状態空間モデル

線型・ガウス型状態空間モデルを学ぶ

状態方程式	$X_n = aX_{n-1} + bW_n$
観測方程式	$\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

カルマンフィルタ

- https://www.jstage.jst.go.jp/article/sicejl/56/9/56_668/_pdf

宇宙分野におけるカルマンフィルタの応用

岩　田　隆　敬*

＊宇宙航空研究開発機構　茨城県つくば市千現 2–1–1
＊Japan Aerospace Exploration Agency, 2–1–1 Sengen, Tsukuba, Ibaraki, Japan
＊E-mail: iwata.takanori@jaxa.jp

キーワード：宇宙機 (spacecraft), カルマンフィルタ (Kalman filtering), 拡張カルマンフィルタ (extended Kalman filter), 軌道推定 (orbit estimation), 姿勢推定 (attitude estimation).
JL 0009/17/5609–0668 ©2017 SICE

1．はじめに

宇宙分野は，カルマンフィルタの誕生と認知・普及・発展に大きな役割を果たしてきた．カルマンフィルタを形作る二つの概念の一つである最小二乗法は，18 世紀末から 19 世紀初頭にかけて，小惑星や惑星の軌道を決定するために，Gauss と Legendre がそれぞれ独立に発見した[1),2)]．一方，カルマンフィルタを形作るもう一つの概念である線形システムの状態空間表現は，1930 年代の研究を土台として，1950 年代後半の航空宇宙などの応用分野における多入出力システムへのニーズの下，誕生への機が熟していた．

そして，1940 年代の Kolmogorov と Wiener による周波数領域の最適推定手法の開発を背景として，最小二乗法の発見から 1 世紀半の歳月を経て，1959 年に Swerling が，軌道決定問題に対して今日カルマンフィルタと呼ば道の推定，宇宙機の姿勢の推定，複数宇宙機の相対位置の推定を始めとした広い用途に用いられている．

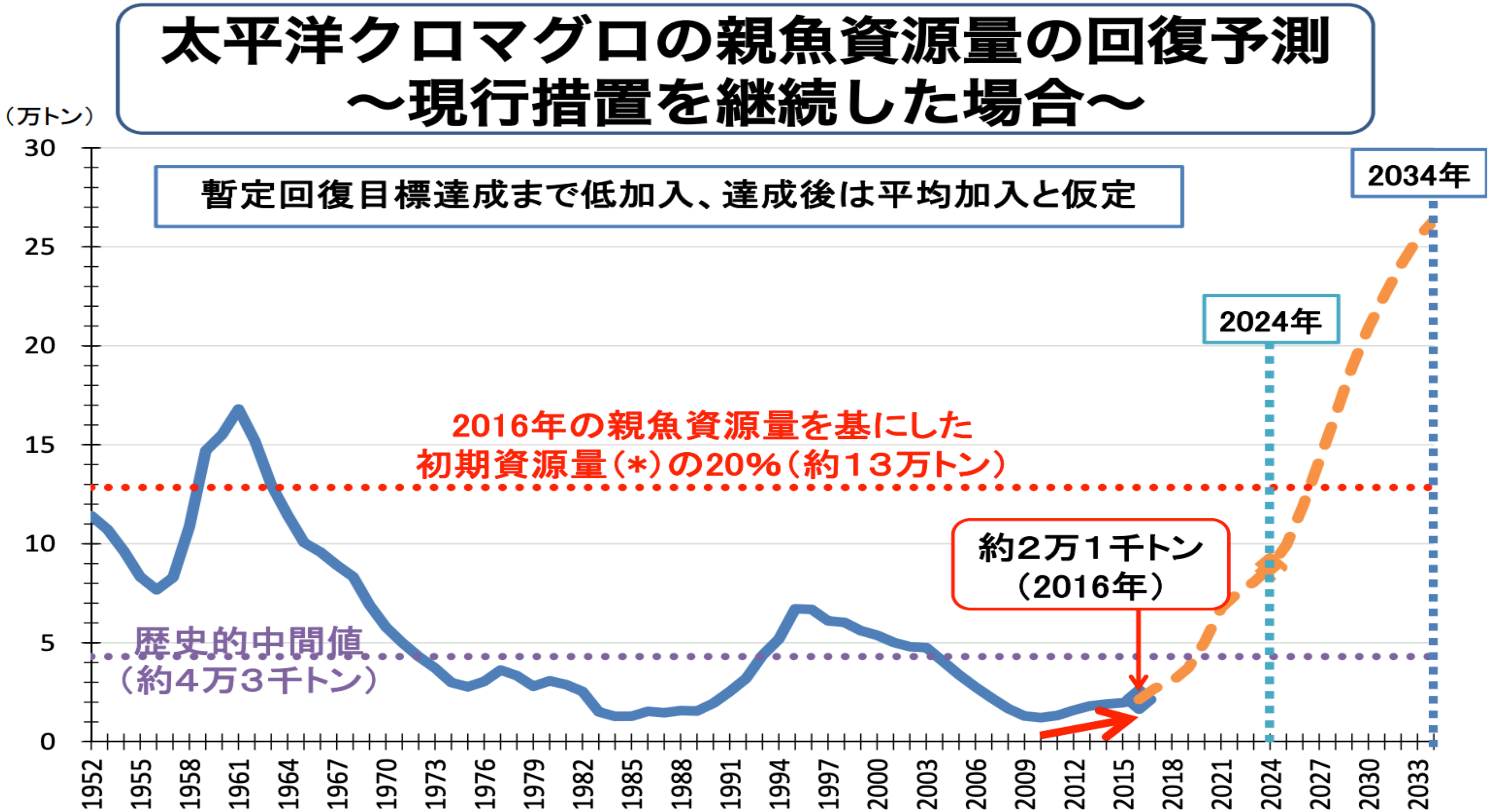
本稿では，カルマンフィルタの最初の応用例であるアポロ宇宙船の航法を振り返った後，今日の宇宙機の軌道推定，姿勢推定への応用例について，概要と目的，計測方法，動的システムモデル，観測モデル，推定手法などを紹介する．

2．カルマンフィルタの最初の応用：アポロ宇宙船の航法

2.1　要求

カルマンフィルタの最初の応用例として広く知られているのは，1960 年代のアポロ・ミッションにおける有人宇宙船の実時間搭載航法[8)~12)]である．アポロ・プログラムでは，宇宙飛行士を安全に月に送り地球に帰すために，宇宙船に搭載し実時間で軌道推定を行う航法を必要とし

資源量の状態をどのように知るのか？



カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

海の中の資源量

状態方程式 $\boxed{X_n} = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

海の中の資源量

毎年の漁獲量

状態方程式 $\boxed{X_n} = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $\boxed{\mathrm{Y}_n} = \mathrm{c}X_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

海の中の資源量

毎年の漁獲量

推定する

$P(X_n|Y_n)$

状態方程式	$\boxed{X_n} = aX_{n-1} + bW_n$
観測方程式	$\boxed{Y_n} = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

カルマンフィルター とは時系列データ（観測値）が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術

海の中の資源量

毎年の漁獲量

ベイズの定理を利用して推定する

$$P(X_n|Y_n)$$

状態方程式　$\boxed{X_n} = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式　$\boxed{Y_n} = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

時間	2000	2001	2002	2003
状態	10			
データ				

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

時間	2000	2001	2002	2003
状態	10			
データ				

1期前の状態推定値から、1期後の状態推定値を予測する

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

時間 2000 2001 2002 2003

状態 10 → ?

データ

1期前の状態推定値から、1期後の状態推定値を予測する

状態方程式 $? = aX_{2000} + bW_{2000}$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

