ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 19

Решение:

Допустим, длина стержня обозначается как l и измеренная длина распределена нормально $\mathcal{N}(l, kl)$. Запишем функцию правдоподобия:

$L(x,l) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi kl}}\right)^n \cdot \exp\left(-\frac{1}{2kl}\sum_{i=1}^{n}(xi-l)^2\right)$

Задача нахождения максимума функции L сводится к задаче нахождения максимума функции $\ln L$.

$$\ln L(x,l) = -\frac{n}{2}\cdot\ln(2\pi kl) - \frac{1}{2kl}\sum_{i=1}^{n}(x_i-l)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial l} = 0$$

$$-\frac{n}{2}\frac{2\pi k}{2\pi kl} - (-1)\frac{1}{2kl^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-l)^2 - \frac{1}{2kl}(-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-l) = 0$$

$$-\frac{n}{2l} + \frac{1}{2kl^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-l)^2 + \frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}(x_i-l) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i-l)^2 + 2l\sum_{i=1}^{n}(x_i-l) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_il-l^2) + \sum_{i=1}^{n}(2lx_i-2l^2) = 0$$

$$-nkl + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-l^2) = 0$$

Итак,

$$nl^2 + nkl - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$l = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\overline{x^2}}}{2}$$

Исследуем на глобальный максимум корень с плюсом.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{-nkl - nl^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{2kl^2}\right) = \tag{1}$$

$$= \frac{-nk - 2nl}{2kl^2} + \frac{-nkl - 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - nl^2}{2kl^3} = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2kl^3}\left(-nkl - 2nl^2 + 2nkl - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2nl^2\right) = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2kl^3}\left(nkl - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \tag{4}$$

Условие на нахождение максимума: $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 l} < 0 \Leftrightarrow \frac{kl}{2} < \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} xi^2 = \overline{x^2}$.

Таким образом, при $kl < 2\overline{x^2} \implies$

Ответ: Оценка максимального правдоподобия (ОМП) $l = \frac{-k+\sqrt{k^2+4\overline{x^2}}}{2}$.