

Московский физико-технический институт

Лабораторная работа 1.2.5
ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ
ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Отчет студента группы Б02-303
Долговой Екатерины

г.Долгопрудный, 2023

Лабораторная работа 1.2.5

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Теоретические сведения

Уравнения движения твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает поступательное движение твердого тела, уравнение (2) — вращательное, т.е. они независимы. Запишем момент импульса \vec{L} в главных осях x , y и z :

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \quad (3)$$

где I_x , I_y и I_z — главные моменты инерции, ω_x , ω_y и ω_z — компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Гироскопом принято называть тела, для которых справедливо, например,

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$$

Уравновешенным гироскопом называется гироскоп, чей центр масс неподвижен.

Т.к. гироскопы обладают хорошей устойчивостью, то можем рассчитать, какие силы нужно приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. В качестве примера возьмем маховик (см. рис. 1).

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0$$

$$d\varphi = \Omega dt$$

Будем считать, что $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$, тогда

$$\begin{cases} |d\vec{L}| = Ld\varphi = \Omega Ldt \\ d\vec{L} \uparrow \uparrow Ox \end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (4)$$

Таким образом, получаем

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (5)$$

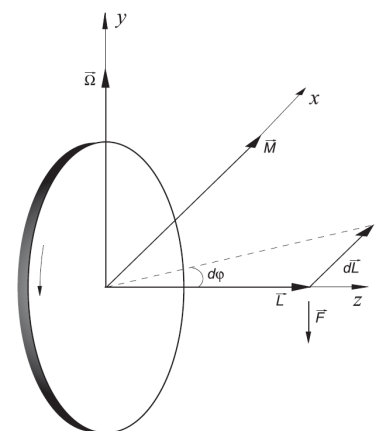


Рис. 1: Маховик

Данная формула (5) справедлива, когда выполняется условие $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$.

Вращение маховика по действию момента \vec{M} вокруг оси y называется **регулярной прецессией гироскопа**.

В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенного гироскопа. Подробная схема гироскопа приведена на рис. 2.

Для гироскопа массой m_r , у которого ось собственного вращения наклонена на угол α от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{m_r g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0}, \quad (6)$$

где $l_{\text{ц}}$ — расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, скорость прецессии не зависит от угла α .

Для изучения регулярной прецессии часто подвешивают дополнительные грузы. Тогда справедливо

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (7)$$

где m — масса груза, l — расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (см. рис. 3).

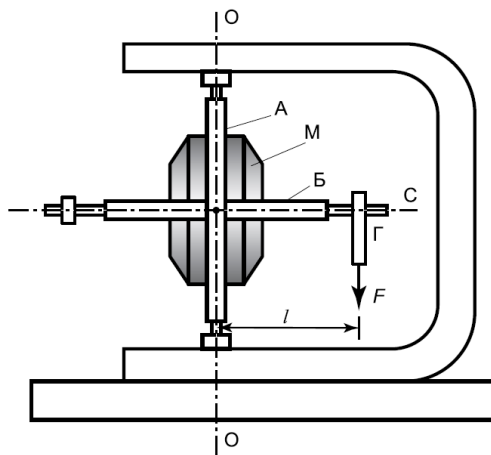


Рис. 3: Установка

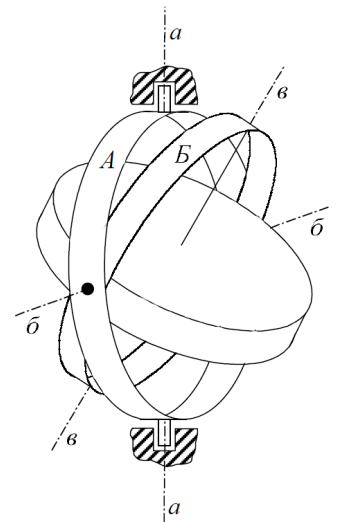


Рис. 2: Схема гироскопа

Расчитывать скорость прецессии будем по формуле (7). С ее помощью можно будет найти скорость вращения ротора. Момент инерции ротора I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}. \quad (8)$$

Чтобы исключить f , подвесим цилиндр с известным $I_{\text{ц}}$ и измерим $T_{\text{ц}}$:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}. \quad (9)$$

Ход работы

1. Установим ось гироскопа в горизонтальное положение.
2. Включим питание гироскопа и подождем, пока вращение ротора не стабилизируется.
3. До стабилизации вращения попробуем отклонить по вертикали рычаг: видим прецессию в горизонтальной плоскости. Убедимся в том, что ротор вращается достаточно быстро: при легком воздействии на рычаг, последний не меняет своего положения в пространстве.
4. Подвесим к рычагу С на расстоянии $l = (119,0 \pm 0,1)$ мм (величина указана на установке) от центра масс груз Г. Видим, что начинается прецессия: рычаг медленно опускается.