時間 2000 2001 2002 2003

状態 10 → 10

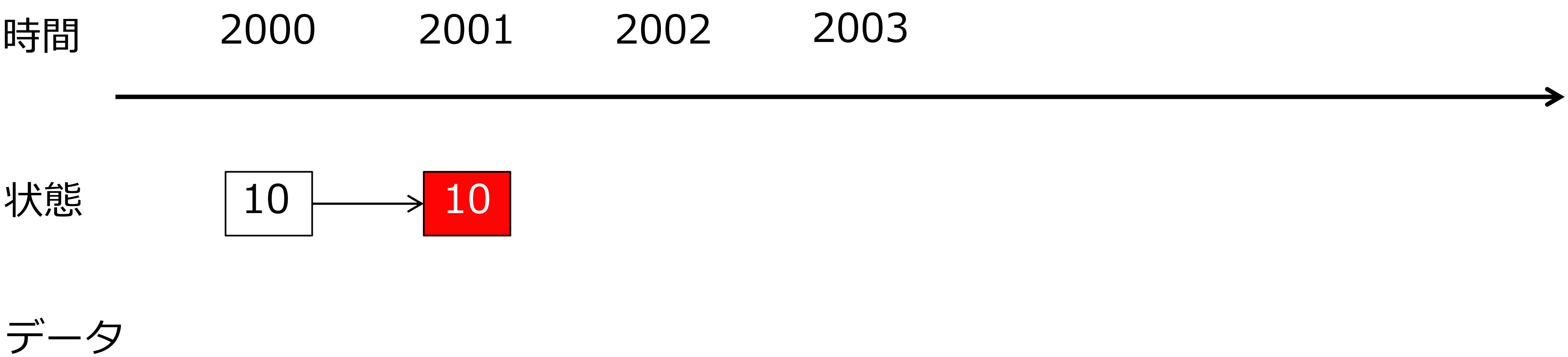
データ

1期前の状態推定値から、1期後の状態推定値を予測する

状態方程式 $X_{2001} = 10$

観測方程式 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

カルマンフィルタとは？

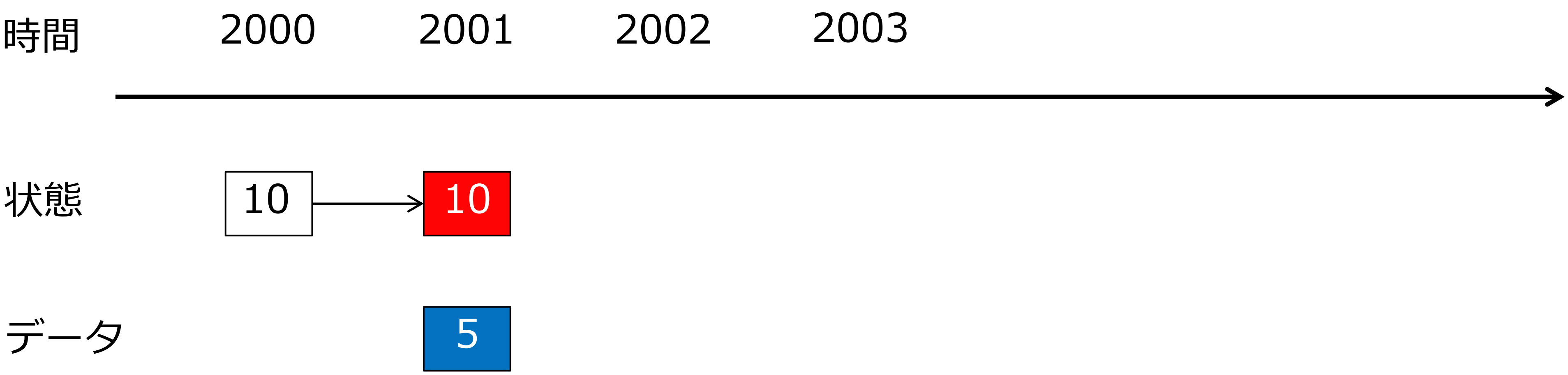


観測データを取得する

状態方程式 $X_{2001} = 10$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$

カルマンフィルタとは？



観測データを取得する

状態方程式 $X_{2001} = 10$

観測方程式 $Y_n = 5$

カルマンフィルタとは？

時間	2000	2001	2002	2003
状態	10	10		
データ		5		

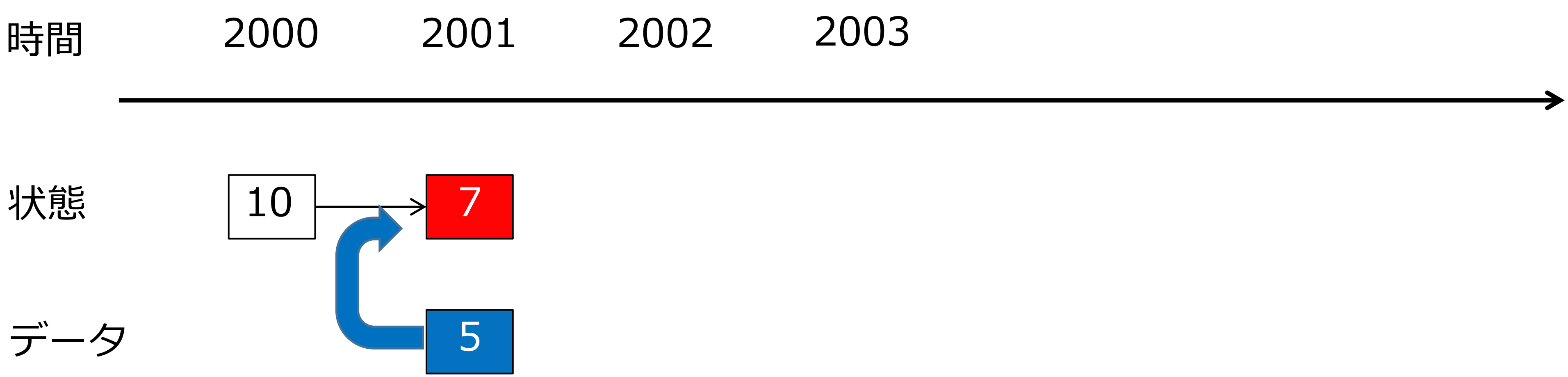
当期のデータを使って、当期の状態推定値を修正する

状態方程式 $X_{2001} = 10$

観測方程式 $Y_n = 5$

修正

カルマンフィルタとは？



当期のデータを使って、当期の状態推定値を修正する

状態方程式 $X_{2001} = 7$

観測方程式 $\mathrm{Y}_n = 5$

修正

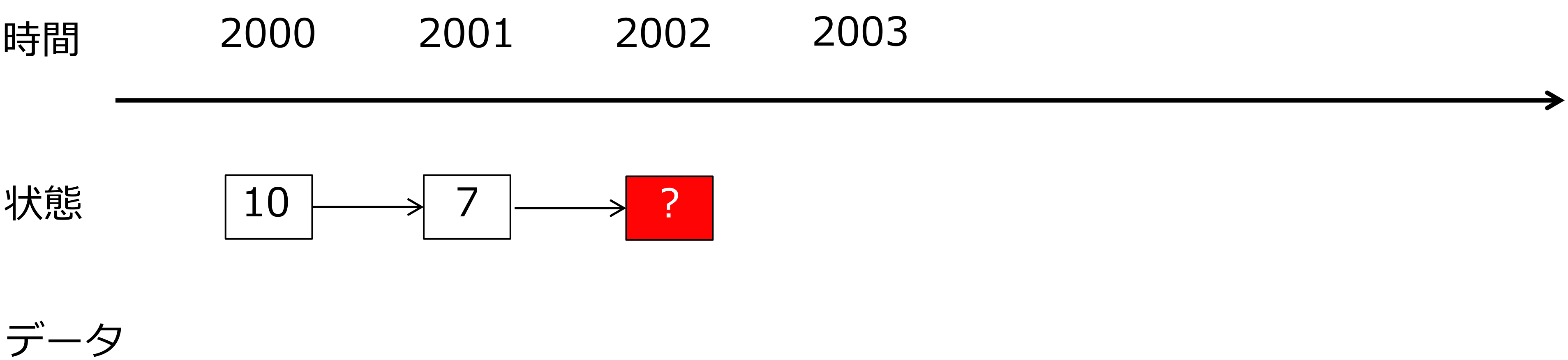
カルマンフィルタとは？

時間 2000 2001 2002 2003

状態 10 → 7

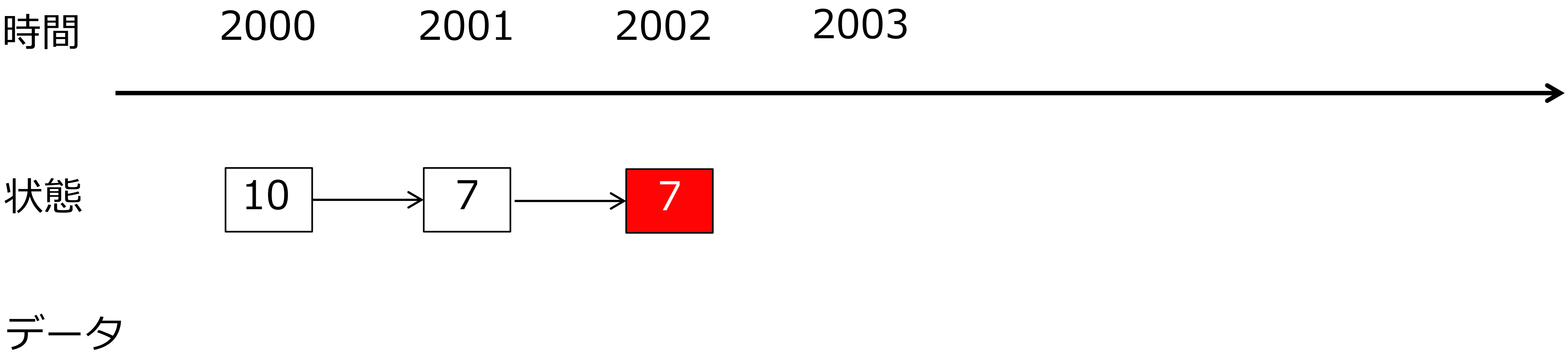
データ

カルマンフィルタとは？



1期前の状態推定値から、1期後の状態推定値を予測する

カルマンフィルタとは？



1期前の状態推定値から、1期後の状態推定値を予測する

カルマンフィルタとは？

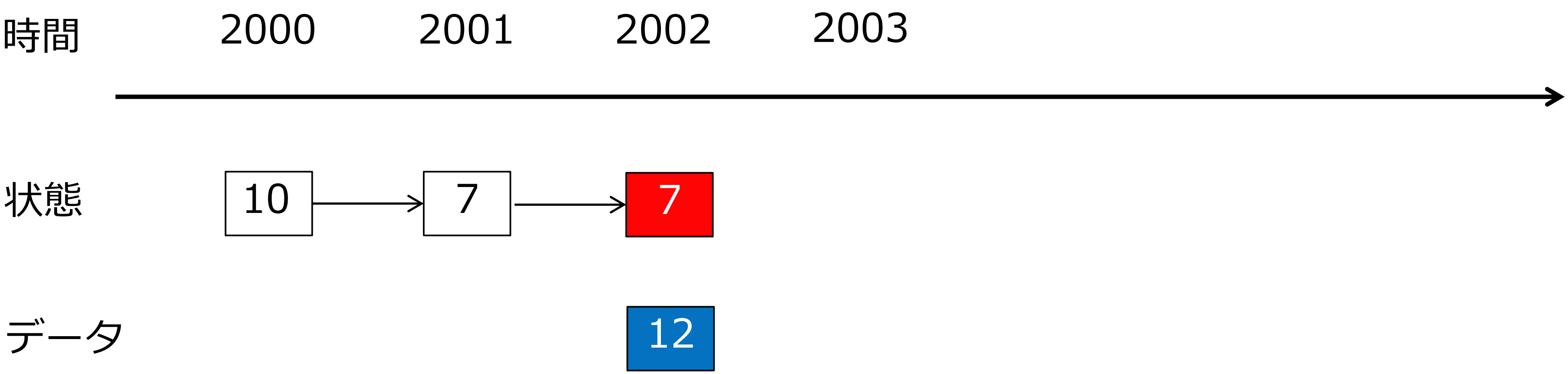
時間 2000 2001 2002 2003

状態 10 → 7 → 7

データ

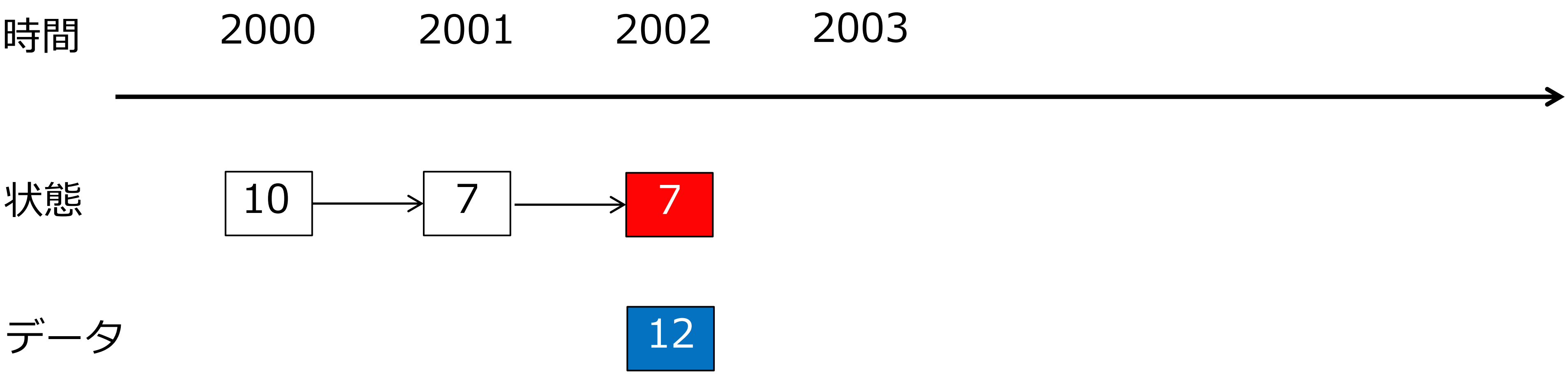
観測データを取得する

カルマンフィルタとは？



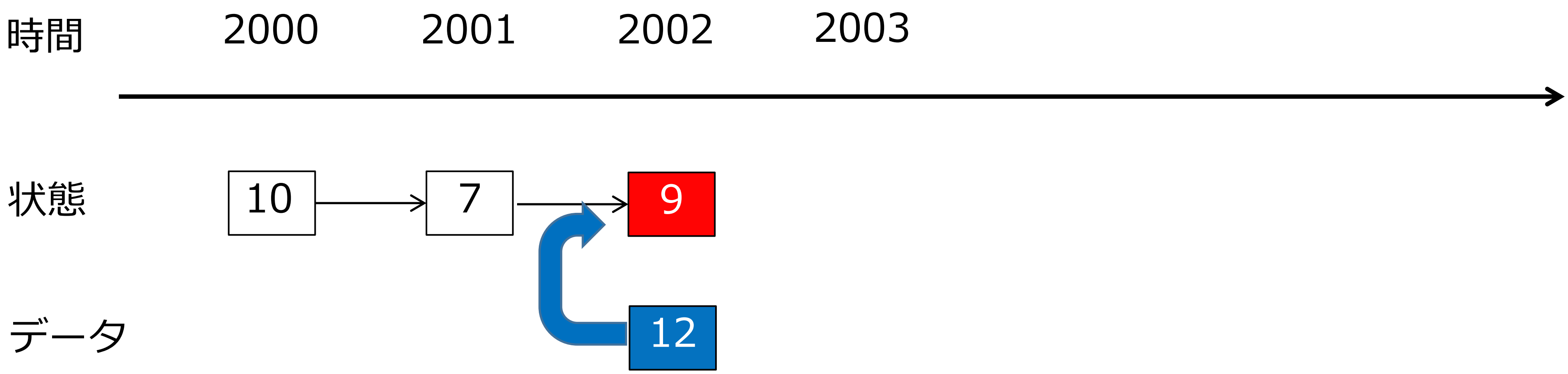
観測データを取得する

カルマンフィルタとは？



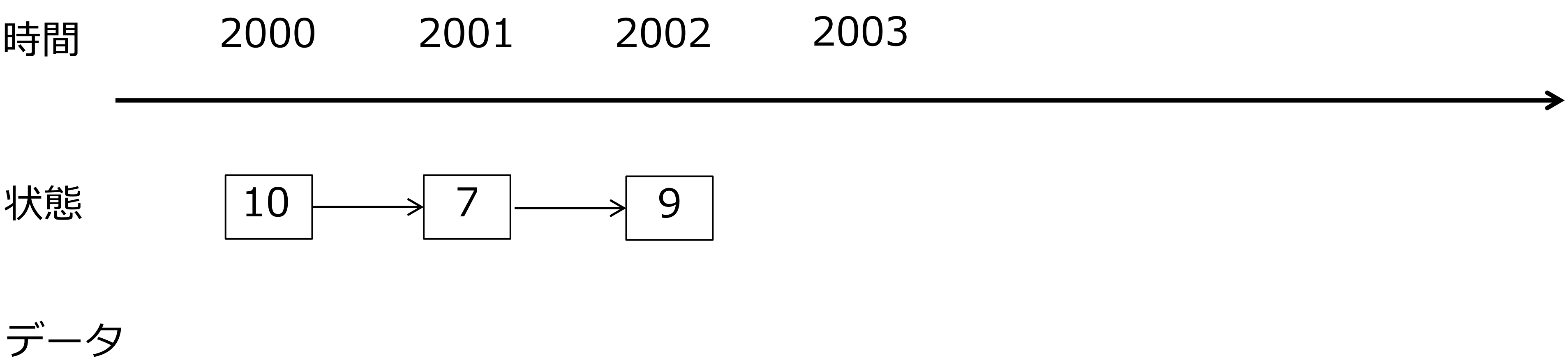
当期のデータを使って、当期の状態推定値を修正する

カルマンフィルタとは？

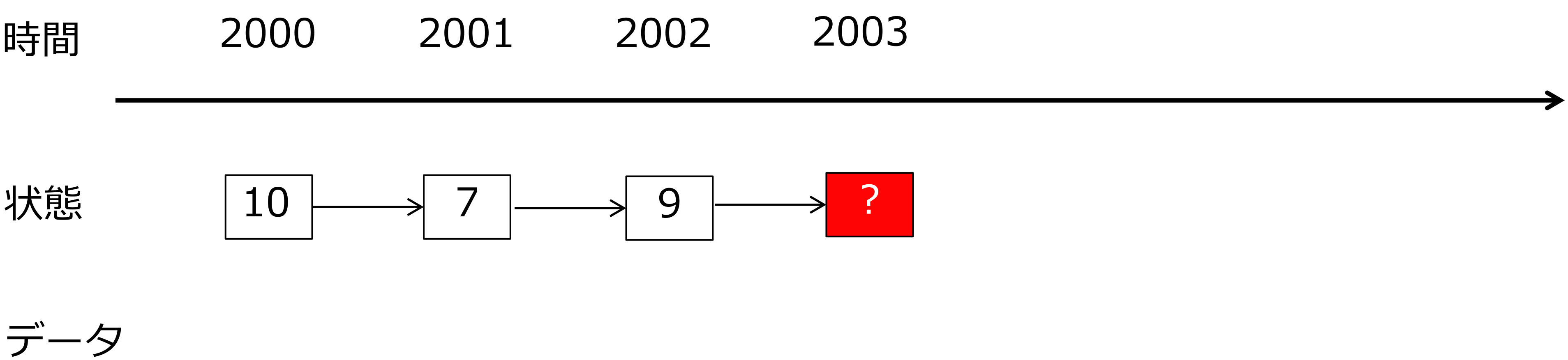


当期のデータを使って、当期の状態推定値を修正する

カルマンフィルタとは？

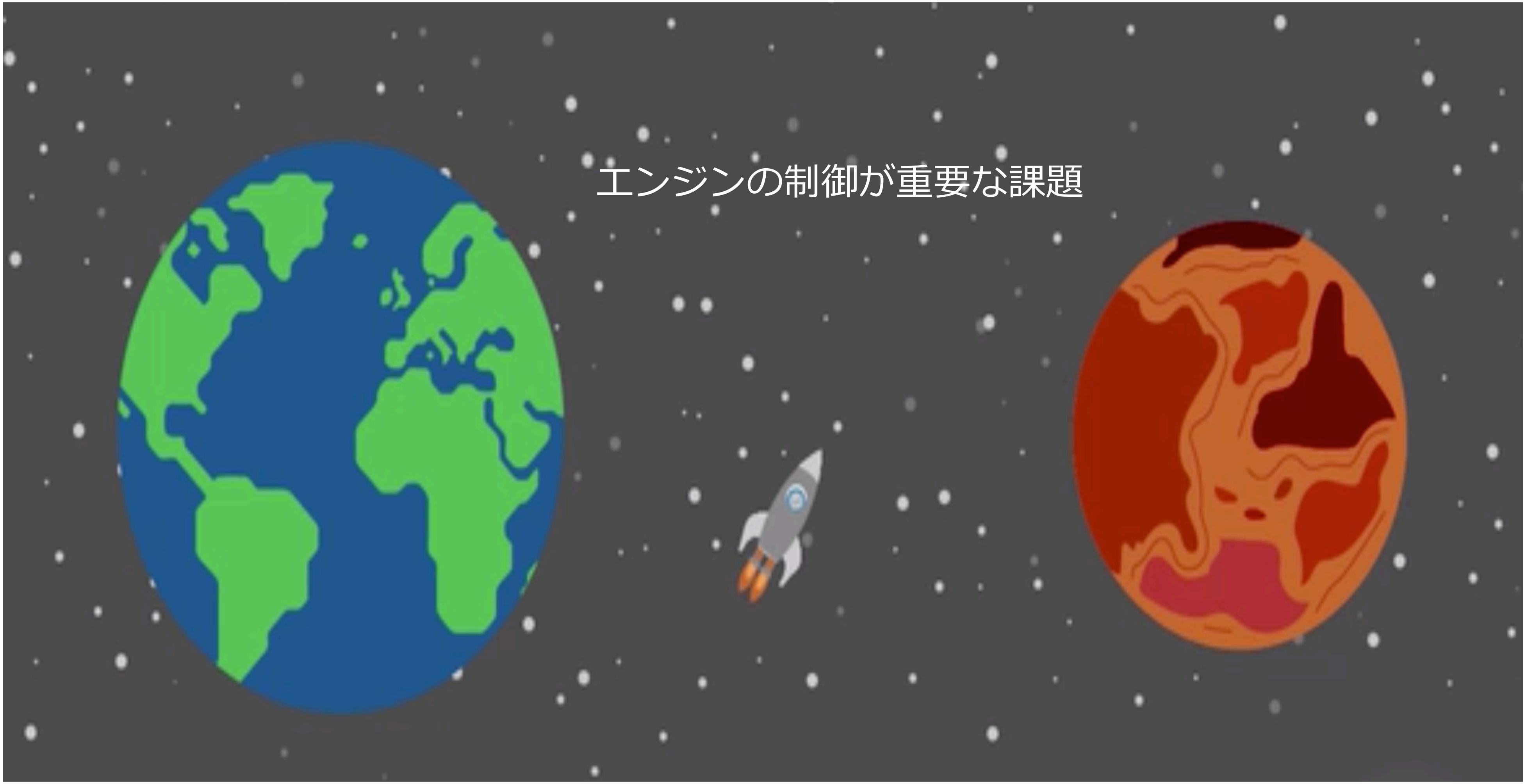


カルマンフィルタとは？

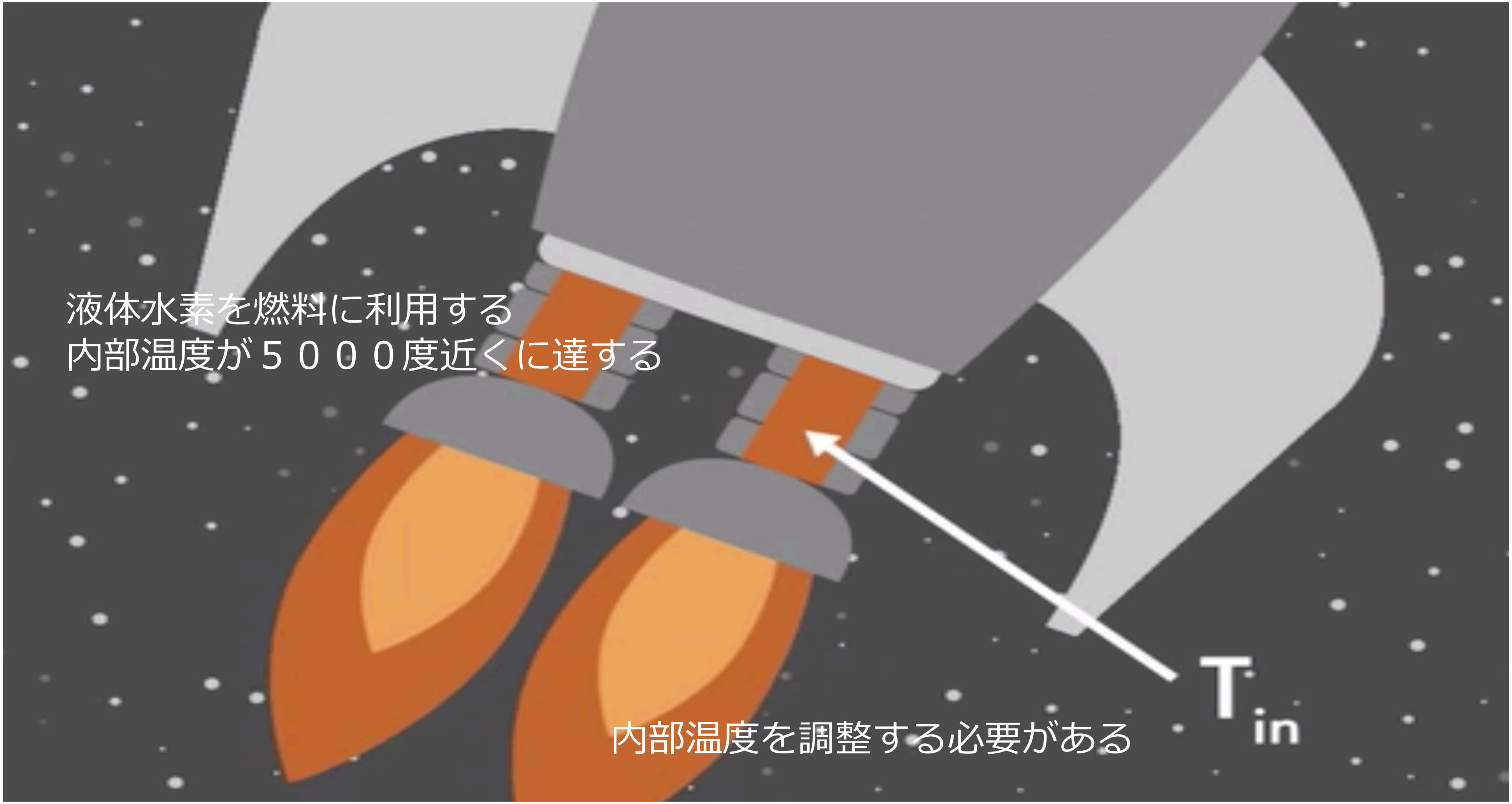


観測値が与えられた時、見えない「状態」を推定するための技術がカルマンフィルター

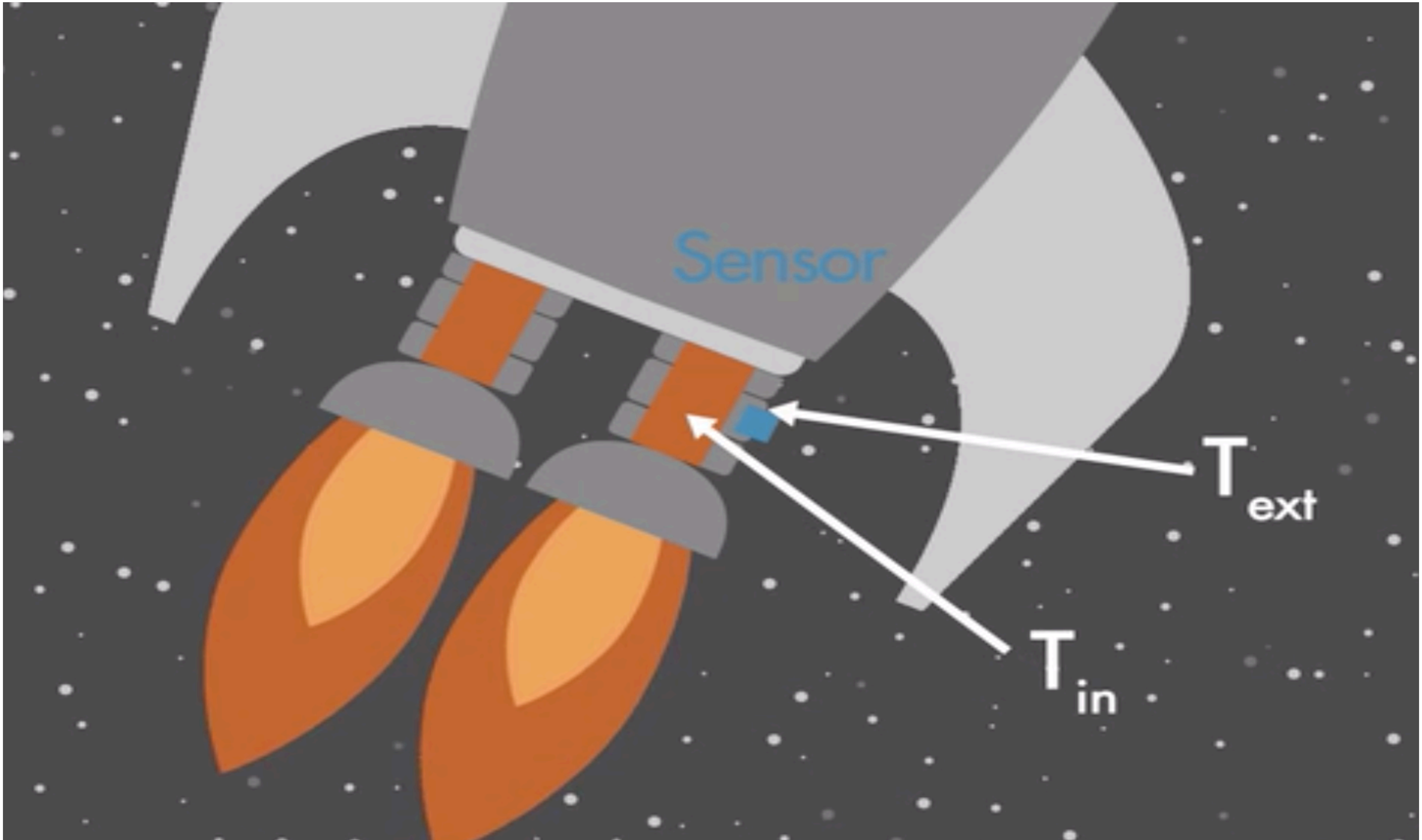
カルマンフィルタとは？



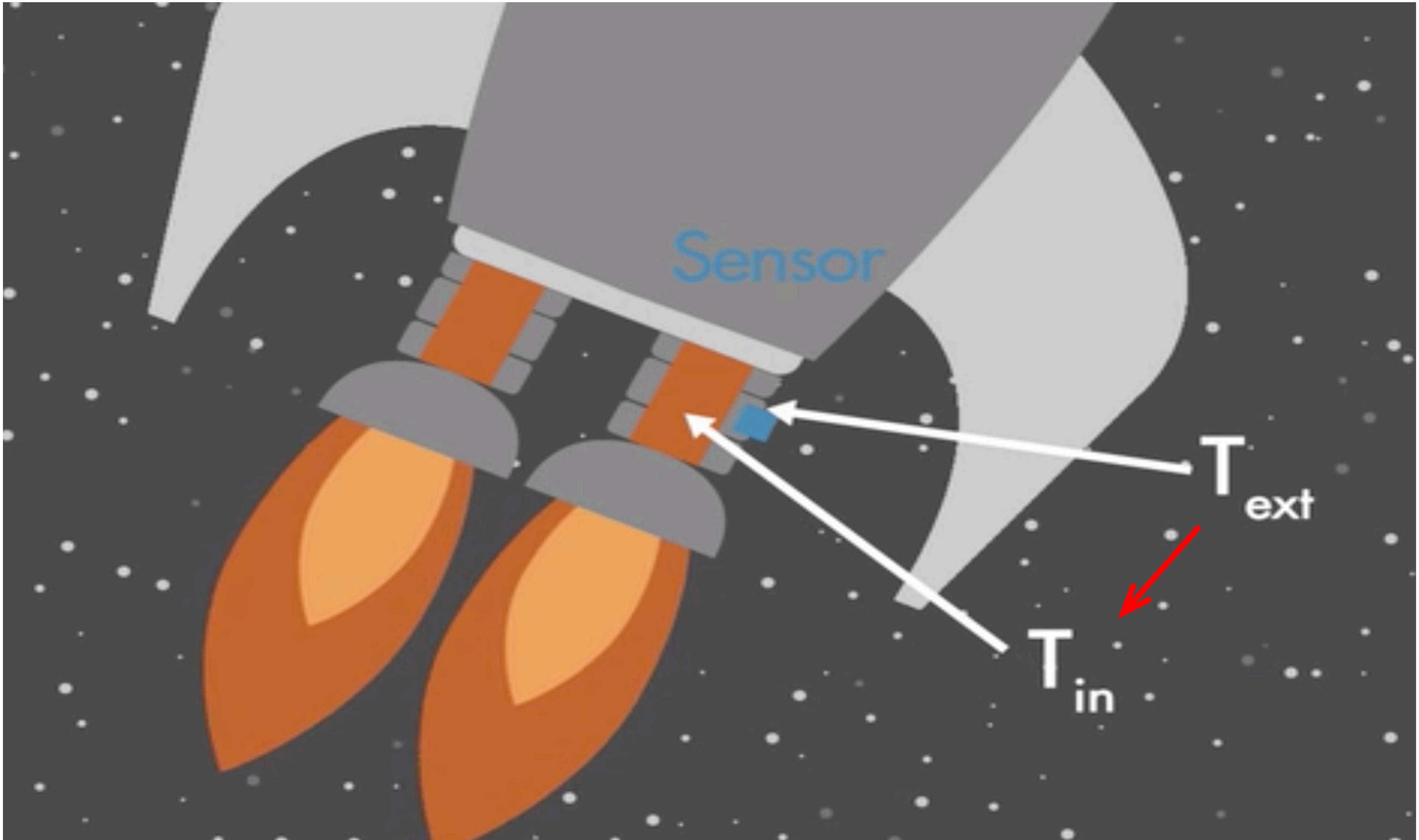
カルマンフィルタとは？



カルマンフィルタとは？

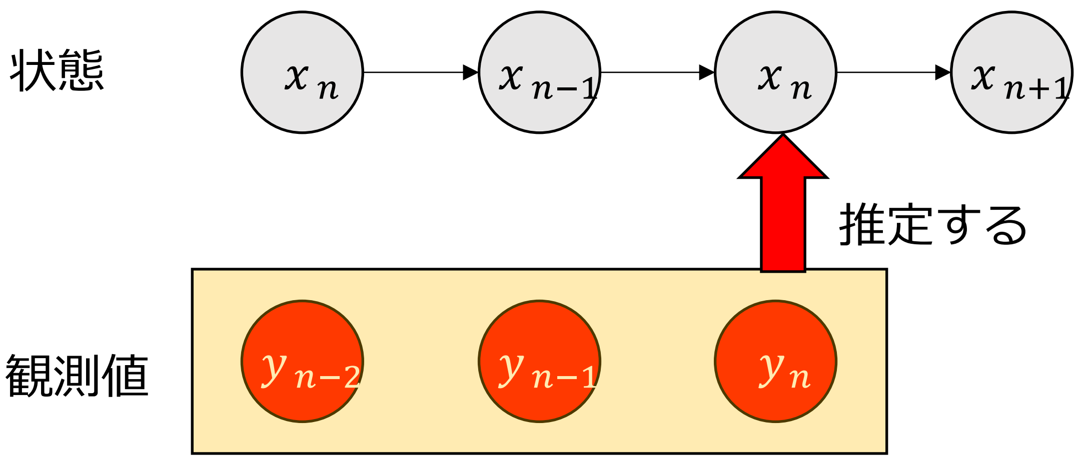


カルマンフィルタとは？



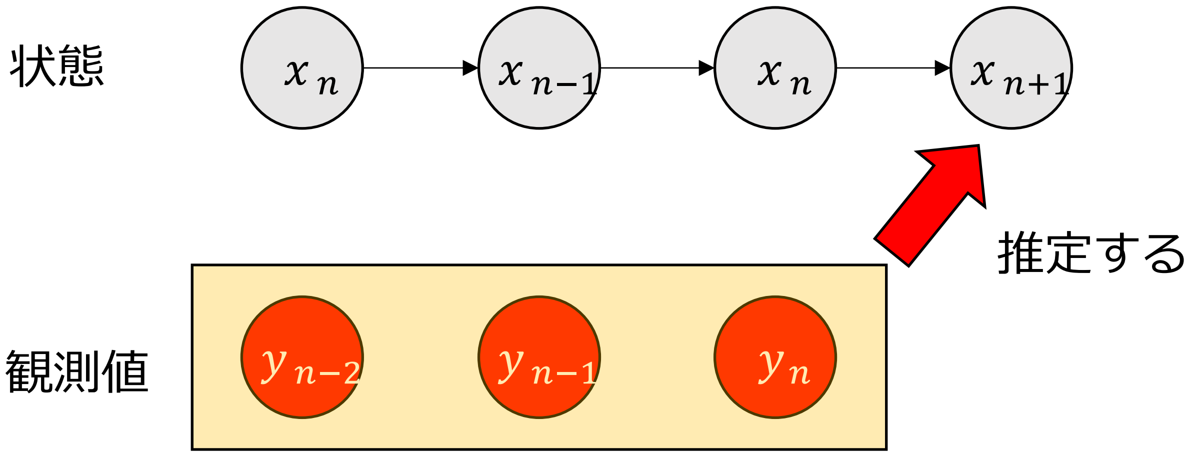
３つの推定（フィルタリング）

過去から現在まで観測された時系列データを使用して、現在の状態を推定すること



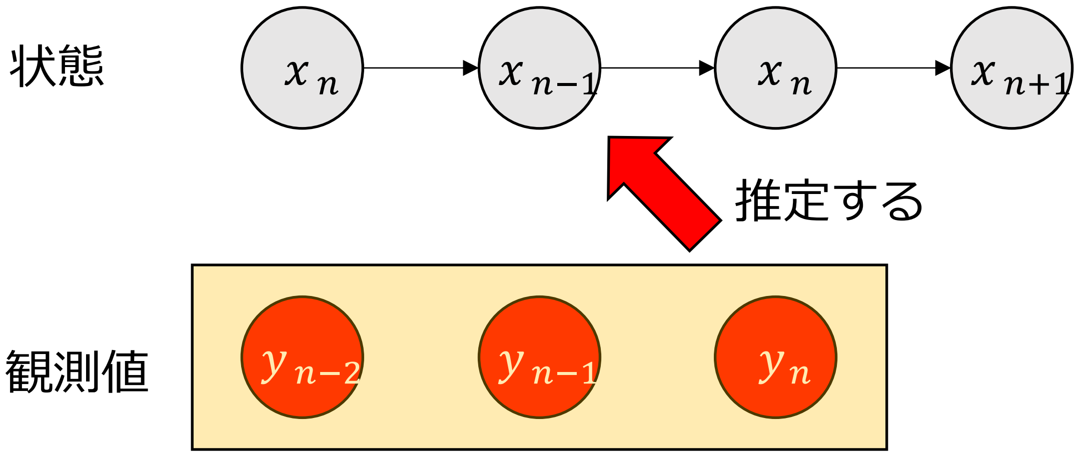
３つの推定（予測）

過去から現在まで観測された時系列データを使用して、未来の状態を推定すること



３つの推定（平滑化）

過去から現在まで観測された時系列データを使用して、過去の状態を推定すること



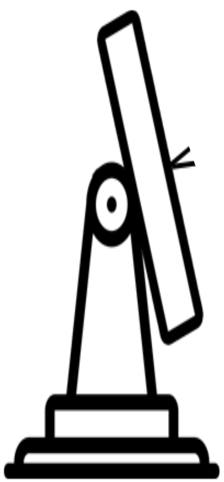
カルマンフィルタとは？

線型・ガウス型状態空間モデルを学ぶ

状態方程式	$X_n = X_{n-1} + W_n$
観測方程式	$\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

状態方程式と観測方程式

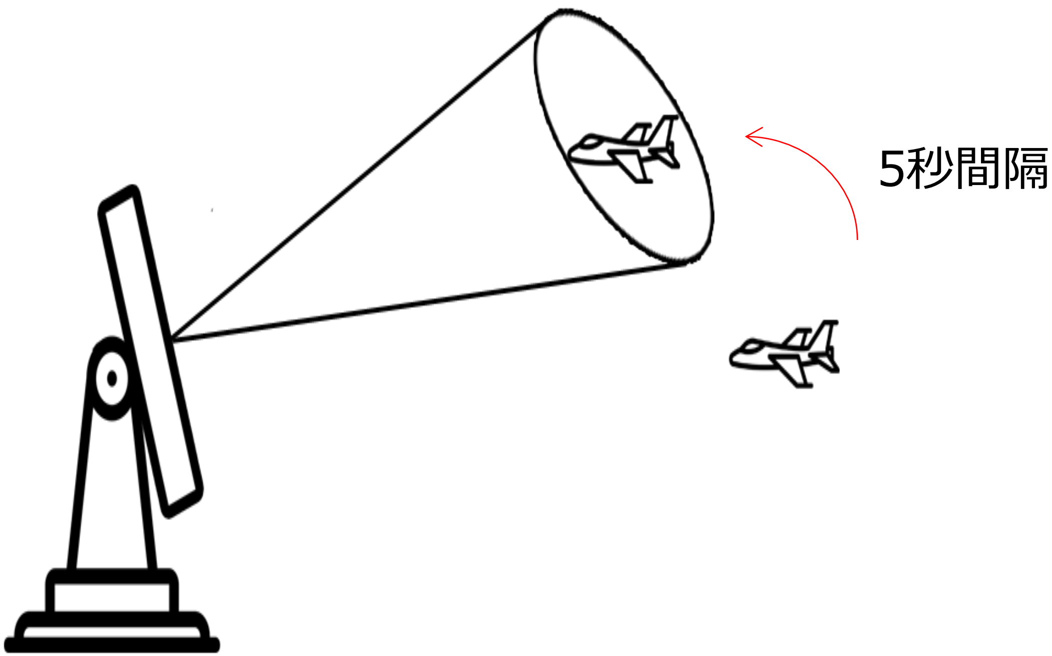
「レーダーを使って飛行機の位置を追跡する」



ここにいることは分かっている

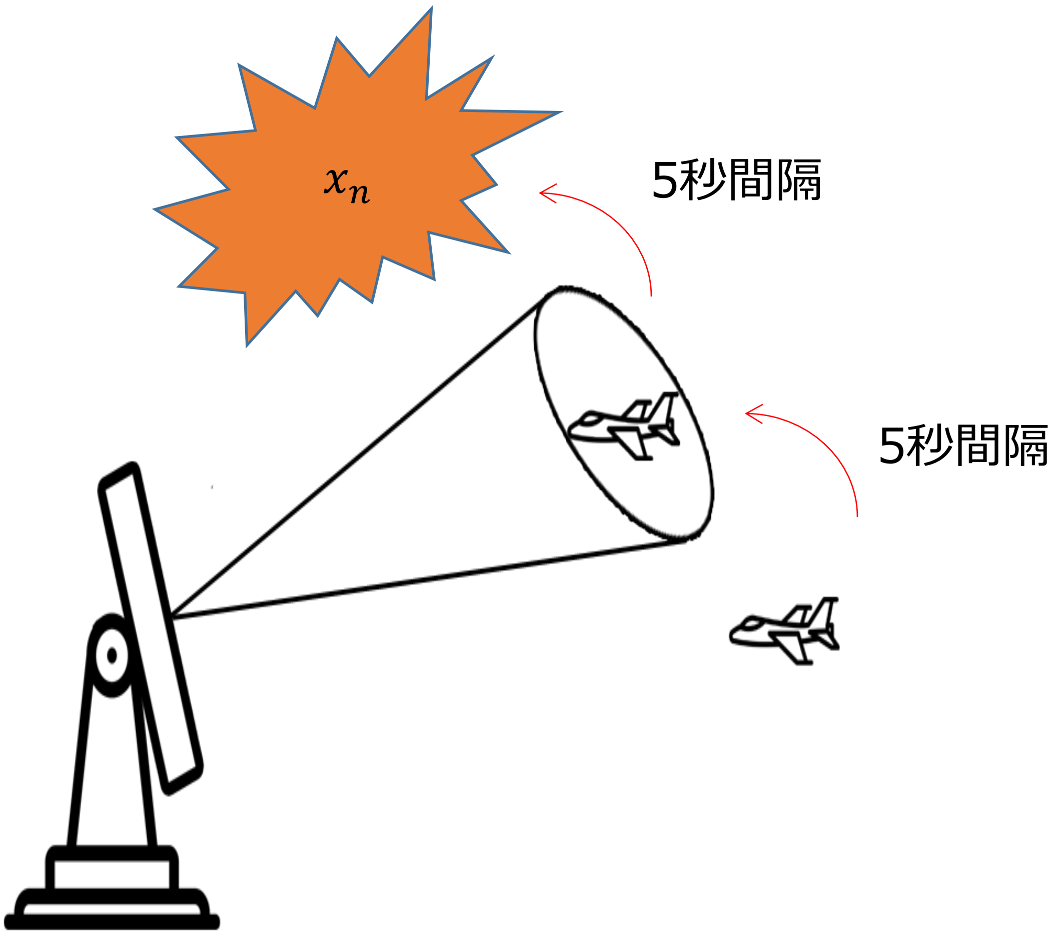
状態方程式と観測方程式

「レーダーを使って飛行機の位置を追跡する」



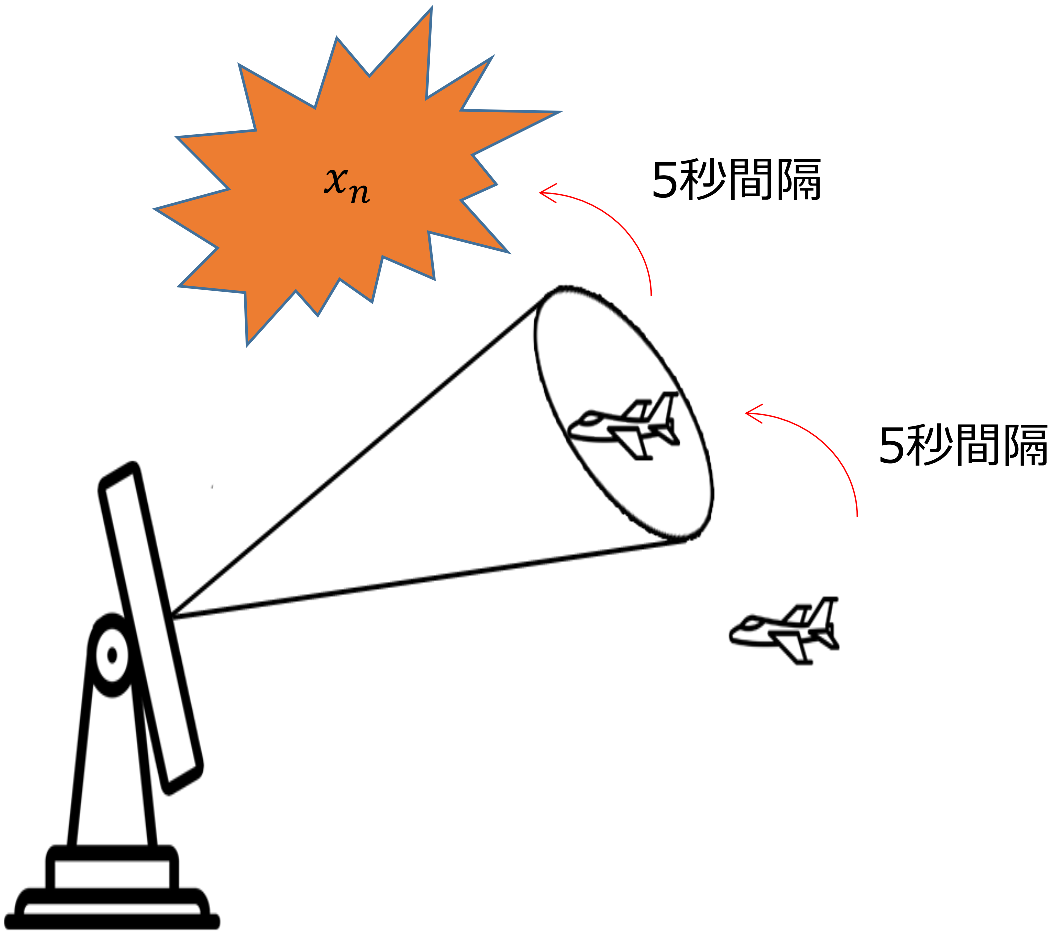
状態方程式と観測方程式

「５秒後にあたりをつけてレーダーを飛ばす必要がある」



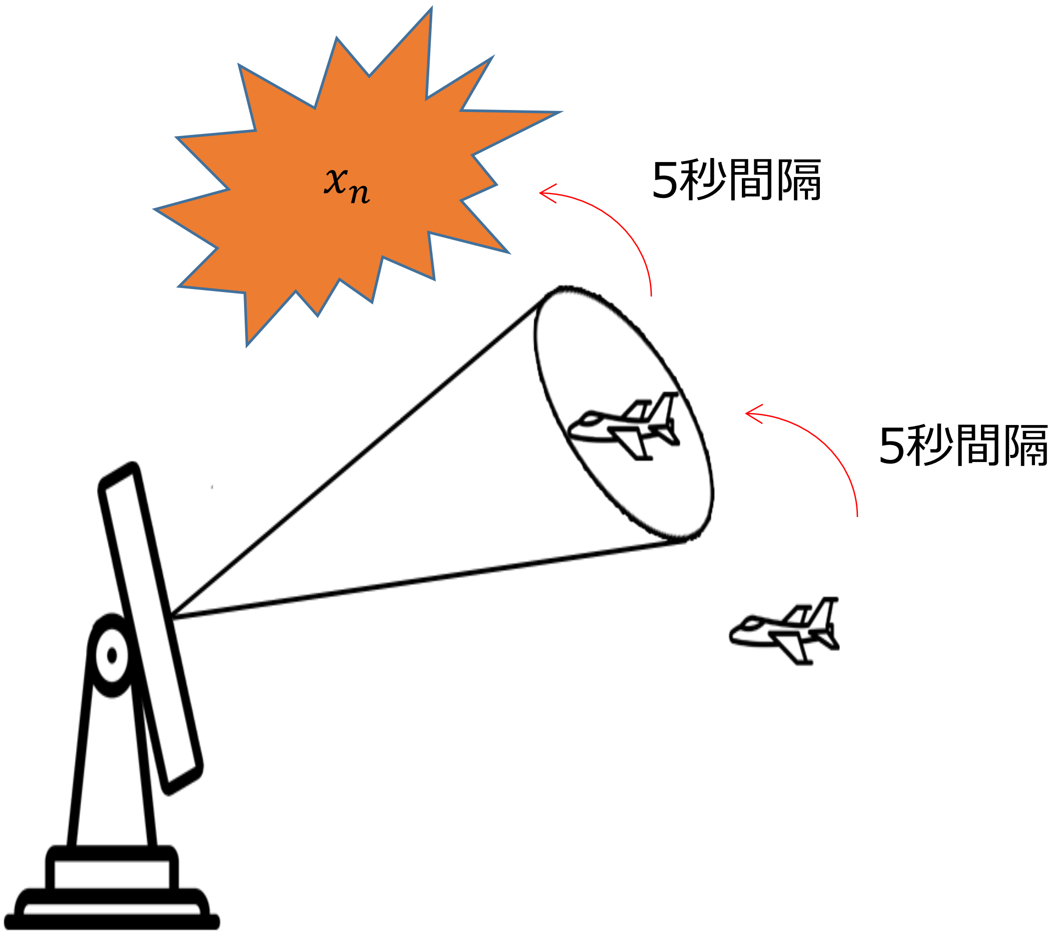
状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」

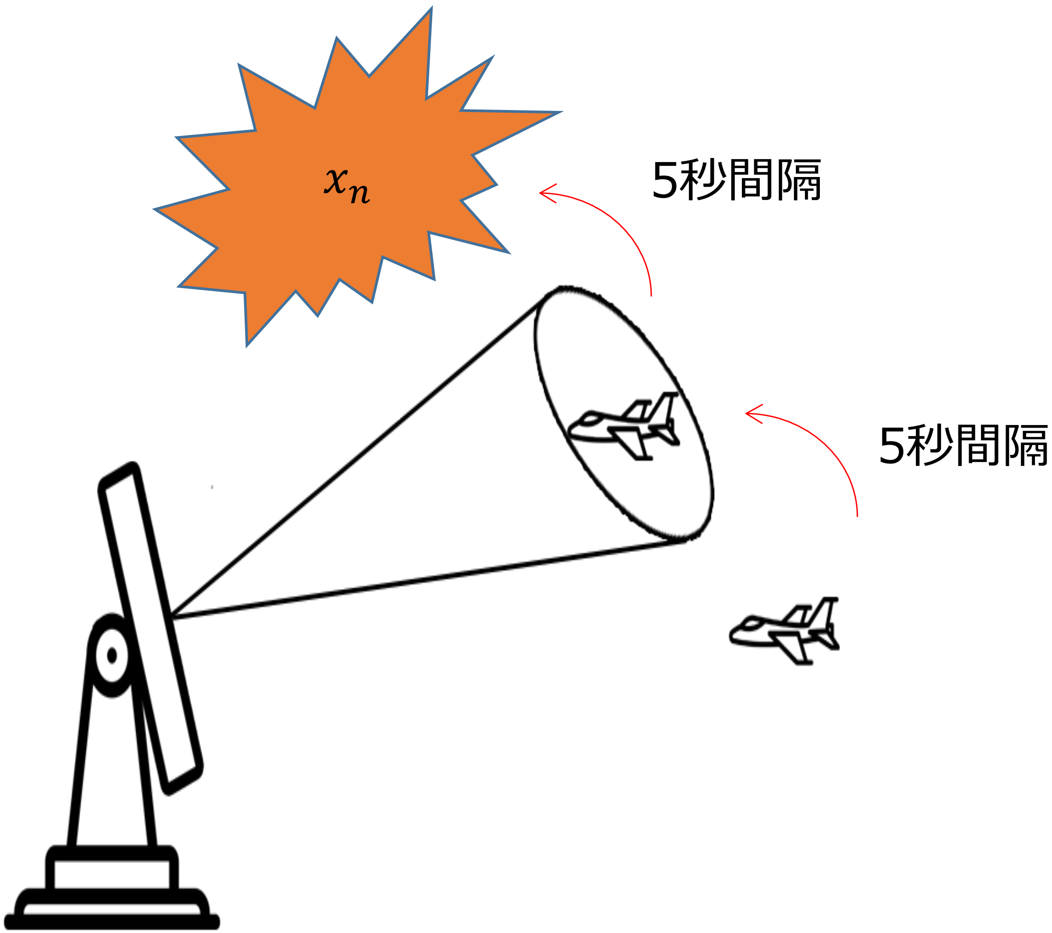


状態方程式

$$x_n = x_{n-1} + V_x \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2$$

状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



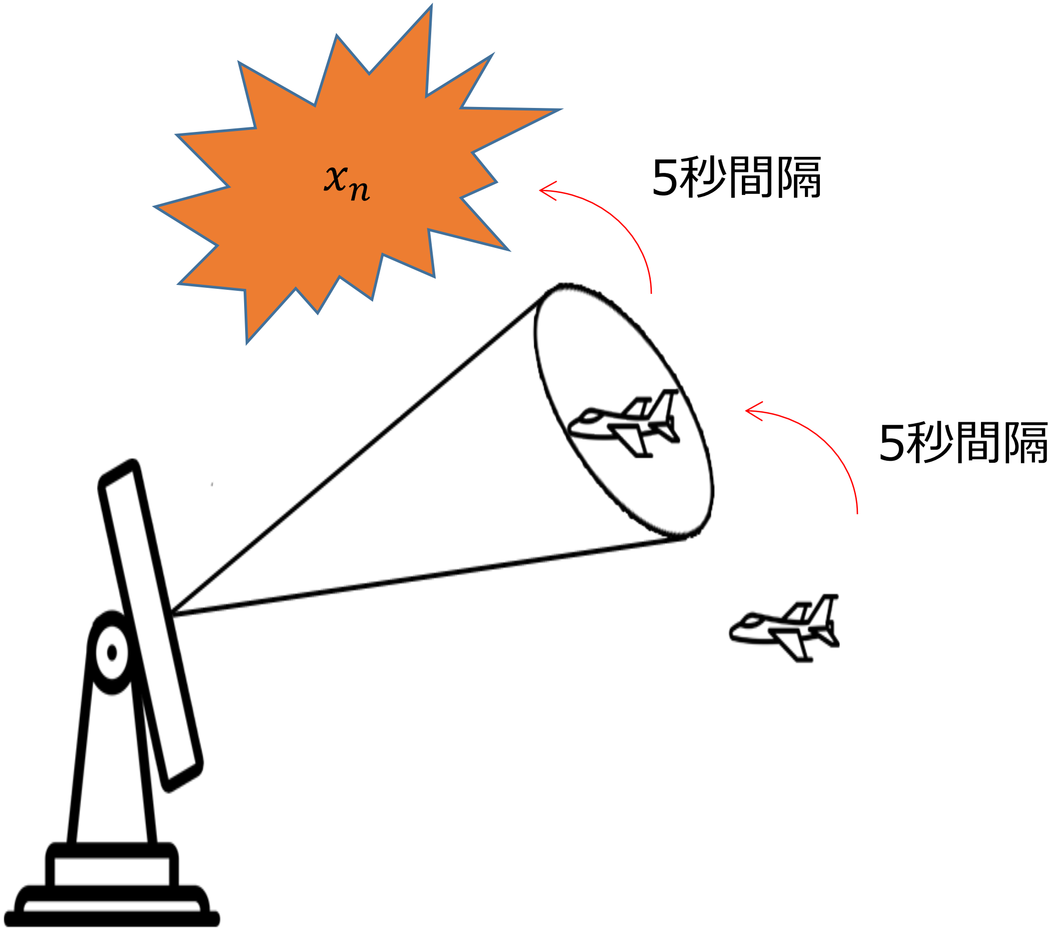
状態方程式

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + V_x \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2}$$

風の影響、空気抵抗、乱気流、パイロットの操作etcの影響を受けるので、予測される位置には誤差が含まれる

状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



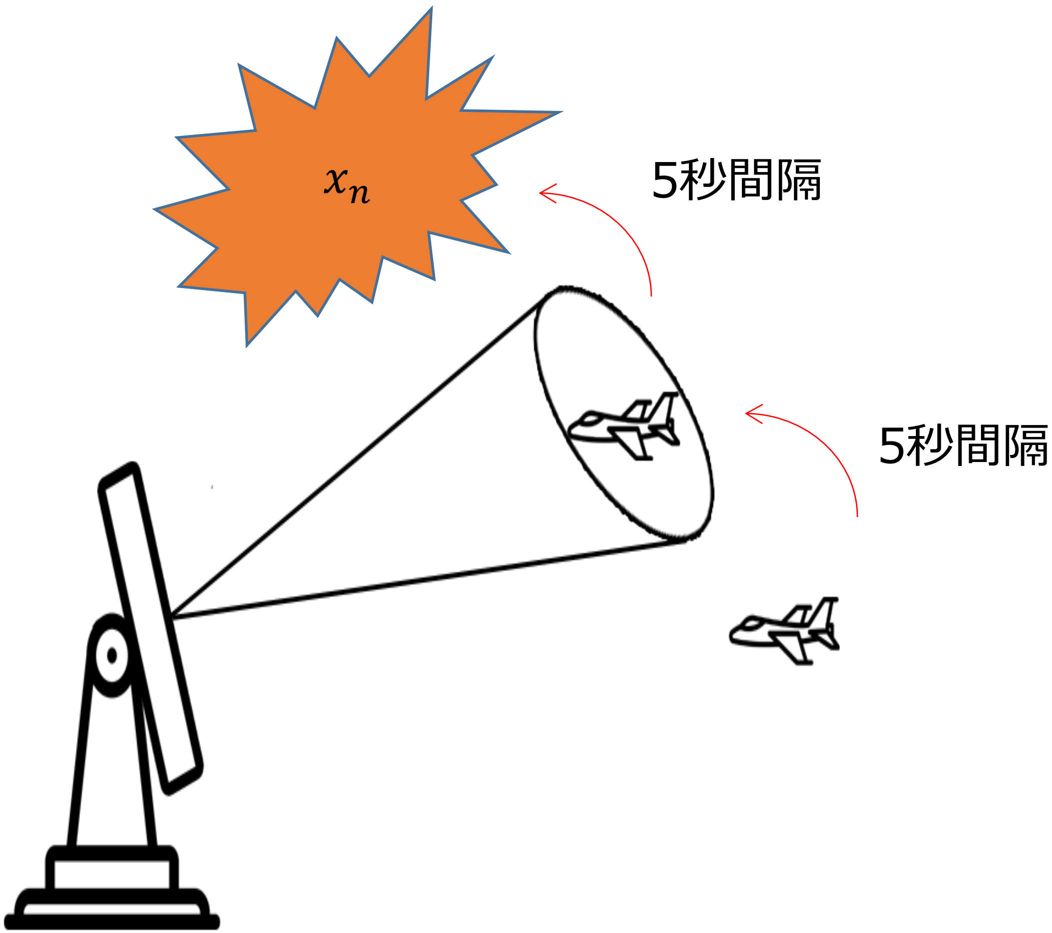
状態方程式

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + w}$$

風の影響、空気抵抗、乱気流、パイロットの操作etcの影響を受けるので、予測される位置には誤差が含まれる

状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



観測方程式

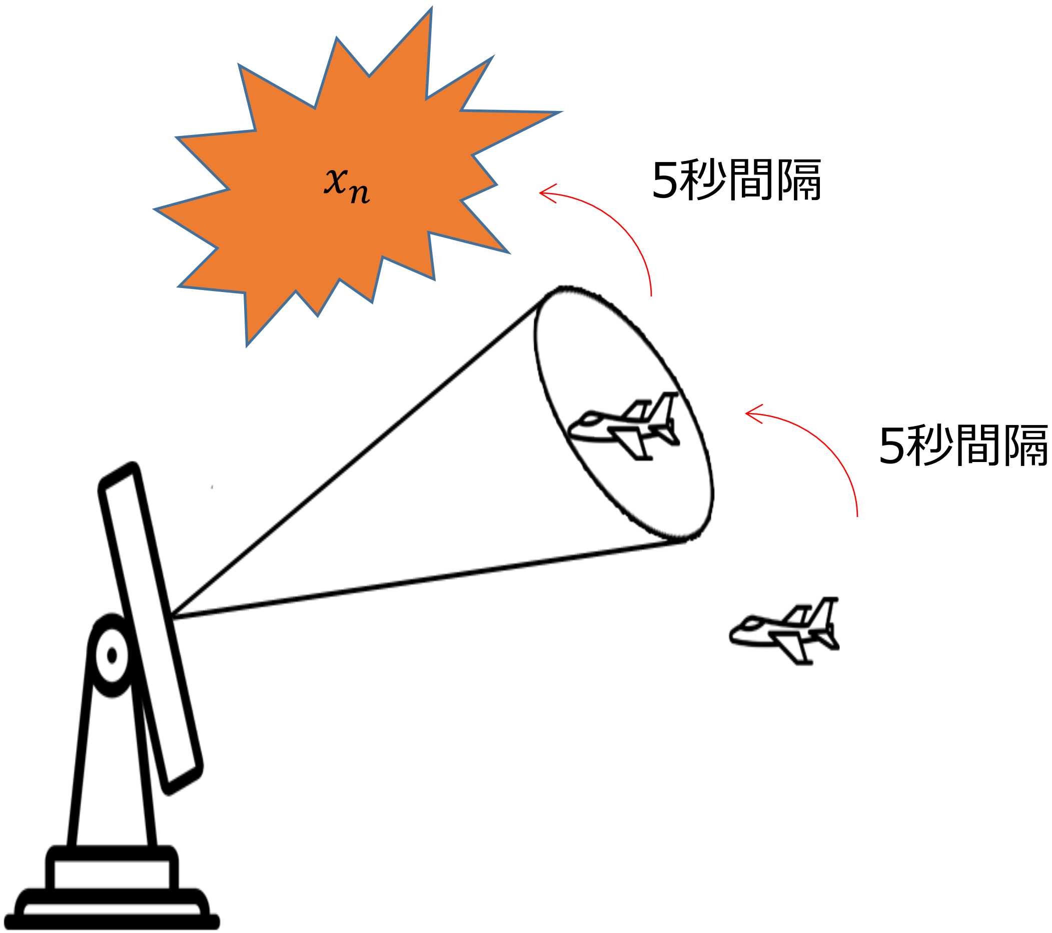
$$\boxed{y_n = cx_n + v_n}$$

知りたい状態

観測値

状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



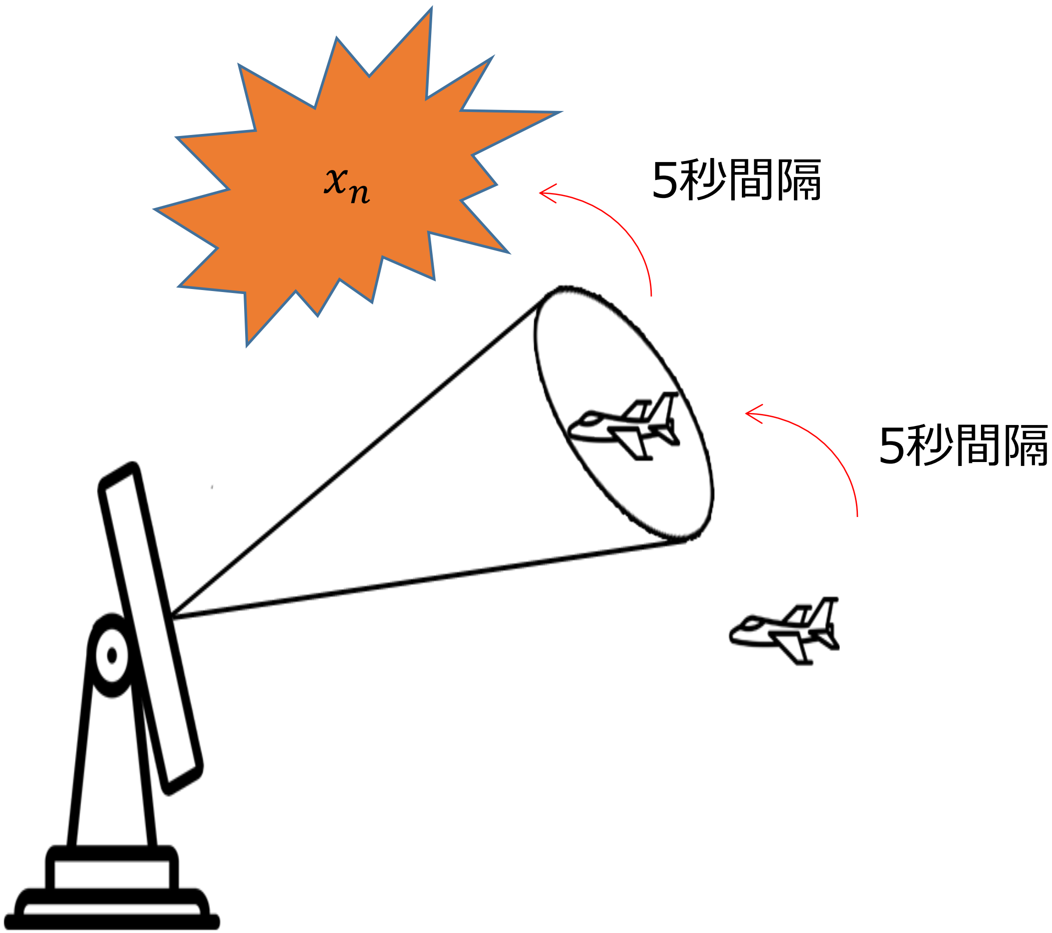
観測方程式

$$\boxed{y_n = cx_n + v_n}$$

観測値も完全ではなく、観測誤差を含む。

状態方程式と観測方程式

問題「どのあたりに飛行が位置するかを予測する必要がある」



観測値に基づいて、最善な位置を推定する

$$\boxed{P(x_n | y_n)}$$

カルマンフィルタとは？

線型・ガウス型状態空間モデルを学ぶ

状態方程式	$X_n = X_{n-1} + W_n$
観測方程式	$\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

