Московский физико-технический институт

Лабораторная работа 1.3.1-2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА И МОДУЛЯ СДВИГА

Отчёт студента группы Б02-303
Долговой Екатерины

г.Долгопрудный, 2023

Лабораторная работа 1.3.1-2

Определение модуля Юнга и модуля сдвига

Цель работы: *в первой части:* экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для одноосного растяжения, по результатам измерений вычислить модуль Юнга; *во второй части:* измерить углы закручивания в зависимости от приложенного момента сил, расчитать модули кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника.

В работе используются: *в первой части:* прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; *во второй части:* проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

Теоретические сведения

I Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

Определение связи между n, Δl, r и n

Наилучшая четкость при наблюдении шкалы через зеркало будет наблюдаться при падении отраженного от зеркала луча зрения перпендикулярно шкале, т.е. отраженный луч будет горизонтален. Т.к. деформации малые, то можно считать $\Delta l \ll r$, и угол поворота рычага α от горизонтали равен

$$\alpha = \frac{\Delta l}{r}.$$

Из прямоугольного треугольника, образуемого лучом зрения, находим, что

$$tg\ 2\alpha = \frac{n}{h}.$$

В силу малости угла запишем $tg\ 2\alpha$ как $2\ tg\alpha$, а последнее примерно равно 2α

$$\alpha = \frac{n}{2h} = \frac{\Delta l}{r}.$$

Тогда Δl будем определять по формуле

$$\Delta l = \frac{nr}{2h}. \tag{1}$$

Зависимость Δl от нагрузки P

Согласно закону Гука

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta l, \tag{2}$$

где k — коэффициент жесткости проволоки.

Из второго закона Ньютона получим, что

$$P = -F_{\text{упр}} = k\Delta l.$$

С другой стороны,

$$P = \sigma S = ES\frac{\Delta l}{l}, \tag{3}$$

где σ — механическое напряжение, S — площадь поверхности, по которой распределено действие силы, E — модуль Юнга, l — длина недеформированной проволоки.

Тогда, зная k, мы легко найдем E:

$$E = k\frac{l}{S}. \tag{4}$$

II Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

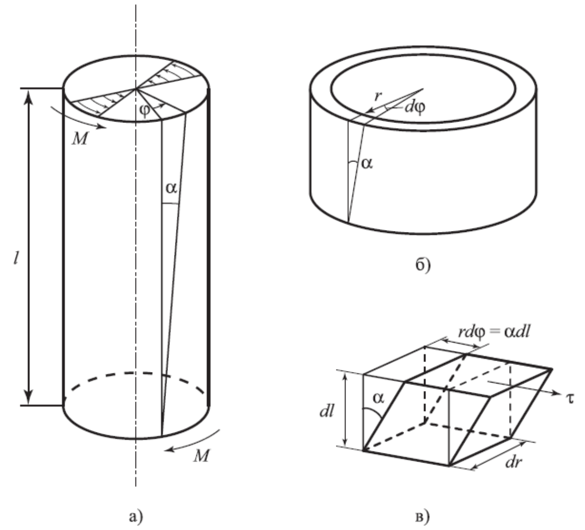


Рис. 1: Закручивание цилиндра

Рассмотрим деформацию небольшого участка колечка высотой dl, изображенного на рис. 1б:

$$\alpha dl = r d\varphi.$$

Касательное напряжение τ связано с модулем сдвига G таким соотношением:

$$\tau = G\alpha = Gr\frac{d\varphi}{dl}. \tag{5}$$

Эти касательные напряжения создают моменты dM:

$$dM = 2\pi r dr \cdot \tau \cdot r. \tag{6}$$

Интегрируя (6) от 0 до R, получим

$$M = \frac{\pi G R^4}{2l}\varphi = f\varphi. \tag{7}$$

Откуда получим модуль кручения f:

$$f = \frac{\pi G R^4}{2l}. \tag{8}$$

В эксперименте крутильные колебания будут описываться уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M. \tag{9}$$

Период таких колебаний для тела с моментом инерции I составит

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \tag{10}$$

При этом колебания будут описываться гармоническим законом

$$\varphi(t) = \varphi_0 cos(\omega t + \theta_0), \tag{11}$$

где φ_0 — амплитуда колебаний, ω — циклическая частота, θ_0 — начальная фаза.

Экспериментальная установка

I Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова, схема которого изображена на рис. 2. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг r, связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркальца.

