ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 22

Решение:

Первая статистика:

$$A_1^* = \overline{X} - \frac{1}{2}$$

Необходимо исследовать несмещенность этой статистики. Математическое ожидание статистики равно:

$$\mathbb{E}_a\left[\overline{X} - \frac{1}{2}\right] = \mathbb{E}_a\left[\overline{X}\right] - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}n\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = a$$

Следовательно, статистика является несмещенной. Теперь проверим состоятельность:

$$T_n(X) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}_a} a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_a\left[|T_n(X) - a| > \varepsilon\right] = 0$$

Для оценки слагаемого под пределом пользуемся неравенством Чебышева:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \mathbb{P}\left[|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

Для $\mathcal{U}[a, a+1]$, получаем:

$$\mathbb{D}_a[A_1^*] = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}_a\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{D}_a[X_i] = \frac{n}{n^2}\frac{1}{12} = \frac{1}{12n} < +\infty$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \mathbb{P}_a[|A_1^* - a| > \varepsilon] \leqslant \frac{\mathbb{D}[A_1^*]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{12\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Получили сходимость по вероятности к нулю, значит A_1^* состоятельна.

Вторая статистика:

$$A_2^* = X_n - \frac{n}{n+1}$$

Перейдем к проверке несмещенности:

$$\mathbb{E}_a[A_2^*] = \mathbb{E}_a[X_n] - \frac{n}{n+1} = \mathbb{E}_{Beta(n,1)}[X_n - a] + a - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} + a - \frac{n}{n+1} = a$$

Таким образом, статистика также является несмещенной. Проверим на состоятельность:

$$\mathbb{D}_a[A_2^*] = \mathbb{D}_a[X_n - a] = \mathbb{D}_{Beta(n,1)}[\xi] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теперь чтобы выяснить, какая статистика предпочтительнее, сравним их дисперсии.

$$\frac{1}{12n} \ ? \ \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$n^3 - 8n^2 + 5n + 2 \ ? \ 0.$$

$$(n-1)(n - \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{2}) \ ? \ 0.$$

$$(n-1)(n + 0.27492)(n - 7.2749) \ ? \ 0.$$

Получили, что при $1 \leqslant n < 8$ лучше использовать первую статистику, иначе вторую.