具体的には次のコンテンツを理解する

・確率と情報
・条件付き確率・ベイズの定理　（主観的確率の定量化）
・パラメタ推定
・確率過程
・ガウス過程（ランダムウォーク）

Part1: 確率と情報

確率と情報

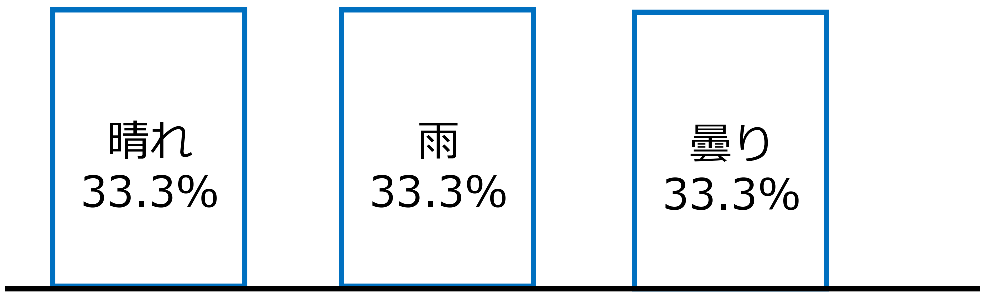
例「明日の天気を予想する」

確率と情報

例「明日の天気を予想する」 何もわからない場合

確率と情報

例「明日の天気を予想する」　よくわからないので一様分布。。

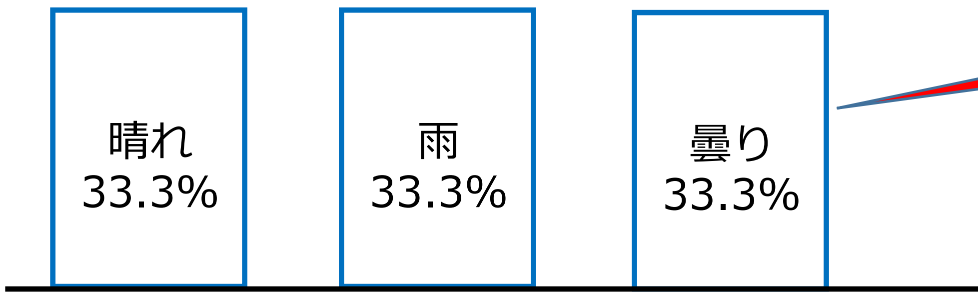


ニュースを見る前の知識

確率と情報

例「明日の天気を予想する」　よくわからないので一様分布。。

主観的な知識

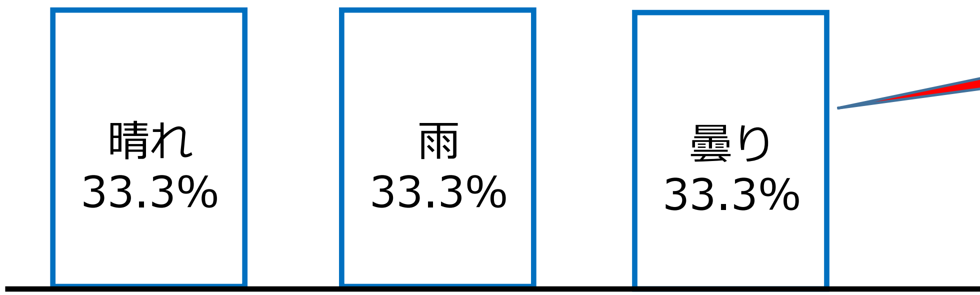


ニュースを見る前の知識

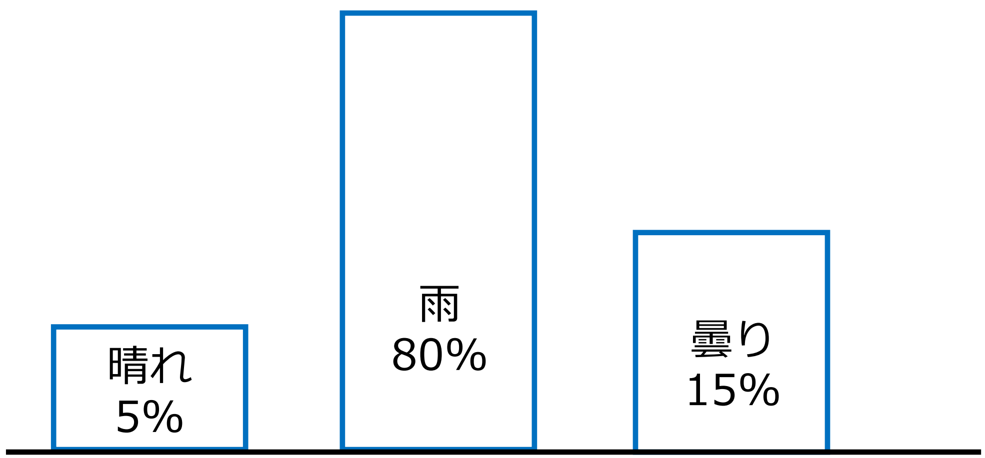
確率と情報

例「明日の天気を予想する」　よくわからないので一様分布。。

主観的な知識



ニュースを見る前の知識

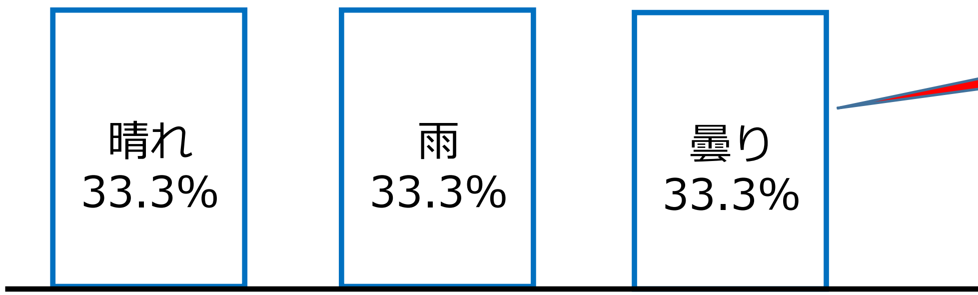


ニュースを見た後に知識が変化

確率と情報

例「明日の天気を予想する」

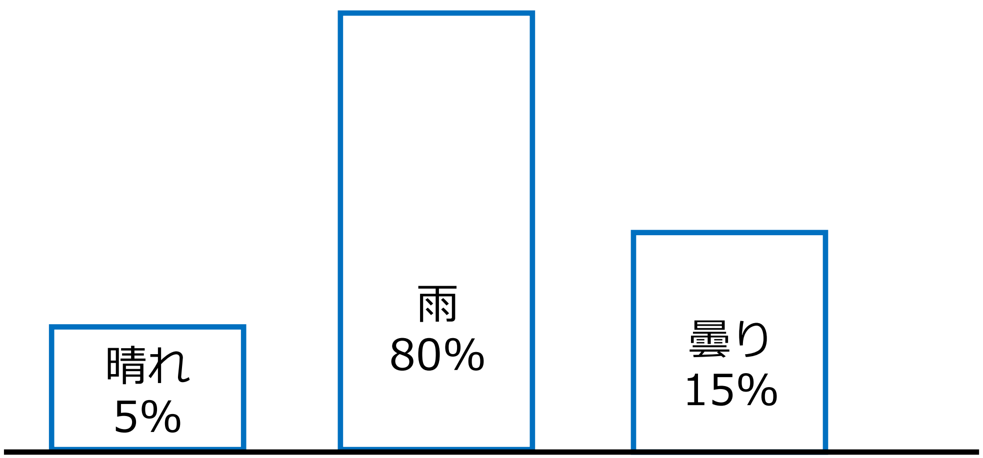
よくわからないので一様分布。。



主観的な知識

ニュースを見る前の知識

何が変化したのか？



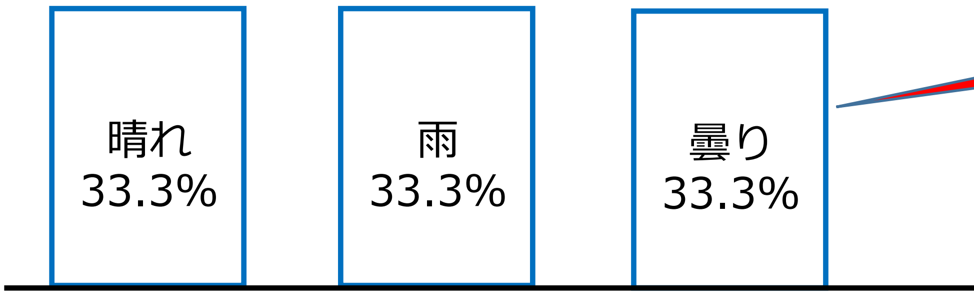
ニュースを見た後に知識が変化

確率と情報

例「明日の天気を予想する」

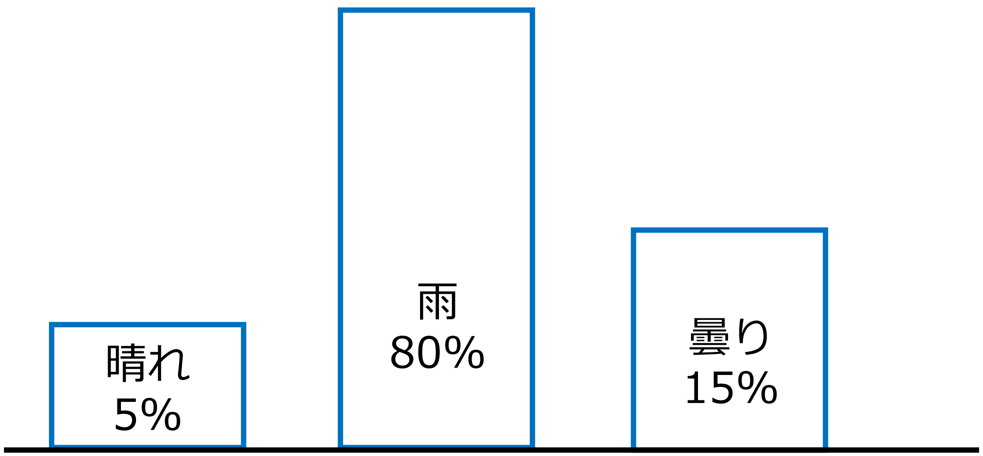
よくわからないので一様分布。。

主観的な知識



ニュースを見る前の知識

確率分布が変化したと考える



ニュースを見た後に知識が変化

確率と情報

主観的な知識が、物事を知ったり、知識を得ることにより、
変化するプロセスを確率分布で捉える

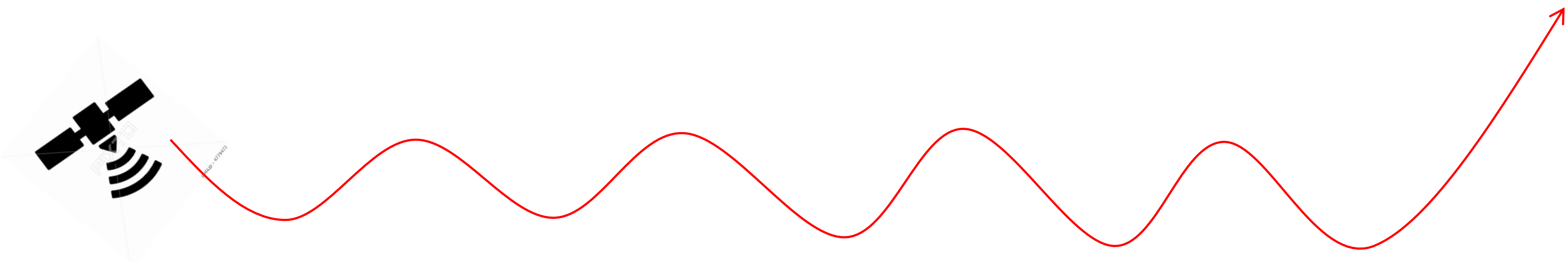
↓

確率分布を使って定量化することにより解析が可能となる

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

観測所

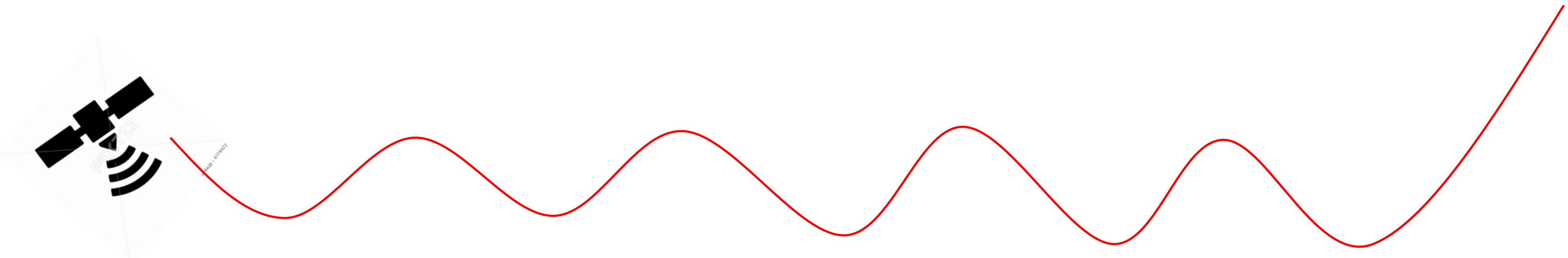
例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



「衛星の位置は揺らぎながら変化する」

観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

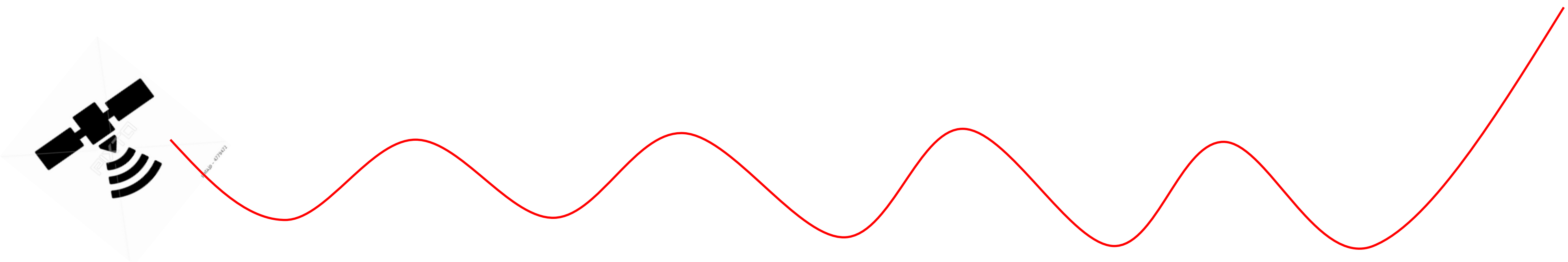


「衛星の位置は揺らぎながら変化する」

「確率的なあてをつけて、衛星の位置を予測し、追跡する」

観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

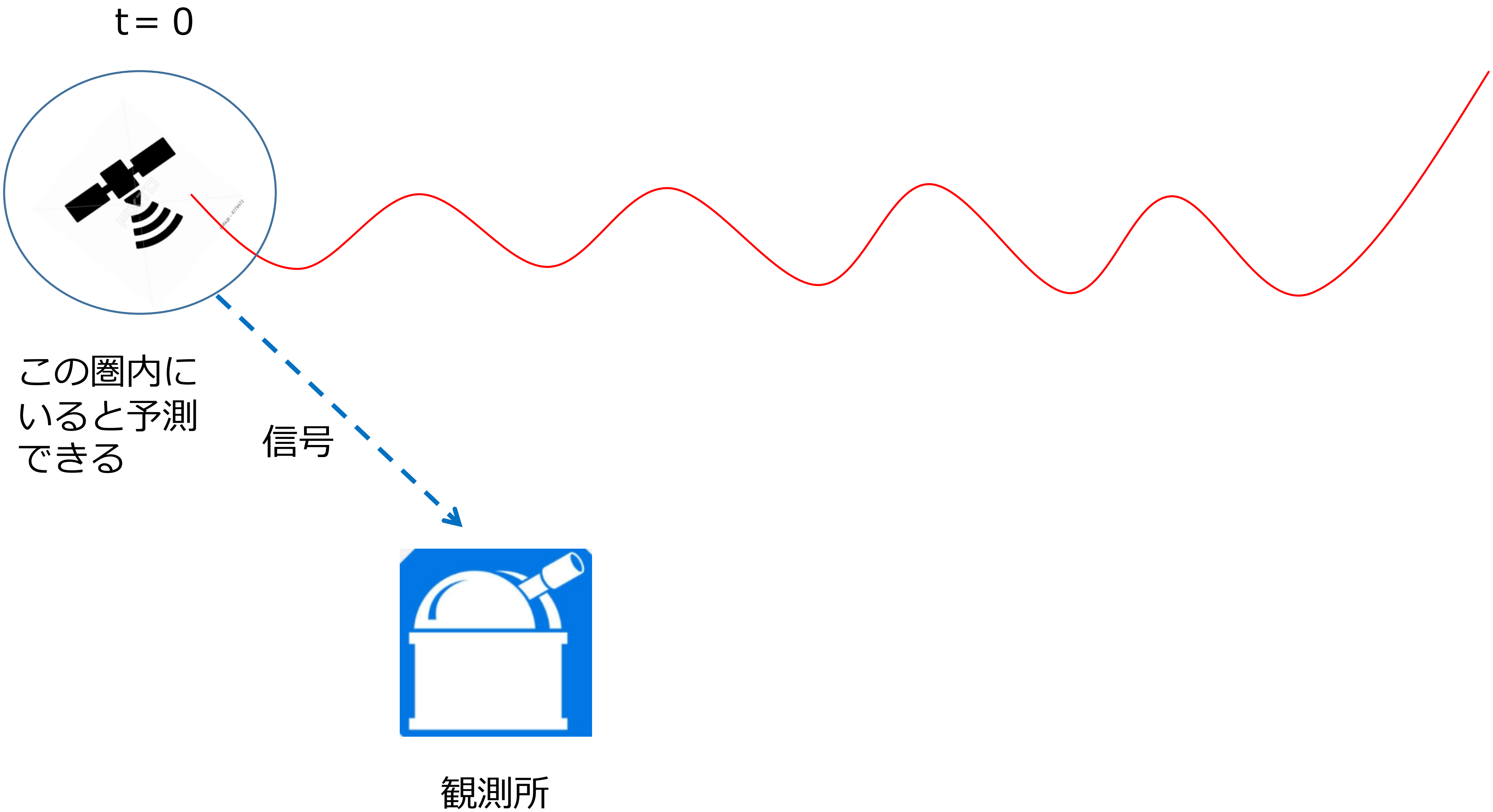


「衛星の位置は揺らぎながら変化する」

「確率的なあてをつけて、衛星の位置を予測し、追跡する」

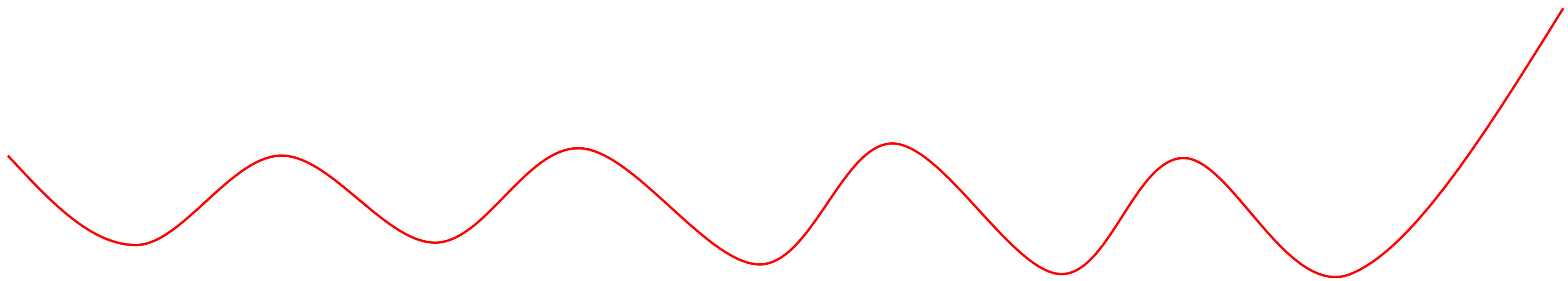
観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

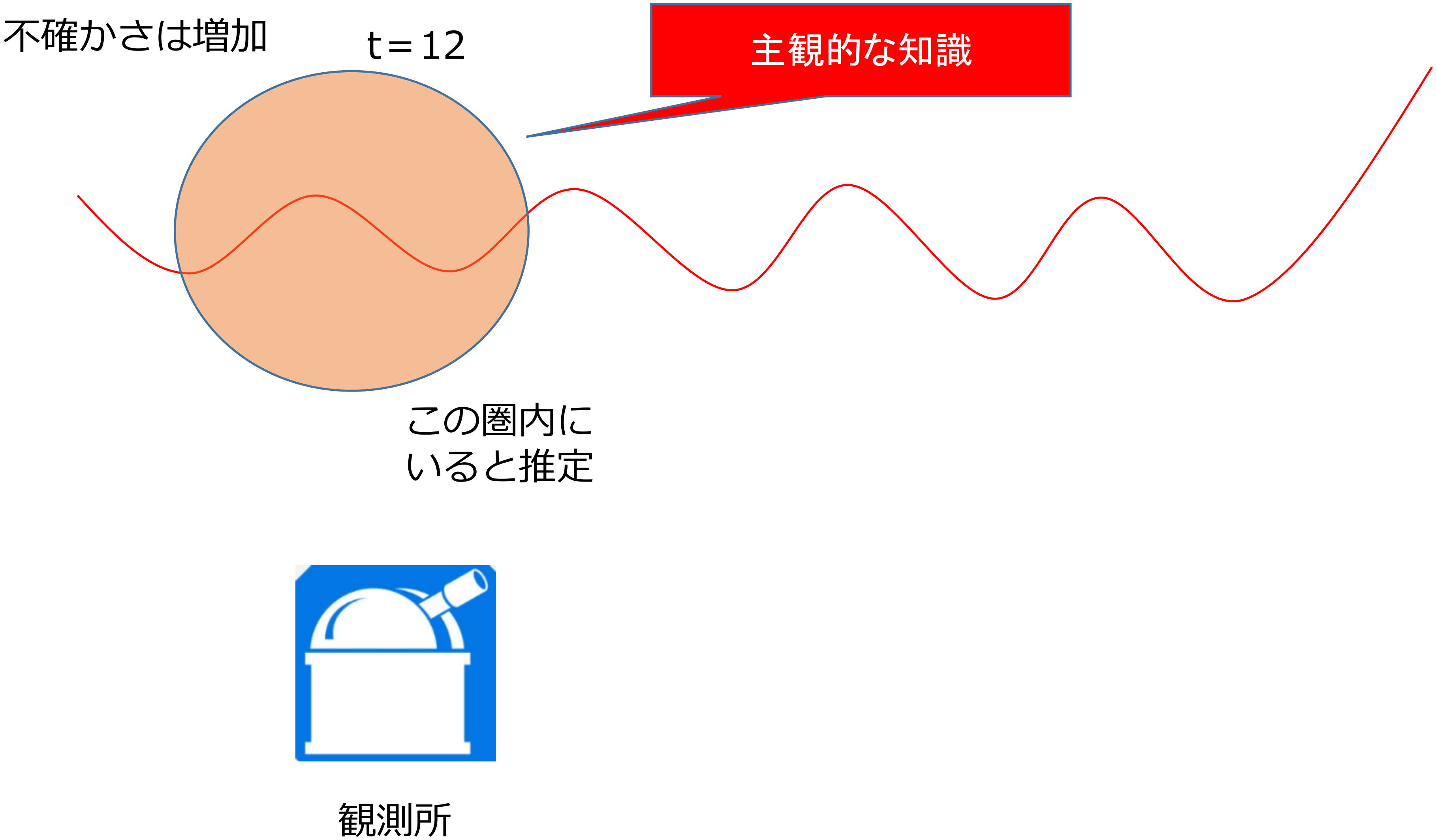
t＝12



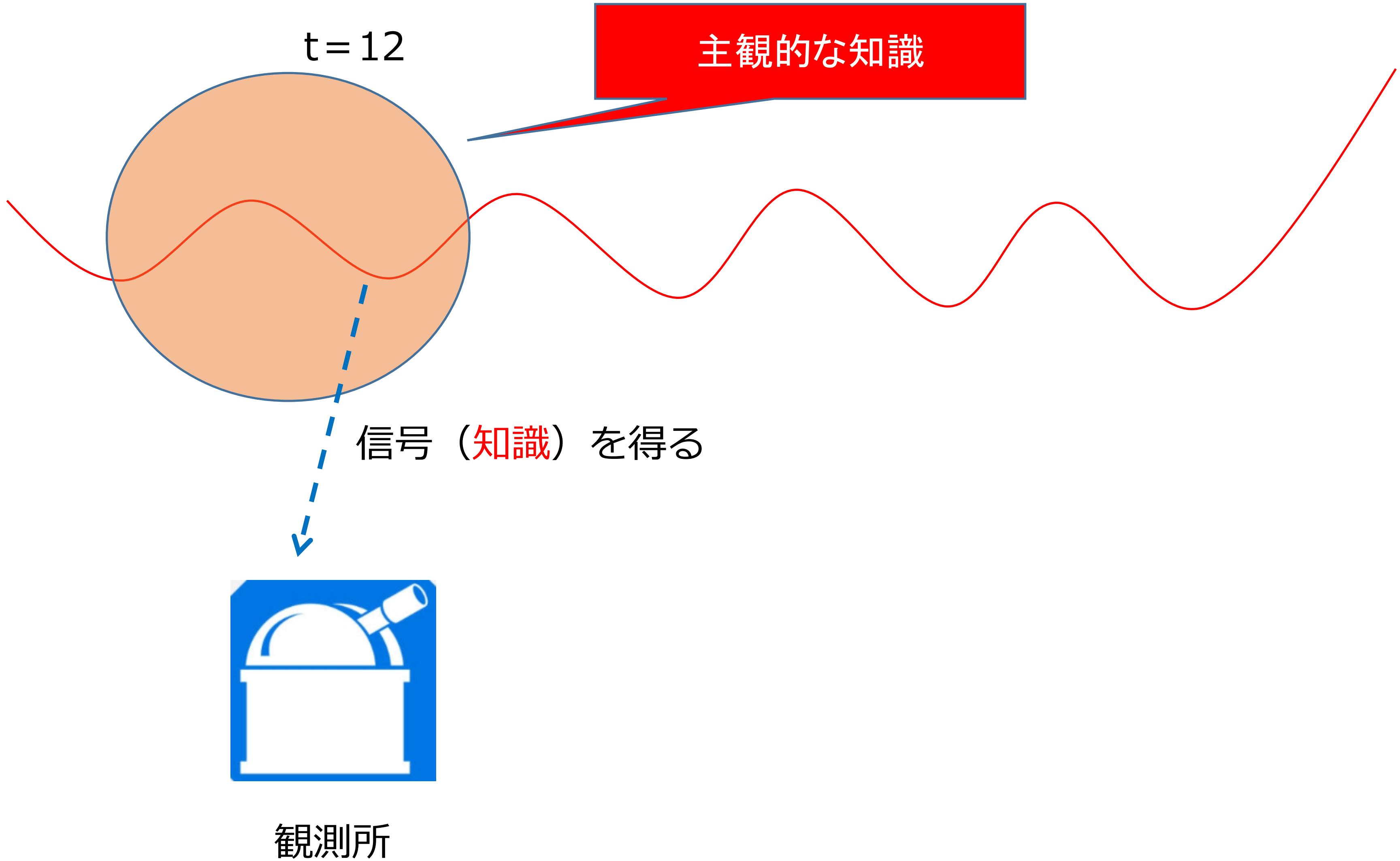
どこに位置するか推定する？

観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



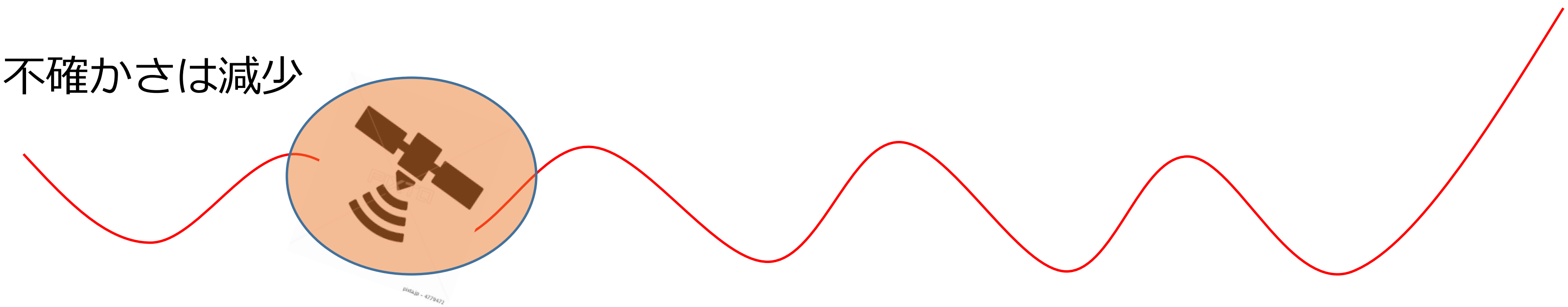
例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

t＝12

不確かさは減少



より正確に位置の
特定ができる

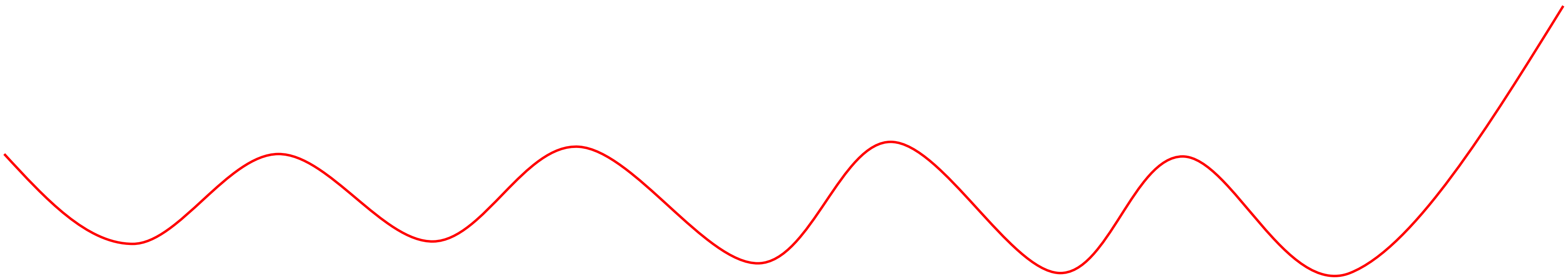
新しい分布

観測所

分布の更新をベイズの理論を応用して行う

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」

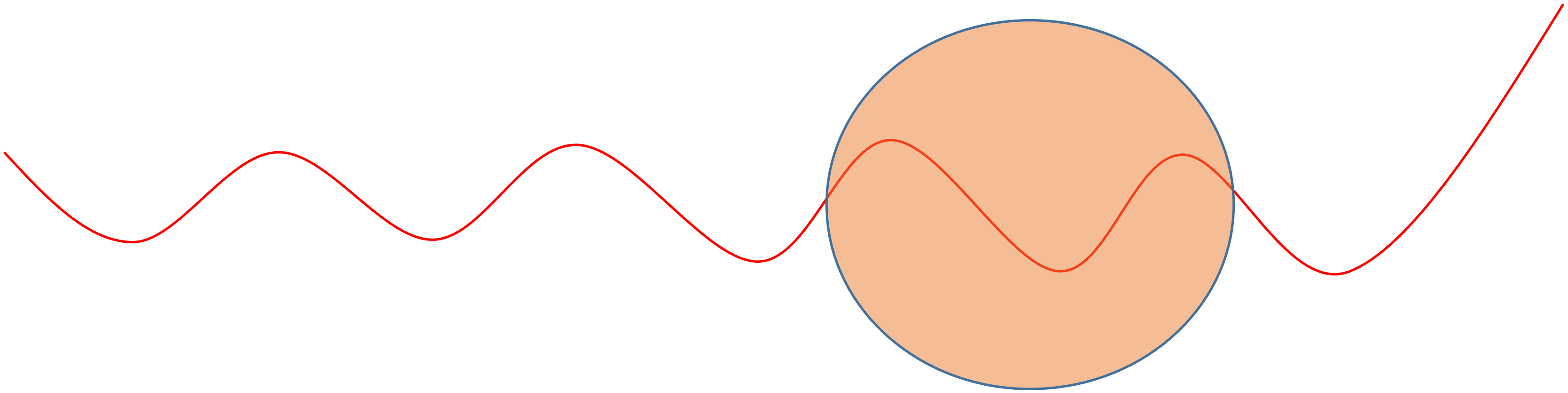
t＝24



どこに位置するか推定する？

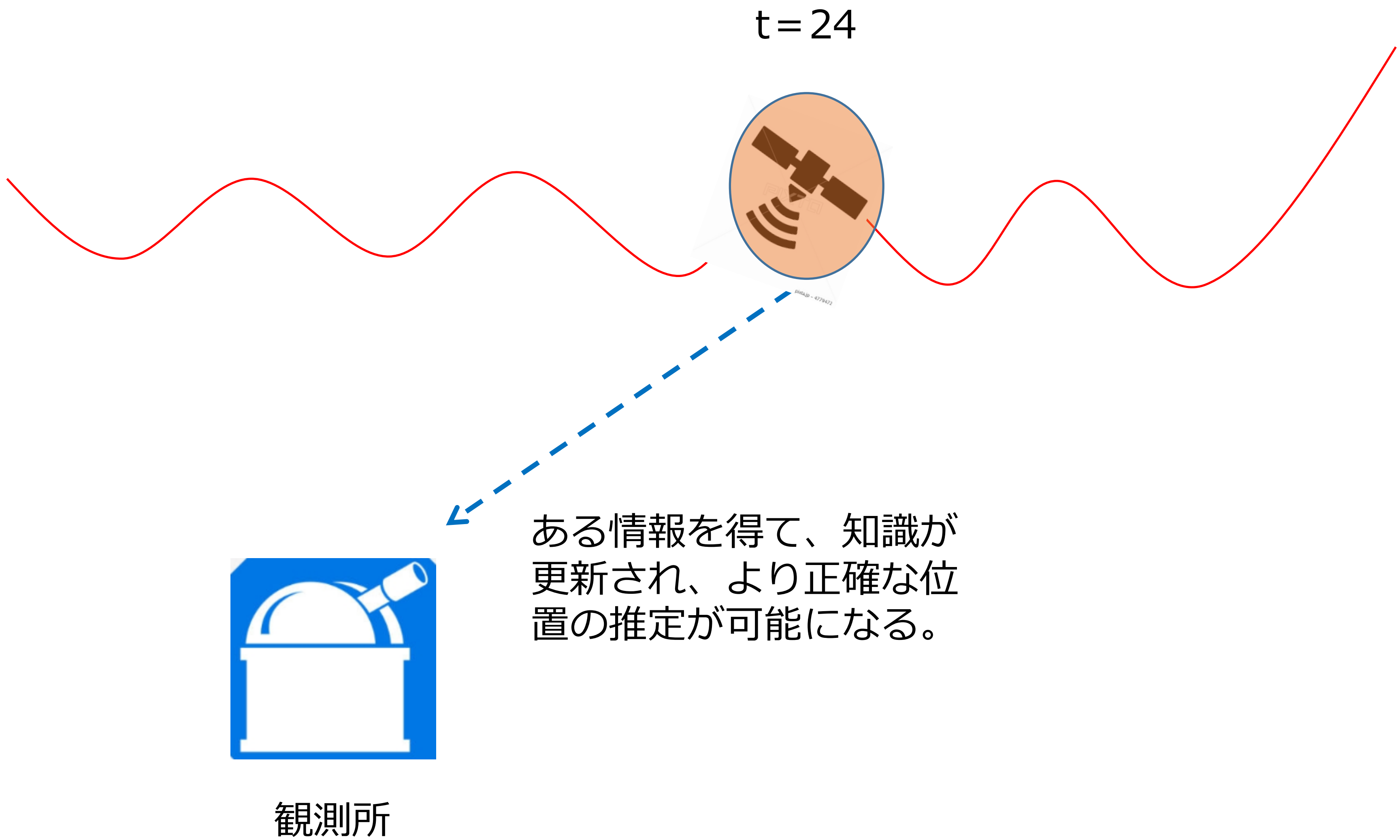
観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



観測所

例「見えない衛星の位置（状態）を予想する」



ある情報を得て、知識が更新され、より正確な位置の推定が可能になる。

PART2 条件付き確率とベイズの定理

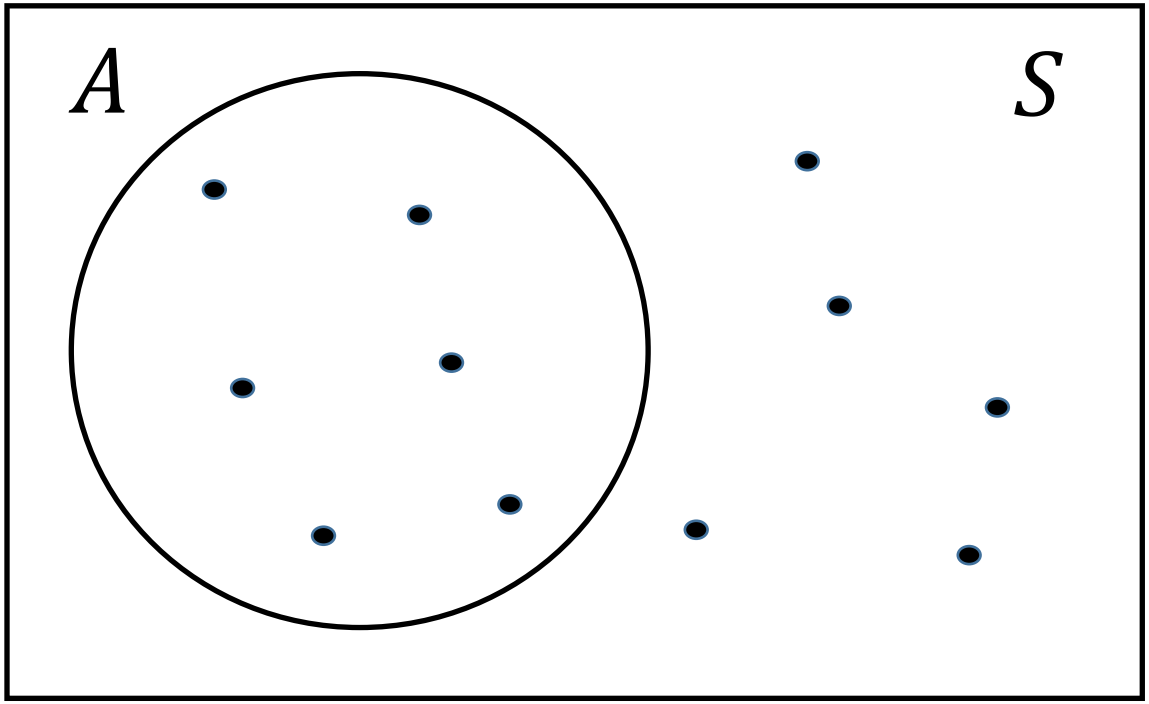
事象Aの起こる確率

事象Aの起こる確率

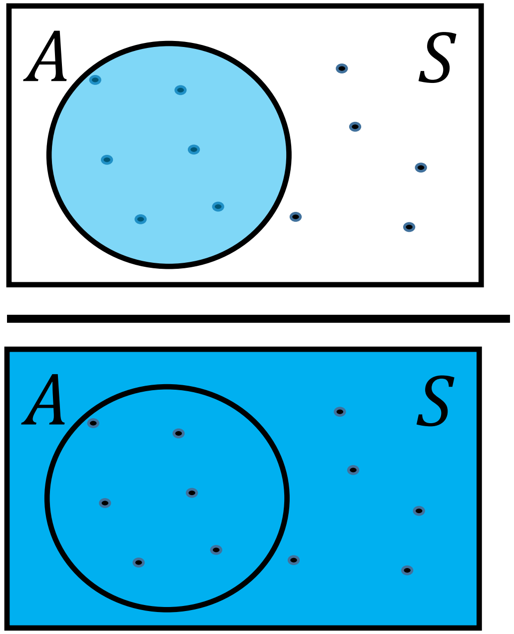
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