5. С помощью секундомера найдем угловую скорость регулярной прецессии гироскопа $\Omega = \frac{1}{T}$. Результаты занесем в таблицу 1.

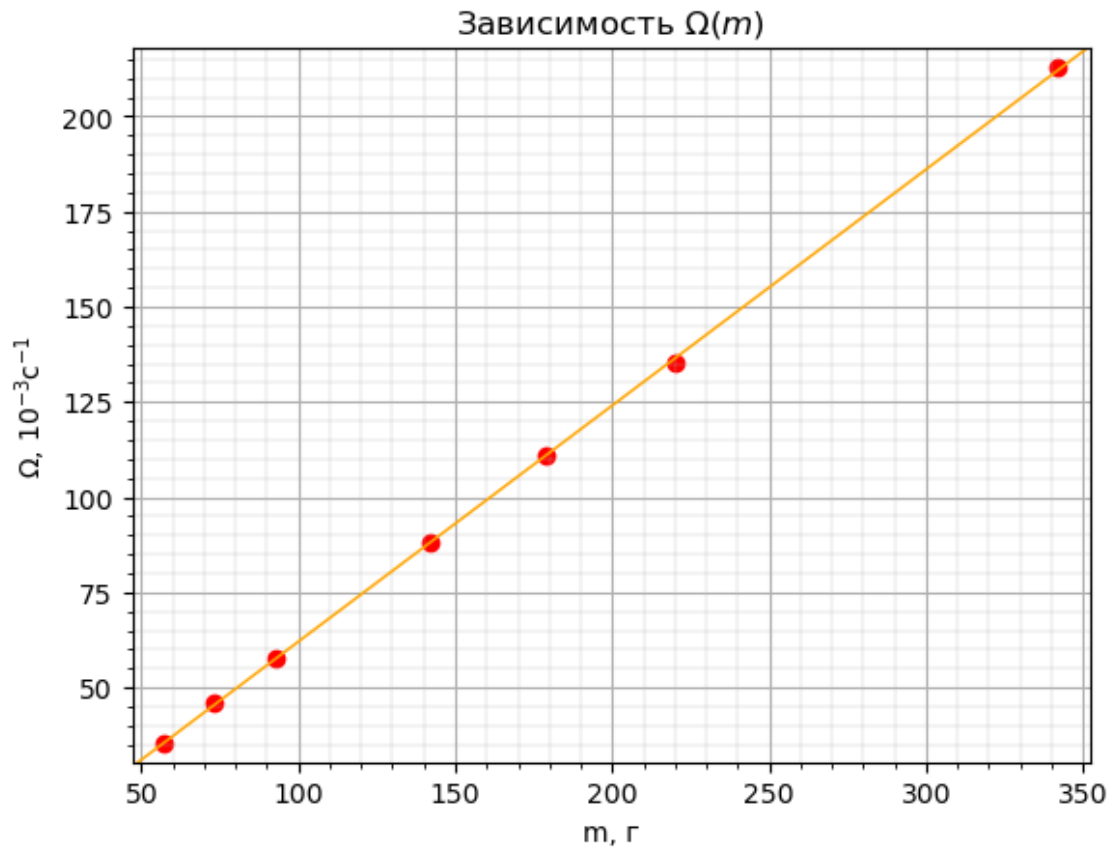
m, г	t, с	N	\bar{t} , с	ω , с ⁻¹	$\bar{\nu}$, Гц	σ_ν , Гц	ν_{real} , Гц	$\bar{\Omega}$, 10 ⁻⁴ с ⁻¹	σ_Ω , 10 ⁻⁴ с ⁻¹
57	89,13	0,5	177,4	2441	389	20	387	354	1
	88,52								
	88,29								
	88,75								
	88,91								
73	68,91	0,5	136,9	2412	384	19	387	459	1
	68,65								
	67,64								
	68,89								
	68,29								
93	53,83	0,5	108,7	2439	388	20	387	578	2
	54,59								
	54,58								
	54,18								
	54,49								
142	35,89	0,5	71,5	2450	384	20	387	879	4
	35,67								
	35,79								
	35,59								
	35,83								
179	28,29	0,5	56,6	2445	389	19	387	1110	6
	28,36								
	28,26								
	28,42								
	28,19								
220	23,34	0,5	46,5	2468	393	19	387	1351	9
	23,13								
	23,28								
	23,24								
	23,25								
342	29,23	1,0	29,5	2435	388	20	387	2130	20
	29,85								
	29,44								
	29,61								
	29,40								

Таблица 1

6. Повторим измерения из п.5 для еще 6 других масс грузов. Результаты также занесем в таблицу 1.

Также построим график зависимости $\Omega(m)$ (см. след. стр.)

7. Измерим момент инерции ротора с помощью крутильных колебаний. Прделаем то же самое для цилиндра с известным моментом инерции. Результаты измерения времени занесем в таблицу 2. Число крутильных колебаний $N = 5$.



