ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 72

Решение:

Запишем матрицу штрафов:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases}$$

Выпишем риски:

$$\begin{aligned} R_1(\pi) = 0 \cdot \mathbb{P}_1\left[H_1\right] + 1 \cdot \mathbb{P}_1\left[H_2\right] = p_{21} = \alpha \\ R_2(\pi) = 1 \cdot \mathbb{P}_2\left[H_1\right] - 0 \cdot \mathbb{P}_2\left[H_2\right] = p_{12} = \beta \end{aligned}$$

Таким оборазом, $\alpha = \beta$.

Функция отношения правдоподобия:

$$l\left(x\right) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{I\{x \in [1;3]^n\}}{I\{x \in [0;2]^n\}} = \begin{cases} +\infty, x \in [1;3]^n \ \ \& \ \ \exists i : x_i \in (2;3]^n \\ 1, x \in [1;2]^n \\ 0, x \in [0;2]^n \ \ \& \ \ \exists i : x_i \in [0;1)^n \\ \text{не определена , иначе} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

Подставим $c = 1$:

$$\alpha = \mathbb{P}_1[l(x) > c] + p \cdot \mathbb{P}_1[l(x) = c] = p \cdot \mathbb{P}_1[x \in [1,2]^n] = \frac{p}{2^n}$$

$$\beta = \mathbb{P}_2[l(x) < c] + (1-p) \cdot \mathbb{P}_2[l(x) = c] = (1-p) \cdot \mathbb{P}_2[x \in [1,2]^n] = \frac{1-p}{2^n}$$

$$\left.\begin{array}{r} R_1(\pi) = \frac{p}{2^n} \\ R_2(\pi) = \frac{1-p}{2^n} \end{array}\right\} \Rightarrow p = 0.5$$

Получим следующий критерий:

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > 1 \\ 0.5, l(x) = 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}$$