偶数事象の要素数

標本空間の要素数



$P(A) =$



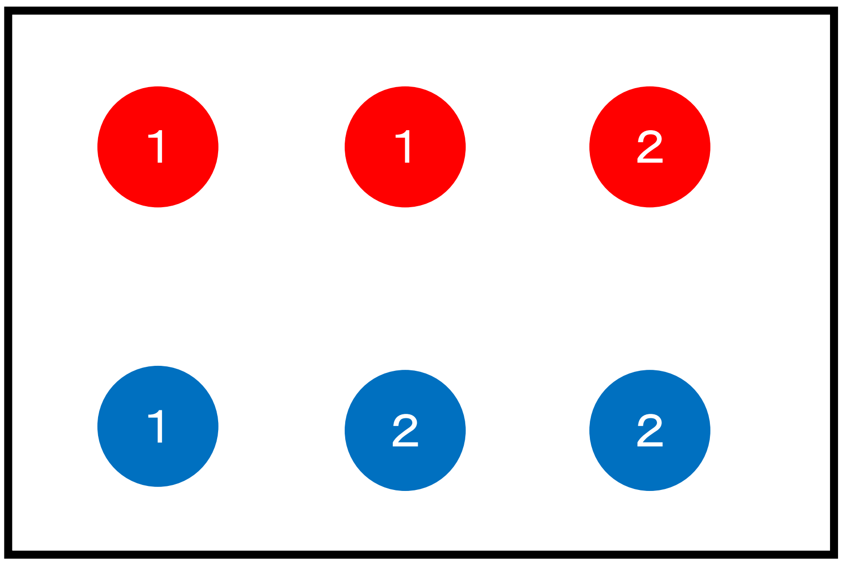
事象Aの起こる確率

事象Aの起こる確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

事象Aの要素数

標本空間の要素数



問題

「1」と書かれた赤色の玉が取り出される確率

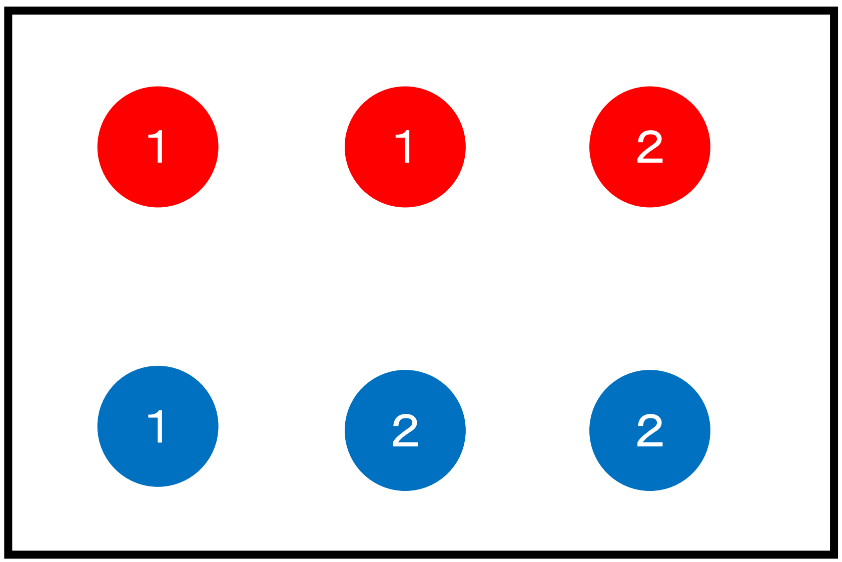
事象Aの起こる確率

事象Aの起こる確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

事象Aの要素数

標本空間の要素数



問題

「1」と書かれた赤色の玉が取り出される確率

$A = \{1$と書かれた赤色の玉$\}$

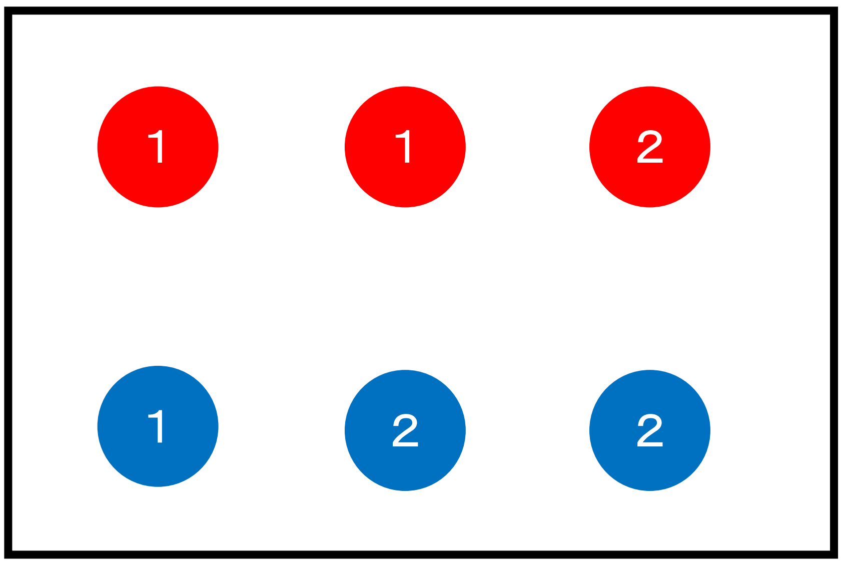
事象Aの起こる確率

事象Aの起こる確率

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

事象Aの要素数

標本空間の要素数



問題

「1」と書かれた赤色の玉が取り出される確率

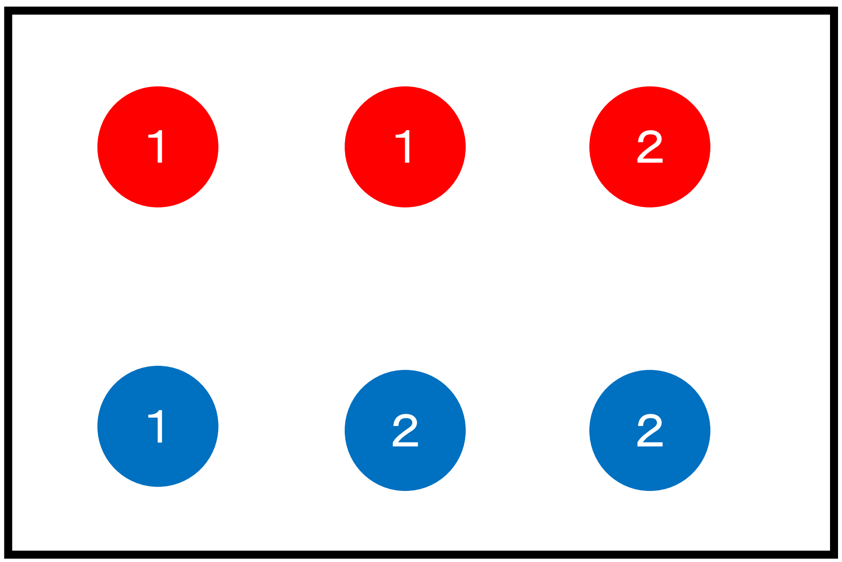
$A=\{1$と書かれた赤色の玉$\}$

$$P(A)=\frac{2}{6}$$

条件付き確率

事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



問題

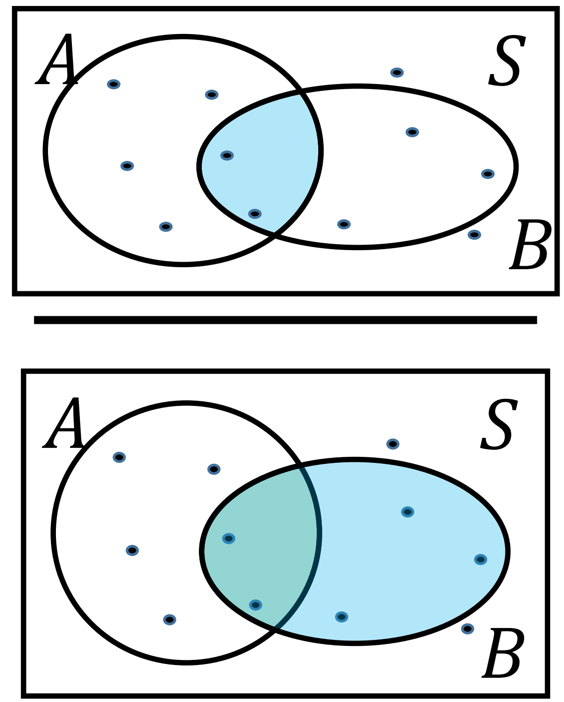
赤色が取り出されました。この赤い玉に「1」と書かれている確率は？

条件付き確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

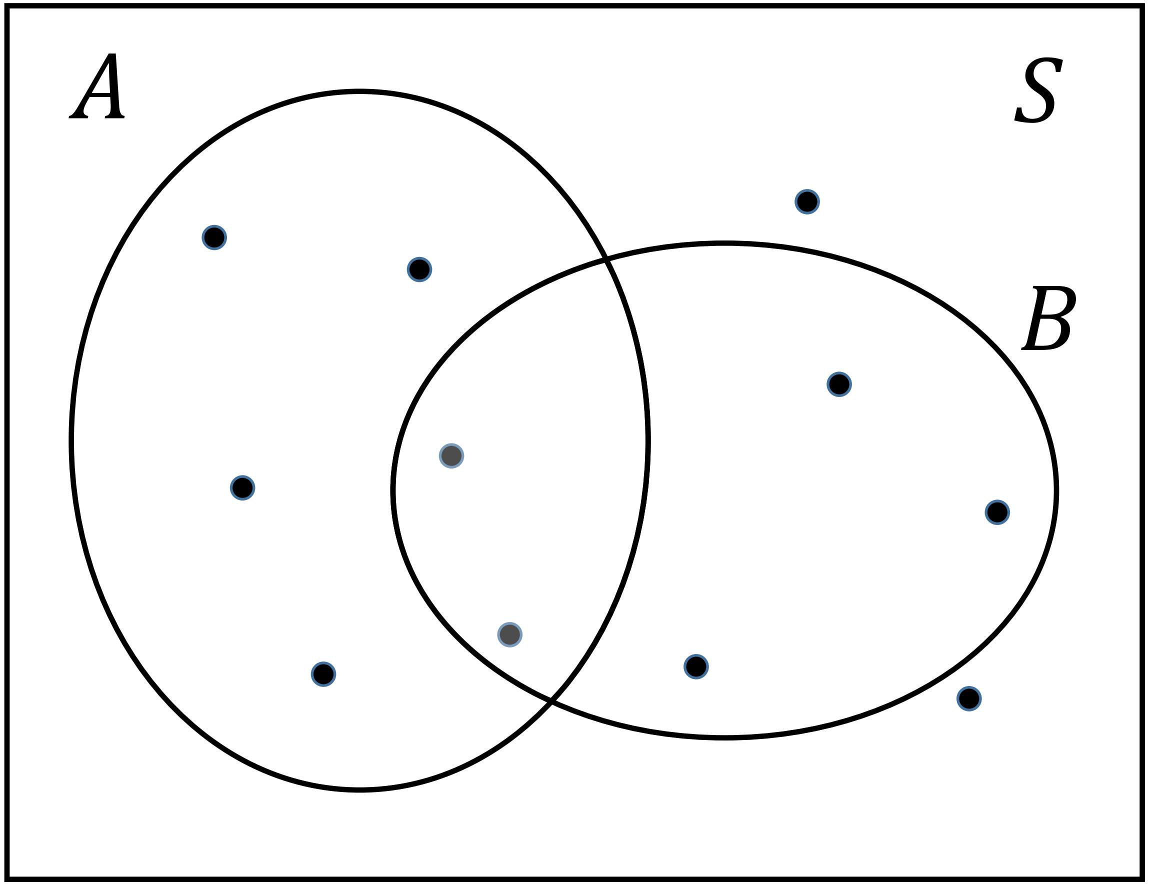


（事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率）

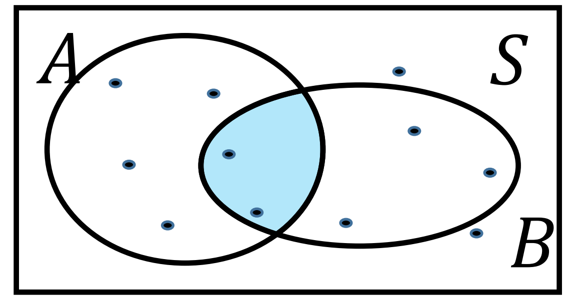
条件付き確率

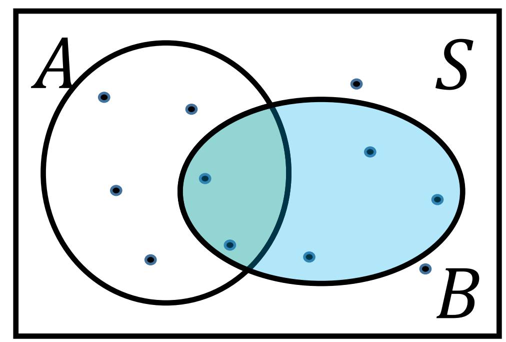
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

（事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率）



$P(A|B) =$

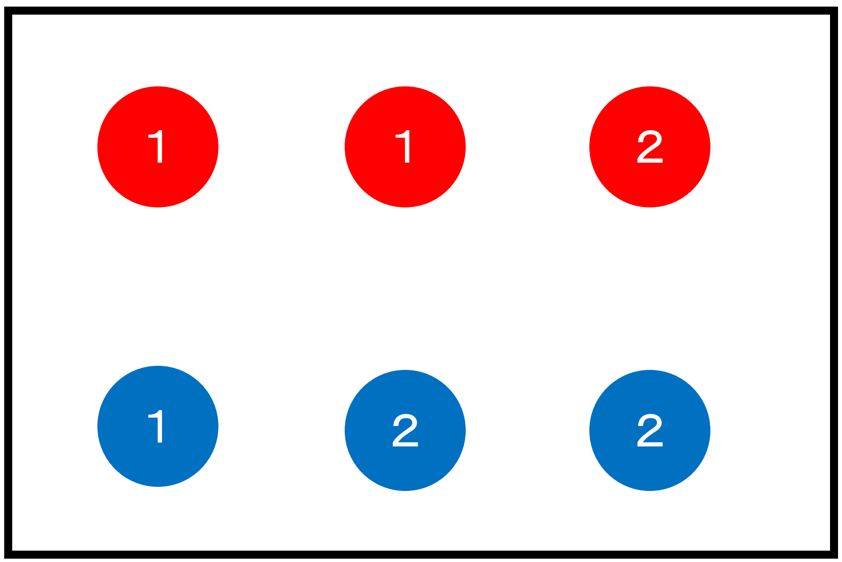




条件付き確率

事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



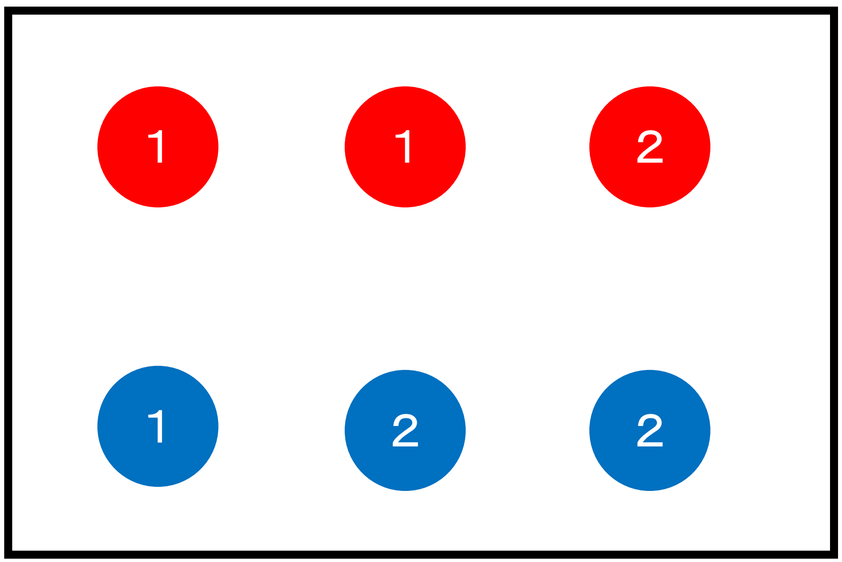
問題

赤色が取り出されました。この赤い玉に「1」と書かれている確率は？

条件付き確率

事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



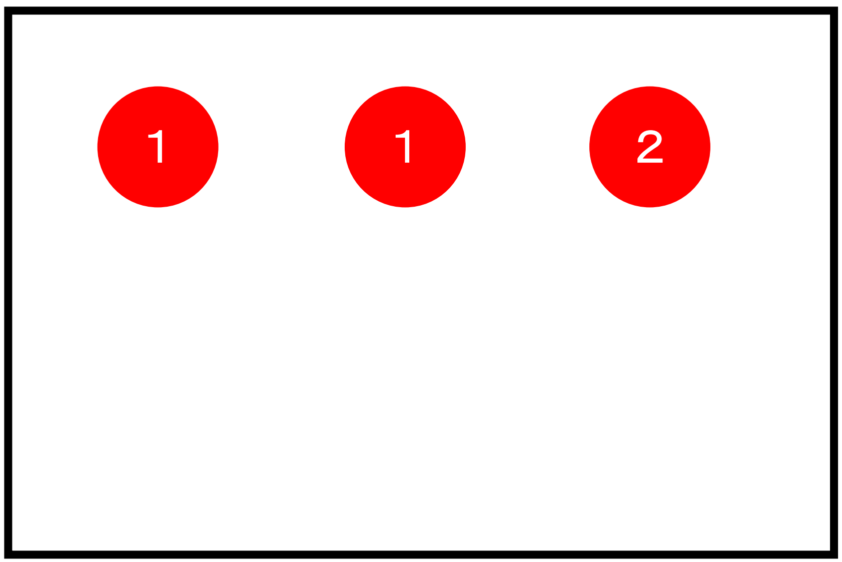
問題

赤色が取り出されました。この赤い玉に「1」と書かれている確率は？

条件付き確率

事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



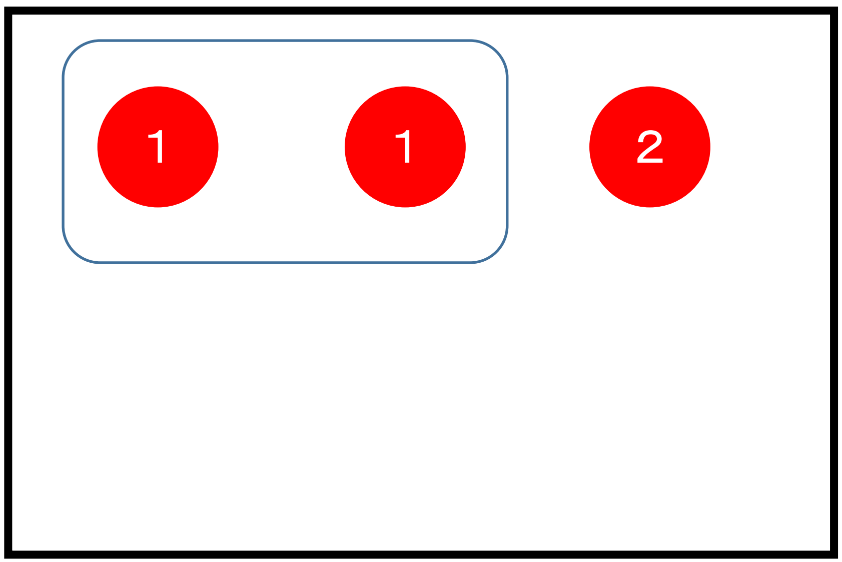
問題

赤色が取り出されました。この赤い玉に「1」と書かれている確率は？

条件付き確率

事象Bが起こる条件の下で事象Aが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



問題

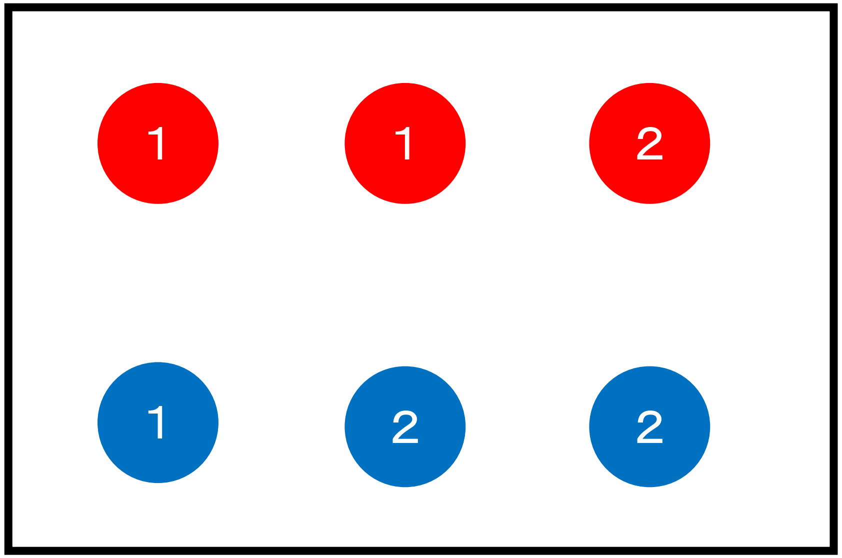
赤色が取り出されました。この赤い玉に「1」と書かれている確率は？

$A = \{1と書かれた玉\}$

$B = \{赤色の玉\}$

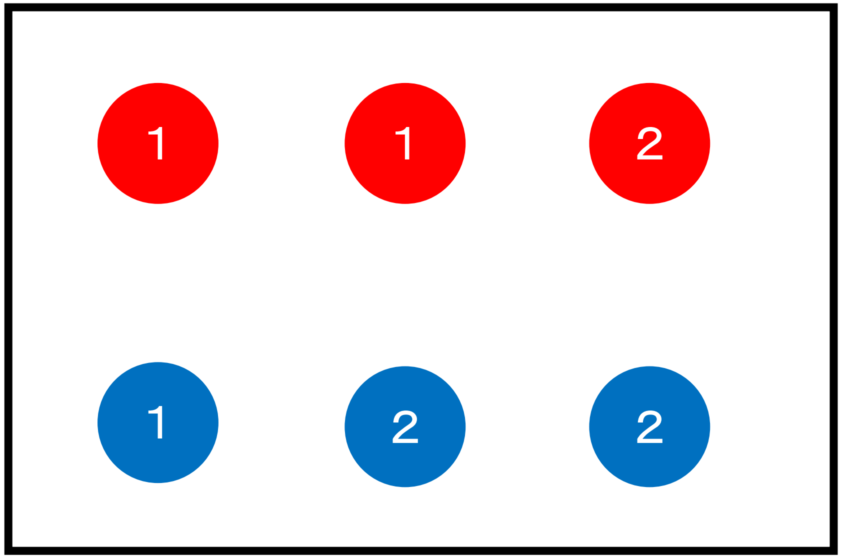
$$P(A|B) = \frac{2}{3}$$

周辺分布



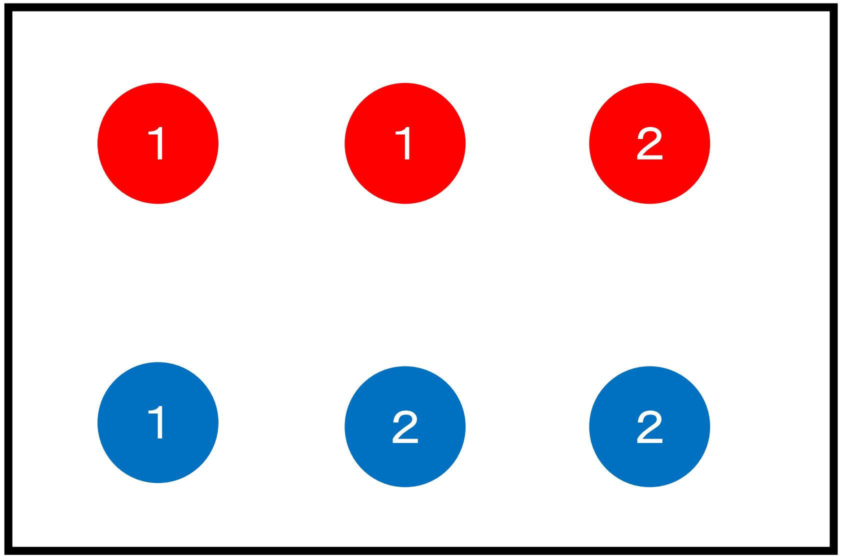
	1	2
赤		
青		

周辺分布



	1	2
赤	P(1∩🔴)	P(2∩🔴)
青	P(1∩🔵)	P(2∩🔵)

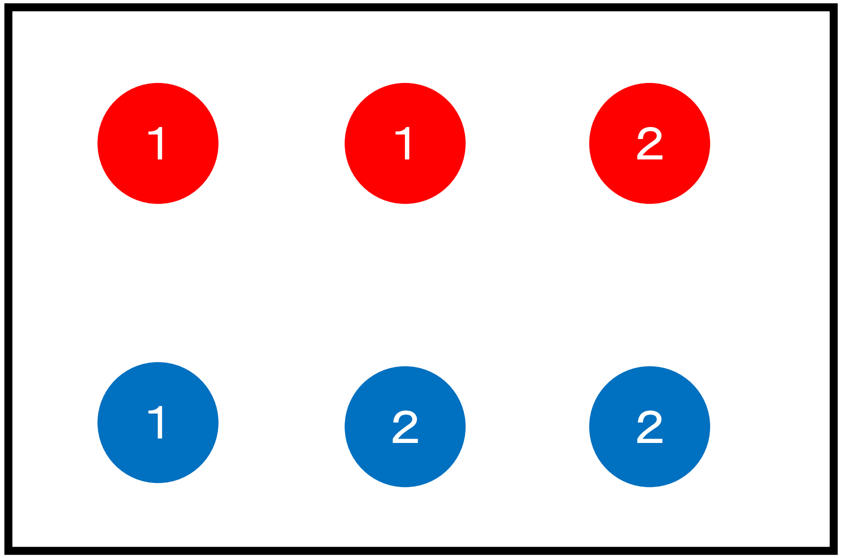
周辺分布



	1	2
赤	P(1 ∩ 🔴)	P(2 ∩ 🔴)
青	P(1 ∩ 🔵)	P(2 ∩ 🔵)
	P(1)	P(2)

- 周辺分布：色について何も知らない時の分布

周辺分布

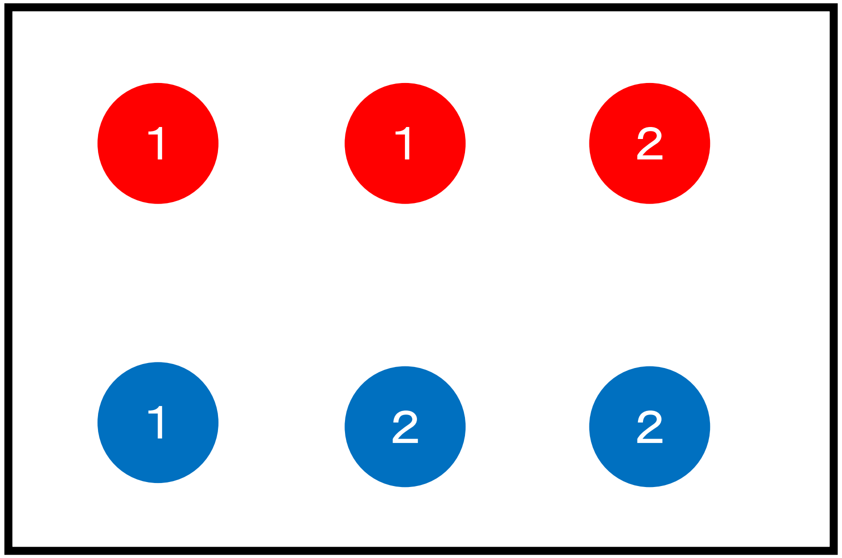


	1	2
赤	P(1∩🔴)	P(2∩🔴)
青	P(1∩🔵)	P(2∩🔵)
	P(1)	P(2)

- 周辺分布：色について何も知らない時の分布

赤玉が出たという情報を得た時に。。。

周辺分布

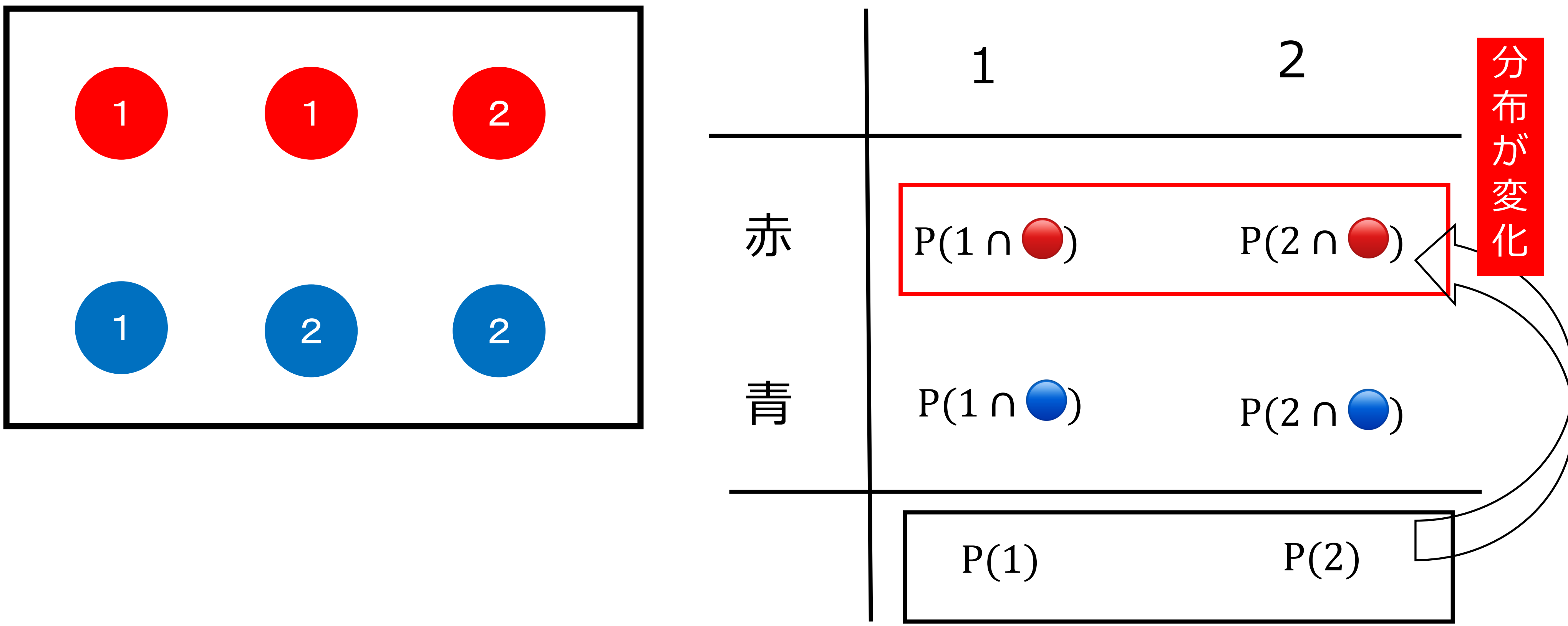


	1	2
赤	P(1∩●)	P(2∩●)
青	P(1∩●)	P(2∩●)
	P(1)	P(2)

- 周辺分布：色について何も知らない時の分布

赤玉が出たという情報を得た時に。。。

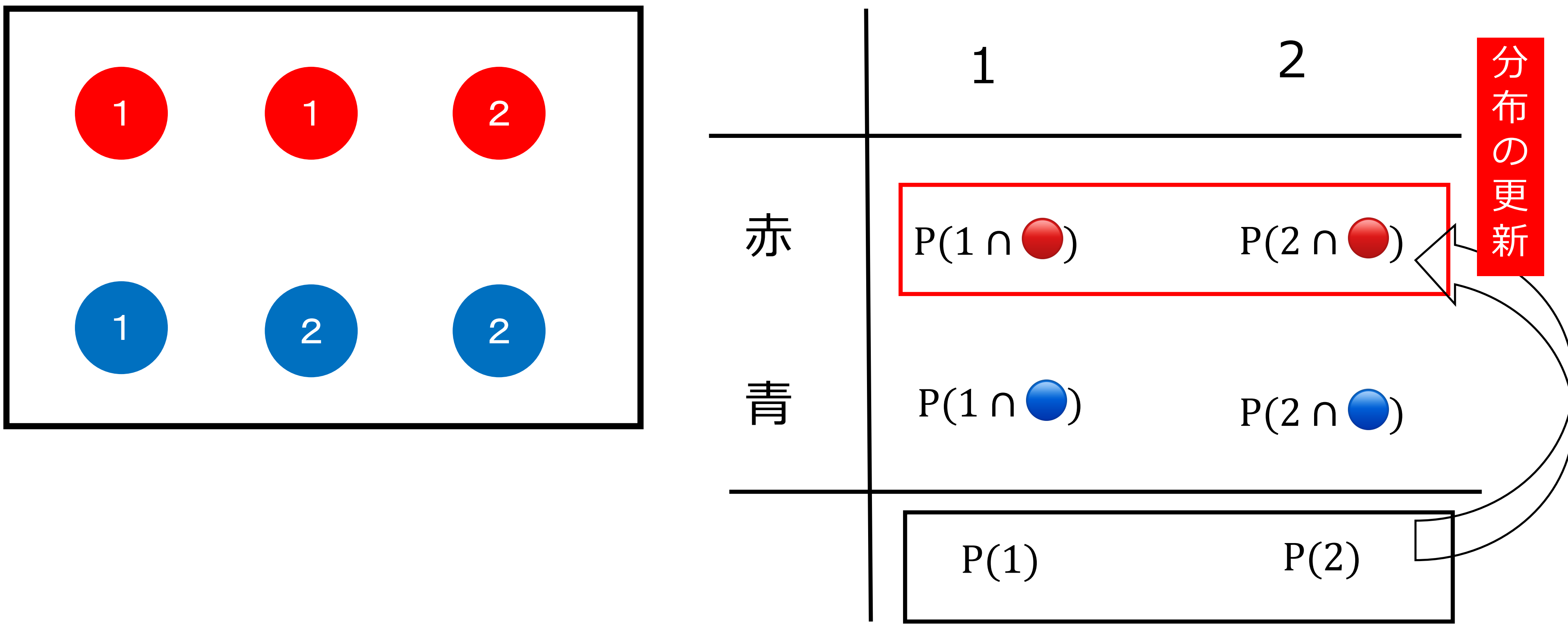
周辺分布



- 周辺分布：色について何も知らない時の分布

赤玉が出たという情報を得た時に。。。

周辺分布



- 周辺分布：色について何も知らない時の分布

赤玉が出たという情報を得た時に。。。

条件付き確率

- 周辺分布：Bについて何も知らない時の分布

	A_1	$\cdots$	A_n
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_n \cap B_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
B_m	$P(A_1 \cap B_m)$	$\cdots$	$P(A_n \cap B_m)$
	$\boxed{P(A_1)}$	$\cdots$	$\boxed{P(A_n)}$

周辺分布

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} P(A_i \cap B_j)$$

Bについて何もわからない
ので全部足し合わせてしまう

$P(A_i)$：Bについて何も
知らない時の布

条件付き確率

- B_jが起こったという情報を得た時

	A_1	$\cdots$	A_n
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$\cdots$	$P(A_n \cap B_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
B_j	$P(A_1 \cap B_j)$	$\cdots$	$P(A_n \cap B_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
B_m	$P(A_1 \cap B_m)$	$\cdots$	$P(A_n \cap B_m)$
	$P(A_1)$	$\cdots$	$P(A_n)$

新しい分布に更新できる

分布が変化する

条件付き確率

事象Bが起こったという条件の下で、事象Aが発生する確率

$$P(A_i | B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

条件付き確率

事象Bが起こったという条件の下で、事象Aが発生する確率

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

事象A,Bが独立の場合

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i)P(B_j)}{P(B_j)} = P(A_i)$$

無関係な知識を得ても、
分布の更新なし

条件付き確率

事象Bが起こったという条件の下で、事象Aが発生する確率

$$P\left(A_i \middle| B_j\right) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

事象Bが起こったという情報を得て、

$P(A_i)$が$P\left(A_i \middle| B_j\right)$に更新されたと考える

条件付き確率

事象Bが起こったという条件の下で、事象Aが発生する確率

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$P(A_i)$は条件付き確率の定義に入っていない

事象Bが起こったという情報を得て、

$P(A_i)$が$P(A_i|B_j)$に更新されたと考える

条件付き確率

事象Bが起こったという条件の下で、事象Aが発生する確率

$$P\left(A_i \middle| B_j\right) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$P(A_i)$は条件付き確率の定義に入っていない

事象Bが起こったという情報を得て、

$P(A_i)$が$P\left(A_i \middle| B_j\right)$に更新されたと考える

課題

$P(A_i)$という「主観的な確率」を更新された確率の中に取り組みたい

条件付き確率からベイズの定理

条件付き確率の定義 $$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$$P(A_i \cap B_j) = \boxed{P(A_i|B_j)\,P(B_j)}$$

$$P(B_j \cap A_i) = \boxed{P(B_j|A_i)\,P(A_i)}$$

同じこと

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i)$$

$P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P(A_i)$を使う

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(B_j|A_i)P(A_i)}{P(B_j)}$$

ベイズの定理

ベイズの定理

- $P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P\left(B_j \middle| A_i\right)P(A_i)$ と変形して使う

$$P\left(A_i \middle| B_j\right) = \frac{P(B_j|A_i)}{P(B_j)}P(A_i)$$

ベイズの定理

- $P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P\left(B_j \middle| A_i\right)P(A_i)$ と変形して使う

$$P\left(A_i \middle| B_j\right) = \frac{P(B_j|A_i)}{P(B_j)} \boxed{P(A_i)}$$

事前分布

ベイズの定理

- $P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P\left(B_j \middle| A_i\right)P(A_i)$ と変形して使う

事後分布

$$\boxed{P\left(A_i \middle| B_j\right)} = \frac{P(B_j|A_i)}{P(B_j)}\boxed{P(A_i)}$$

事前分布

更新された

ベイズの定理

- $P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P\left(B_j \middle| A_i\right)P(A_i)$ と変形して使う

尤度

事後分布

$$\boxed{P\left(A_i \middle| B_j\right)} = \frac{\boxed{P(B_j|A_i)}}{P(B_j)}\boxed{P(A_i)}$$

事前分布

更新された

ベイズの定理

- $P(A_i \cap B_j)$の計算をするのに$P(B_j|A_i)P(A_i)$ と変形して使う

尤度

事後分布

$$\boxed{P(A_i|B_j)} = \frac{\boxed{P(B_j|A_i)}}{P(B_j)} \boxed{P(A_i)}$$

事前分布

更新された

もともと注目する事象についての情報が$P(A_i)$。これを「 B_jが起こった」という新しい情報で$P(A_i|B_j)$に更新する規則がベイズの定理

練習問題１　ベイズの定理応用

サイコロを１回投げた時、奇数が出たという条件の下で新しい分布を求めよ。事前分布と事後分布は？

練習問題2　ベイズの定理応用

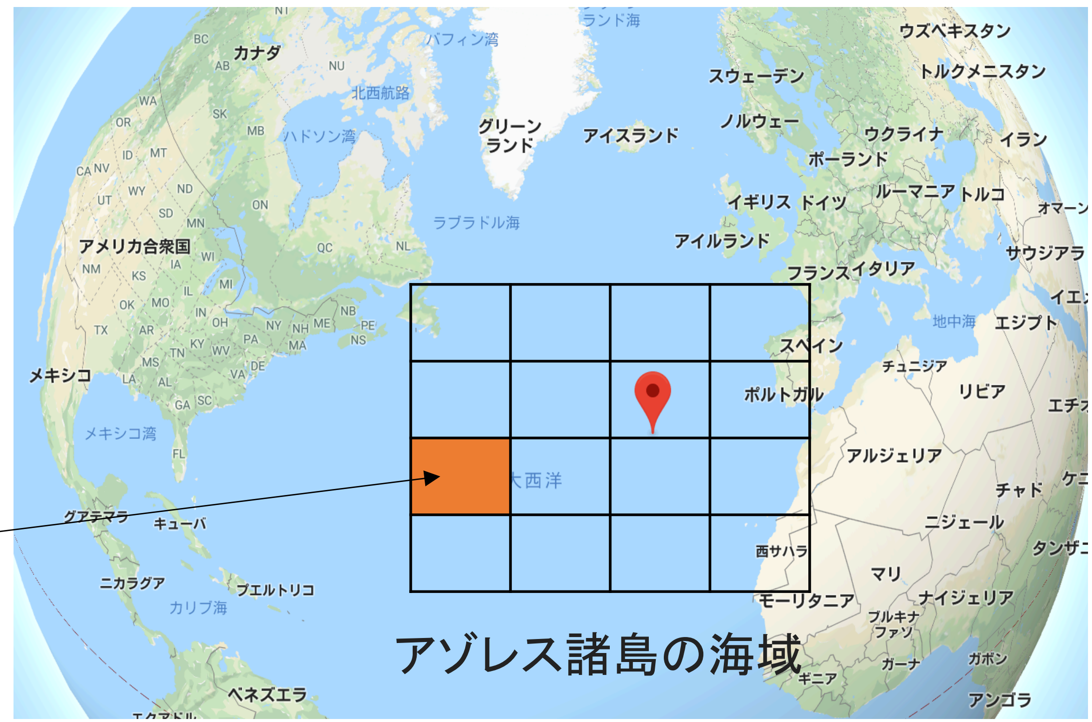
- スコーピオン (原子力潜水艦)

スコーピオンは地中海でのNATO演習参加後、１９６８年５月２１日夕方を最後に消息を絶った

練習問題2　ベイズの定理応用

- スコーピオン (原子力潜水艦)

スコーピオンは地中海でのNATO演習参加後、１９６８年５月２１日夕方を最後に消息を絶った



Grid

練習問題2　ベイズの定理応用

- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- B＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見される}

練習問題2　ベイズの定理応用

- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- B＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見される}

- A^C={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいない}
- B^C＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見されない}

練習問題2　ベイズの定理応用

- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- B＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見される}

- A^C={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいない}
- B^C＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見されない}

$$p = p(A)$$

$$q = p(B|A)$$

練習問題2　ベイズの定理応用

- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- B＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見される}

- A^C={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいない}
- B^C＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見されない}

$$p = p(A)$$

$$q = p(B|A)$$

- 潜水艦が発見される確率

練習問題2　ベイズの定理応用

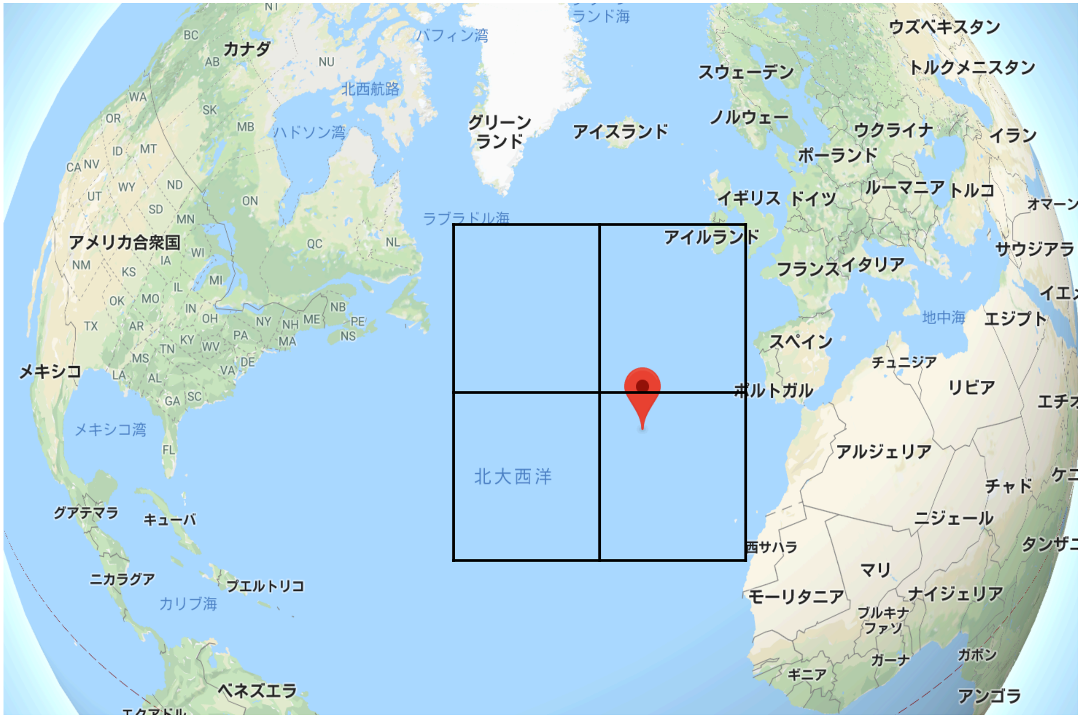
- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- B＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見される}