$t_{\text{цилиндра}}, \text{ c}$	$t_{\text{ротора}}, \text{ c}$
20,01	16,05
20,26	16,03
19,98	15,63
20,17	16,14
20,01	15,82

Таблица 2

$$\sigma_t^{\text{реак}} = 0,3 \text{ c}$$

$$\sigma_t^{\text{приб}} = 0,03 \text{ c}$$

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 5} \sum_i (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\sigma_t = \sqrt{(\sigma_t^{\text{реак}})^2 + (\sigma_t^{\text{приб}})^2 + (\sigma_t^{\text{случ}})^2} \approx \sigma_t^{\text{реак}} = 0,3 \text{ c}$$

$$t_{\text{ц}} = (20,1 \pm 0,3) \text{ c}$$

$$t_0 = (15,9 \pm 0,3) \text{ c}$$

Откуда получим

$$T_{\text{ц}} = (4,02 \pm 0,06) \text{ c}$$

$$T_0 = (3,19 \pm 0,06) \text{ c}$$

Диаметр цилиндра:

$$d = (78,0 \pm 0,1) \text{ мм}$$

Масса цилиндра:

$$m = (1616,5 \pm 0,3) \text{ г}$$

Момент инерции цилиндра:

$$\bar{I}_{\text{ц}} = \frac{\bar{m}\bar{r}^2}{2} = \frac{\bar{m}\bar{d}^2}{8} = 1,229 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon_{I_{\text{ц}}} = \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (2\varepsilon_d)^2} = 0,003$$

$$\sigma_{I_{\text{ц}}} = \bar{I}_{\text{ц}}\varepsilon_{I_{\text{ц}}} = 0,004 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{\text{ц}} = (1,229 \pm 0,004) \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Момент инерции ротора:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{\text{ц}} \frac{\bar{T}_0^2}{\bar{T}_{\text{ц}}^2} = 0,77 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon_{I_0} = \sqrt{(\varepsilon_{I_{\text{ц}}})^2 + (2\varepsilon_{T_{\text{ц}}})^2 + (2\varepsilon_{T_0})^2} = 0,05$$

$$\sigma_{I_0} = \bar{I}_0\varepsilon_{I_0} = 0,04 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$I_0 = (0,77 \pm 0,04) \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

8. См. таблицу 1 и п.7.

9. Рассчитаем частоту вращения гироскопа:

Из формулы (7) следует, что

$$\omega = \frac{mgl}{I_0\Omega} = mT \frac{gl}{2\pi I_0} = mTk,$$

где k — коэффициент установки, являющийся постоянным для всех 7 грузов.

$$\bar{k} = \frac{g\bar{l}}{2\pi\bar{I}_0} = 0,24 \text{ г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{(\varepsilon_{I_0})^2 + (\varepsilon_l)^2} = 0,05$$

$$\sigma_k = \bar{k}\varepsilon_k = 0,01 \text{ г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$k = (0,24 \pm 0,01) \text{ г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

Найдем частоту вращения ротора гироскопа:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{mTk}{2\pi}$$

$$\sigma_\nu = \bar{\nu} \sqrt{(\varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_T)^2 + (\varepsilon_k)^2}$$

Для каждой массы m рассчитаем $\bar{\nu}$ и σ_ν . Результаты занесем в таблицу 1.

10. По скорости опускания рычага С на 10° во время прецессии найдем момент сил трения. Проведем данный опыт на двух массах грузов. Результаты занесем в таблицу 3. Также можно установить, что трение происходит в оси ϵ , а момент трения — в оси a .

$$\alpha = \frac{M_{F_{\text{тр}}}}{M_{mg}} = \frac{\Omega_{\text{тр}}}{\Omega}$$

m, г	t, с	$\Omega_{\text{тр}}, \text{с}^{-1}$	$\Omega, \text{с}^{-1}$	$\omega, \text{с}^{-1}$	α	$M_{F_{\text{тр}}}, 10^{-3} \text{Н} \cdot \text{м}$
142	150	0,001	0,088	2450	0,013	2,2
342	148	0,001	0,213	2435	0,006	2,2

Таблица 3

Видим, что выполняется соотношение $\omega \gg \Omega > \Omega_{\text{тр}}$, поэтому мы можем применить соотношение выше и таким образом найти $M_{F_{\text{тр}}}$. Результаты занесем в таблицу

11. По фигурам Лиссажу с помощью осциллографа найдем реальную частоту. Результат занесем в таблицу 1.
12. Видим, что в пределах погрешности частоты совпадают.
13. Т.к. $\Omega \ll \omega$, то можно говорить, что $L_\Omega \ll L_\omega$, т.е. формула (5) справедлива для данной установки.

Вывод

Мы исследовали вынужденную прецессию гироскопа, установили зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа и определили скорость вращения ротора гироскопа и сравнили ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии