{\text{приб}})^2}$$

$$\varepsilon_{T_{\text{рамки}}} = \varepsilon_{t_{\text{рамки}}} = \frac{\sigma_{t_{\text{рамки}}}}{\bar{t}_{\text{рамки}}}$$

№ опыта	$t_{\text{рамки}}$, с	t_x, с	t_y, с	t_z, с	t_d, с	t_e, с	t_p, с	t_m, с
1	12,62	41,09	38,09	32,50	34,84	34,44	33,65	39,06
2	12,72	41,07	38,16	32,75	35,04	34,37	33,85	38,87
3	12,90	41,17	38,21	32,63	34,96	34,50	33,72	38,82

Таблица 1

$$t_{\text{рамки}} = (12,8 \pm 0,3) \text{ с}$$

$$T_{\text{рамки}} = (2,56 \pm 0,06) \text{ с}$$

ось	$\bar{t}$, с	σ_t, с	$\bar{T}$, с	σ_T, с	$\bar{I}$, г · м^2	σ_I, г · м^2	$\bar{r}$, с$^{-1}$	σ_r, с$^{-1}$
x	41,1	0,3	4,11	0,03	5,70	0,02	0,310	0,001
y	38,2	0,3	3,82	0,03	4,38	0,02	0,352	0,002
z	32,6	0,3	3,26	0,03	2,20	0,02	0,491	0,005
DD'	34,9	0,3	3,49	0,03	3,08	0,03	0,418	0,003
EE'	34,4	0,3	3,44	0,03	2,87	0,03	0,432	0,003
PP'	33,7	0,3	3,37	0,03	2,55	0,03	0,452	0,004
MM'	38,9	0,3	3,89	0,03	4,65	0,04	0,340	0,002

Таблица 2

Вычислим период колебаний относительно главных осей. Также измерим периоды относительно DD', EE', PP' и MM'. Данные занесем в таблицу 2.

5. Штангенциркулем измерим размеры прямоугольного параллелепипеда:

$$a = (50,5 \pm 0,1) \text{ мм}$$

$$b = (100,6 \pm 0,1) \text{ мм}$$

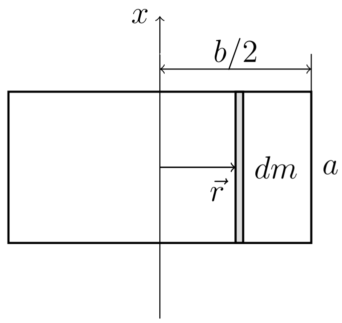
$$c = (150,7 \pm 0,1) \text{ мм}$$

С помощью весов измерим его массу:

$$m_{\text{п}} = (2082,0 \pm 0,3) \text{ г}$$

Выведем главные моменты инерции: Для I_x:

$$I_x = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} r^2 dm, \qquad dm = \rho dzdydx$$



$I_x = \rho \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}(z^2+y^2)dzdydx = \rho a \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}(z^2+y^2)dzdy =$
$= \rho a \int_{-b/2}^{b/2}(\frac{c^3}{12}+cy^2)dy = \frac{\rho abc}{12}(b^2+c^2) = \frac{m}{12}(b^2+c^2)$

Аналогично получим

$$I_y = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$$

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

Подставим в выведенные формулы значения массы и размеров. Занесём данные в таблицу 2.

По полученным в п.4 данным проверим справедливость формул (7) - (10). Видим, что с учётом погрешности получается верное соотношение.

Поэтому найдем оставшиеся моменты инерции и запишем их в таблицу 2.

6. Нарисуем сечения эллипсоида инерции главными плоскостями. Для этого по каждой оси отложим величину $r = \frac{1}{\sqrt{T^2 - T^2_{\text{рамки}}}}$ от центра масс вдоль соответствующей оси.

   Проведём эллипсы с полуосями, равными ранее отложенным величинам.

   Найдем проекции r на главные плоскости (см. табл. 3).