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока П при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказаться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Проволока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

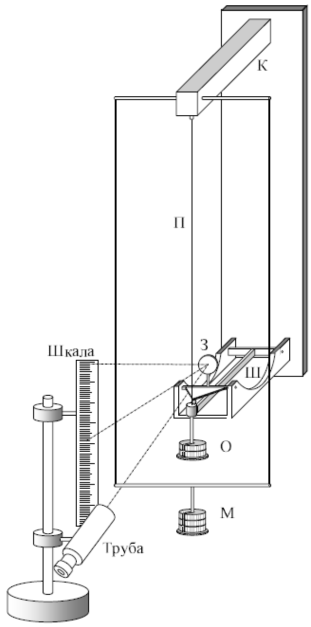


Рис. 2: Схема прибора Лермантова

II Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 3 и состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец проволоки зажат в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким способом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке.

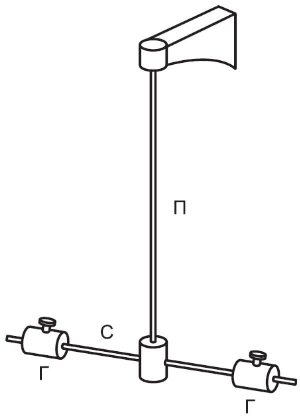


Рис. 3: Схема установки

Ход работы

I Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

1. Определим площадь поперечного сечения проволоки. Диаметр проволоки указан на установке: $d = (0,51 \pm 0,01)$ мм. По формуле, приведенной ниже, рассчитаем площадь поперечного сечения проволоки.

$$\bar{S} = \frac{\pi \bar{d}^2}{4} = 0,204 \text{ мм}^2$$

$$\varepsilon_s = 2\varepsilon_d = 0,04$$

$$\sigma_s = \bar{S}\varepsilon_s$$

Окончательный результат:

$$S = (0,204 \pm 0,008) \text{ мм}^2$$

2. Измерим длину проволоки метровой линейкой: $l = (173,5 \pm 0,1)$ см.

3. Для того, чтобы воспользоваться формулой (1) для нахождения Δl, измерим расстояние от $h = (215,5 \pm 0,1)$ см, длина рычага $r = (20 \pm 1)$ мм указана на установке.

4. Рассчитаем максимальное напряжение за все измерения, которое не должно превосходить 30% от разрушающего (900 $\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$). Для этого возьмем максимальную массу $m = 2208,4$ г, по формуле $\sigma = \frac{mg}{S}$ рассчитаем маскимальное за весь опыт напряжение σ. Это напряжение составит примерно 12% от разрушающего, поэтому удлинение проволоки можно будет считать пропорциональным натяжению (мы в пределах области пропорциональности). Проверим правильность расчетов экспериментально. Видим, что остаточных деформаций не наблюдается.

5. Снимем зависимость разности числа делений n по шкале от m грузов при увеличении и уменьшении нагрузки. Опыт проведем дважды. Результаты занесем в таблицу 1

$$n_0 = (19,6 \pm 0,1) \text{ см}$$

m, г	P, Н	$n_{1_{up}}$, см	$n_{1_{down}}$, см	$n_{2_{up}}$, см	$n_{2_{down}}$, см	n, см	Δl, мм
245,7	2,4	21,9	22,0	22,1	21,9	2,4	0,110
491,2	4,8	24,2	24,3	24,2	24,2	4,6	0,215
736,5	7,2	26,1	26,2	26,2	26,1	6,6	0,304
982,4	9,6	28,1	28,3	28,1	28,2	8,6	0,398
1228,2	12,0	30,0	29,9	30,0	29,9	10,4	0,480
1473,1	14,4	32,1	32,1	32,0	32,0	12,5	0,578
1718,4	16,9	34,1	34,1	34,2	34,3	14,6	0,676
1963,6	19,3	36,2	36,3	36,3	36,1	16,6	0,770
2208,4	21,7	38,7	38,8	38,9	38,7	19,2	0,890

Таблица 1

6. По полученным данным построим график зависимости $\Delta l(P) = a \cdot P + b$.