- A^C={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいない}
- B^C＝{潜水艦を探して、実際に潜水艦が発見されない}

$$p = p(A)$$ ← ・潜水艦が発見される確率

$$q = p(B|A)$$ ← ・探索船の性能

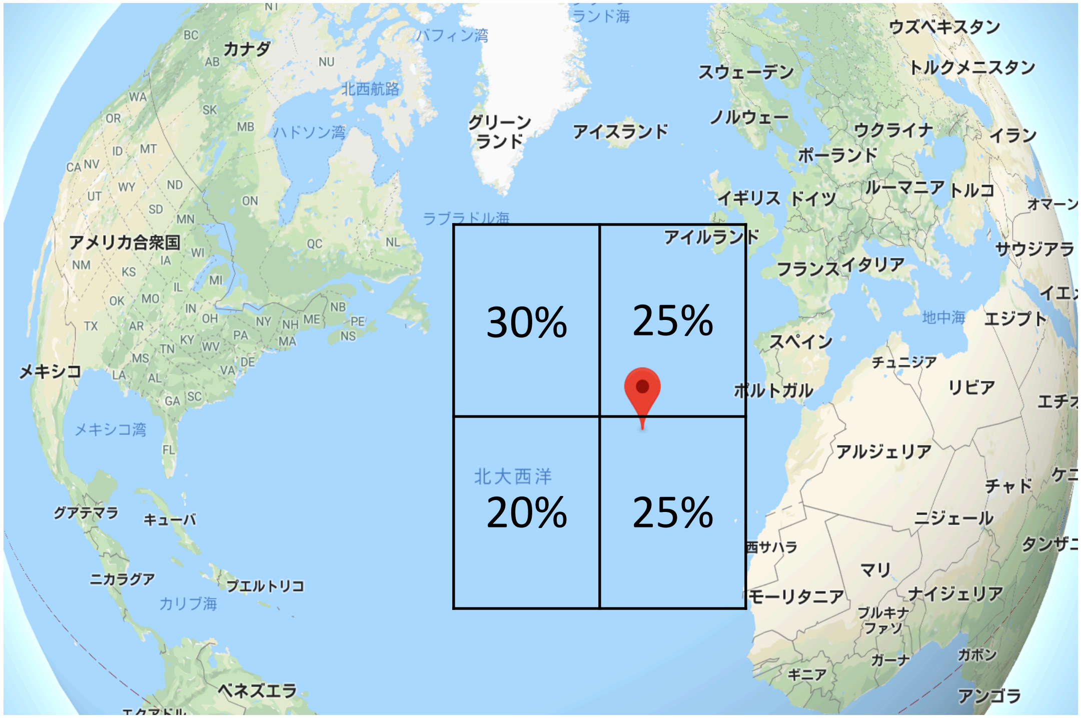
練習問題2　ベイズの定理応用



$$p = p(A)$$

▲主観的な確率

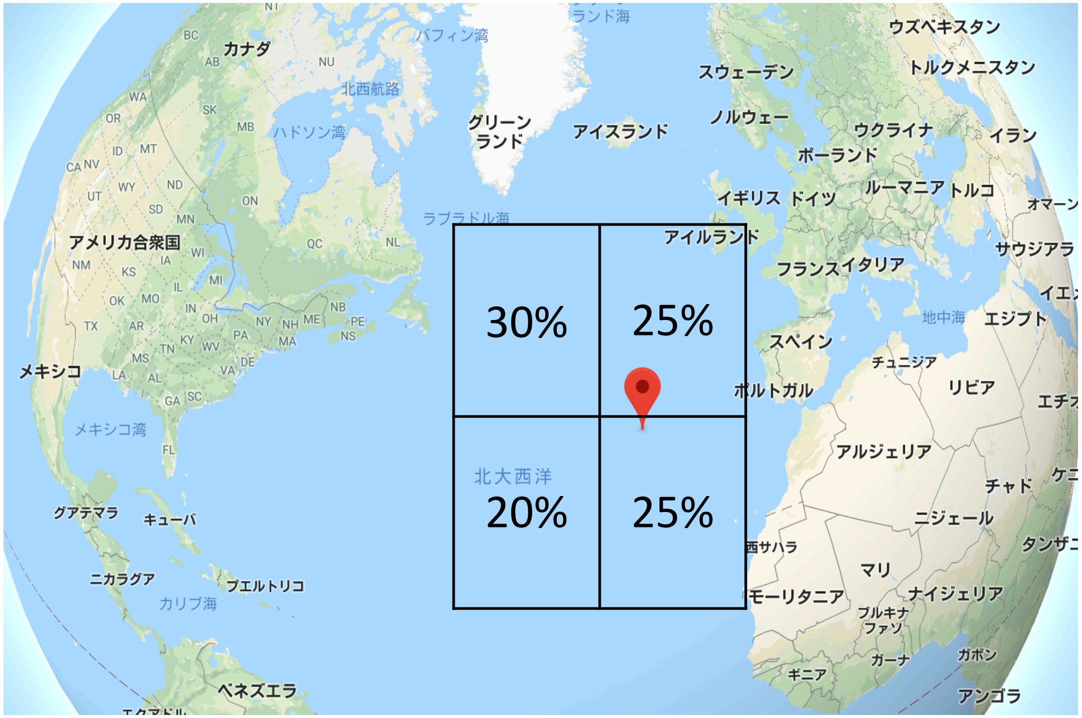
練習問題2　ベイズの定理応用



$$p = p(A)$$

▲主観的な確率

練習問題2　ベイズの定理応用



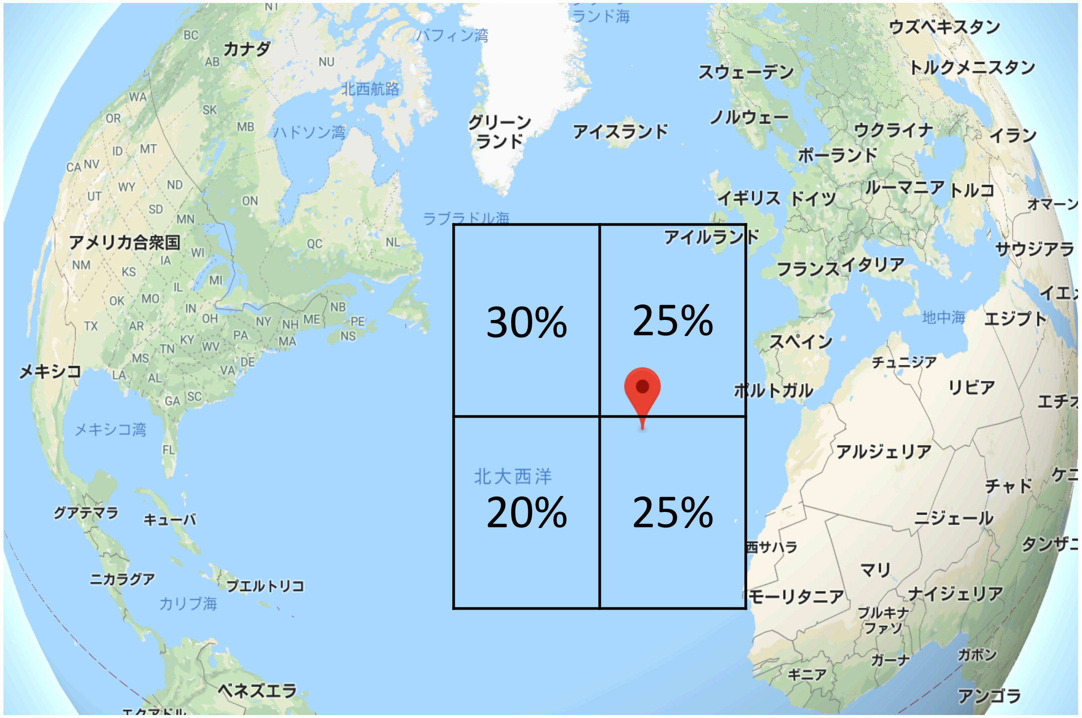
$p = p(A)$

▲主観的な確率

求めたい確率

$p(A|B^c)$

練習問題2　ベイズの定理応用



$$p = p(A)$$

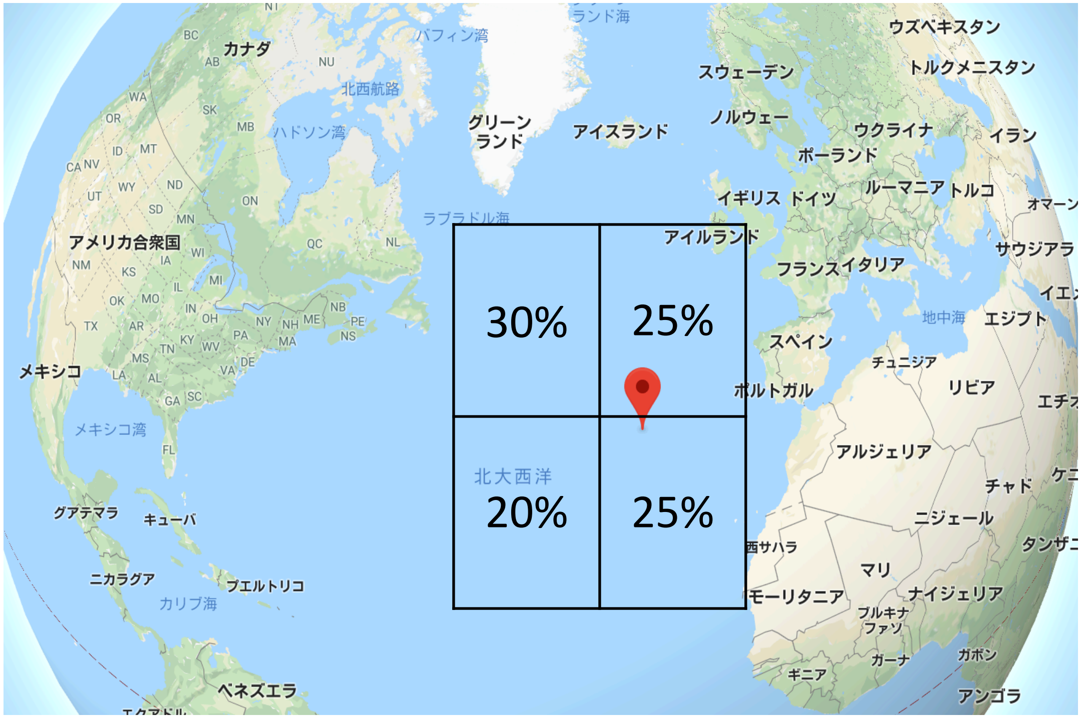
▲主観的な確率

求めたい確率

$$p(A|B^c)$$

搜索して潜水艦が見つからなかった確率

練習問題2　ベイズの定理応用



$p = p(A)$

▲主観的な確率

求めたい確率

$p(A|B^c)$

捜索して潜水艦が見つからなかった確率

もともと３０％ぐらいの確率で潜水艦がいると考えていた場所を、実際に探して発見できなかった後に、その海域に潜水艦がいる確率を定義したい。

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c|A)P(A) + P(B^c|A^c)P(A^c)}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c|A)\boxed{P(A)}}{P(B^c|A)\boxed{P(A)} + P(B^c|A^c)\boxed{P(A^c)}}$$

p

$1 - p$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c|A)p}{P(B^c|A)p + P(B^c|A^c)(1 - p\ )}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c|A)p}{P(B^c|A)p + \boxed{P(B^c|A^c)}(1-p\ )}$$

1

潜水艦が沈んでいない
ときに見つからない確
率

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{P(B^c|A)p}{P(B^c|A)p + \ (1 - p\ )}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{\boxed{P(B^c|A)}p}{\boxed{P(B^c|A)}p + (1 - p)}$$

ここで

$$P(B^c|A) + P(B|A) = 1$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{\boxed{P(B^c|A)}p}{\boxed{P(B^c|A)}p + (1 - p)}$$

ここで

$$P(B^c|A) + P(B|A) = 1$$

$$P(B^c|A) = 1 - \mathrm{q}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c)}$$

$$= \frac{(1-q)p}{(1-q)p + (1-p)}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

- A={ある海域（grid）に潜水艦が沈んでいる}
- Bᶜ={潜水艦を探して、潜水艦が発見されない}

$$p = p(A)$$ ← • 潜水艦が発見される確率

$$q = p(B|A)$$ ← • 探索船の性能

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

事前分布

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

		A	A^c	
	B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$	
潜水艦が発見されなかった	$\boxed{B^c}$	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$	
		$\boxed{p = p(A)}$	$\boxed{1 - p}$	事前分布

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

事後分布

更新

事前分布

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

事後分布

更新

事前分布

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$P(A\| B^c)P(A)$	$P(A^c\|B^c)P(A^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

事後分布

更新

事前分布

条件付き確率・ベイズ確率

- ２つの事象A,Bを考える

	A	A^c
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$
B^c	$\boldsymbol{P(A \mid B^c)}P(A)$	$P(A^c \mid B^c)P(A^c)$
	$p = p(A)$	$1 - p$

事後分布

更新

事前分布

練習問題　ベイズの定理応用2

$$\boxed{P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}}$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$　探索船の性能が100%のとき

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$　探索船の性能が100%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p1}{1 - p1} = 0$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$　探索船の性能が100%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p1}{1 - p1} = 0$$

もうその海域に潜水艦は
沈んで無いと断定

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$ 探索船の性能が100%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p1}{1 - p1} = 0$$

もうその海域に潜水艦は沈んで無いと断定

$q = 0$ 探索船の性能が0%のとき

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$ 探索船の性能が100%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p1}{1 - p1} = 0$$

もうその海域に潜水艦は沈んで無いと断定

$q = 0$ 探索船の性能が0%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p0}{1 - p0} = p$$

練習問題　ベイズの定理応用2

$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = 1$ 探索船の性能が100%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p1}{1 - p1} = 0$$

