ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 3

Решение:

Найдём совместную функцию распределения $\mathbb{P}\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\}$, для этого разберём отдельно случаи $x \geqslant y$ и $x < y$, для которого $\mathbb{P}\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\} = \mathbb{P}\{X_{(n)} < y\} - \mathbb{P}\{X_{(1)} \geqslant x, X_{(n)} < y\}$. Сначала рассмотрим второй случай. Найдем данные вероятности, используя функцию распределения равномерного распределения:

$$\mathbb{P}\{X_{(n)} < y\} = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n$$

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} \geqslant x, X_{(n)} < y\} = \Big(F(y) - F(x)\Big)^n = \left(\frac{y-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a}\right)^n = \left(\frac{y-x}{b-a}\right)^n,$$

где $\mathcal{F}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ - соответствующая функция распределения равномерного на заданном отрезке распределения. Тогда получим:

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\} = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n - \left(\frac{y-x}{b-a}\right)^n = \frac{1}{(b-a)^n}\Big((y-a)^n - (y-x)^n\Big)$$

Для подсчета совместной плотности распределения, продифференцируем функцию распределения по x и y.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{n}{(b-a)^n}\Big((y-a)^{n-1} - (y-x)^{n-1}\Big)\right)}{\partial x} = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}$$

Аналогично можем расписать данную смешанную производную для первого случая $(x \geqslant y)$:

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} < x, X_{(n)} < y\} = \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$$

Таким образом, получим общее распределение:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}, \text{ if } (x \leqslant y) \wedge (x, y \in [a,b]) \\ 0, \text{ else} \end{cases}$$

Для поиска математических ожиданий и дисперсии будем пользоваться тем, что порядковые статистики из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ имеют известное распределение — бета-распределение: для $X_k \in U(0,1)$ порядковые статистики $X_{(k)} \in \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$. Для начала перейдём к случайным величинам на отрезке $[0,1]$, которые линейно связаны с исходными величинами на $[a,b]$:

$$\frac{X_{(1)} - a}{b-a} \in \mathrm{Beta}(1,n) \qquad\qquad \frac{X_{(n)} - a}{b-a} \in \mathrm{Beta}(n,1)$$

Для бета-распределения мы знаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{(1)} - a}{b-a}\right] = \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_{(1)}] = \frac{b-a}{n+1} + a$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{(n)} - a}{b-a}\right] = \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_{(n)}] = \frac{n(b-a)}{n+1} + a$$
$$\mathbb{D}\left[\frac{X_{(1)} - a}{b-a}\right] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}[X_{(1)}] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$\mathbb{D}\left[\frac{X_{(n)} - a}{b-a}\right] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}[X_{(n)}] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

Осталось найти коэффициент кореляции:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}X_{(n)}\right] = \int_a^b \int_a^b xy\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}dxdy = \Big/ f \neq 0 \Leftrightarrow y \geqslant x \Big/ =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{n(b-x)^{n-1}xb}{(b-a)^n} - \int_x^b \frac{n(y-x)^{n-1}x}{(b-a)^n}dy\right]dx =$$
$$= \int_a^b \frac{n(b-x)^{n-1}xb}{(b-a)^n}dx - \int_a^b \frac{(b-x)^n x}{(b-a)^n}dx =$$
$$= ab + \frac{b(b-a)}{n+1} - \frac{a(b-a)}{n+1} - \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)} = ab + \frac{(b-a)^2}{n+2}$$
$$\operatorname{cov}\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right) = ab + \frac{(b-a)^2}{n+2} - \left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\left(\frac{n(b-a)}{n+1} + a\right) =$$
$$= ab + \frac{(b-a)^2}{n+2} - \left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\left(b - \frac{b-a}{n+1}\right) = \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$$
$$r\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right) = \frac{\operatorname{cov}\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)}{\sqrt{\mathbb{D}[X_{(1)}]}\sqrt{\mathbb{D}[X_{(2)}]}} = \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2(n+2)}{(b-a)^2 n} = \frac{1}{n}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{(1)}-a}{b-a}\right] = \frac{b-a}{n+1} + a$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{X_{(n)}-a}{b-a}\right] = \frac{a-b}{n+1} + b$$
$$\mathbb{D}\left[\frac{X_{(1)}-a}{b-a}\right] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$\mathbb{D}\left[\frac{X_{(n)}-a}{b-a}\right] = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$r\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right) = \frac{1}{n}$$