ось	x	y	z	плоскость
EE'	—	0,239	0,359	yOz
PP'	0,144	—	0,429	xOz
MM'	0,153	0,304	—	xOy

Таблица 3

Найдём отношение главных моментов инерции:

$$\frac{I_x}{I_y} \approx 1,3 \qquad \frac{I_x}{I_z} \approx 2,6 \qquad \frac{I_y}{I_z} \approx 2,0$$

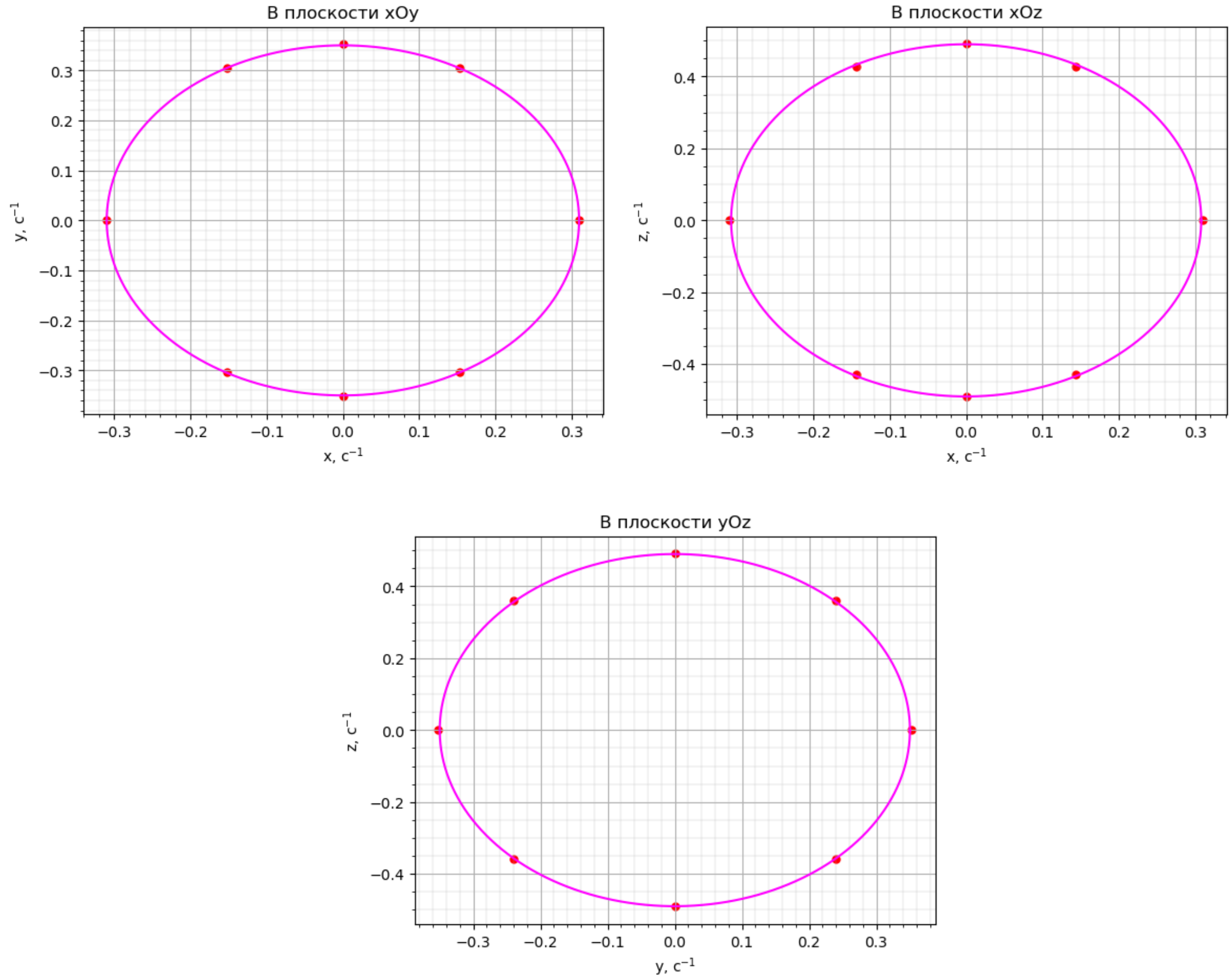


Рис. 4: Сечения эллипсоида инерции параллелепипеда

7. Сравним значения χ^2 и s:

   T_{obs} — измеренные экспериментально значения,
   T_{th} - полученные косвенно по формулам (7) - (10).

ось	T_{obs}, с	$\sigma_{T_{obs}}$, с	T_{th}, с	$\sigma_{T_{th}}$, с	s
DD'	3,49	0,03	3,48	0,04	0,2
EE'	3,44	0,03	3,43	0,03	0,2
PP'	3,37	0,03	3,34	0,03	0,7
MM'	3,89	0,03	3,87	0,03	0,5

Таблица 4

$$\chi^2(\alpha = 0.05, n = 3) = 7.8,$$

где α — уровень значимости критерия, или же вероятность выхода за пределы 2σ в нашем случае, n — число степеней свободы, равно количеству измерений минус один. Расчетная формула s:

$$s = \frac{|T_{obs} - T_{th}|}{\sqrt{\sigma^2_{T_{obs}} + \sigma^2_{T_{th}}}}$$

Видим, что $\chi^2 > s$ для всех четырех случаев, поэтому результаты, полученные экспериментально и выведенные из формул косвенно (согласно нулевой гипотезе о их примерном равенстве) достоверны.