もうその海域に潜水艦は沈んで無いと断定

$q = 0$ 探索船の性能が0%のとき

$$P(A|B^c) = \frac{p - p0}{1 - p0} = p$$

更新なし

練習問題　ベイズの定理応用2

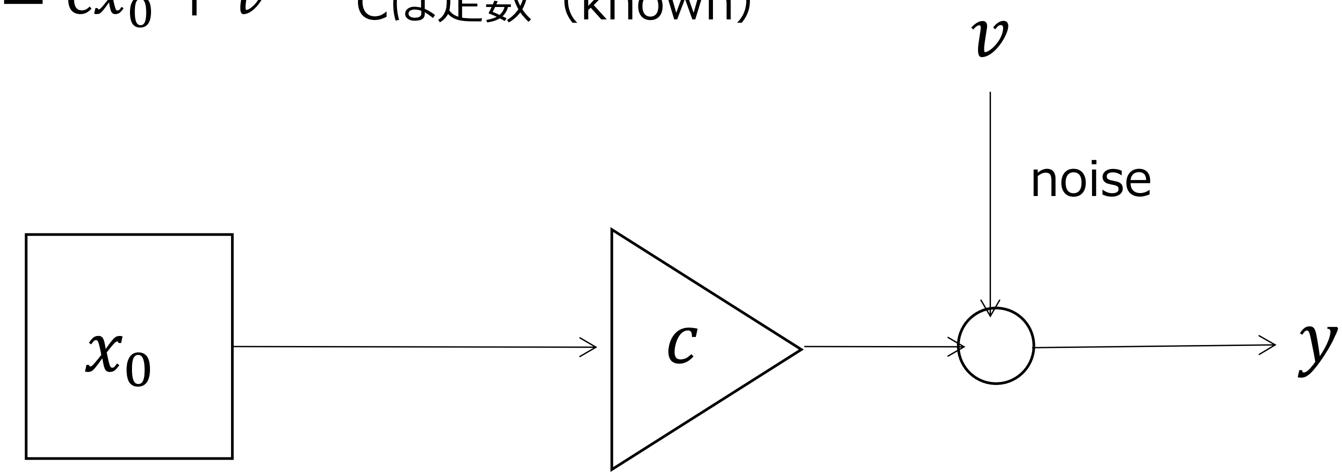
$$P(A|B^c) = \frac{p - pq}{1 - pq}$$

$q = \frac{2}{3}$ 探索船の性能が66.6%のとき

Part3 状態の推定

状態の推定 1

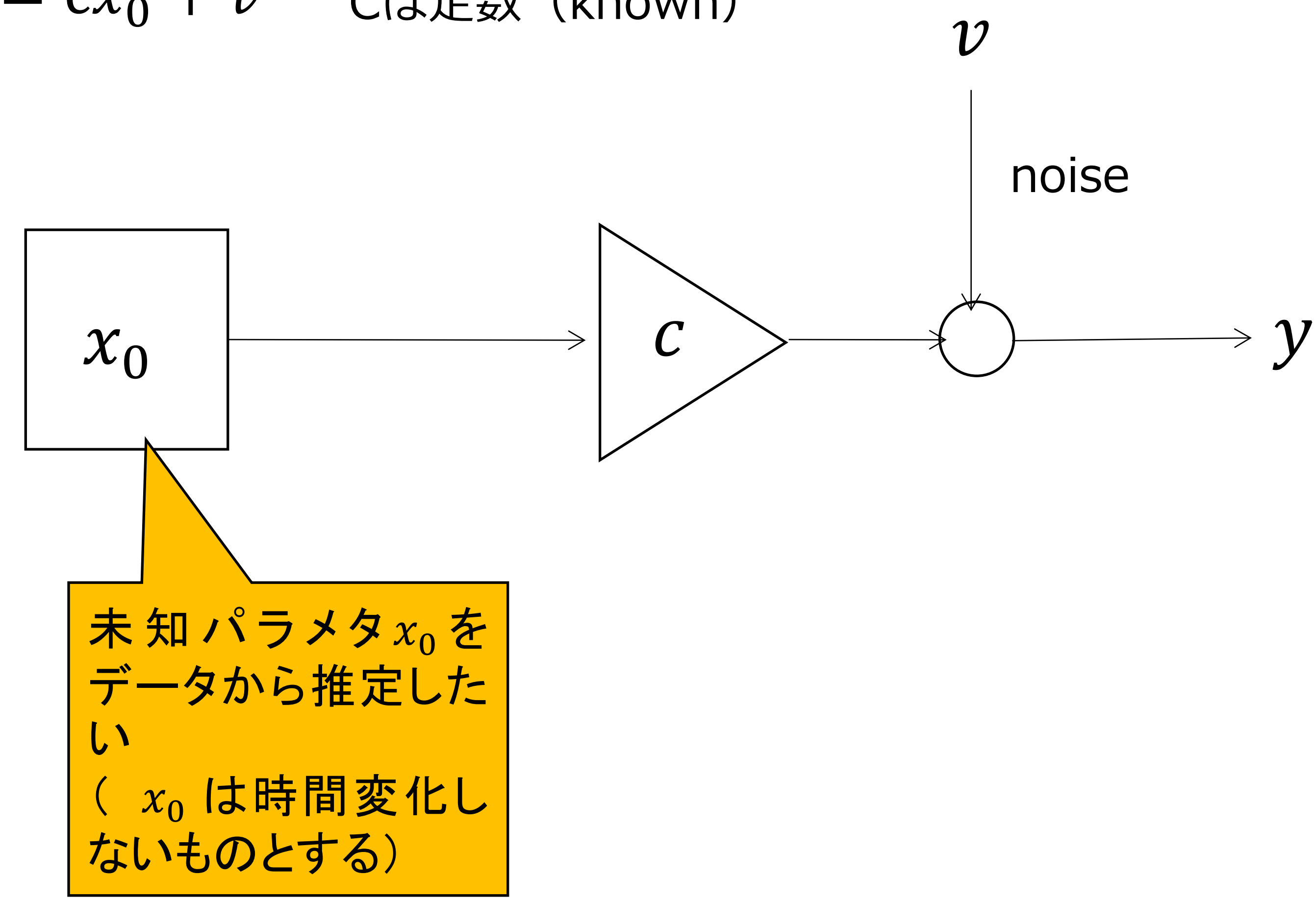
- $y = cx_0 + v$ Cは定数（known）



ここではx_0の状態が変化しないと仮定する

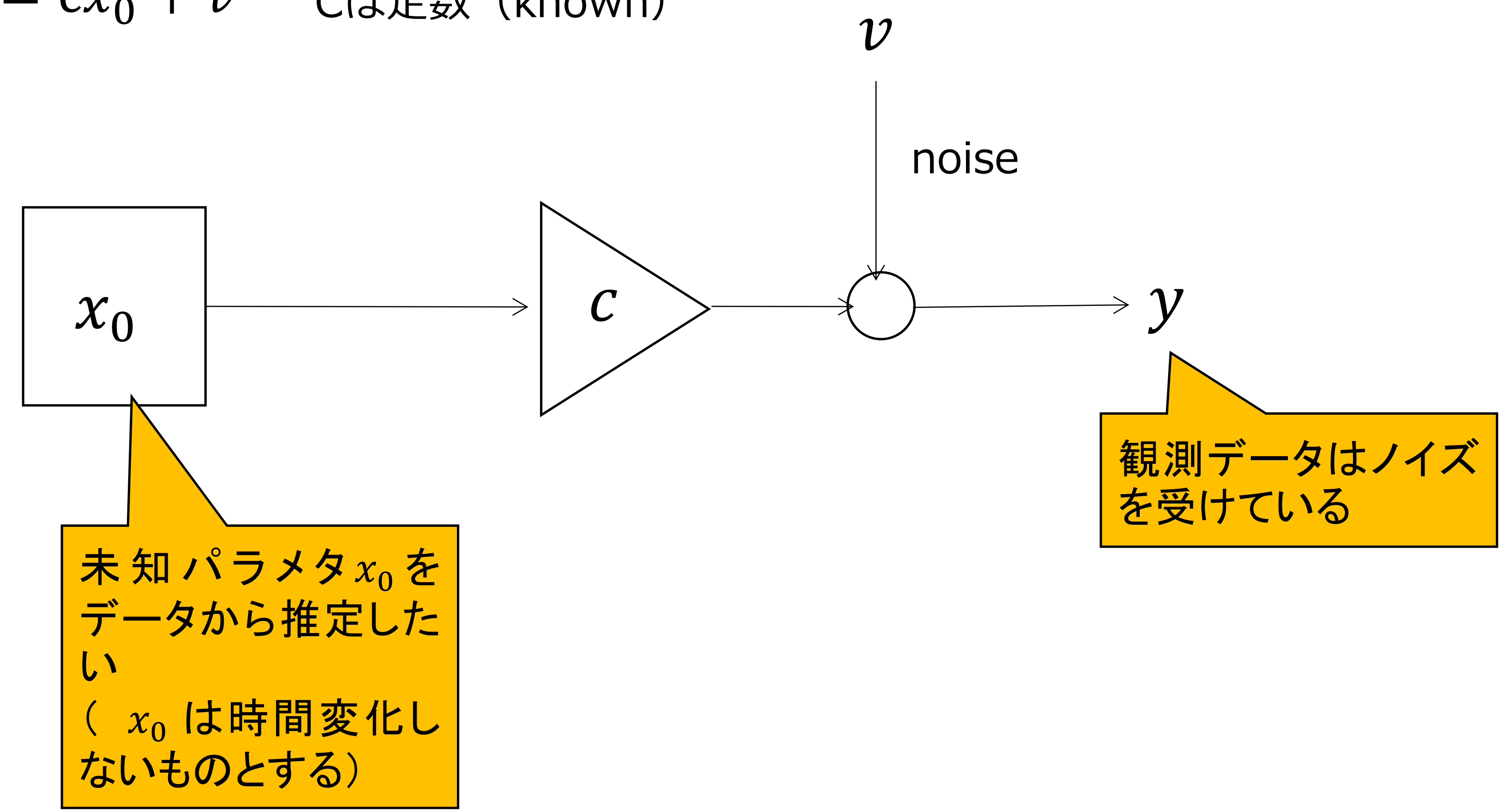
状態の推定１

- $y = cx_0 + v$　　Cは定数（known）



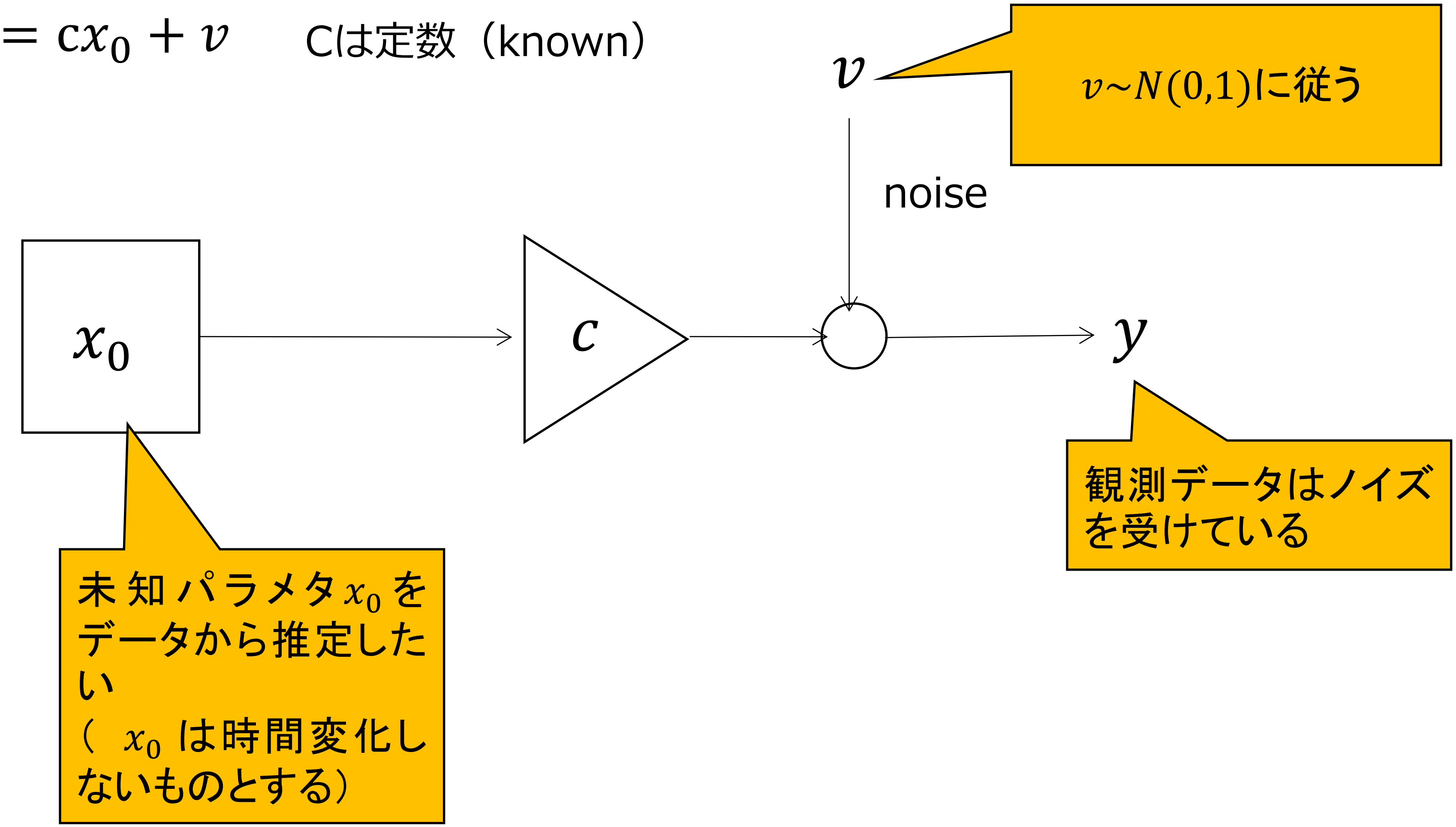
状態の推定１

- $y = cx_0 + v$ Cは定数（known）



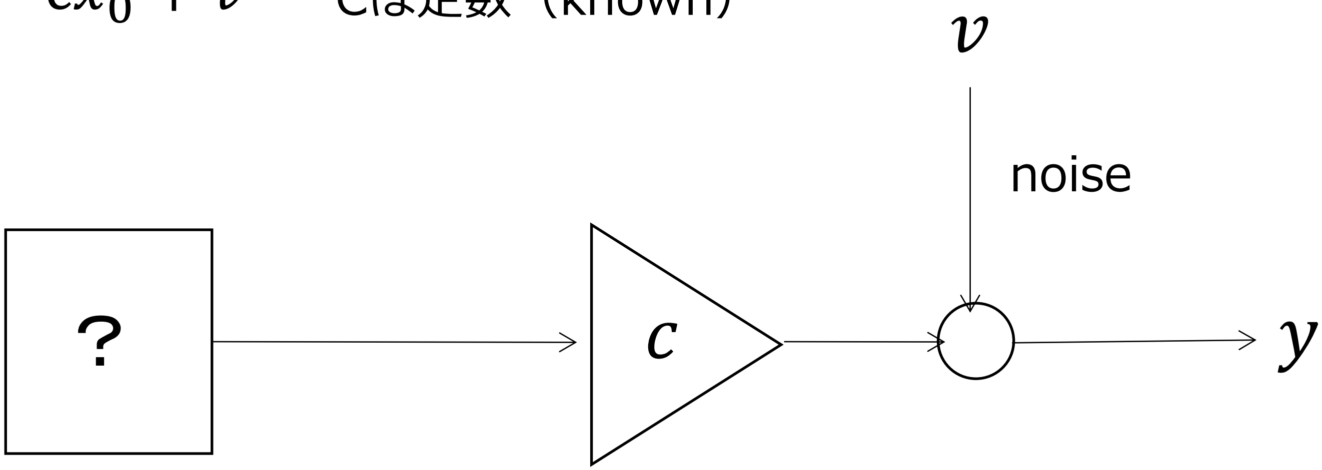
状態の推定 1

- $y = cx_0 + v$　　Cは定数（known）



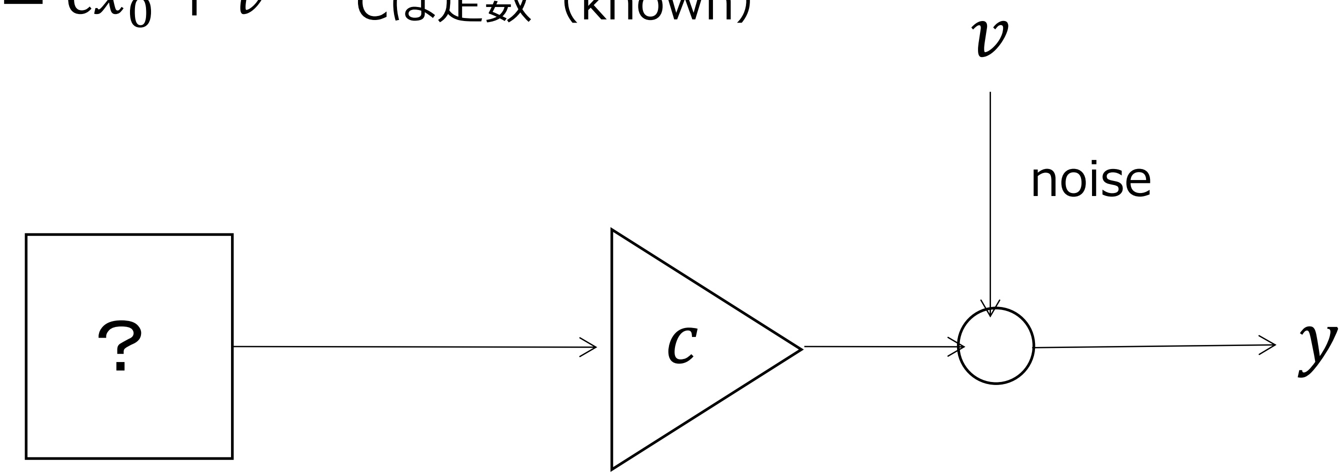
状態の推定 1

- $y = cx_0 + v$　　Cは定数（known）

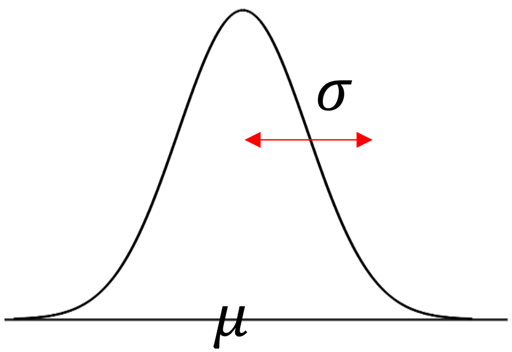


状態の推定 1

- $y = cx_0 + v$　　Cは定数（known）

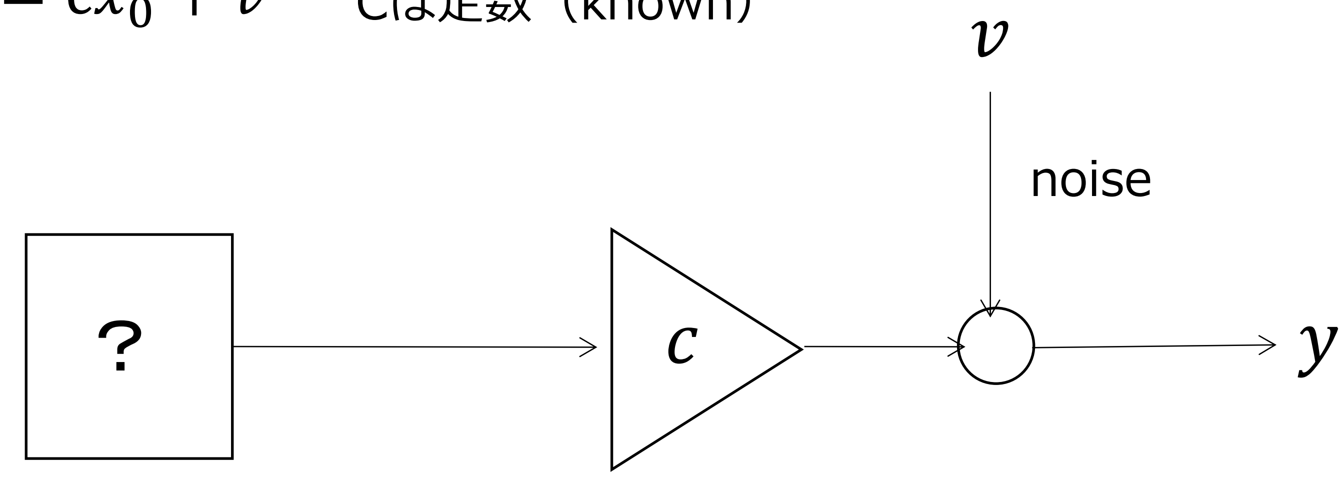


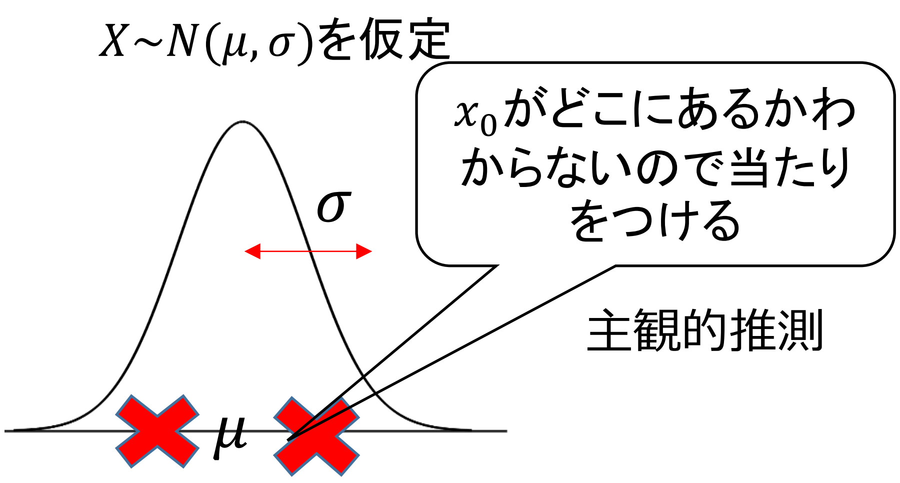
$X \sim N(\mu, \sigma)$を仮定



状態の推定 1

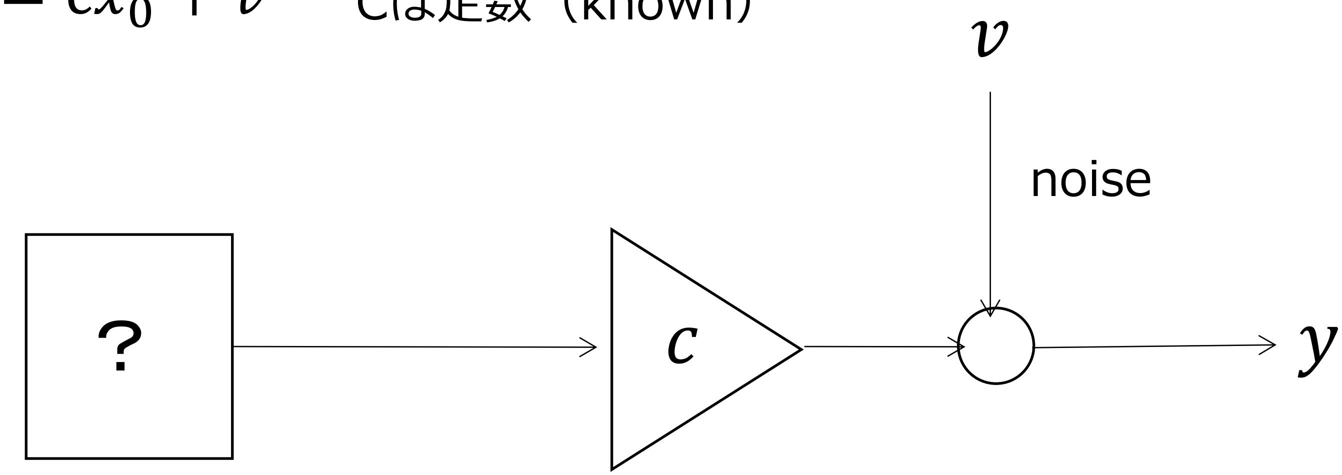
- $y = cx_0 + v$ 　Cは定数（known）



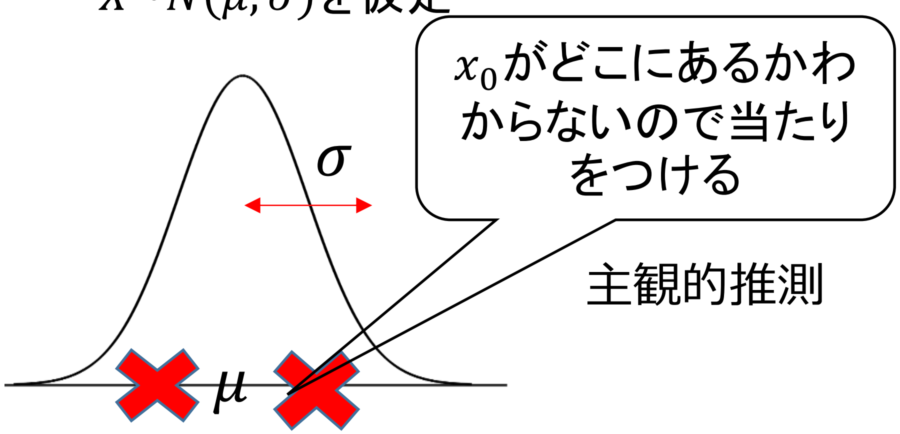


状態の推定 1

- $y = cx_0 + v$ Cは定数（known）



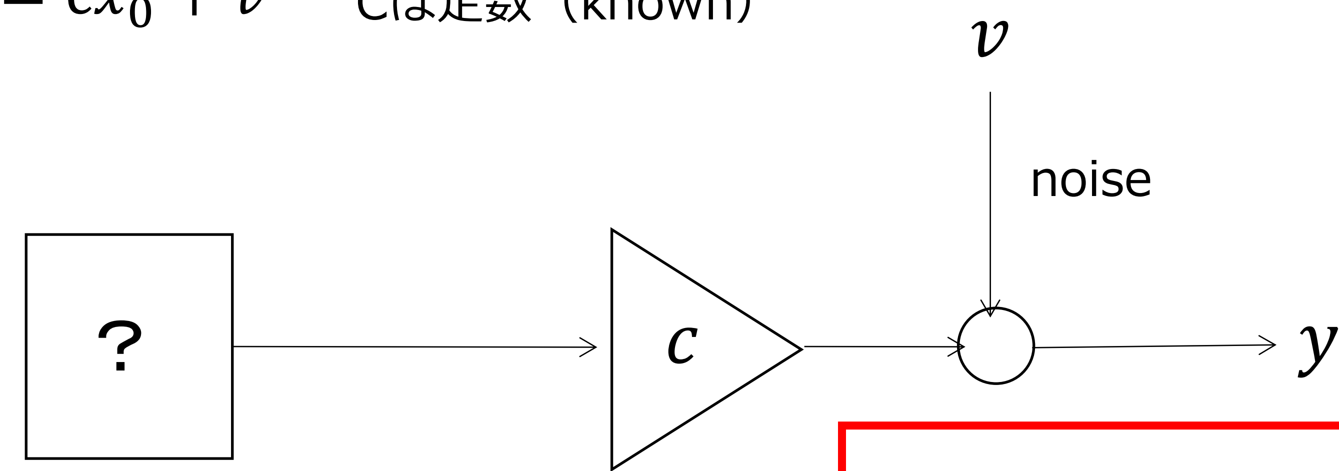
$X \sim N(\mu, \sigma)$を仮定



$N(\mu, \sigma)$が事前分布

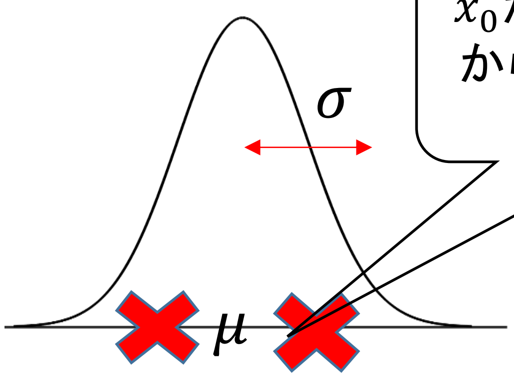
状態の推定 1

- $y = cx_0 + v$　　Cは定数（known）



問題　$P(x_0 | Y = y)$

$X \sim N(\mu, \sigma)$を仮定



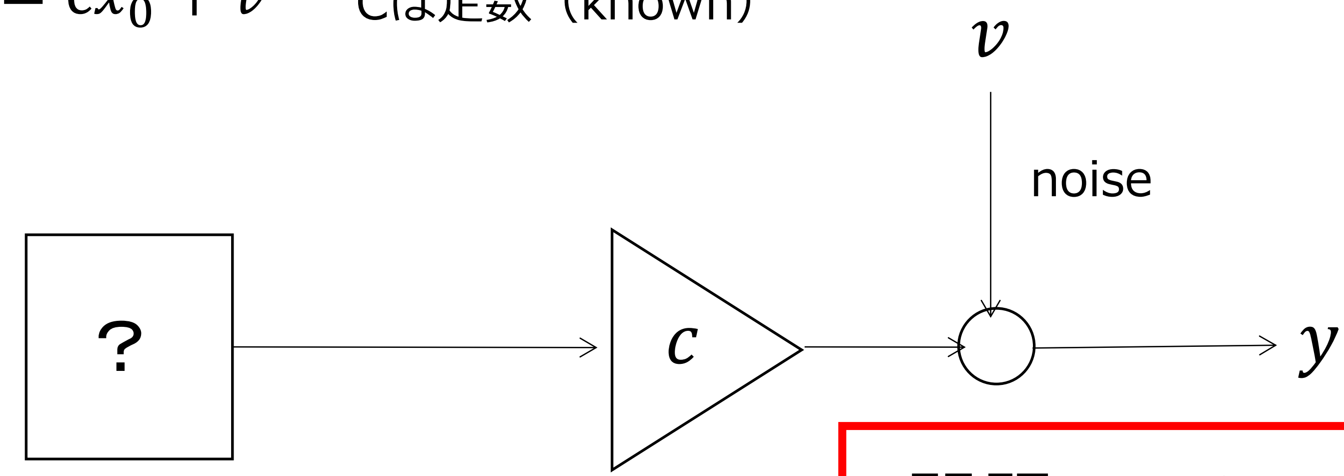
x_0がどこにあるかわからないので当たりをつける

主観的推測

$N(\mu, \sigma)$が事前分布

状態の推定１

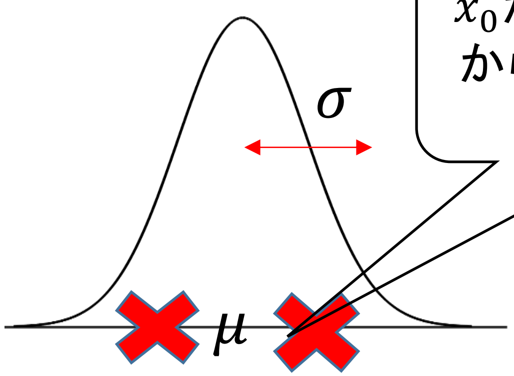
- $y = cx_0 + v$ 　Cは定数（known）



問題　$P(x_0|Y = y)$

$$P(x_0|Y = y) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)} P(x_0)$$

$X \sim N(\mu, \sigma)$を仮定



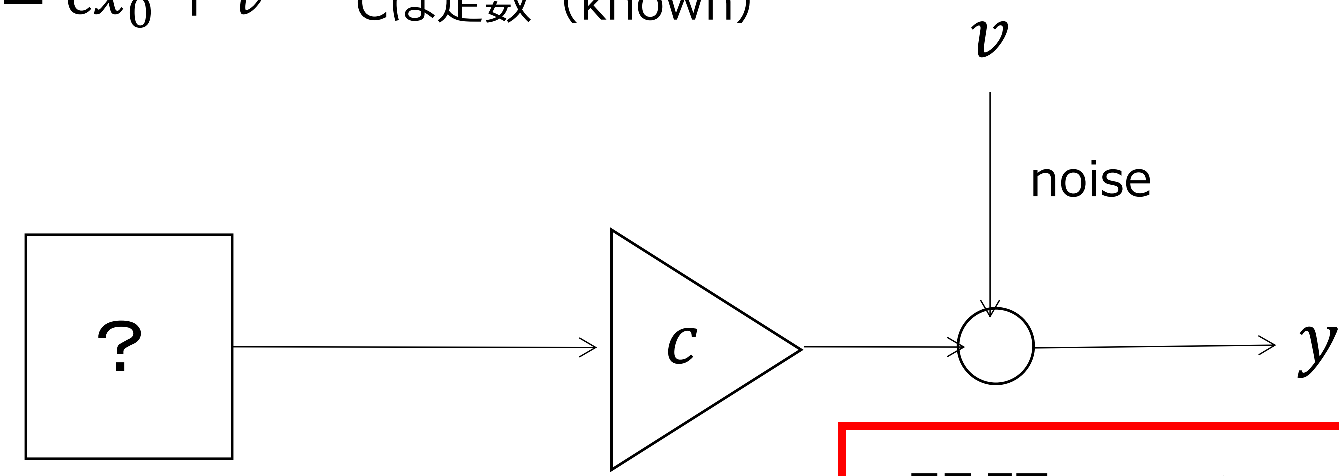
x_0がどこにあるかわからないので当たりをつける

主観的推測

$N(\mu, \sigma)$が事前分布

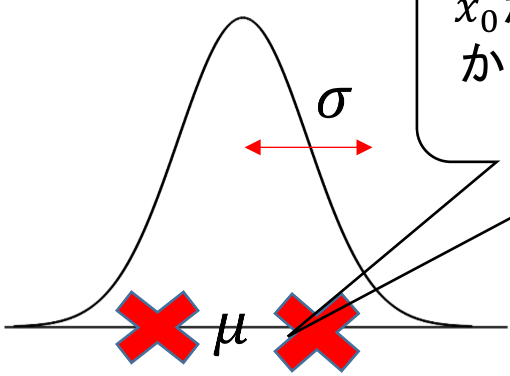
状態の推定 1

- $\mathrm{y} = \mathrm{c}x_0 + v$ Cは定数（known）



問題 $\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y} = \mathrm{y})$

$X \sim N(\mu, \sigma)$を仮定



x_0がどこにあるかわからないので当たりをつける

主観的推測

$N(\mu, \sigma)$が事前分布

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y} = \mathrm{y}) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)} P(x_0)$$

ここで $Y = cX + V$

で$X = x_0$と決まった時、Yは正規分布に従う

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)}P(x_0)$$

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})=\frac{P(y|x_0)}{P(y)}\boxed{P(x_0)}$$

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y} = \mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y} = \mathrm{y}) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)}\boxed{P(x_0)}$$

主観的に $X \sim N(\mu, \sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

状態の推定 1

$$\boxed{\text{問題}\quad \mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})}$$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{\boxed{P(y|x_0)}}{P(y)}\boxed{P(x_0)}$$

主観的に $X \sim N(\mu, \sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})=\frac{\boxed{P(y|x_0)}}{P(y)}\boxed{P(x_0)}$$

主観的に $X{\sim}N(\mu,\sigma)$ だと仮定

$$P(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- $Y=cx_0+V$ より、$X=x_0$と決まった時、Yは正規分布に従う

$v{\sim}N(0,1)$に従う

$$E[Y]=E[cx_0+V]=cE[x_0]=cx_0$$

$$\mathrm{V}[Y]=\mathrm{V}[cX+V]=\mathrm{V}[\mathrm{V}]=1$$

$Y{\sim}\mathrm{N}(\mathrm{cx},1)$に従う

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{\boxed{P(y|x_0)}}{P(y)}\boxed{P(x_0)}$$

主観的に $X \sim N(\mu,\sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$P(y|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-cx_0)^2}$$

$Y \sim \mathrm{N}(\mathrm{cx}, 1)$に従う

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{\boxed{P(y|x_0)}}{\boxed{P(y)}}\boxed{P(x_0)}$$

主観的に $X\sim N(\mu,\sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$P(y|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-cx_0)^2}$$

$Y\sim\mathrm{N}(\mathrm{cx},1)$に従う

状態の推定 1

問題　$P(x_0|Y=y)$

$$P(x_0|Y=y) = \frac{\boxed{P(y|x_0)}}{\boxed{P(y)}}\boxed{P(x_0)}$$

規格化定数

主観的に $X \sim N(\mu, \sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$P(y|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-cx_0)^2}$$

$Y \sim N(cx, 1)$に従う

状態の推定 1

問題　$P(x_0|Y=y)$

$$P(x_0|Y=y) = \frac{\boxed{P(y|x_0)}}{\boxed{P(y)}}\boxed{P(x_0)}$$

計算するだけ

規格化定数

主観的に $X \sim N(\mu,\sigma)$ だと仮定

$$P(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$P(y|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-cx_0)^2}$$

$Y \sim \mathrm{N}(\mathrm{cx}, 1)$に従う

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)}P(x_0) = \frac{1}{N}e^{-\frac{1}{2\sigma'^2}(x-\mu')^2}$$

$P(x|y) \sim N(\mu', \sigma')$の正規分布に従う　事後分布

状態の推定 1

問題　$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y})$

$$\mathrm{P}(x_0|\mathrm{Y}=\mathrm{y}) = \frac{P(y|x_0)}{P(y)}P(x_0) = \frac{1}{N}e^{-\frac{1}{2\sigma'^2}(x-\mu')^2}$$

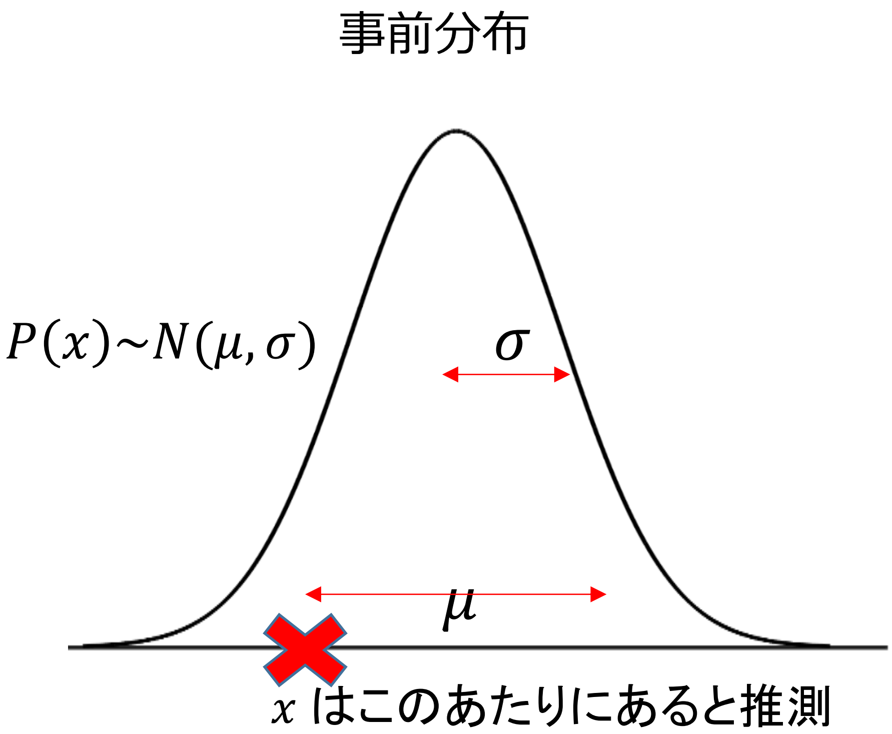
$P(x_0|y)\sim N(\mu',\sigma')$の正規分布に従う　事後分布

$$\mu' = \sigma^2(cy + \frac{\mu}{\sigma^2})$$

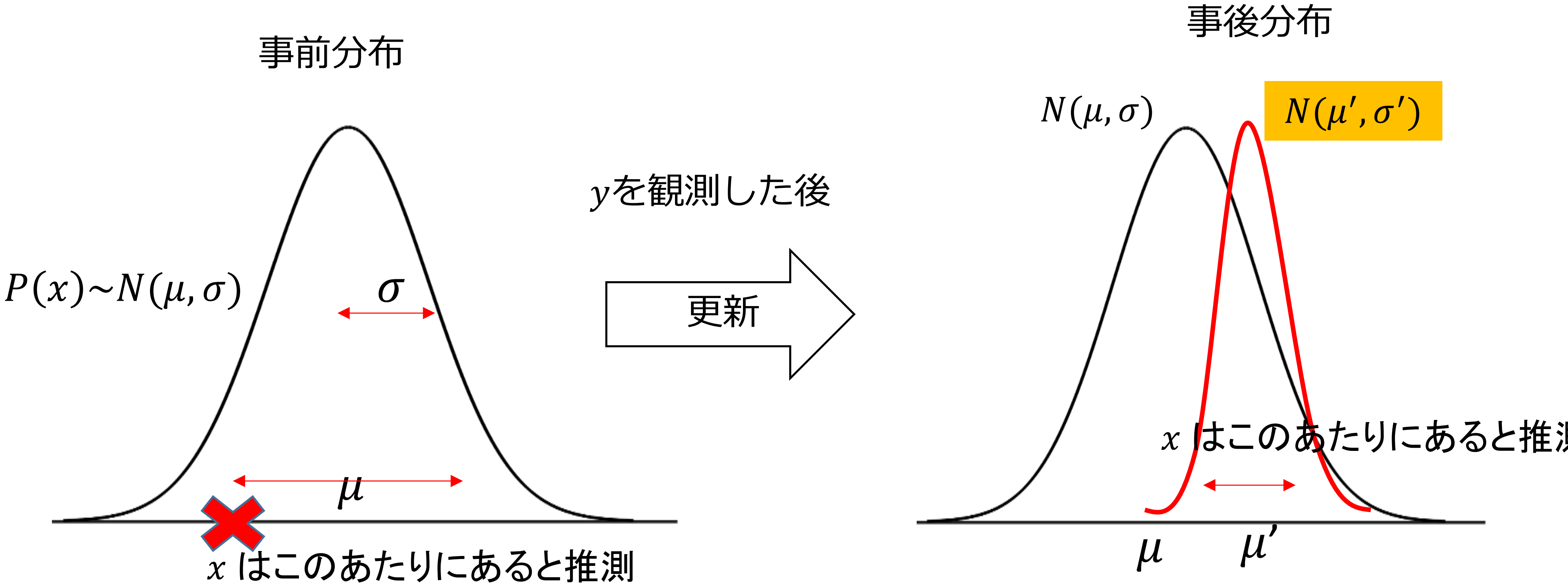
$$\sigma'^2 = \frac{1}{1+c^2\sigma^2}$$

x_0の新しい推定値

状態の推定 1



状態の推定 1

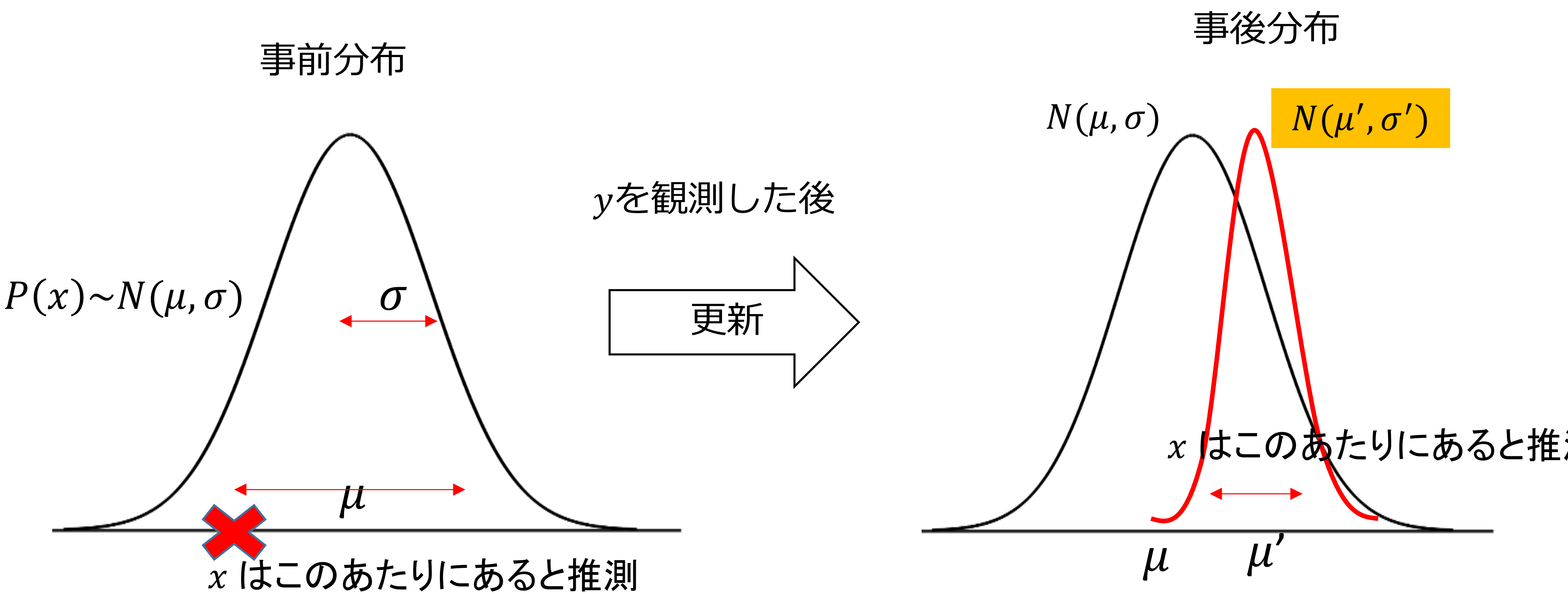


$$\mu' = \sigma^2\left(cy + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{1 + c^2\sigma^2}$$

x_0の新しい分布

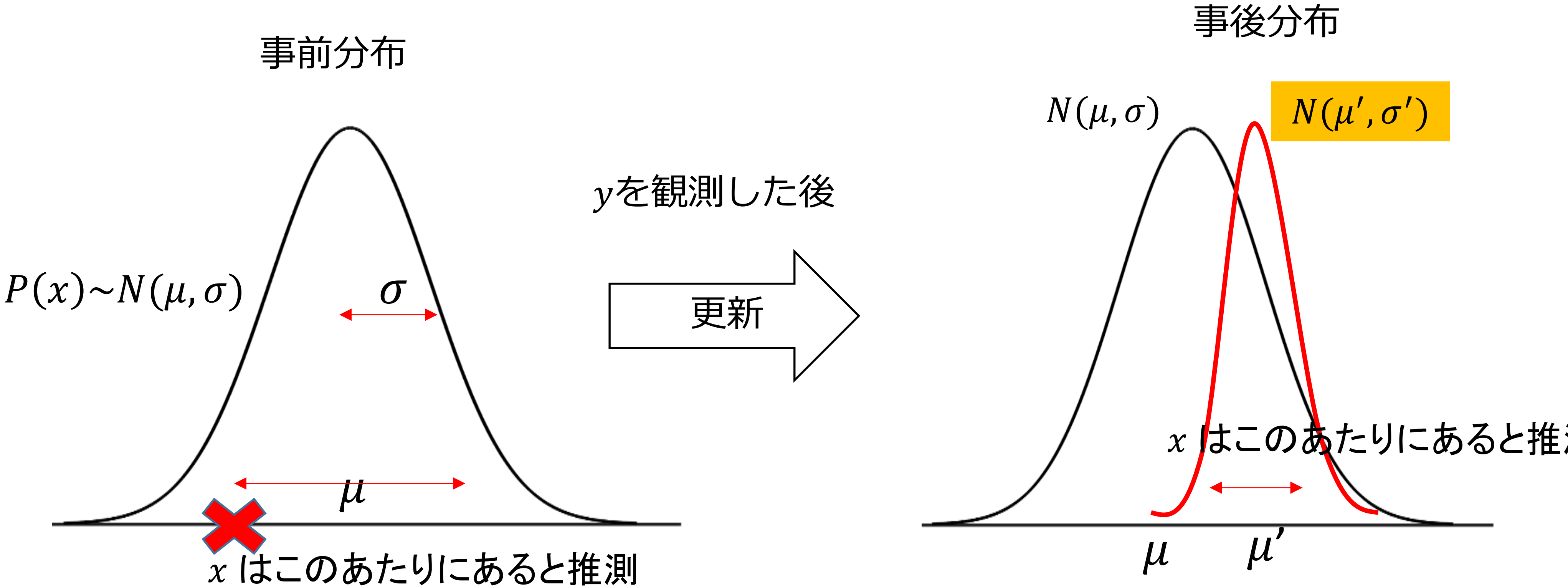
状態の推定 1



性質1　$\sigma > \sigma'$

事前分布の分散>事後分布の分散

状態の推定 1

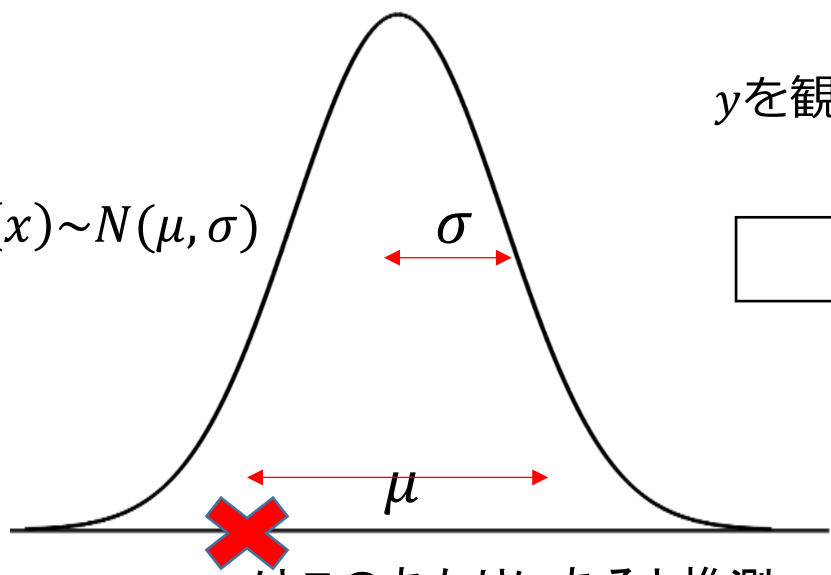


性質2 事後分布はS/N比に依存

$$\mu' = \sigma^2 \left(cy + \frac{\mu}{\sigma^2}\right) \qquad \sigma'^2 = \frac{1}{1 + c^2\sigma^2}$$

状態の推定 1

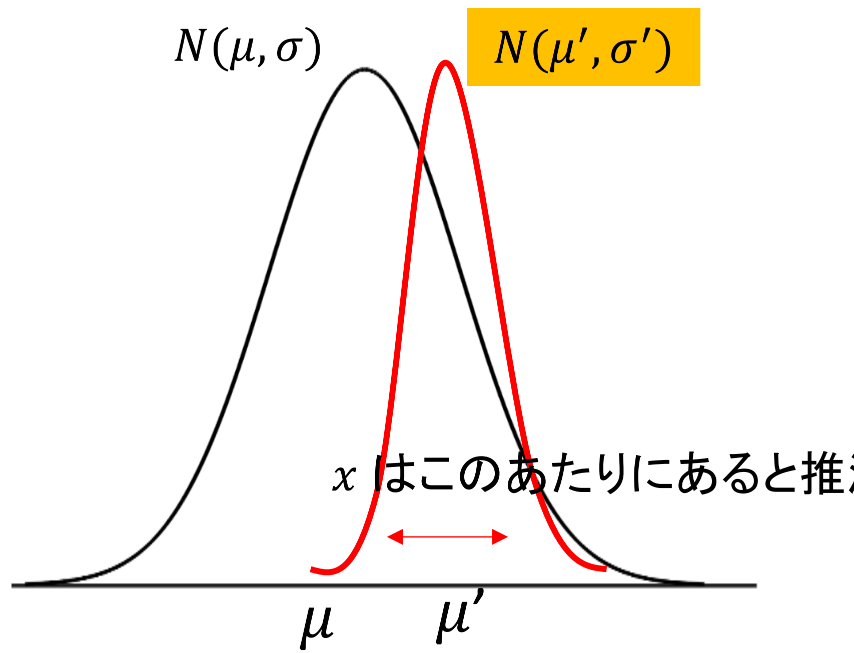
事前分布



yを観測した後

更新

事後分布



$C = 0$のとき$\mu' = \mu, \sigma' = \sigma$

$C = \infty$のとき$\mu' = x_0, \sigma' = 0$

$y = cx_0 + v$

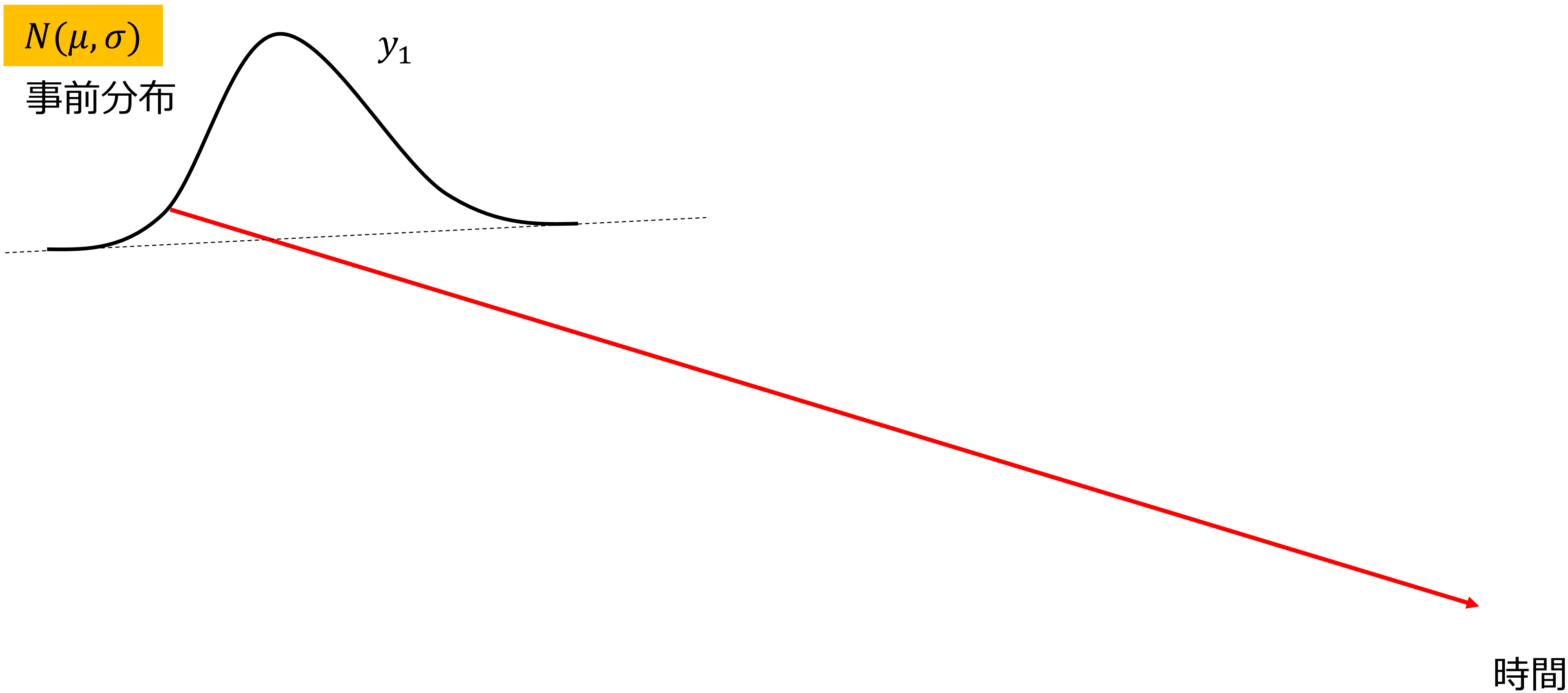
増幅率（S/N比）

性質2 事後分布はS/N比に依存

$$\mu' = \sigma^2 (cy + \frac{\mu}{\sigma^2}) \qquad \sigma'^2 = \frac{1}{1 + c^2\sigma^2}$$

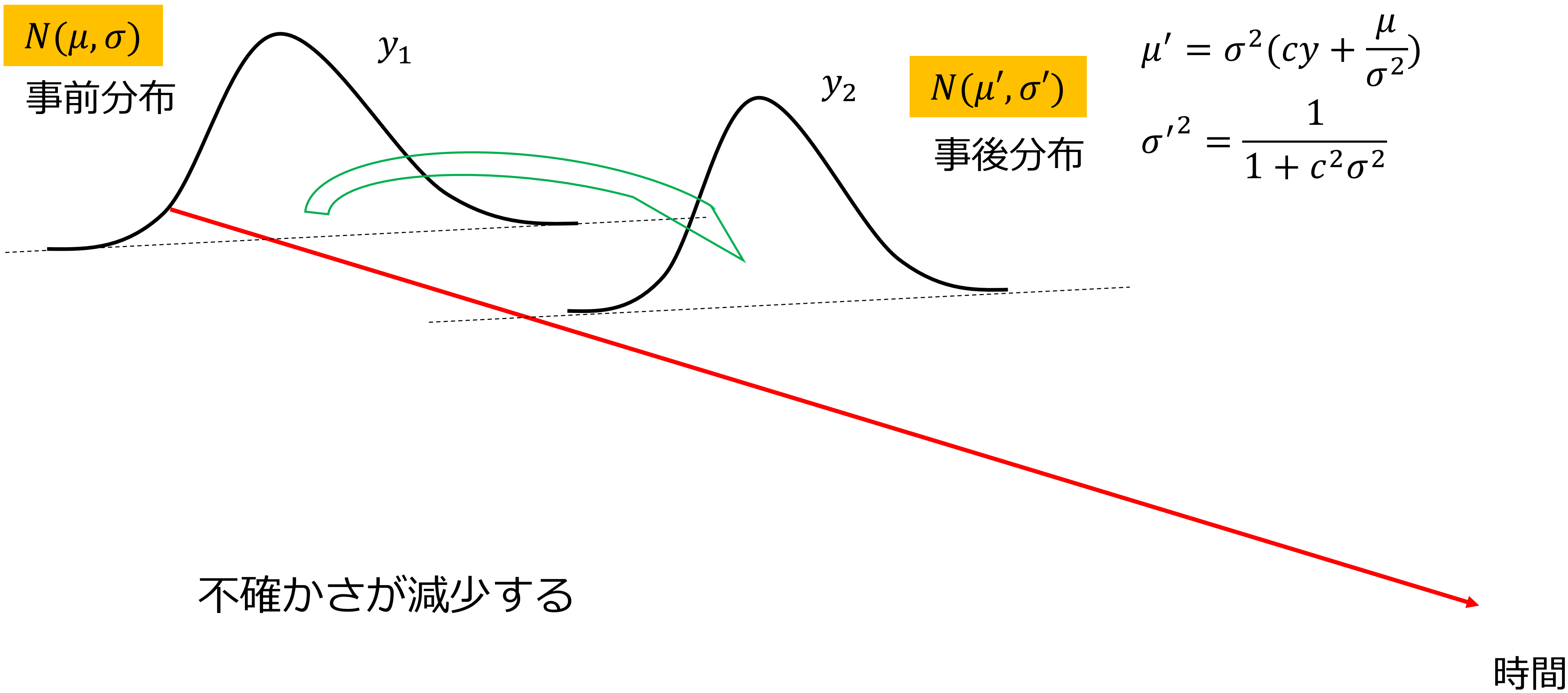
状態の推定 1

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能



状態の推定１

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能

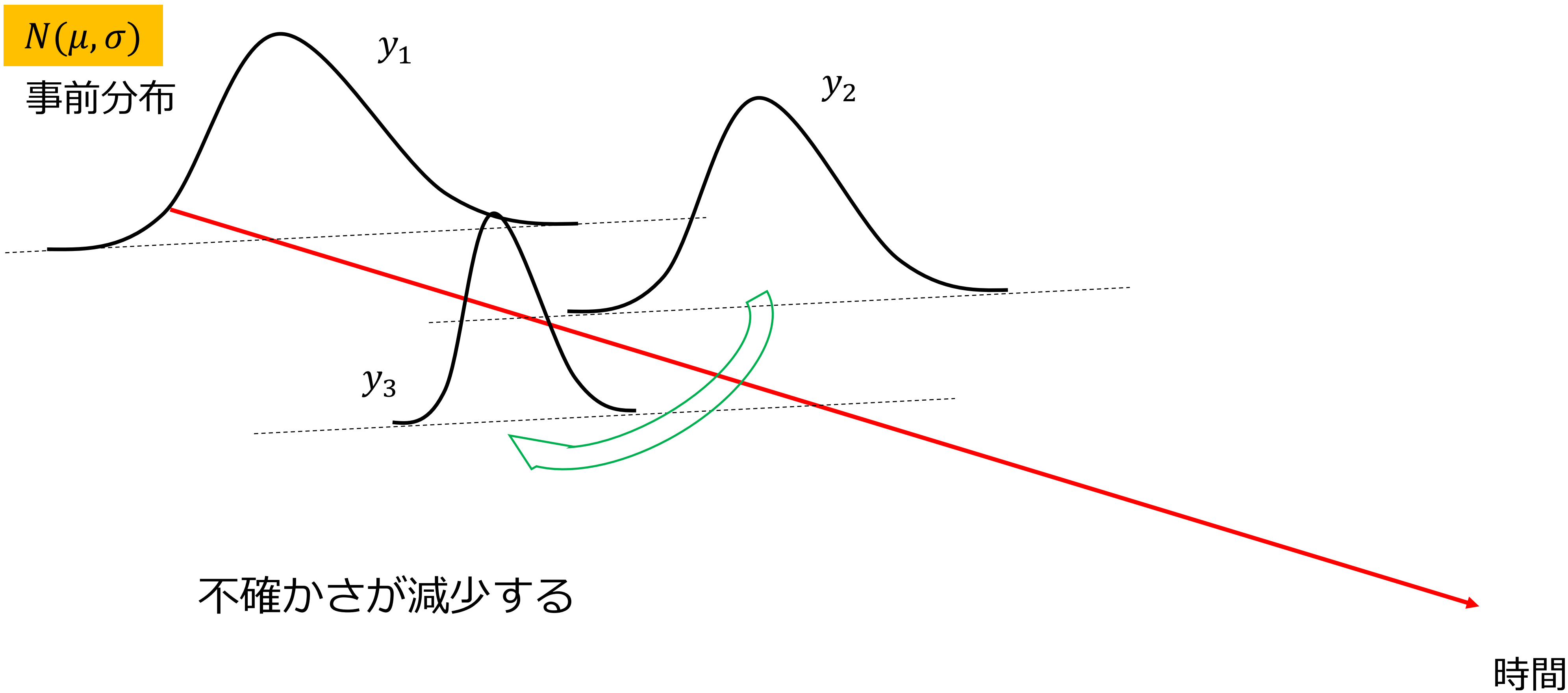


$$\mu' = \sigma^2(cy + \frac{\mu}{\sigma^2})$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{1 + c^2\sigma^2}$$

