ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 52

Решение:

Запишем матрицу штрафов:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases}$$

Выпишем риски:

$$\begin{aligned} R_1(\pi) &= -1 \cdot \mathbb{P}_1\left[H_1\right] + 2 \cdot \mathbb{P}_1\left[H_2\right] = -1 \cdot (1 - p_{21}) + 2 \cdot p_{21} = 3\alpha - 1 \\ R_2(\pi) &= 2 \cdot \mathbb{P}_2\left[H_1\right] - 1 \cdot \mathbb{P}_2\left[H_2\right] = 2 \cdot p_{12} - 1 \cdot (1 - p_{12}) = 3\beta - 1 \end{aligned}$$

Таким оборазом, $\alpha = \beta$.

$$\left.\begin{array}{c} R_1(\pi) = -1 \cdot (1 - p_{21}) + 2 \cdot p_{21} = 3p_{21} - 1 \\ R_2(\pi) = p_{12} - 1 \cdot (1 - p_{12}) = 3p_{12} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3p_{21} - 3p_{12} = 2$$

$$3\left(\mathbb{P}_1\left\{l\left(x\right) > c\right\} + p\mathbb{P}_1\left\{l\left(x\right) = c\right\}\right) + 3\left(\mathbb{P}_2\left\{l\left(x\right) > c\right\} + p\mathbb{P}_2\left\{l\left(x\right) = c\right\}\right) = 2$$

Функция отношения правдоподобия:

$$l\left(x\right) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{4 \cdot \exp(-2(x_1 + x_2))}{\frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2}{2}\right)}, x_1, x_2 \geqslant 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \implies$$

Получим, что

$$l\left(x\right) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \begin{cases} 8\pi \cdot \exp\left(\frac{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2}{2}\right), x_1, x_2 \geqslant 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Подставим одно из граничных значений для получения следующего критерия:

$$\pi = \pi_{c,1} = \begin{cases} 1, l\left(x_1, x_2\right) \geqslant c \\ 0, l\left(x_1, x_2\right) < c \end{cases} \quad \Rightarrow c = \frac{c_{21} - c_{11}}{c_{12} - c_{22}} \cdot \frac{q_1}{q_2} = \frac{2+1}{2+1} \cdot \frac{0,6}{0,4} = \frac{3}{2}$$

Тогда

$$\pi = \pi_{c,1} = \begin{cases} 1, l\left(x_1, x_2\right) \geqslant 1.5 \\ 0, l\left(x_1, x_2\right) < 1.5 \end{cases}$$

Найдем ошибки первого и второго родов.

$$\alpha = \mathbb{P}_1 \left[l(x) \geqslant \frac{3}{2} \right] =$$
$$= \mathbb{P}_1 \left[x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 \geqslant 2 \cdot \ln \left(\frac{3}{16\pi} \right) \right] =$$
$$= \mathbb{P}_1 \left[x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 \geqslant -5.63 \right] =$$
$$= \mathbb{P}_1 \left[x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \right] = \left(1 - F^2_{N(-1,1)}(0) \right)^2 = (1 - 0.841)^2 = 0.025$$

$$\beta = \mathbb{P}_2 \left[l\left(x_1, x_2\right) < \frac{3}{2} \right] =$$
$$= \mathbb{P}_2 \left[\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 < -5.63 \right] + \mathbb{P}_2 \left[x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0 \right] =$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Ответ:

$$\alpha = 0.025, \quad \beta = 0$$