8. Проделаем всё то же самое для куба:

$$a = (92,6 \pm 0,1)\text{ мм}$$
$$b = (92,7 \pm 0,1)\text{ мм}$$
$$c = (92,7 \pm 0,1)\text{ мм}$$

Видим, что с большой точностью a = b = c.

$$m_{\text{к}} = (1090,5 \pm 0,3)\text{ г}$$

№ опыта	$t_{\text{рамки}}$, с	t_x, с	t_d, с
1	12,62	30,91	31,10
2	12,72	30,93	31,07
3	12,90	31,04	30,88

Таблица 5

Из равенства a = b = c и формул (7) - (10) следует, что любые T между собой равны. Проверим это на примере T_d (проверочной оси):

$$\bar{t_x} = (31,0 \pm 0,3)\text{ с},\ \bar{t_d} = (31,0 \pm 0,3)\text{ с}$$

Видим, что они равны в пределах погрешности. Поэтому период T будет единым для куба:

$$T = (3,10 \pm 0,03)\text{ с}$$

Момент инерции найдем из момента инерции параллелепипеда с равными ребрами:

$$I = \frac{m}{12}(a^2 + a^2) = \frac{ma^2}{6}$$

Найдем значение момента инерции куба относительно любой его оси:

$$I = (1,56 \pm 0,02)\text{ г}\cdot\text{м}^2$$

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{I_x}{I_z} = \frac{I_y}{I_z} = 1$$

9. И двух цилиндров:

$$m_1 = (1569,5 \pm 0,3)\text{ г}$$
$$m_2 = (2263,7 \pm 0,3)\text{ г}$$

Первый:

$$r = (6,225 \pm 0,005)\text{ см}$$
$$h = (1,68 \pm 0,01)\text{ см}$$

Второй:

$$R = (4,410 \pm 0,005) \text{ см}$$

$$H = (4,95 \pm 0,01) \text{ см}$$

Осями x и y будем обозначать оси в плоскостях, проходящих через центр масс, параллельно основаниям цилиндров, z — вдоль оси цилиндров. В силу симметрии будем измерять периоды и считать моменты инерции только по 1 из осей в плоскости основания, например, по оси x.

№ опыта	$t_{\text{рамки}}$, с	t_{z1}, с	t_{x1}, с	t_{z2}, с	t_{x2}, с
1	12,62	34,93	30,78	32,68	30,91
2	12,72	34,91	30,85	32,60	30,72
3	12,90	34,82	30,73	32,75	30,77

Таблица 6

Выведем момент инерции для цилиндра:

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_x = 2 \int_0^{H/2} (r^2 + \frac{R^2}{4}) dm = \frac{2m}{\pi R^2 H} \int_0^{H/2} (r^2 + \frac{R^2}{4}) \pi R^2 dr = \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12}$$

ось	$\bar{t}$, с	σ_t, с	$\bar{T}$, с	σ_T, с	$\bar{I}$, г · м^2	σ_I, г · м^2	$\bar{r}$, с$^{-1}$	σ_r, с$^{-1}$
x1	30,8	0,3	3,08	0,03	1,56	0,01	0,579	0,008
z1	34,9	0,3	3,49	0,03	3,04	0,02	0,420	0,003
x2	30,8	0,3	3,08	0,03	1,56	0,01	0,579	0,008
z2	32,7	0,3	3,27	0,03	2,20	0,01	0,489	0,005

Таблица 7

10. Также построим график зависимости $T^2(I)$ для всех ранее найденных T и I. Прямую аппроксимируем методом наименьших квадратов.

