ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 10

Решение:

Необходимые условия для применения критерия согласия χ^2 для сложной гипотезы выполнены. Действительно, $n = 200 \geq 50, \nu_i \geq 5 \quad \forall i \in \{0, 1, 2\}, \nu = (10, 181, 9)^T, N = 3$. Выберем $\alpha = 0.05$.
Для проверки пройдёмся по шагам алгоритма:

- $p_0^0(\theta) = c_2^0 \theta^0 (1-\theta)^2 = (1-\theta)^2$
  $p_1^0(\theta) = c_2^1 \theta^0 (1-\theta) = 2\theta(1-\theta)$
  $p_2^0(\theta) = c_2^2 \theta^0 (1-\theta)^0 = \theta^2$

- $\hat{\theta} = \arg\max\limits_{\theta} \prod\limits_{j=1}^{N} \left(p_j^0(\theta)\right)^{\nu_j} \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{p_j^0(\theta)} \cdot \frac{\partial p_j^0(\theta)}{\partial \theta_k}$
  $\frac{\nu_0}{p_0^0(\theta)} \cdot \frac{\partial p_0^0(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\nu_1}{p_1^0(\theta)} \cdot \frac{\partial p_1^0(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\nu_2}{p_2^0(\theta)} \cdot \frac{\partial p_2^0(\theta)}{\partial \theta} = 0$
  $\frac{10}{(1-\theta)^2} \cdot (-2(1-\theta)) + \frac{181}{2\theta(1-\theta)} \cdot (2-4\theta) + \frac{9}{\theta^2} \cdot 2\theta = 0$
  $\frac{-2 \cdot 10 \cdot \theta^2 (1-\theta) + 181\theta(1-\theta) \cdot (1-2\theta) + 18\theta(1-\theta)^2}{\theta^2 \cdot (1-\theta)^2} = 0$
  $-2 \cdot 10 \cdot \theta^2 + 181\theta \cdot (1-2\theta) + 18\theta(1-\theta) = 0$
  $-2 \cdot 10 \cdot \theta + 181 \cdot (1-2\theta) + 18(1-\theta) = 0$
  $\theta \cdot 2 \cdot (200) = 199$
  $\hat{\theta} = \frac{199}{400} = 0.4975$

- $T\chi^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{(\nu_j - np_j^0(\hat{\theta}))^2}{np_j^0(\hat{\theta})} = \frac{(10-200 \cdot 0.2525)^2}{200 \cdot 0.2525} + \frac{(181-200 \cdot 0.4999)^2}{200 \cdot 0.4999} + \frac{(9-200 \cdot 0.2475)^2}{200 \cdot 0.2475} \approx 131.2721$

- $t_{0.05} = (1-0.05)$-квантиль распределения $\chi^2(3-1-1)$.

- $t_{0.05} = 3.8 < 131.2721 \Rightarrow$ отклоняем гипотезу.

Ответ: отклоняем гипотезу