# Оптимальное разделение данных в распределенной оптимизации для машинного обучения

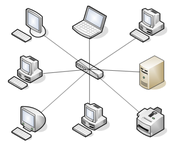
**Глеб Молодцов** **Даниил Медяков**

**Московский физико-технический институт**

## Аннотация

Рассматривается распределение данных между различными устройствами с учетом их мощности. Сеть представляет собой звездную топологию.

Целью данной работы является получение оптимального соотношения для распределения данных между сервером и локальными устройствами.



## Вступление

Сеть состоит из агентов, образующих звёздную топологию. Первый является главным узлом, а остальные связаны только с ним и нужны для дополнительной вычислительной мощности. Вычисления производятся с помощью сторонних узлов, а копии всех переменных оптимизации и связь между ячейками осуществляется через центральный узел. Задача сводится к минимизации следующей функции:

$$r(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

Полученную задачу можно решить, применяя алгоритм градиентного спуска для L-гладкой и μ-сильно выпуклой функции r. Для некоторых классов задач, где k = L/μ не является большим числом, этот метод приемлем. Однако при очень больших k алгоритм неэффективен. Это происходит, например, при высоких коммуникационных затратах.
Представим функцию r(x) в виде:

$$r(x) = f_1(x) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f_i(x) - f_1(x)]$$

Для этой задачи была предложена модификация градиентного скользящего алгоритма из [1]. Все существующие алгоритмы градиентного скольжения были неприменимы к поставленной задаче, поскольку требовали выпуклости обеих функций и не обеспечивали оптимальных нижних оценок сложности как для локального вычисления градиента, так и для коммуникационных затрат. Однако данная модификация алгоритма восполняет пробелы. Приведём её ниже:

**Algorithm 1** Accelerated Extragradient

**Input:** $x^0 = x_f^0 \in \mathbb{R}^d$
**Parameters:** $\tau \in (0,1), \eta, \theta, \alpha > 0, K \in \{1,2,\dots\}$
**for** $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ **do**
  $x_g^k = \tau x^k + (1-\tau)x_f^k$
  $x_f^{k+1} \approx \arg\min_{x \in \mathbb{R}^d}\left[A_g^k(x) := p(x_g^k) + \langle \nabla p(x_g^k), x - x_g^k\rangle + \frac{1}{2\theta}\|x - x_g^k\|^2 + q(x)\right]$
  $x^{k+1} = x^k + \eta\alpha(x_f^{k+1} - x^k) - \eta\nabla r(x_f^{k+1})$
**end for**
**Output:** $x^K$

## Постановка проблемы

Работаем с алгоритмом 1. Найдём количество операций алгоритма за одну итерацию. В строке 5 происходит одна коммуникация, одно локальное вычисление, одно вычисление в центральном узле и дополнительное вычисление в центральном узле. В строке 6 – одна коммуникация, одно локальное вычисление и одно вычисление в центральном узле. Запишем общее время работы алгоритма в виде:

$$T_{sum} = 2 \cdot \max(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \cdot K + 2 \cdot K \cdot \tau_{comm} + \tau_1 \cdot k_{some}$$

Наша задача – минимизировать данную функцию. Учитывая зависимость времени вычислений на локальном устройстве от его мощности и объема обрабатываемых им данных, а также, принимая во внимание оценки, приведенные в [1], получаем следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{\sum_{i=1}^{n} b_i = N; \delta = \frac{L_p}{\sqrt{b_i}}} [(\max(\tau_1^{loc} \cdot b_1, \tau_2^{loc} \cdot b_2, ..., \tau_n^{loc} \cdot b_n) + \tau_{comm}) * \\ * \mathcal{O}(max\{1, \sqrt{\frac{L_p}{\mu}}\log(\frac{1}{\varepsilon})\} + \mathcal{O}(max\{1, \sqrt{\frac{L_q}{L_p}}, \sqrt{\frac{L_p}{\mu}}, \sqrt{\frac{L_q}{\mu}}\}\log(\frac{1}{\varepsilon}))]$$

В работе рассматриваются два случая: $(1): \delta = \frac{L}{b_1}; \quad (2): \delta = \frac{L}{\sqrt{b_1}}$.

Для случая (1) получается следующая итоговая функция:

$$\min_{\sum_{i=1}^{n} b_i = N} [(\max\{\tau_1^{loc} \cdot b_1, \tau_2^{loc} \cdot b_2\} + \tau_{comm}) \cdot \mathcal{O}(\sqrt{\frac{L}{\mu b_1}}\log(\frac{1}{\varepsilon})) + \\ + \tau_1^{loc} \cdot b_1 \cdot \mathcal{O}(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log(\frac{1}{\varepsilon}))]$$

Для (2) аналогично получаем:

$$\min_{\sum_{i=1}^{n} b_i = N} [(\max\{\tau_1^{loc} \cdot b_1, \tau_2^{loc} \cdot b_2\} + \tau_{comm}) \cdot \mathcal{O}(\sqrt{\frac{L}{\mu\sqrt{b_1}}}\log(\frac{1}{\varepsilon})) + \\ + \tau_1^{loc} \cdot b_1 \cdot \mathcal{O}(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log(\frac{1}{\varepsilon}))]$$