Как видим, в координатах $T^2(I)$ он имеет линейный вид:

$$T^2(I) = \frac{4\pi^2}{f}(I + I_{\text{рамки}})$$

Для рамки $T^2 = T^2_{\text{рамки}} = \dfrac{4\pi^2 I_{\text{рамки}}}{f}$, поэтому зависимость $T^2(I)$ можно описать несколько иначе:

$$T^2(I) = \frac{4\pi^2}{f} I + T^2_{\text{рамки}}$$

Коэффициент наклона k такой зависимости будет равен $\frac{4\pi^2}{f}$, откуда мы легко найдем модуль кручения f. Обозначим $y = T^2$, $x = I$

$$k = \frac{< xy > - < x >< y >}{< x^2 > - < x >^2} = 1,799 \ \frac{\text{с}^2}{\text{г} \cdot \text{м}^2} \rightarrow \bar{f} = \frac{4\pi^2}{k} = 21,9 \ \frac{\text{г} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

$$b =< y > -k < x >= 6,75 \text{ с}^2$$

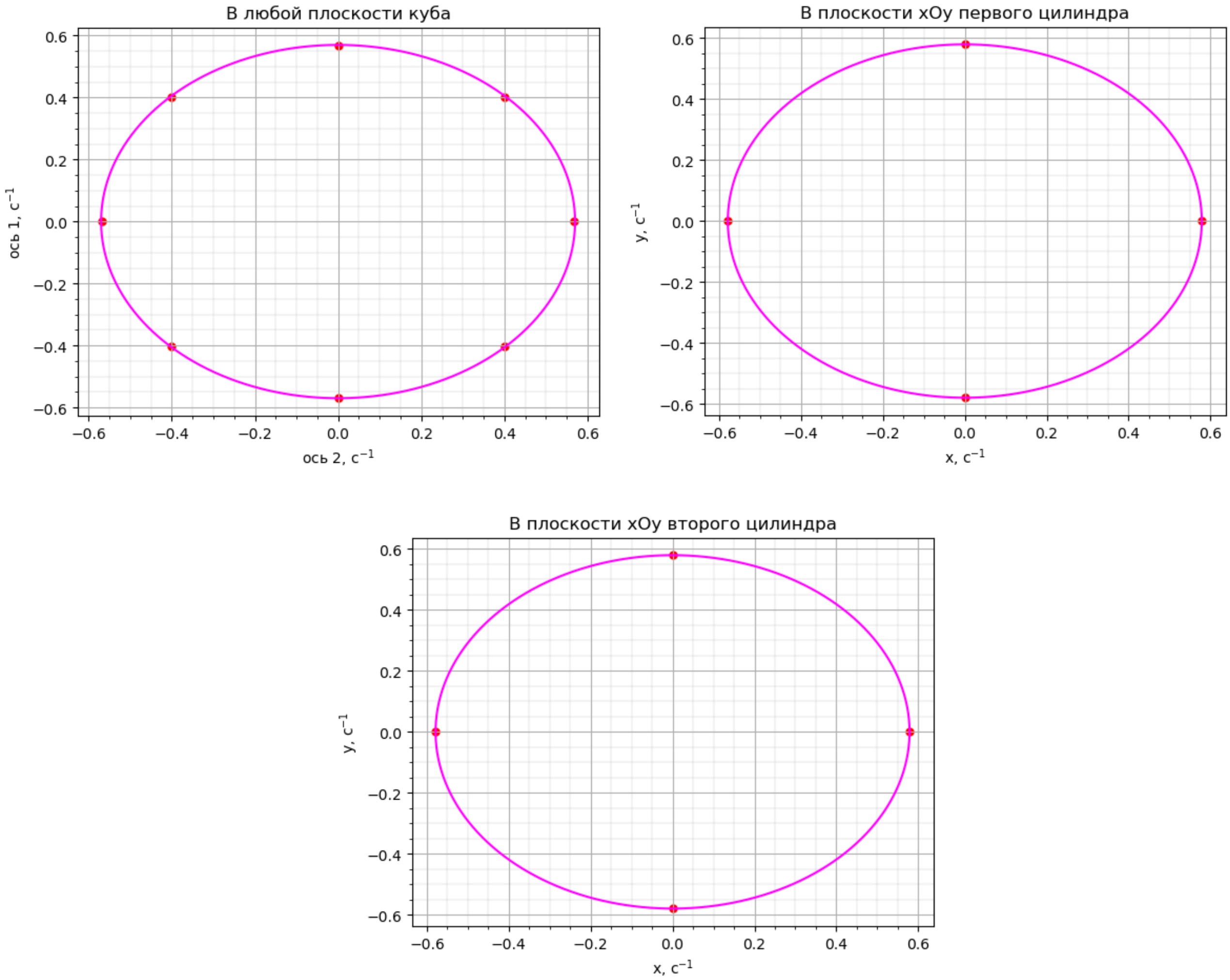


Рис. 5: Сечения эллипсоида инерции куба и двух цилиндров

$$\sigma_k^{\text{МНК}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{<y^2> - <y>^2}{<x^2> - <x>^2} - k^2} = 0,016\ \frac{\text{с}^2}{\text{г}\cdot\text{м}^2}$$

$$\sigma_b^{\text{МНК}} = \sigma_k^{\text{МНК}}\sqrt{<x^2> - <x>^2} = 0,04\ \text{с}^2$$