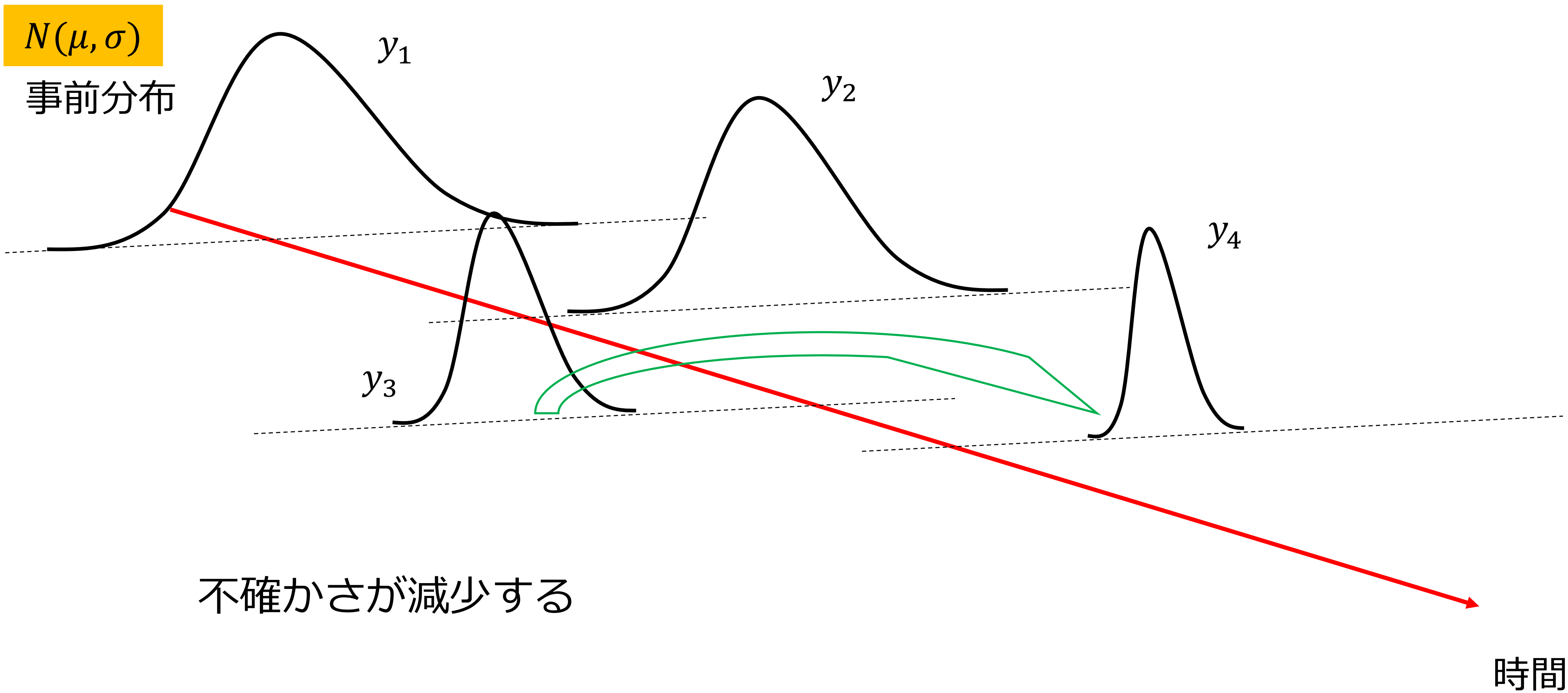
状態の推定１

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能



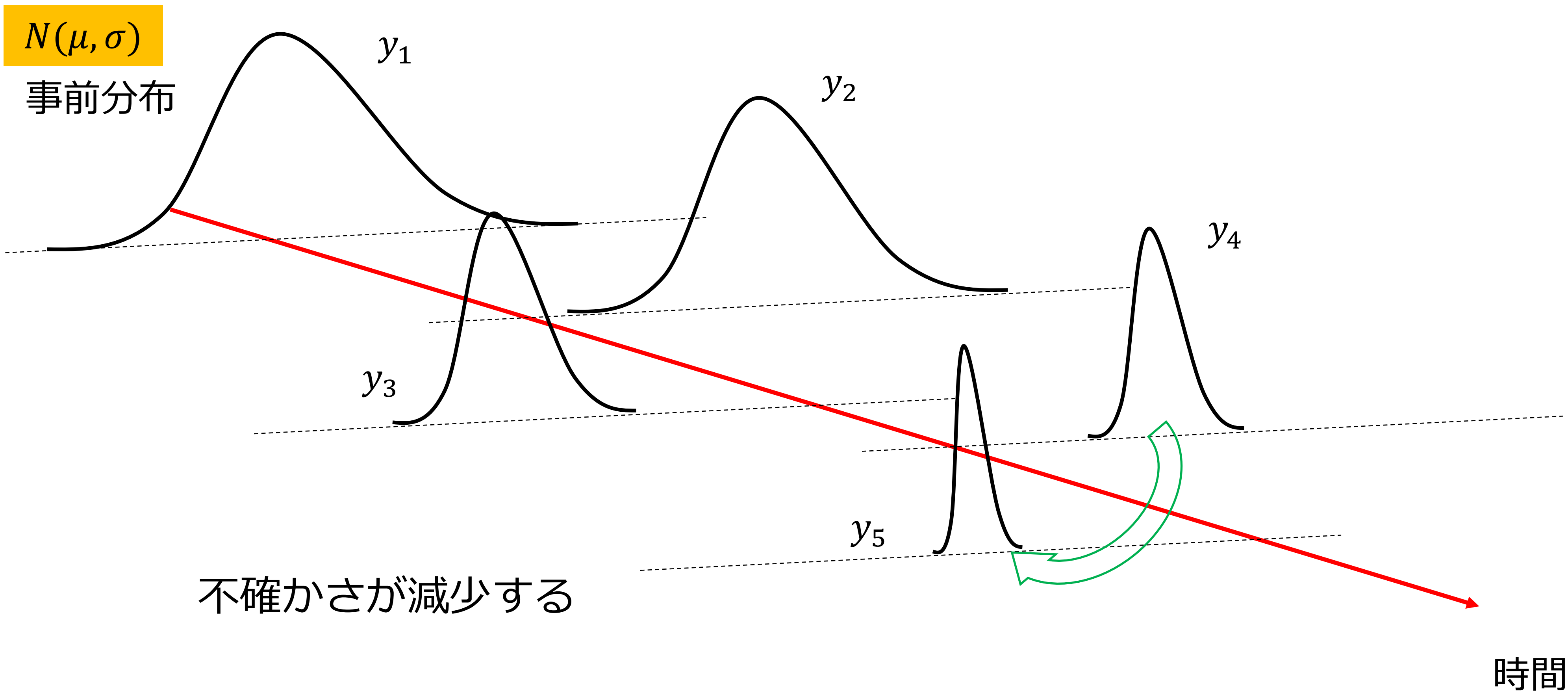
状態の推定 1

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能



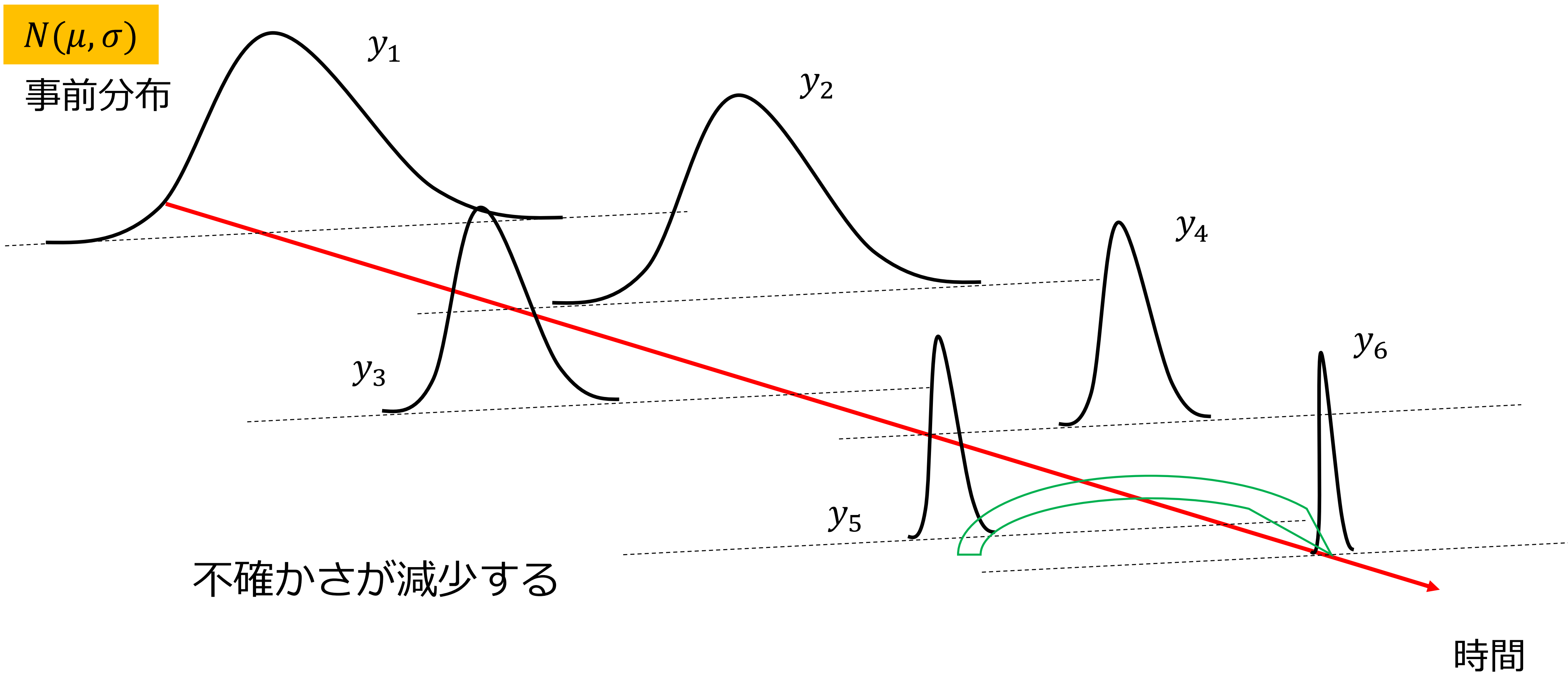
状態の推定 1

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能



状態の推定 1

- S/N比が悪くても繰り返すことで精度の良い推定が可能



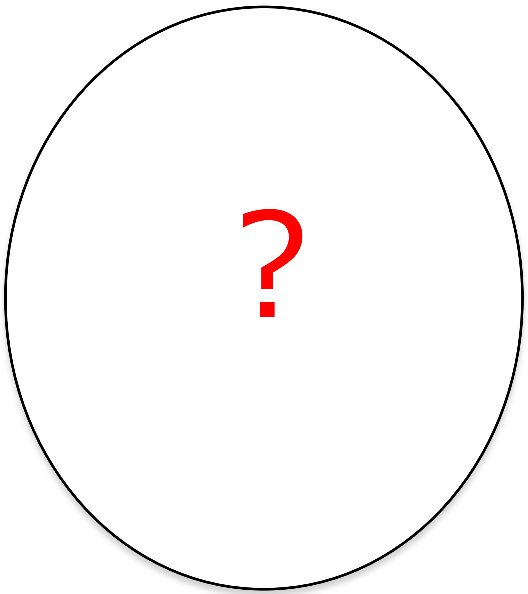
Part4 確率過程

- 状態方程式のランダムウォークを仮定する

$$\boxed{X_n = aX_{n-1} + bW_n}$$

確率過程とは？

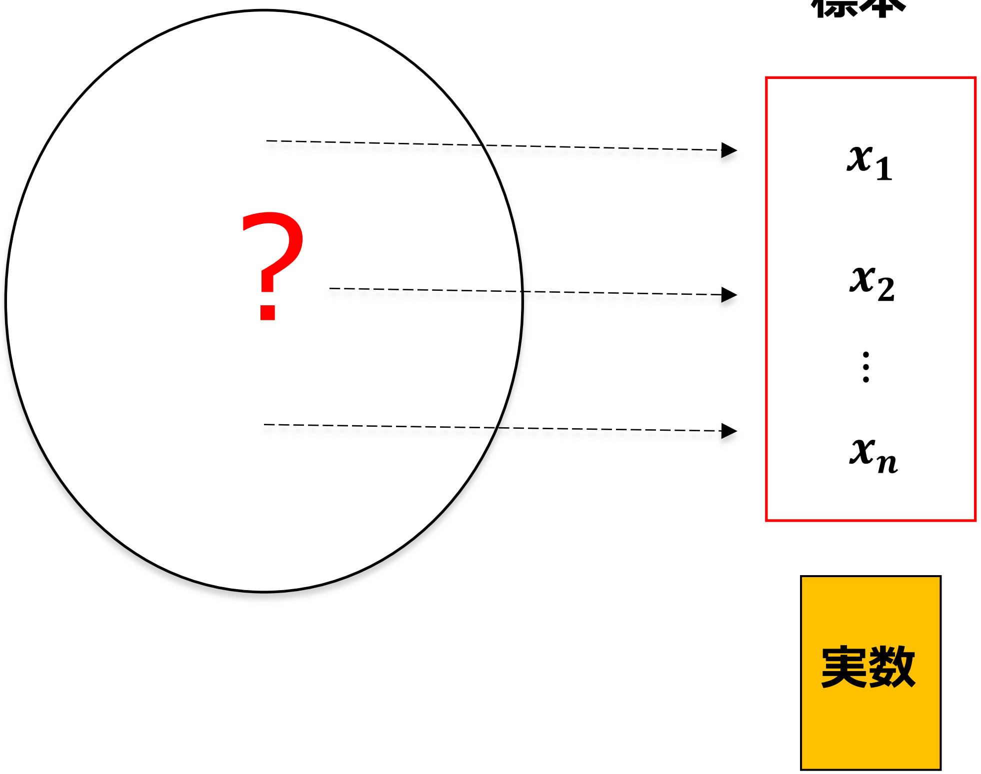
母集団



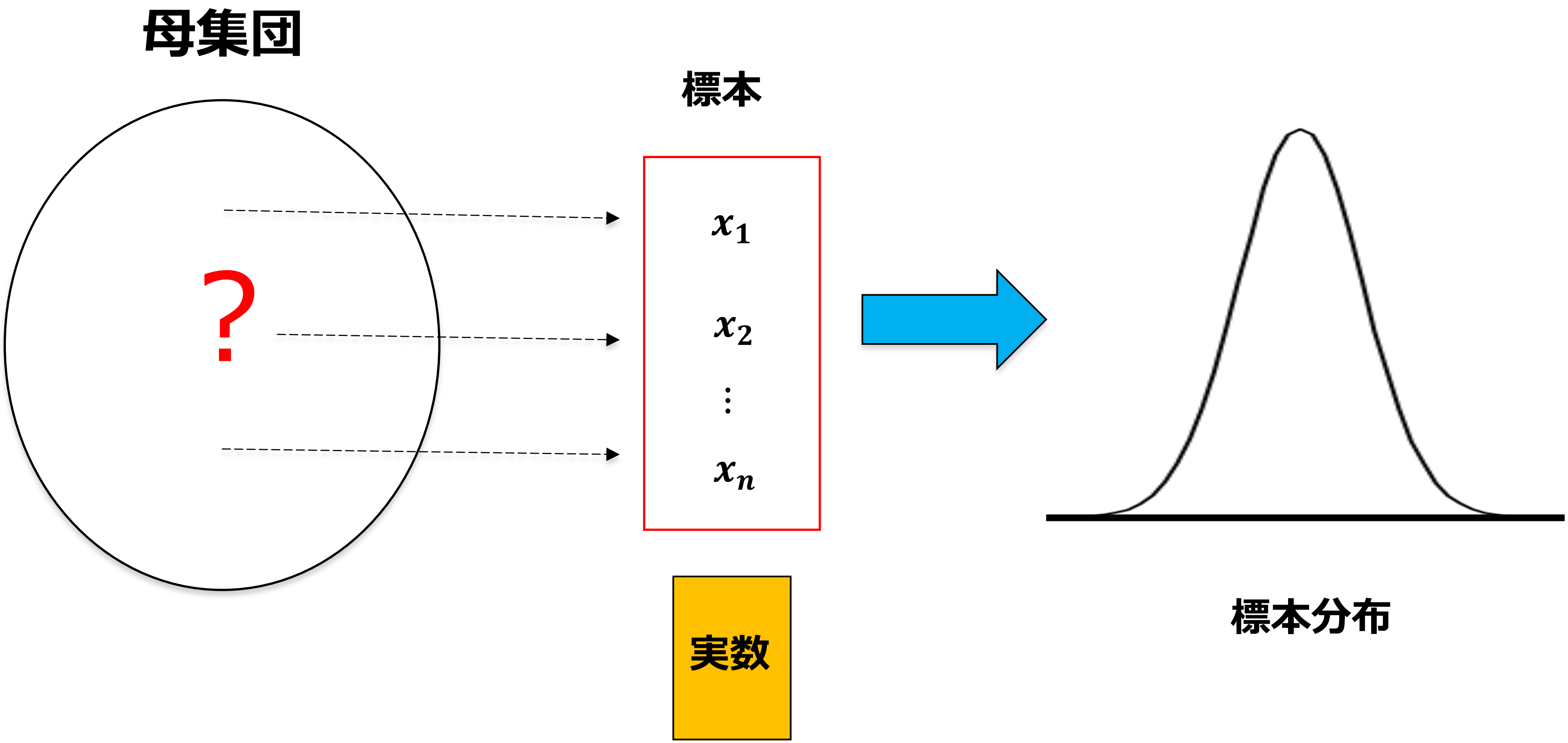
確率過程とは？

母集団

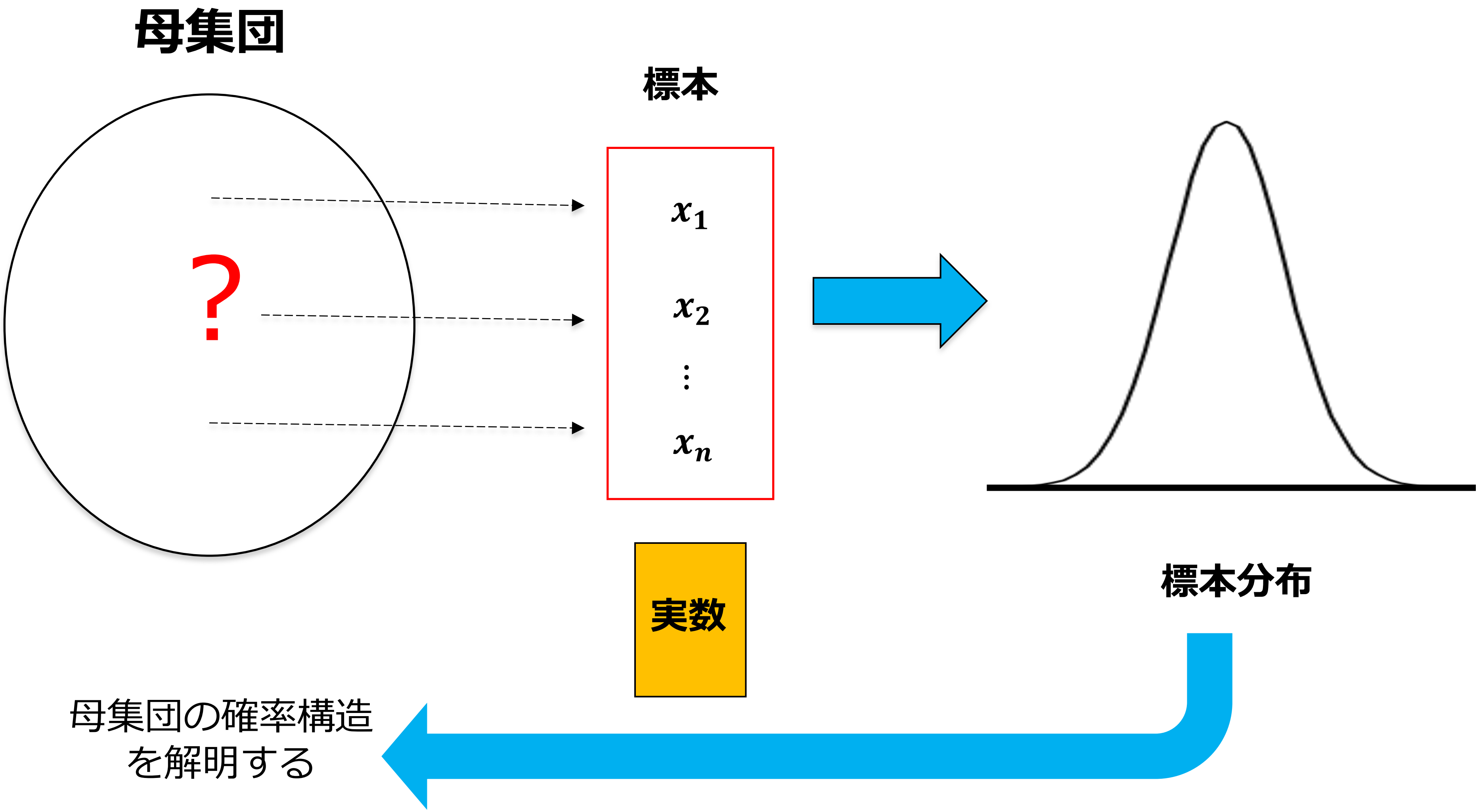
標本



確率過程とは？

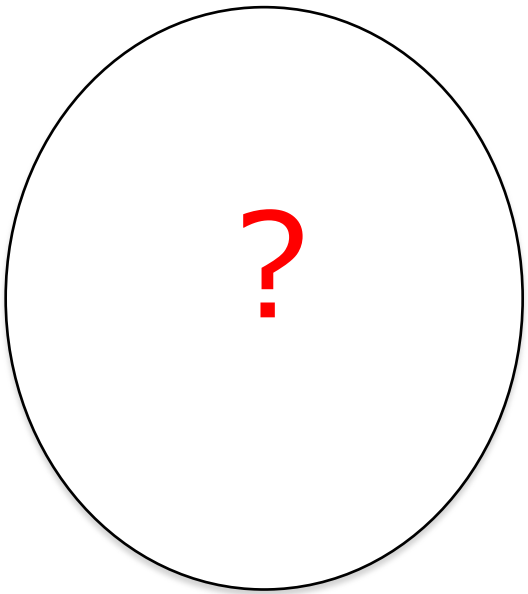


確率過程とは？

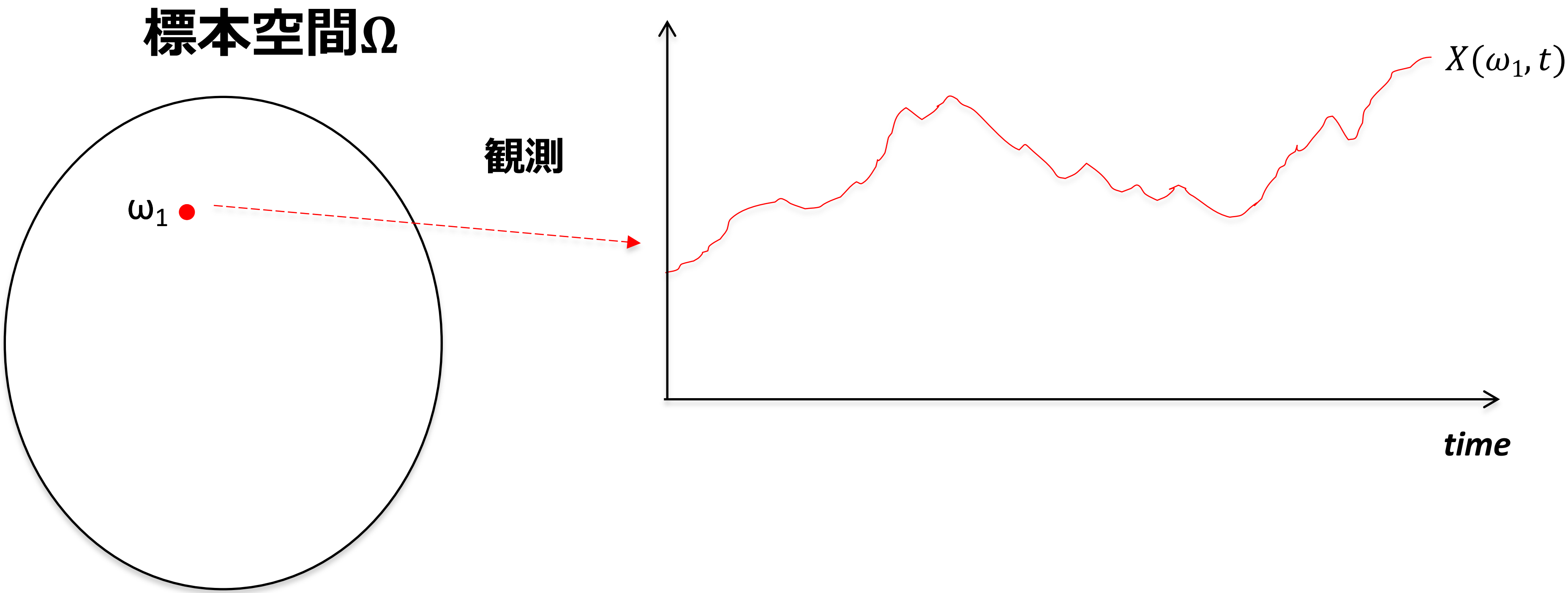


確率過程とは？

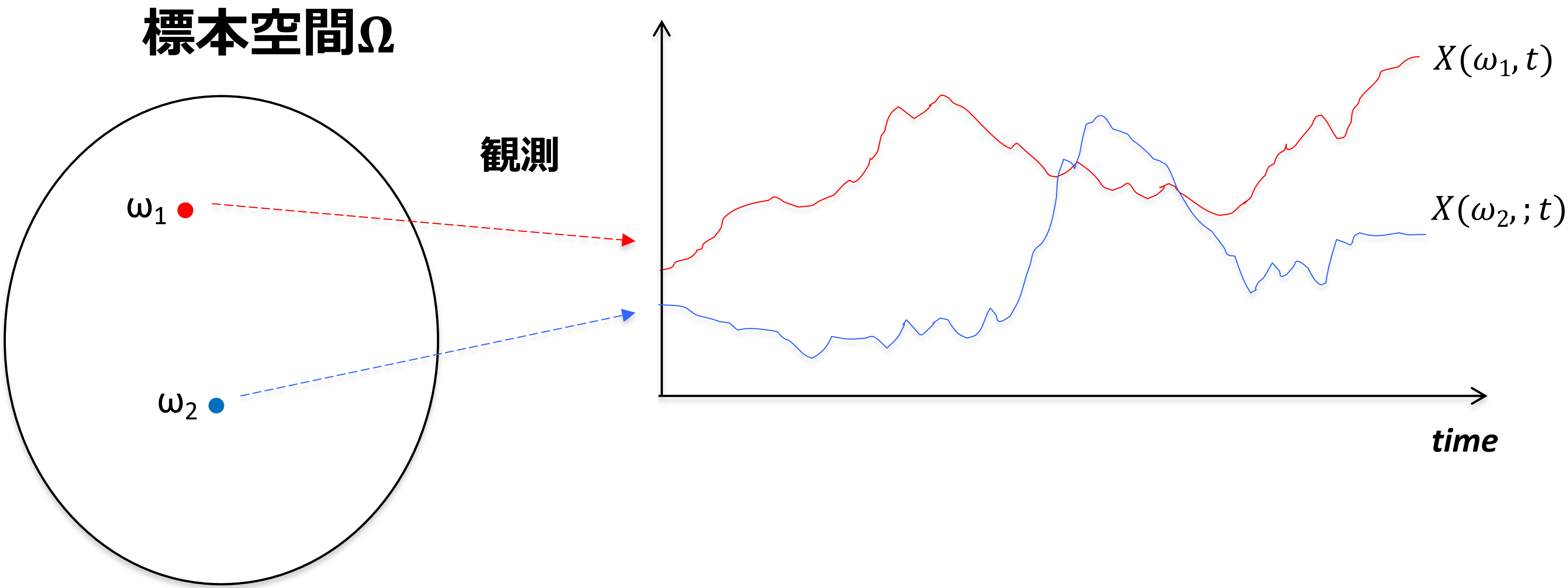
標本空間Ω



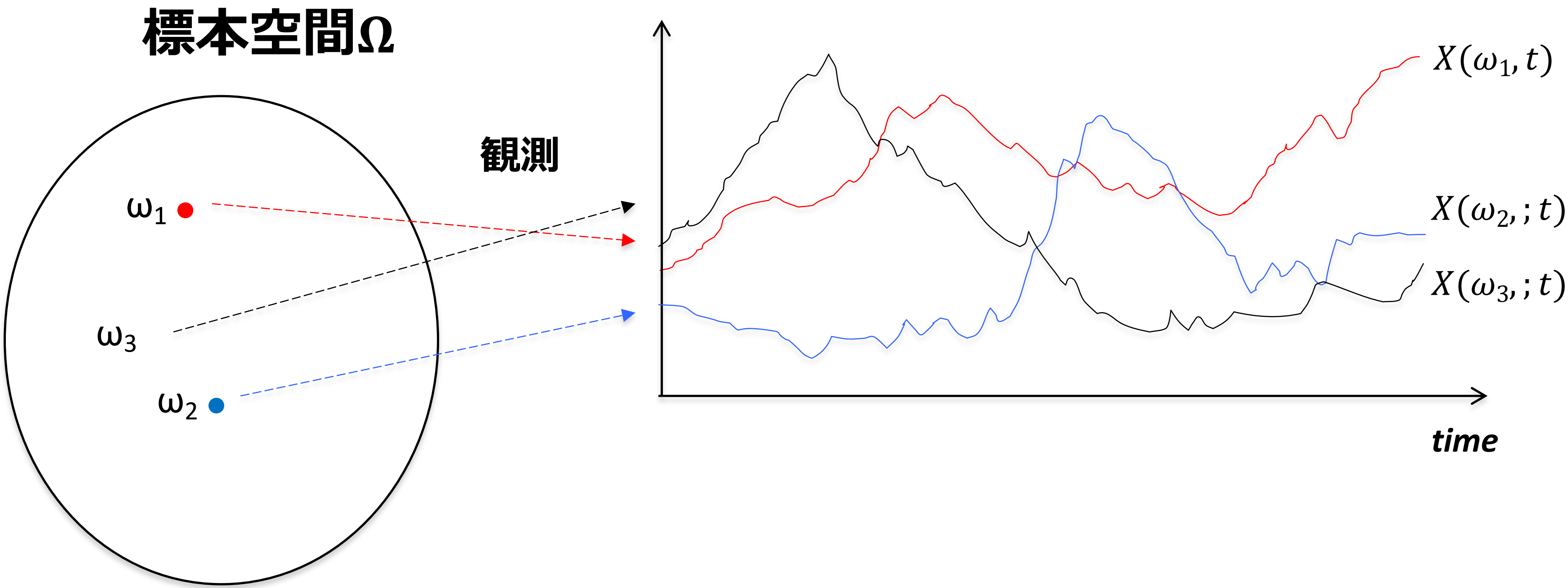
確率過程とは？



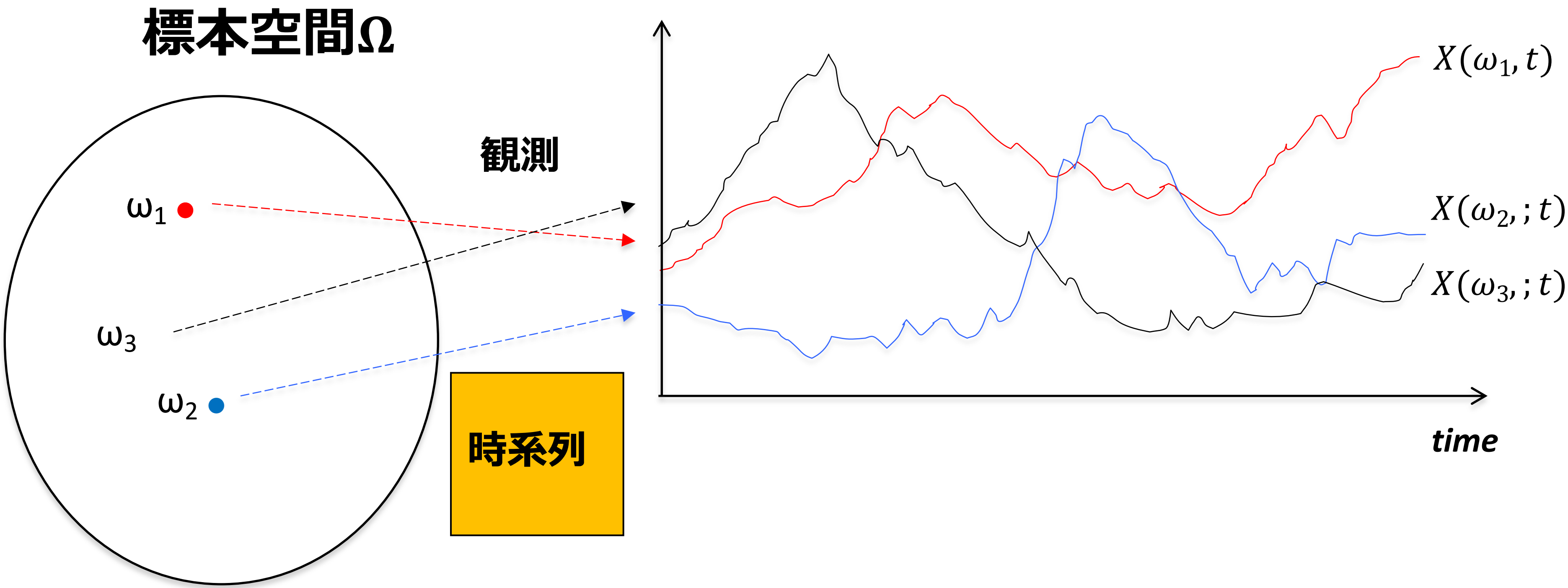
確率過程とは？



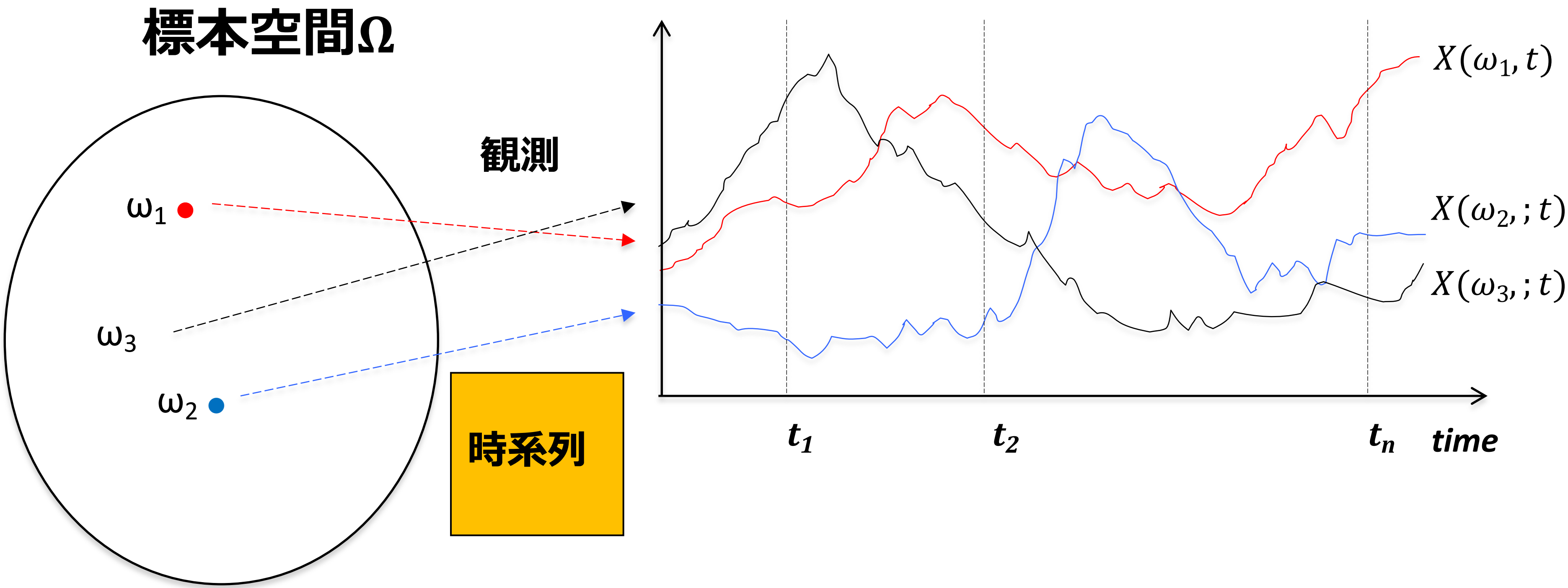
確率過程とは？


標本空間Ω
観測
ω_1
ω_3
ω_2
$X(\omega_1, t)$
$X(\omega_2, ; t)$
$X(\omega_3, ; t)$
time

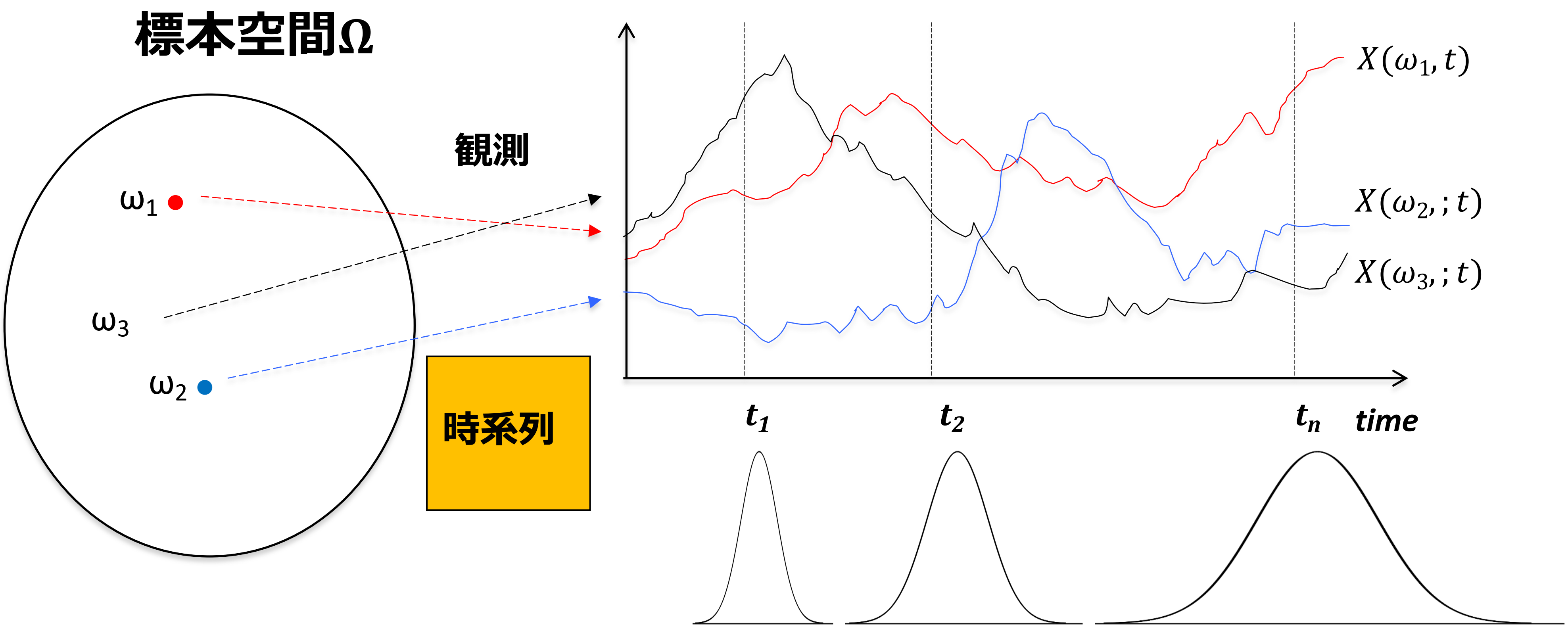
確率過程とは？


標本空間Ω
観測
ω_1
ω_3
ω_2
時系列
$X(\omega_1, t)$
$X(\omega_2, ; t)$
$X(\omega_3, ; t)$
time

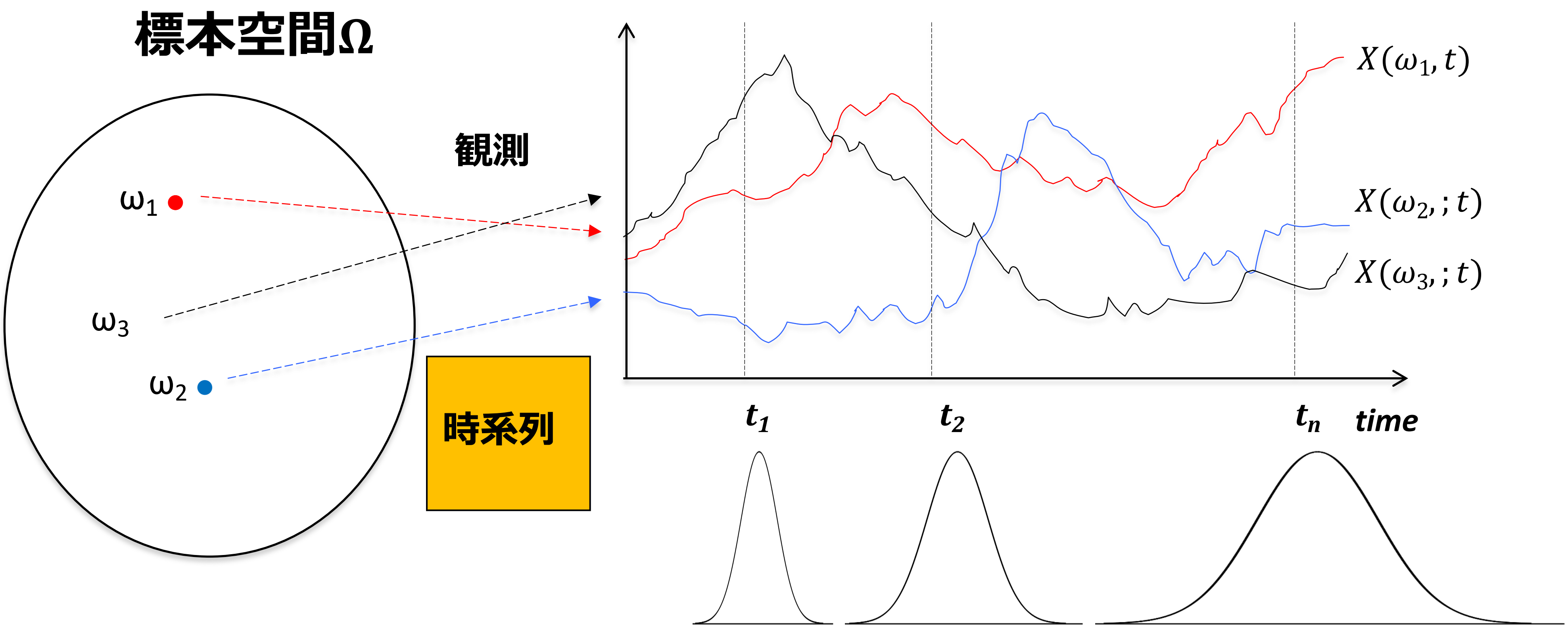
確率過程とは？


標本空間Ω
観測
ω1
ω3
ω2
時系列
$X(\omega_1, t)$
$X(\omega_2, ; t)$
$X(\omega_3, ; t)$
t_1
t_2
t_n
time