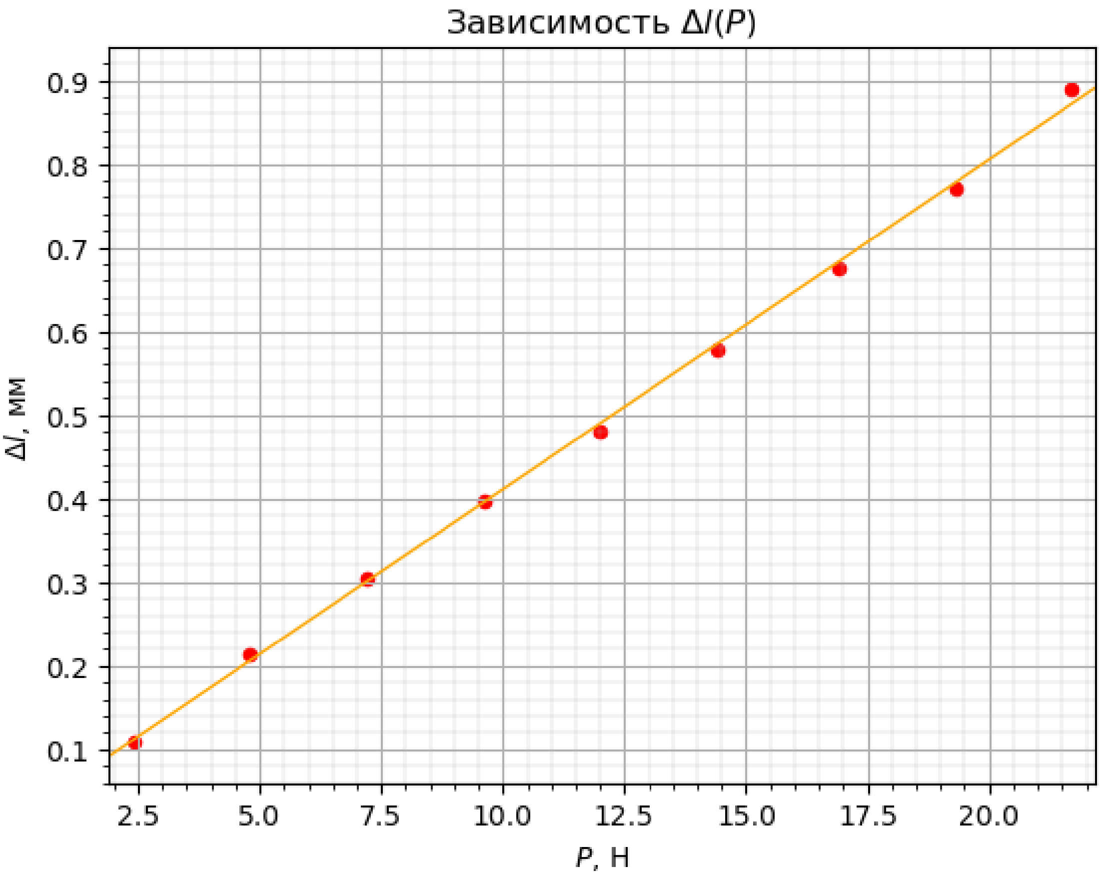
$$a = \frac{<xy> - <x><y>}{<x^2> - <x>^2} = 39,4 \ \frac{\text{мкм}}{\text{Н}}$$

$$b = <y> - a<x> = 17,3 \text{ мкм}$$

Видим, что $b \neq 0$. Поэтому начальный участок графика из обработки исключаем.

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{9}}\sqrt{\frac{<y^2> - <y>^2}{<x^2> - <x>^2} - a^2} = 0,4 \ \frac{\text{мкм}}{\text{Н}}$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{a} = 0,011$$



$$\sigma_n = 0,1 \text{ см}, \ \sigma_m = 0,1 \text{ г}$$

7. Найдем жесткость k:

$$a = \frac{1}{\bar{k}} = \frac{\bar{l}}{\bar{E}\bar{S}}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{a} = 25,4 \ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$\varepsilon_k^{\text{косв}} = \sqrt{(\varepsilon_{\Delta l})^2 + (\varepsilon_P)^2} = \sqrt{(\varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_h)^2 + (\varepsilon_m)^2} = 0,02$$

$$\varepsilon_k^{\text{МНК}} = \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{a} = 0,011$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{(\varepsilon_k^{\text{МНК}})^2 + (\varepsilon_k^{\text{косв}})^2} \approx 0,02$$

$$\sigma_k = \bar{k}\varepsilon_k = 0,5 \ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Окончательный результат:

$$k = (25,4 \pm 0,5) \ \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Найдем модуль Юнга E:

$$\bar{E} = \frac{\bar{k}\bar{l}}{\bar{S}} = 216 \text{ ГПа}$$

$$\varepsilon_E = \sqrt{(\varepsilon_l)^2 + (\varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_k)^2} = 0,04 \to \sigma_E = \bar{E}\varepsilon_E = 9 \text{ ГПа}$$

Окончательный результат:

$$E = (216 \pm 9) \text{ ГПа}$$

8. Данное значение модуля Юнга вполне подходит для некоторых марок стали, поэтому можно считать, что проволока стальная.

