ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 66(в)

Решение:

Запишем матрицу штрафов:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}\left[H_1\right] = \mathbb{P}\left[H_2\right] = \frac{1}{2}$$

Для многомерного распределения нужно найти матрицу, обратную к ковариационной матрице:

$$R^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Запишем риски:

$$R_1(\delta) = 0 + c_{12} \cdot \mathbb{P}_1\left[H_2\right] = c_{12} \cdot \alpha, \quad R_2(\delta) = c_{12} \cdot \beta$$

Запишем Байесовский критерий для двух гипотез:

$$l(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \geqslant \frac{c_{21} - c_{11}}{c_{12} - c_{22}} \cdot \frac{q_1}{q_2} = 1$$

Тогда получим Байесовское решающее правило:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, l(x) \geqslant 1 \\ 0, l(x) < 1 \end{cases}$$

Найдём функцию отношения правдоподобия:

$$l(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-m_2)^T R^{-1}(x-m_2)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-m_1)^T R^{-1}(x-m_1)\right)} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{3}\cdot\left(2x_1^2 - 2x_1 - x_1x_2 - 2x_1 + 2 + x_2 - x_1x_2 + x_2 + 2x_2^2 - \right.\right.$$

$$\left.-2x_1^2 - 2x_1 + x_1x_2 - 2x_1 - 2 + x_2 + x_1x_2 + x_2 - 2x_2^2 = \right.$$

$$= \exp\left(\frac{1}{3}\cdot(-8x_1 + 4x_2)\right) = \exp\left(\left(-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2\right)\right)$$

Найдем ошибки первого и второго рода:

$$\alpha = \mathbb{P}_1\left[l\left(x\right) \geqslant 1\right] = \mathbb{P}_1\left[\exp\left(-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2\right) \geqslant 1\right] = \mathbb{P}_1\left[-\frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \geqslant 0\right] =$$

$$= \mathbb{P}_1\left[2x_1 - x_2 \leqslant 0\right]$$

$$\beta = \mathbb{P}_2[l(x) < 1] = \mathbb{P}_2[x_2 - 2x_1 < 0]$$

Плотность вероятности нормального распределения может быть записана следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + 1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь интеграл, который нам нужно вычислить, записывается следующим образом:

$$\int\int_D f(x_1, x_2)d(x_1, x_2),$$

где D - область, где выполняется условие $Z = 2x_1 - x_2 \leq 0$.

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{2x_1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}} \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\Big(\frac{(x_1-1)^2}{0.75} - 0.5(x_1-1)(x_2-0.5) + \\ + \frac{(x_2-0.5)^2}{0.75} \Big) \Bigg) dx_2 dx_1 = 0.180397$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{2x_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{0.75}} \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\Big(\frac{(x_1+1)^2}{0.75} - 0.5(x_1+1)(x_2-0.5) + \\ + \frac{(x_2-0.5)^2}{0.75} \Big) \Bigg) dx_2 dx_1 = 0.0744975$$

Минимальный байесовский риск:

$$r(\delta) = 0.180397 + 0.0744975 \approx 0,1274 \cdot c_{12}$$

Ответ: $r(\delta) = 0,1274 \cdot c_{12}$