ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 53

Решение:

Сначала запишем функцию правдоподобия для обеих гипотез:

$$L_1(x) = f_{\mathcal{N}(-1,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)$$

$$L_2(x) = f_{\mathcal{N}(2,4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right)$$

Теперь составим функцию отношения правдоподобия:

$l(x) = \frac{L_2(x)}{L_1(x)} = \frac{\exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right)}{2\cdot\exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x+1)^2}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{1}{8} \cdot \left(3x^2 + 12x\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{3}{8} \cdot \left((x+2)^2 - 4\right)\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{3}{8}(x+2)^2\right) \cdot e^{-3/2}$

Лемма Неймана-Пирсона утверждает, что наиболее мощный критерий с уровнем значимости $\alpha \le \mathbb{P}_1(l(x) > c) \equiv 1$ можно искать среди критериев вида

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases}$$

Конкретные значения $c > 0$ и $p \in [0,1]$ находятся из условия на уровень значимости

$$\mathbb{P}_1(l(x) > c) + p \cdot \mathbb{P}_1(l(x) = c) = \alpha$$

Поскольку распределение $N(-1,1)$ абсолютно непрерывно, то $\mathbb{P}_1(l(x) = c) = 0$, что касается p, можно его выбрать любым, например, $p = 0$. Условие на c определим из уравнения: $\mathbb{P}_1[l(x) > c] = \alpha$

$$l(x) > c \Leftrightarrow \frac{\exp\left(\frac{3}{8}(x+2)^2\right)}{2} e^{-3/2} > c \Leftrightarrow (x+2)^2 > \frac{8}{3}\ln\left(\frac{2c}{e^{-3/2}}\right) = R^2 > 0$$

$$x \in N(-1,1) \Longrightarrow$$

$\mathbb{P}_1(l(x) > c) = \mathbb{P}_1\left((x+2)^2 > R^2\right) = \mathbb{P}_1(x > R-2) + \mathbb{P}_1(x < -2-R) = \alpha$

Подставим выражения функций рапсределения для вычисления значения R

$$\left(1 - \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(R-2)\right) + \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(-2-R) = \alpha$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(R-2) - \mathcal{F}_{\mathcal{N}(-1,1)}(-2-R) = 1 - \alpha$$

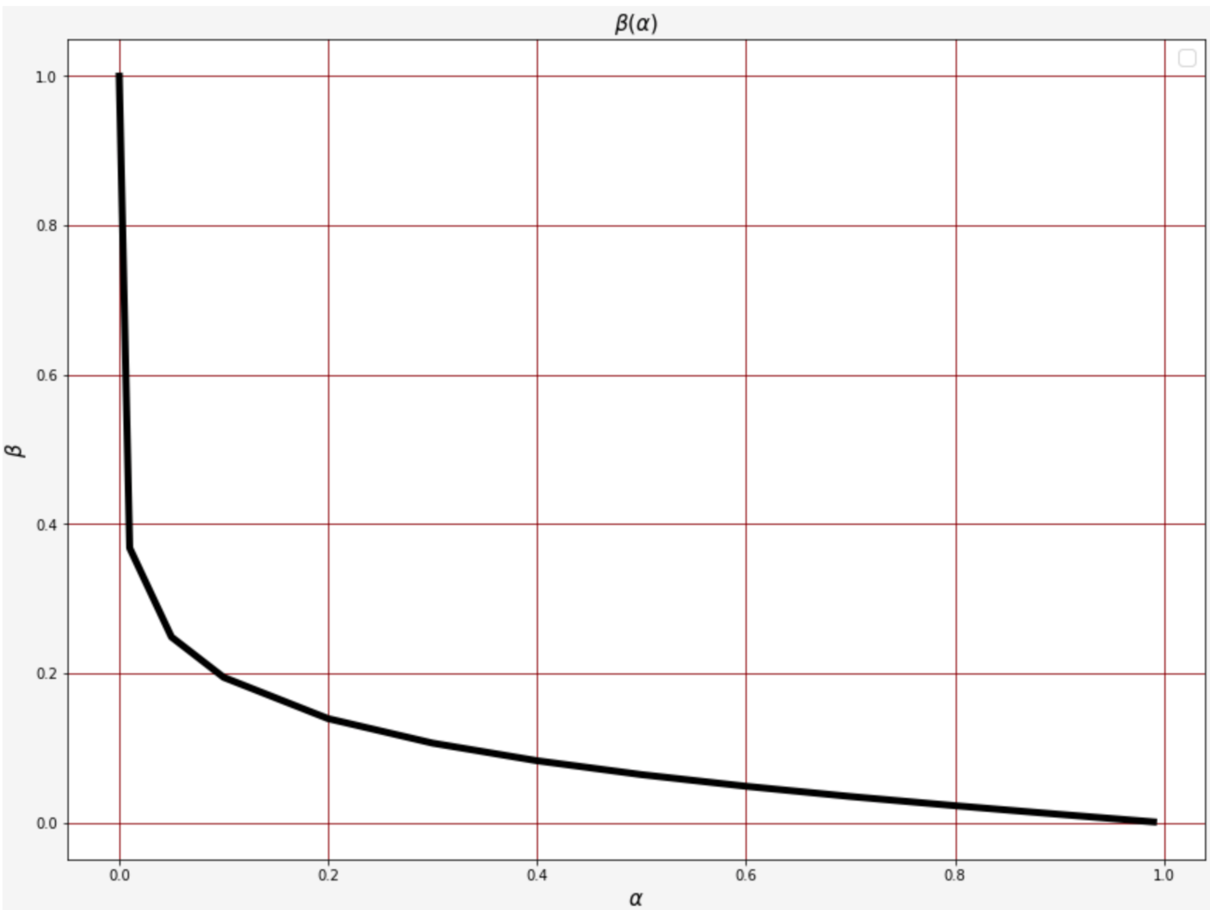
В условии задачи также просят построить зависимость ошибки второго рода от α, подсчитаем чему будет равна β :

$$\mathbb{E}_2[\pi] = 1 \cdot \mathbb{P}_2\left((x+2)^2 > R^2\right) = \mathbb{P}_2(x > R-2) + \mathbb{P}_2(x < -2-R)$$
$$1 - \mathbb{E}_2[\pi] = 1 - \mathbb{P}_2(x > R-2) - \mathbb{P}_2(x < -2-R) = \beta$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_{N(2,4)}(R(\alpha) - 2) - \mathcal{F}_{N(2,4)}(-2 - R(\alpha)) = \beta$$

Ответ: При $\alpha = 0.1$ получаем $R = 2.2845$

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x^2 > R^2 \\ 0, & \text{при } x^2 \leqslant R^2 \end{cases}$$

Построим график зависимости $\beta(\alpha)$


$\beta(\alpha)$
β
α
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0