II Определение модуля сдвига при помощи крутильных колебаний

1. Подберем такую амплитуду крутильных колебаний, при которой не будет наблюдаться затухания. При амплитуде порядка 5-10 градусов период не зависит от амплитуды, поэтому на таких значениях максимального отклонения можно проводить эксперимент.

2. Убедимся в том, что за $N = 17$ колебаний апмлитуда уменьшается менее, чем в 2 раза.

3. Установим грузы на одинаковом расстоянии l от оси вращения до центра масс грузов. Измерим периоды колебаний T для 11 значений l. Результаты занесем в таблицу 2.

   Расчетная формула для l:

$$l = \frac{l_1 - l_2}{2},$$

   где l_1 — расстояние от дальнего (считая от оси вращения) края грузов до оси, $l_2 = (4,06 \pm 0,01)$ см — высота цилиндров-грузов.

$$\sigma_{l_1} = 0,1 \text{ см}$$

$$T = \frac{t}{N}$$

t, с	T, с	l_1, см	l, см	T^2, $с^2$	l^2, $см^2$
29,22	1,72	11,0	3,47	2,96	12,04
30,85	1,81	12,2	4,07	3,28	16,56
36,17	2,13	15,8	5,87	4,54	34,46
38,89	2,29	17,5	6,72	5,24	45,16
41,72	2,45	19,0	7,47	6,00	55,80
44,64	2,63	20,6	8,27	6,92	68,39
47,74	2,81	22,2	9,07	7,90	82,26
50,86	2,99	23,8	9,87	8,94	97,42
54,04	3,18	25,5	10,72	10,11	114,92
56,29	3,31	26,6	11,27	10,96	127,01
64,48	3,79	30,5	13,22	14,36	174,77