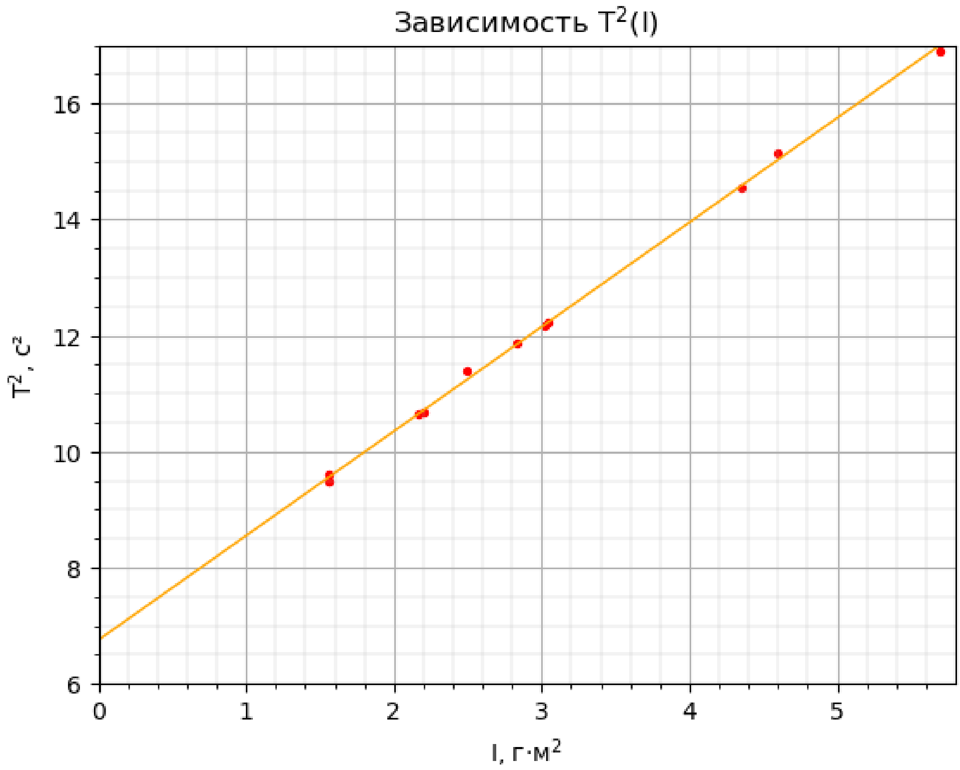
$$\varepsilon_k^{\text{МНК}} = \frac{\sigma_k^{\text{МНК}}}{k} = 0,009$$

$$\varepsilon_k^{\text{косв}} = \varepsilon_b^{\text{косв}} = \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + (\varepsilon_I)^2} = 0,019$$

$$\varepsilon_b^{\text{МНК}} = \frac{\sigma_b^{\text{МНК}}}{b} = 0,006$$

$$\varepsilon_f \approx \varepsilon_k = \sqrt{(\varepsilon_k^{\text{МНК}})^2 + (\varepsilon_k^{\text{косв}})^2} \approx 0,02 \to \sigma_f = \varepsilon_f \overline{f} = 0,4\ \frac{\text{г}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{(\varepsilon_b^{\text{МНК}})^2 + (\varepsilon_b^{\text{косв}})^2} \approx 0,02$$



Окончательный результат:

$$f = (21,9 \pm 0,4)\ \frac{\text{г} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Зная f, можно найти $I_{\text{рамки}}$:

$$b = T^2_{\text{рамки}} = \frac{4\pi^2}{f} I_{\text{рамки}} \to I_{\text{рамки}} = 3,74\ \text{г} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon_{I_{\text{рамки}}} = \sqrt{(\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_b)^2} = 0,03 \to \sigma_{I_{\text{рамки}}} = 0,11\ \text{г} \cdot \text{м}^2$$

Окончательный результат:

$$I_{\text{рамки}} = (3,74 \pm 0,11)\ \text{г} \cdot \text{м}^2$$

Вывод

Нами были измерены периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверена теоретическая зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определены моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найдены главные моменты инерции тел и построены эллипсоиды инерции.