## Методология решения

- В случае (1) получение аналитической формулы сводится к поиску корней уравнения третьей степени следующего вида: $y^3 + p \cdot y + q = 0$
  Решение такого уравнения ищется с помощью формулы Кардано, причём в нашем случае получается лишь единственный вещественный корень, который и будет искомым.
- В случае (2) не удаётся найти аналитическое решение в общем случае, то есть при любом времени коммуникаций, так как в ходе поиска возникает уравнение высоких степеней. Поэтому для данной задачи решение искалось в двух предельных ситуациях:

  2.1. $\forall i \hookrightarrow \tau_{comm} \ll \tau_i^{loc}, \forall i \neq j \hookrightarrow \tau_i^{loc} \neq \tau_j^{loc}$

  2.2. $\forall i \hookrightarrow \tau_{comm} \gg \tau_i^{loc}, \forall i \neq j \hookrightarrow \tau_i^{loc} = \tau_j^{loc}$

## Результаты

Рассмотрим отдельно случаи (1) и (2). Результатом в обоих будет количество данных на сервере, причём данные между остальными устройствами распределяются равномерно относительно их мощностей.
Также будем рассматривать две ситуации:

$$(a): \ 0 < b_1 \leq b_1^0 \qquad N(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^{loc}})^{-1}$$
$$(b): \ b_1^0 < b_1 \leq N \quad \text{, где} \quad b_1^0 = \frac{N(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^{loc}})^{-1}}{\tau_1^{loc} + (\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^{loc}})^{-1}}$$

С учётом этого, получим решения для (1), (2).

- Точное решение в случае (1):

$$b_1 = \frac{a^2}{3c^2} + \frac{\sqrt[3]{2a^6 + 3\sqrt{3}\sqrt{4a^3b^3c^6 + 27b^4c^8} + 18a^3bc^2 + 27b^2c^4}}{3\sqrt[3]{2}c^2} - \\ \frac{\sqrt[3]{2}\left(-a^4 - 6abc^2\right)}{3c^2\sqrt[3]{2a^6 + 3\sqrt{3}\sqrt{4a^3b^3c^6 + 27b^4c^8} + 18a^3bc^2 + 27b^2c^4}}.$$

$$\begin{cases} (a): \ a = \frac{1}{2}c_1\sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^{loc}})^{-1}; \ c = \tau_1^{loc} \cdot c_2\sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}; \\ \quad b = -\frac{1}{2}c_1[N(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i^{loc}})^{-1} + \tau_{comm}] \cdot \sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}; \\ (b): \ a = \frac{1}{2}c_1\sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}\tau_1^{loc}; \ c = \tau_1^{loc} \cdot c_2\sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}; \\ \quad b = -\frac{1}{2}c_1\tau_{comm} \cdot \sqrt{\frac{L}{\mu}log(\frac{1}{\varepsilon})}; \end{cases}$$

- Случай (2)

2.1. Малые коммуникации

$$b_1 = b_1^0$$

2.2. Большие коммуникации

$$b_1 = \left(\frac{\alpha\tau_{comm}}{4\beta\tau}\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$\alpha = c_1 \cdot \sqrt{\frac{L}{\mu}} \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon}), \beta = c_2 \cdot \sqrt{\frac{L}{\mu}} \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon})$$

Заметим, что задача свелась к решению уравнения относительно $b_1$. Мы не всегда можем найти аналитическое решение, например, в случае (2). Однако всегда можно решить задачу численно, поскольку функция на рассматриваемых промежутках является монотонной и непрерывной.

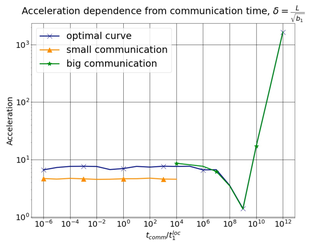
## Эксперимент

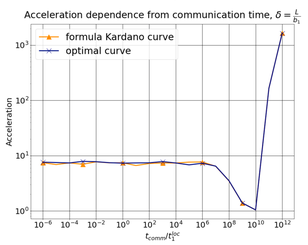
Для экспериментов рассмотрим задачу "Ridge Regression":

$$\min_{\omega}[\frac{1}{2N}X\omega - y^2 + \frac{\lambda}{2}\omega^2], q(\omega) = \frac{1}{2N}X\omega - y^2, p(\omega) = \frac{\lambda}{2}\omega^2$$

Мы просимулировали работу Алгоритма 1 на датасете размером 100 000 строк. Для поиска argmin мы использовали итеративный метод OGM-G из [2]. После экспериментального расчёта количества итераций для достижения определённой точности было проведено сравнение времени работы на равномерном распределении данных с временем на полученном нами.

Получили следующие результаты:




Формула для случая больших коммуникаций и формула Кардано практически совпали с поиском оптимального решения. Для случая малых коммуникаций большая разница объясняется тем, что формула была получена в грубом приближении. Тогда, если учесть порядок констант α, β, то можно получить результат, приближённый к оптимальному:

$$b_1 \cong \frac{4 \cdot 10^3 \tau_1^{loc}}{N\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\tau_i^{loc}\right)^{-1}\right)^{-1}}$$

## Источники

[1] Dmitry Kovalev, Aleksandr Beznosikov, Ekaterina Borodich, Alexander Gasnikov, and Gesualdo Scutari. Optimal gradient sliding and its application to optimal distributed optimization under similarity. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 35:33494–33507, 2022.

[2] Donghwan Kim and Jeffrey A Fessler. Optimizing the efficiency of first-order methods for decreasing the gradient of smooth convex functions. *Journal of optimization theory and applications*, 188(1):192–219, 2021.