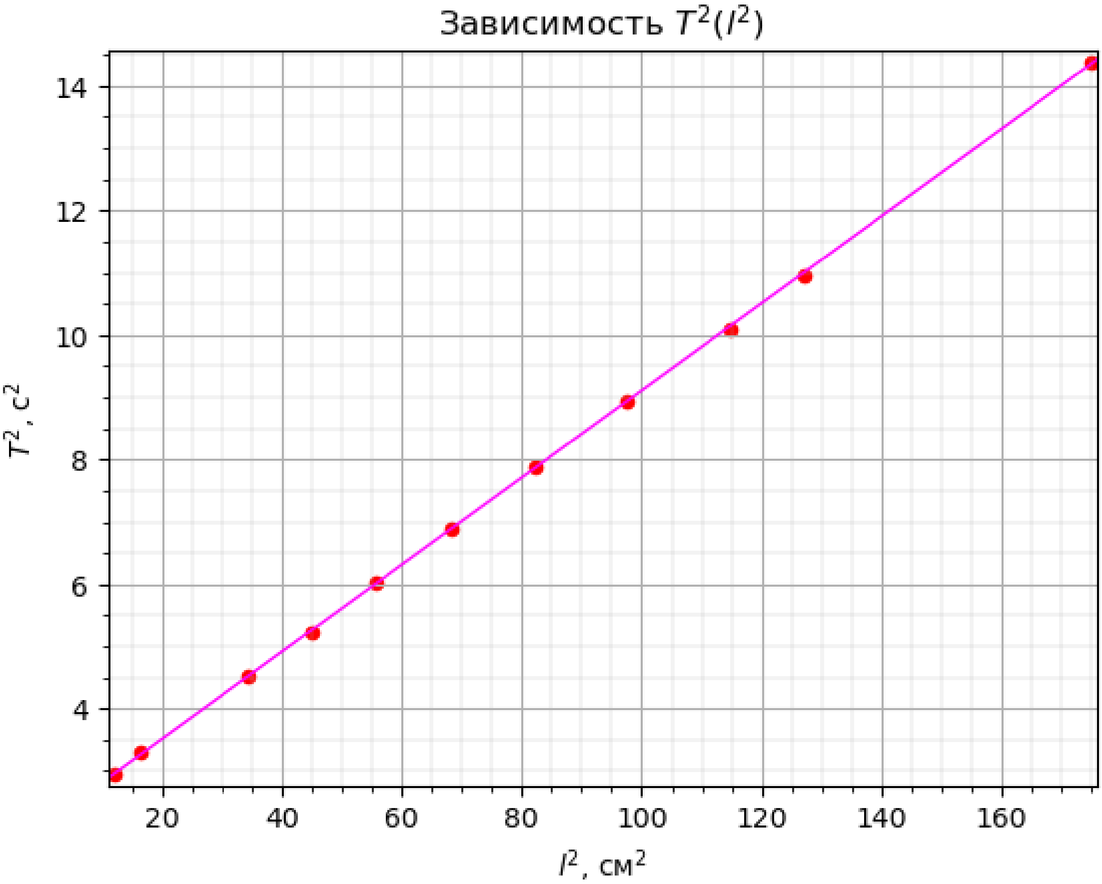
Таблица 2

$$m_1 = (202,5 \pm 0,1) \text{ г}, \quad m_2 = (204,1 \pm 0,1) \text{ г}$$

$$M = (406,6 \pm 0,2)\ \text{г}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + Ml^2}{f}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I_0}{f} + \frac{4\pi^2 M}{f} l^2$$

Видим, что график $T^2(l^2)$ линейный. Изобразим его.



$$k = \frac{<xy> - <x><y>}{<x^2> - <x>^2} = 700,1\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$$

$$b = <y> - k<x> = 2,1\ \text{с}^2$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{\frac{<y^2> - <y>^2}{<x^2> - <x>^2} - k^2} = 1,7\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$$

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{k} = 0,002$$

$$\sigma_t = \sqrt{(\sigma_t^{\text{приб}})^2 + (\sigma_t^{\text{случ}})^2 + (\sigma_t^{\text{реак}})^2} \approx \sigma_t^{\text{реак}} = 0,3\ \text{с}$$

$$\bar{f} = \frac{4\pi^2 \bar{M}}{k} = 22,9\ \frac{\text{г} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_f^{\text{косв}} = \sqrt{(2\varepsilon_T)^2 + (2\varepsilon_l)^2 + (\varepsilon_M)^2} = \sqrt{(2\varepsilon_t)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{(\sigma_{l_1})^2 + (\sigma_{l_2})^2}}{\bar{l}}\right)^2 + (\varepsilon_M)^2} = 0,03$$

$$\varepsilon_f^{\text{МНК}} = \varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{k} = 0,002$$

$$\varepsilon_f = \sqrt{(\varepsilon_f^{\text{МНК}})^2 + (\varepsilon_f^{\text{косв}})^2} \approx 0,03$$

$$\sigma_f = \bar{f}\varepsilon_f = 0,7\ \frac{\text{г}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Окончательный результат:

$$f = (22,9 \pm 0,7)\ \frac{\text{г}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

4. Найдем диаметр проволоки с помощью микрометра. Результаты занесем в таблицу 3.

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	1,56	1,55	1,57	1,55	1,56	1,56	1,55	1,57	1,56	1,56

Таблица 3

$$\sigma_d^{\text{приб}} = 0,01\ \text{мм}$$

$$\sigma_d^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{9\cdot 10}\sum_i(\bar{d} - d_i)^2} = 0,002\ \text{мм}$$

$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_d^{\text{приб}})^2 + (\sigma_d^{\text{случ}})^2} = 0,01\ \text{мм}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_i d_i = 1,56\ \text{мм}$$

Окончательный результат:

$$d = (1,56 \pm 0,01)\ \text{мм}$$

Найдем длину проволоки L:

$$L = (1730 \pm 2)\ \text{мм}$$

Пользуясь формулой (8), найдем модуль кручения G:

$$\bar{G} = \frac{2\bar{L}\bar{f}}{\pi\bar{R}^4} = \frac{32\bar{L}\bar{f}}{\pi\bar{d}^4} = 68\ \text{ГПа}$$

$$\varepsilon_G = \sqrt{(4\varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_f)^2 + (\varepsilon_L)^2} = 0,04 \rightarrow \sigma_G = \bar{G}\varepsilon_G = 3\ \text{ГПа}$$

Окончательный результат:

$$G = (68 \pm 3)\ \text{ГПа}$$

Значения очень похожи на значения модуля сдвига для стали 08Х18Н7Г10АМ3-ПД (68 ГПа), поэтому материалом проволоки будем считать ее.

Вывод

Мы экспериментально получили зависимость между напряжением и деформацией для одноосного растяжения; по результатам измерений вычислили модуль Юнга. Также измерили углы закручивания в зависимости от приложенного момента сил и расчитали модули кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника.