ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 1

Решение:

Запишем случайной величины для эмпирической функции распределения:

$$\frac{nF_n(x^*) - nF(x^*)}{\sqrt{nF(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_{\mathcal{N}(0,1)} \in \mathcal{N}(0,1)$$

Сведём вероятность, данную в задаче, к левой части Центральной предельной теоремы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{|F_n(x^*) - F(x^*)| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} = \\
&\quad = \mathbb{P}\left\{\frac{n|F_n(x^*) - F(x^*)|}{\sqrt{nF(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}} \leqslant \frac{t}{\sqrt{F(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}}\right\} = \\
&\quad = \mathbb{P}\Bigg\{-\frac{t}{\sqrt{F(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}} \leqslant \frac{nF_n(x^*) - nF(x^*)}{\sqrt{nF(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{t}{\sqrt{F(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Вспомним плотность функции распределения случайной величины из нормального распределения $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

Тогда найдем итоговый ответ, взяв определенный интеграл с полученными из ЦПТ верхним и нижним пределами:

$$\mathbb{P}\left\{|F_n(x^*) - F(x^*)| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= F_\xi\left(\frac{t}{\sqrt{F(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}}\right) - F_\xi\left(-\frac{t}{\sqrt{F(x^*)\left(1 - F\left(x^*\right)\right)}}\right), \xi \in \mathcal{N}(0, 1)$$