ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 66(a)

Решение:

Запишем матрицу штрафов:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}\left[H_1\right] = \mathbb{P}\left[H_2\right] = \frac{1}{2}$$

Запишем риски:

$$R_1(\delta) = 0 + c_{12} \cdot \mathbb{P}_1\left[H_2\right] = c_{12} \cdot \alpha, \quad R_2(\delta) = c_{12} \cdot \beta$$

Запишем Байесовский критерий для двух гипотез:

$$l(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \geqslant \frac{c_{21} - c_{11}}{c_{12} - c_{22}} \cdot \frac{q_1}{q_2} = 1$$

Тогда получим Байесовское решающее правило:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, l(x) \geqslant 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}$$

Пусть решение принимается только на основании измерения первой компоненты. В таком случае СВ будет иметь одно из двух следующих нормальных распределений (одномерных):

$$\tilde{H}_1 : N(1,1) \quad \tilde{H}_2 : N(-1,1)$$

Запишем фукнцию $l(x)$ из байесовского правила:

$$l(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-(x+1)^2 + (x-1)^2\right)\right) = \exp(-2x)$$

Найдем ошибки первого и второго рода:

$$\alpha = \mathbb{P}_1[l(x) \geqslant 1] = \mathbb{P}_1[\exp(-2x) \geqslant 1] = \mathbb{P}_1[x \leqslant 0] = F_{N(1,1)}(0) = 0,1587$$
$$\beta = \mathbb{P}_2[l(x) < 1] = \mathbb{P}_2[x > 0] = 1 - F_{N(-1,1)}(0) = 0,1587$$

Минимальный байесовский риск:

$$r(\delta) = q_1 R_1(\delta) + q_2 R_2(\delta) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 0,1587 \cdot c_{12}$$