ФИО: Молодцов Глеб Львович

Номер задачи: 54

Решение:

Сначала запишем функцию правдоподобия для обеих гипотез:

$$L_1(x) = \frac{1}{9}\mathbb{I}(x \in [0,3]^2)$$

$$L_2(x) = 0,25 \cdot \exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)) \cdot \mathbb{I}\{x_1 \geqslant 0\}\mathbb{I}\{x_2 \geqslant 0\}$$

Теперь составим функцию отношения правдоподобия:

$$l(x) = \frac{0,25\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2))I\{x_1 \geqslant 0\}\mathbb{I}\{x_2 \geqslant 0\}}{\frac{1}{9}\mathbb{I}(x \in [0,3]^2)}$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $x \in [0,3]^2$. Тогда $l(x) = \frac{9}{4}\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2))$.
2. $x_i \in [0,3], x_j \notin [0,3]$. Тогда, если $x_j \geqslant 0$, то $l(x) = +\infty$.
3. $x_i, x_j \notin [0,3]$. Тогда, если $x_i, x_j \geqslant 0$, то $l(x) = +\infty$.

Таким образом,

$$l(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}\exp(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)), x \in [0,3]^2 \\ +\infty, x \in [0,+\infty]^2 \backslash [0,3]^2 \end{cases}$$

$$\pi_{c,p}(x) = \begin{cases} 1, l(x) > c \\ p, l(x) = c \\ 0, l(x) < c \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_{H_1}(l(x) > c) + p \cdot \mathbb{P}_{H_1}(l(x) = c) = \alpha$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $c < 0 \implies \mathbb{P}_{H_1}(l(x) > c) + p \cdot \mathbb{P}_{H_1}(l(x) = c) \implies$ не существует решений уравнения для $\alpha$.

2. $c > 0 \implies$

   $\mathbb{P}_{H_1}(l(x) > c) = \mathbb{P}_{H_1}\left(2.25 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right) > c\right) =$
   $= \mathbb{P}_{H_1}\left(l(x) = \frac{9}{4} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right)\right) + P_{H_1}(l(x) = +\infty) =$
   $= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{9}{4} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right)\right) > c\right) = \mathbb{P}_{H_1}\left(-\left(x_1 + x_2\right) > 2\ln\left(\frac{4}{9}c\right)\right) =$

   $= \mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 < c_1\right)$

   Рассмотрим площадь под пересечением прямой и квадрата. Найдём какое-нибудь $c_1$: такое, когда данная фигура - треугольник.

   $$\mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 < c_1\right) = \frac{1}{2}c_1^2$$

   Аналогично:

   $$\mathbb{P}_{H_1}(l(x) = c) = \mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 = c_1\right) = 0$$

   Так как $\mathbb{P}_{H_1}\left(x_1 + x_2 = c_1\right) = 0$, в силу того, что $x_1 + x_2$ распределено непрерывно.

   Тогда получим:

   $\frac{1}{2}c_1^2 = \alpha \implies c_1 = 2\sqrt{\alpha} \implies p$ получилось произвольным $\implies p = 0$.

В итоге

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, x_1 + x_2 < 2\sqrt{\alpha}, \text{ или } x_1 > 3, \text{ или } x_2 > 3 \\ 0, x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

$$\beta(\pi) = 1 - \mathbb{E}_2\pi(X) = 1 - \mathbb{P}_2\left(x_1 + x_2 < 2\sqrt{\alpha}\right) - \mathbb{P}_2\left(x_1 > 3\right) - \\ -\mathbb{P}_2\left(x_2 > 3\right) = 1 - \Gamma(2,2)_{2\sqrt{\alpha}} - \left(1 - 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right) - \left(1 - 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta(\pi) = 0.545$$