確率過程とは？



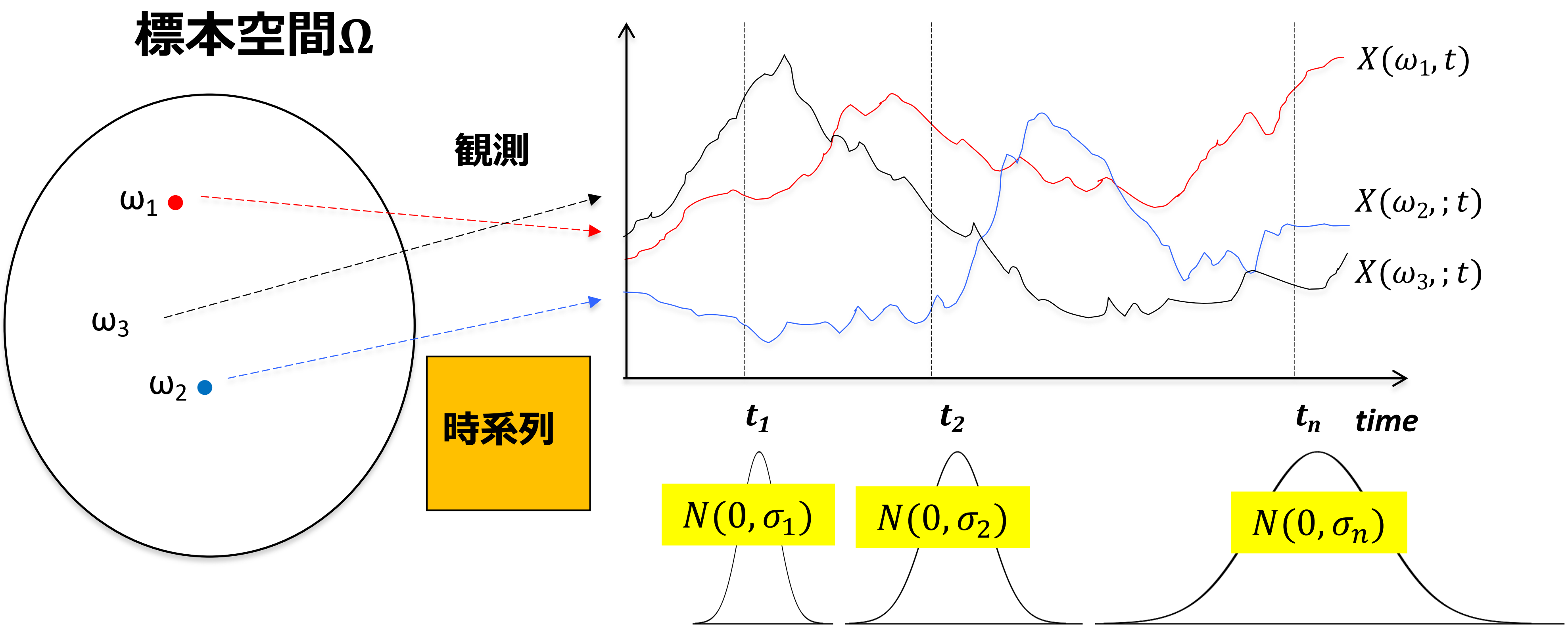
確率過程とは？



標本空間の構造を
解明する

確率分布の時間変化

ランダムウォーク

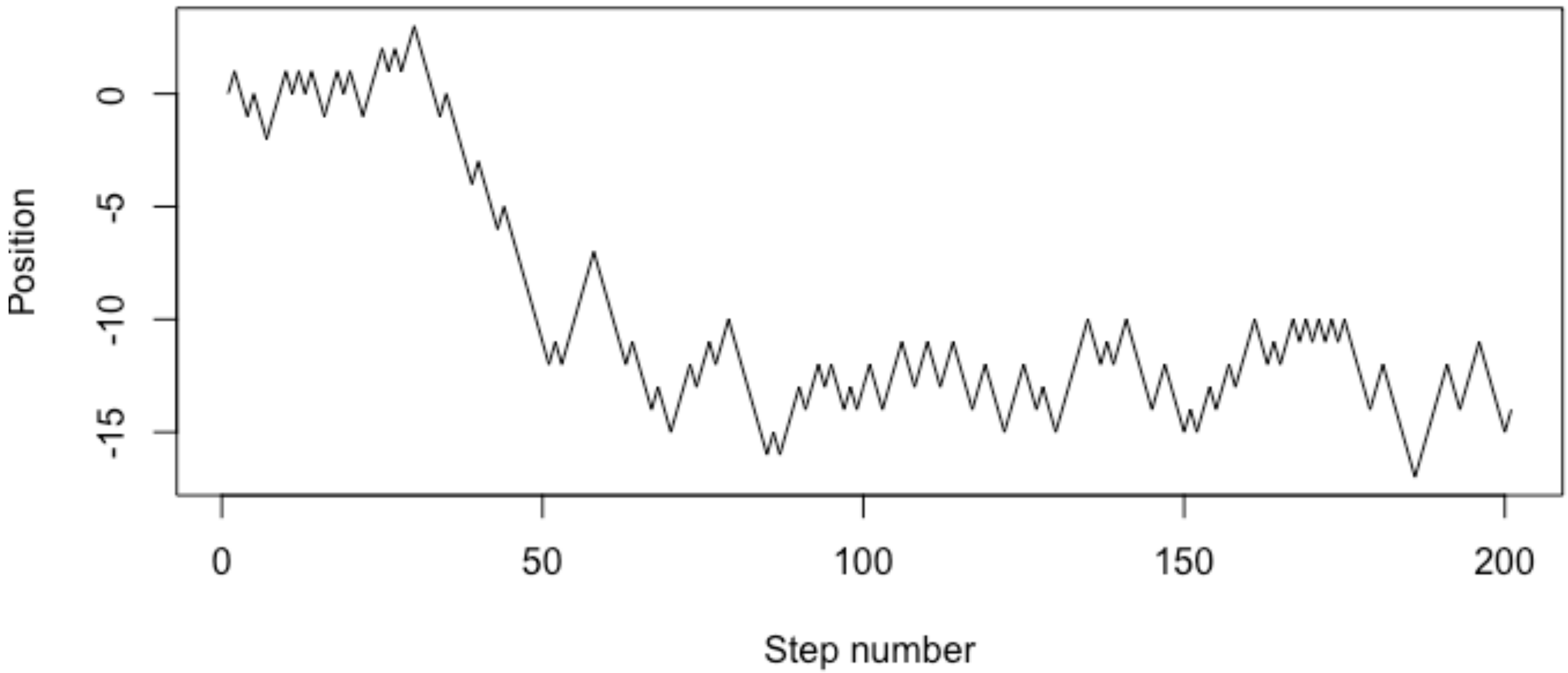


標本空間の構造を
解明する

確率分布の時間変化

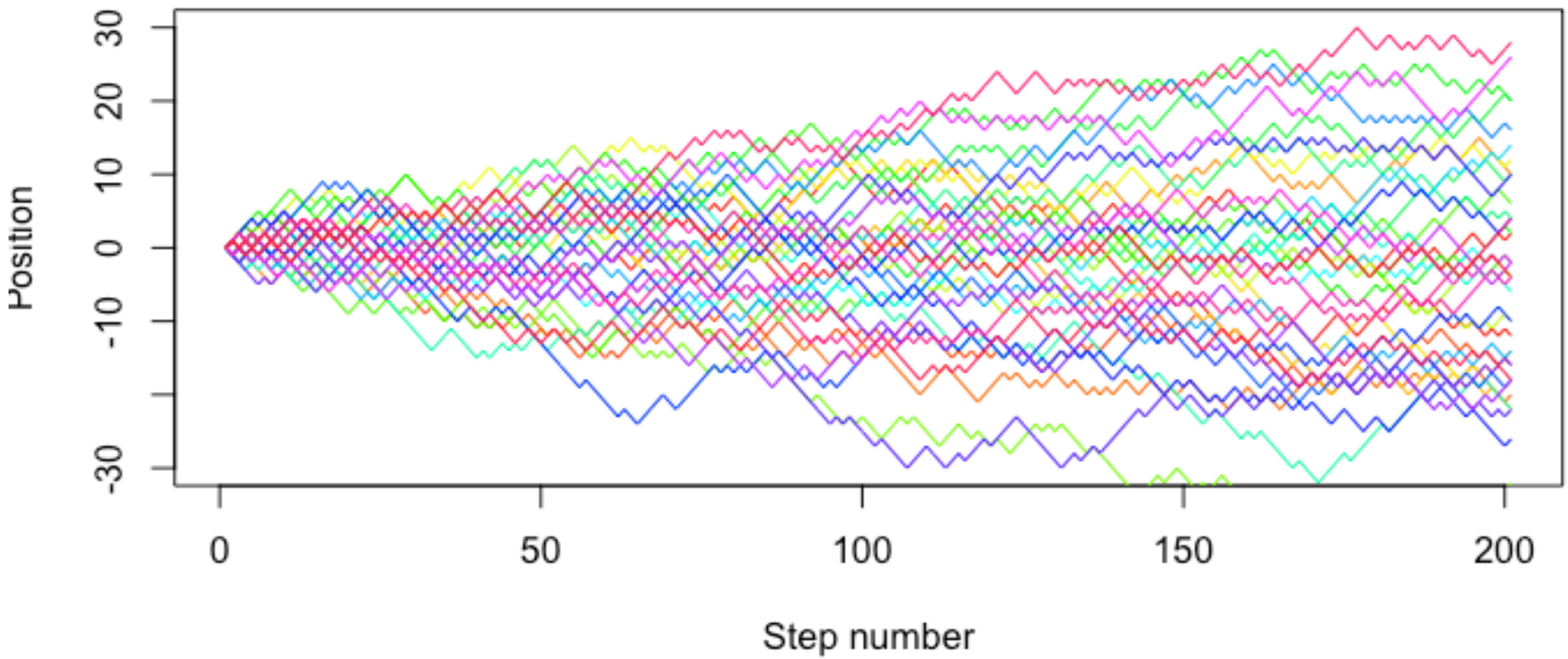
ランダムウォーク

$$X_n = X_{n-1} + W_n$$



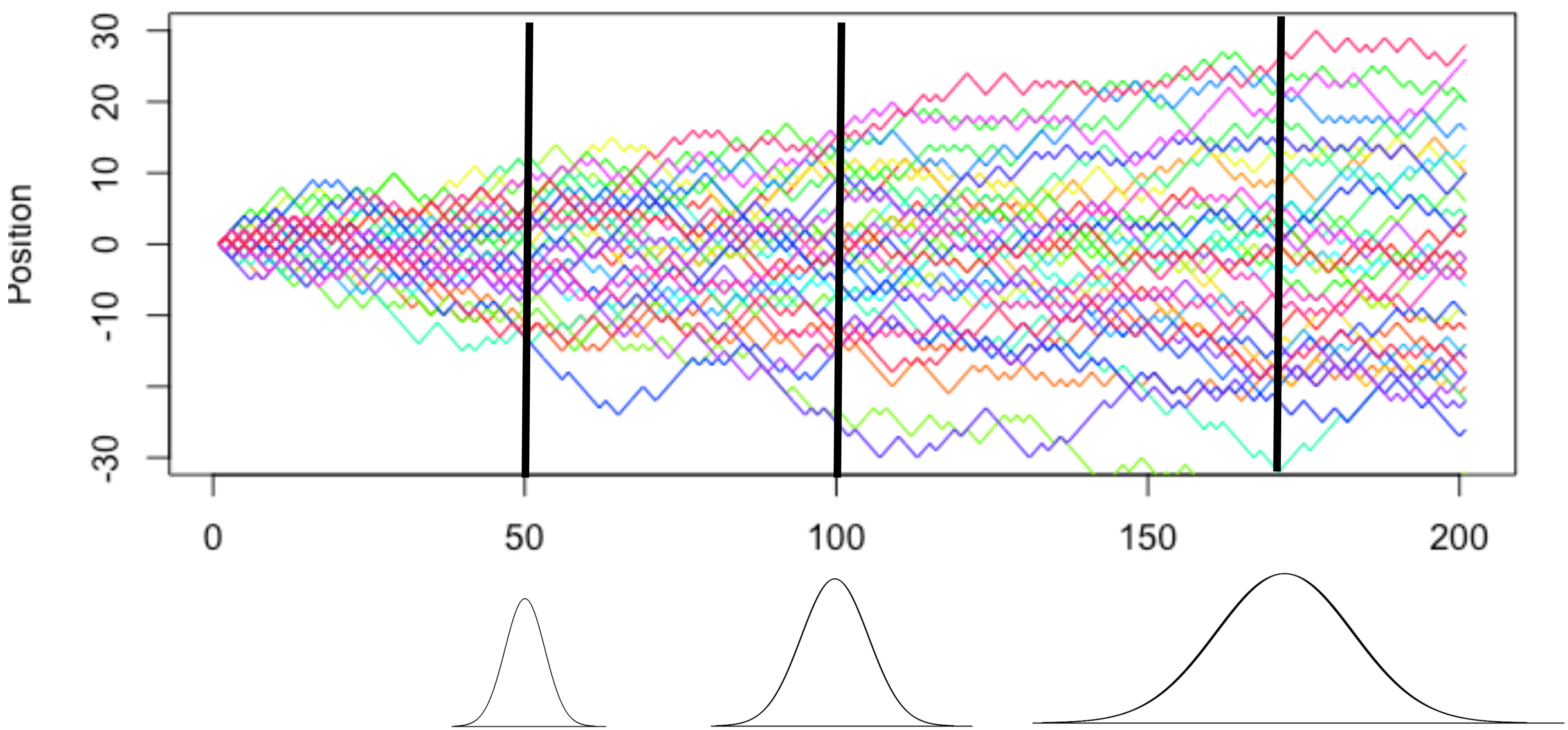
ランダムウォーク

$$X_n = X_{n-1} + W_n$$



ランダムウォーク

$$X_n = X_{n-1} + W_n$$

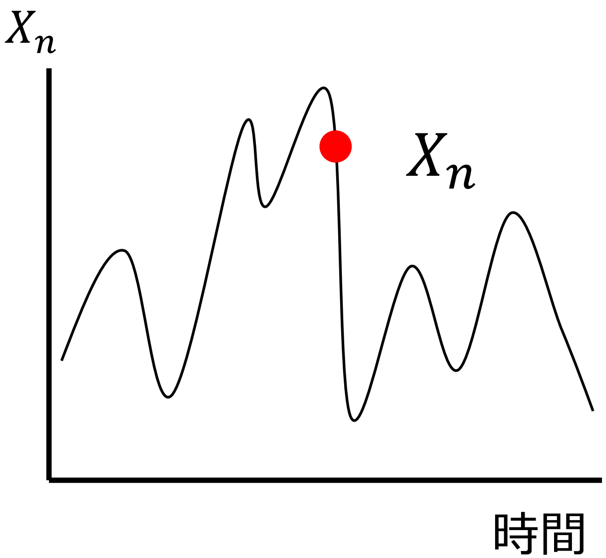


Random_walk.R

Part5 カルマンフィルタ

カルマンフィルター

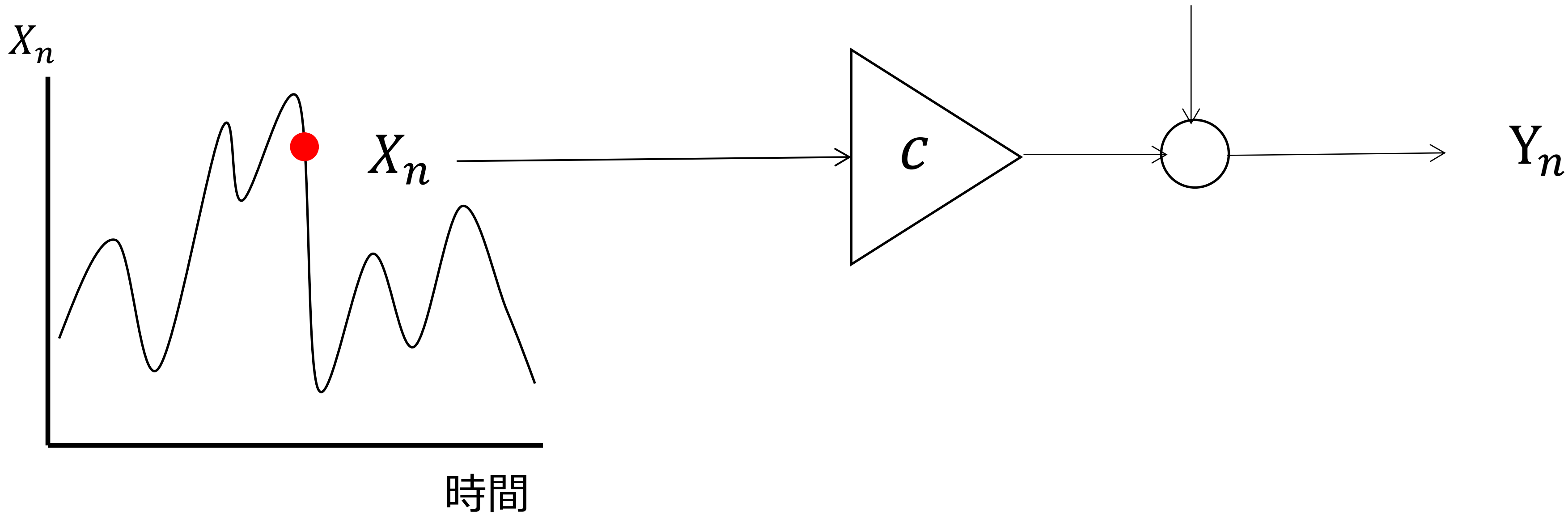
状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$



カルマンフィルター

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

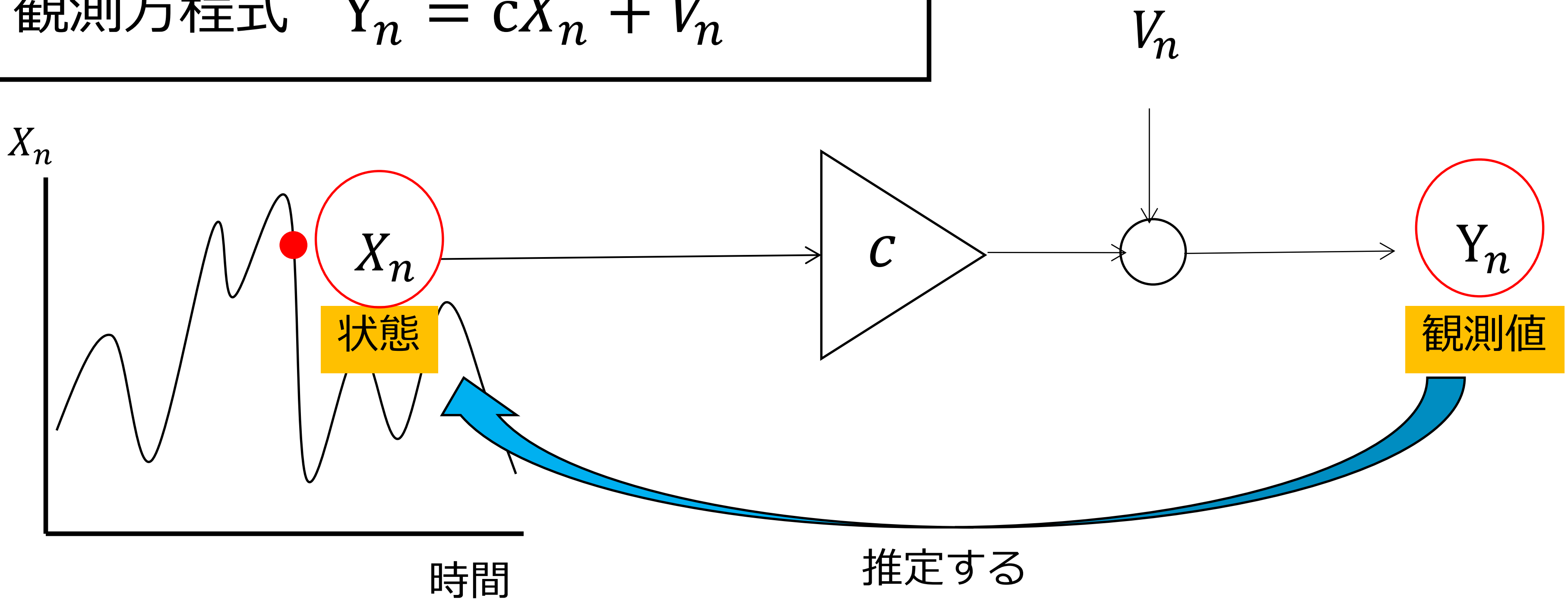
観測方程式 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$



カルマンフィルター

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$

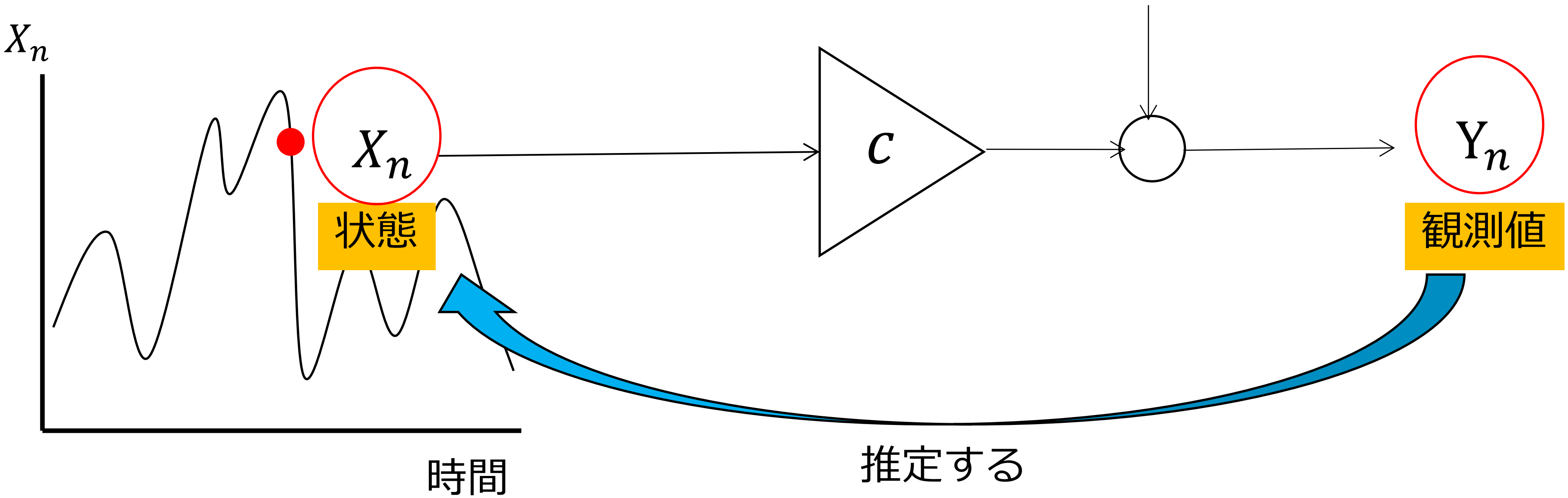


$$P(x_n|y_n)$$

カルマンフィルター

状態方程式　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式　$Y_n = cX_n + V_n$

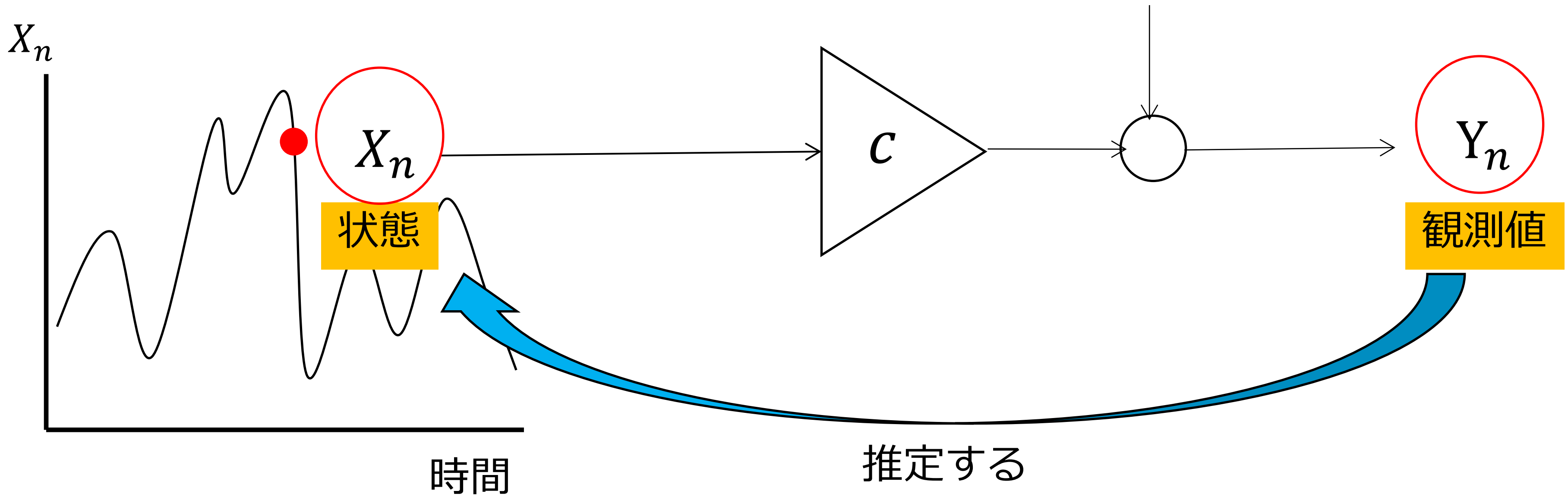


$$P(x_n|y_n)$$

カルマンフィルター

状態方程式 $X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式 $Y_n = cX_n + V_n$



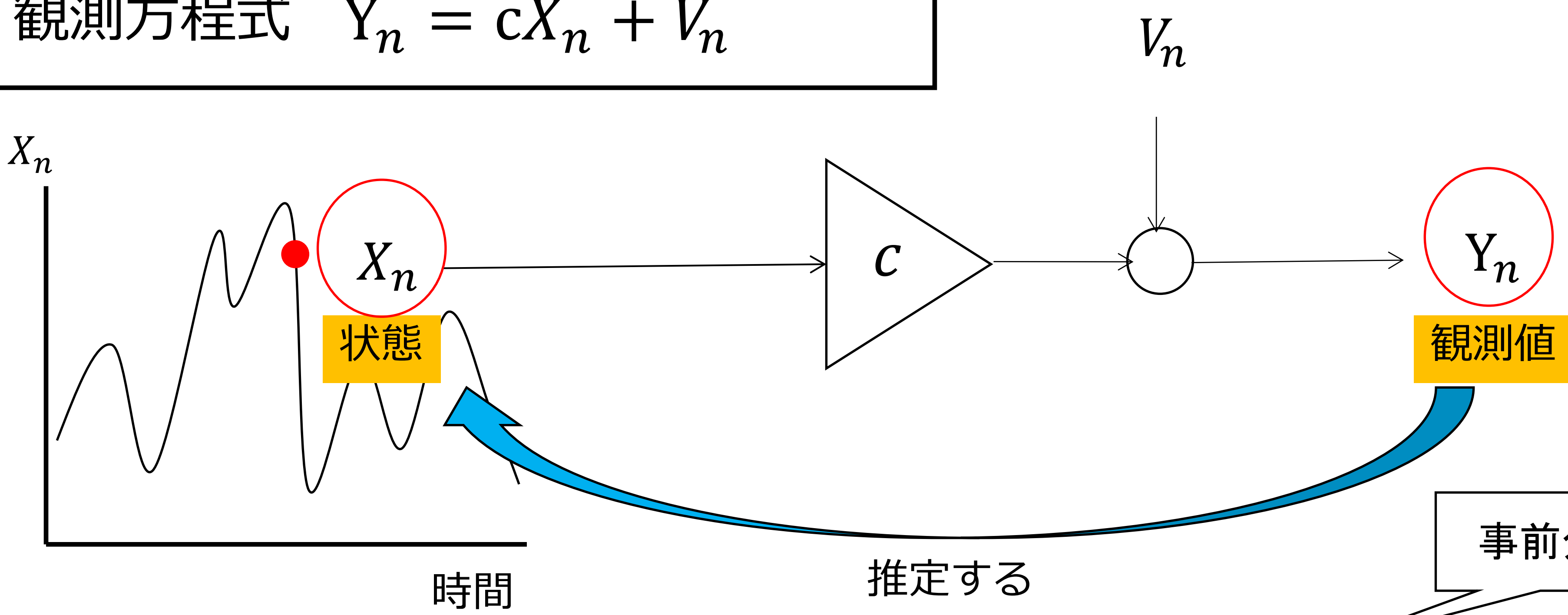
$$P(x_n|y_n) = \frac{P(y_n|x_n)P(x_n)}{P(y_n)}$$

ベイズの定理

カルマンフィルター

状態方程式　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式　$Y_n = cX_n + V_n$



事前分布

事後分布

$$P(x_n|y_n) = \frac{P(y_n|x_n)P(x_n)}{P(y_n)}$$

ベイズの定理

ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

状態方程式　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$

観測方程式　$\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

状態方程式　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$

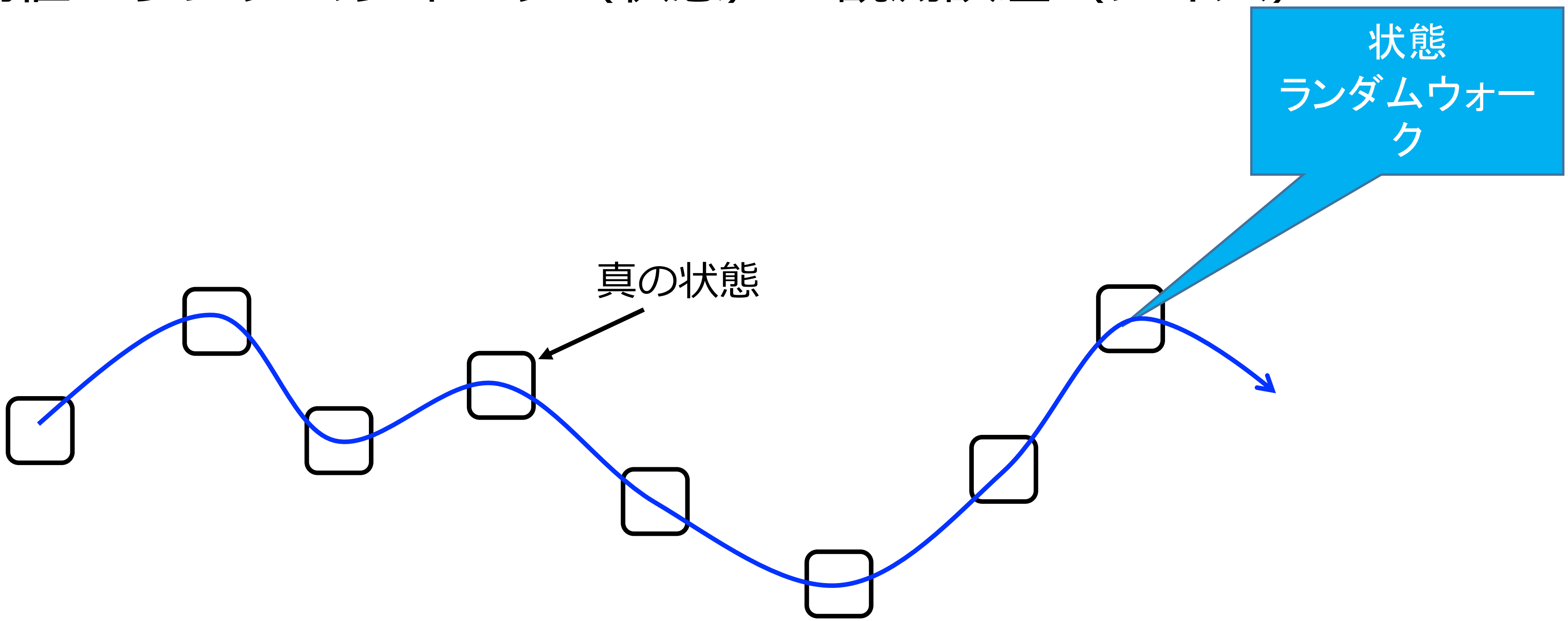
観測方程式　$\mathrm{Y}_n = \mathrm{c}X_n + V_n$

観測値＝ランダムウォーク（状態）＋観測誤差（ノイズ）

ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

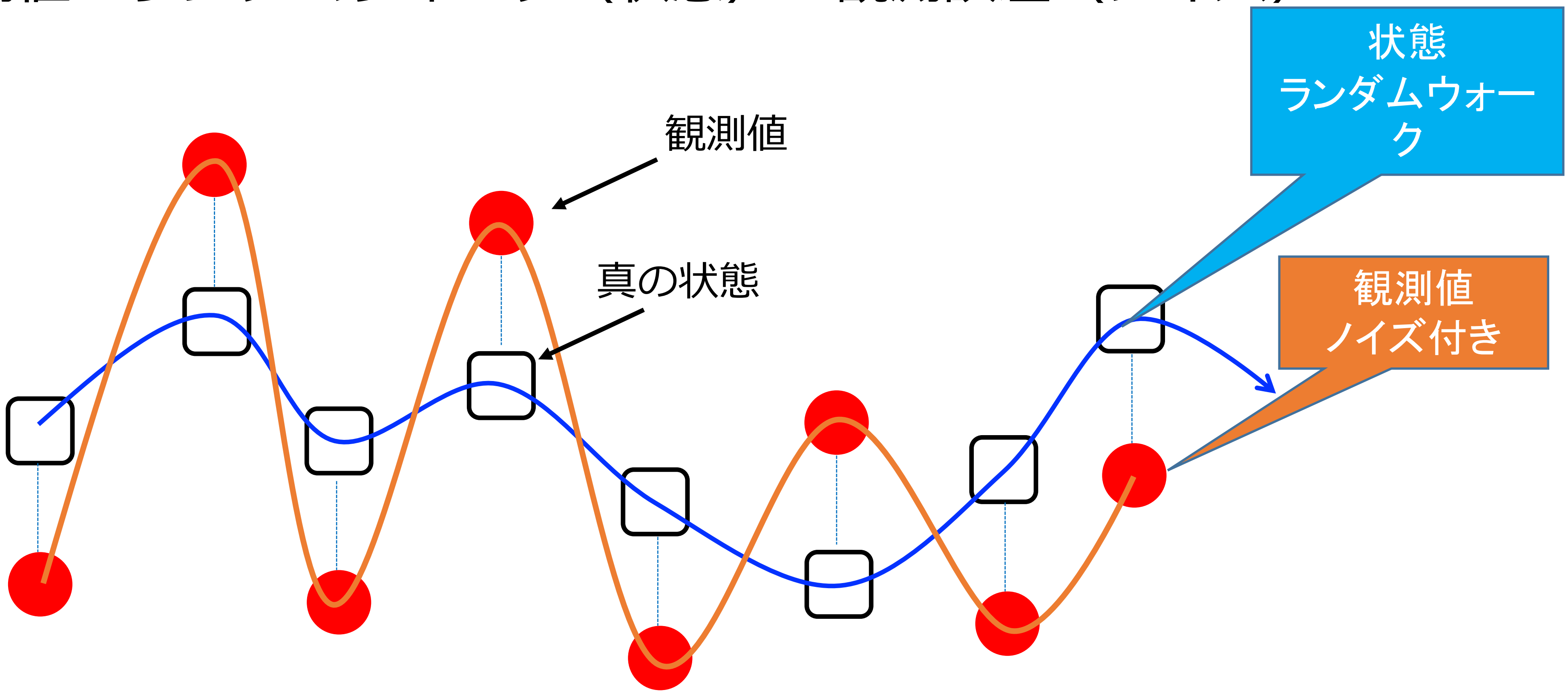
観測値＝ランダムウォーク（状態）＋観測誤差（ノイズ）



ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

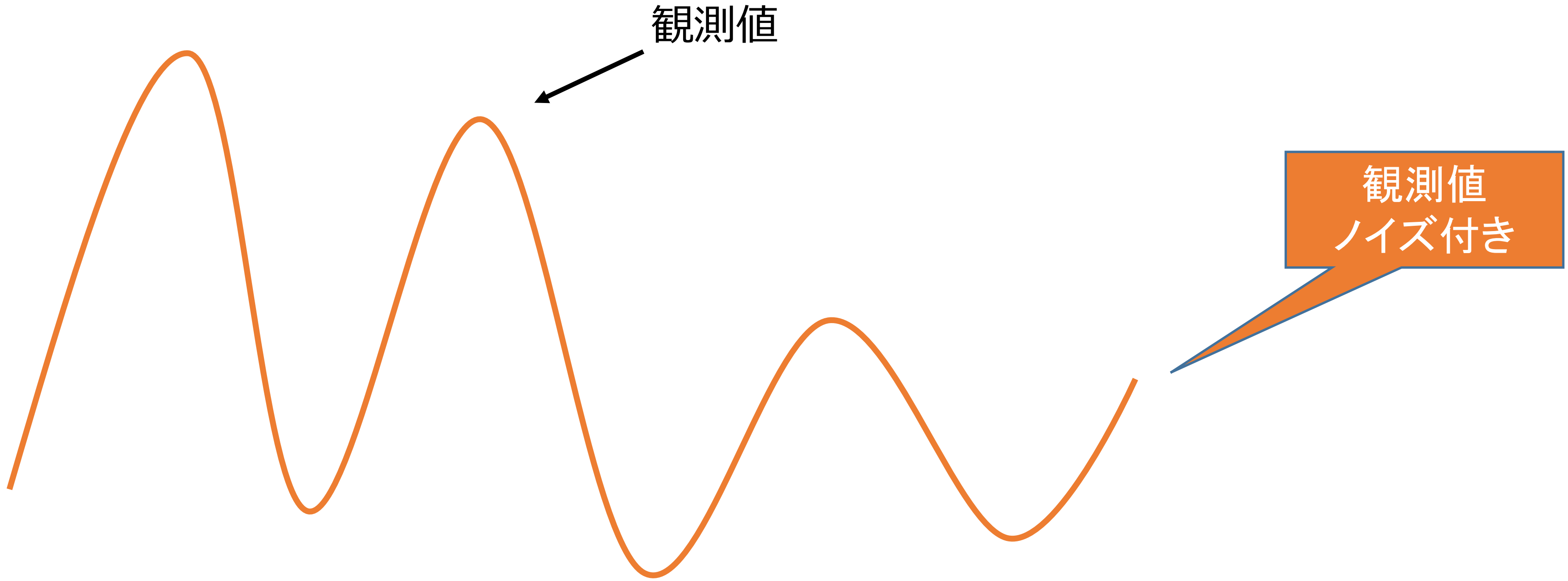
観測値＝ランダムウォーク（状態）＋観測誤差（ノイズ）



ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

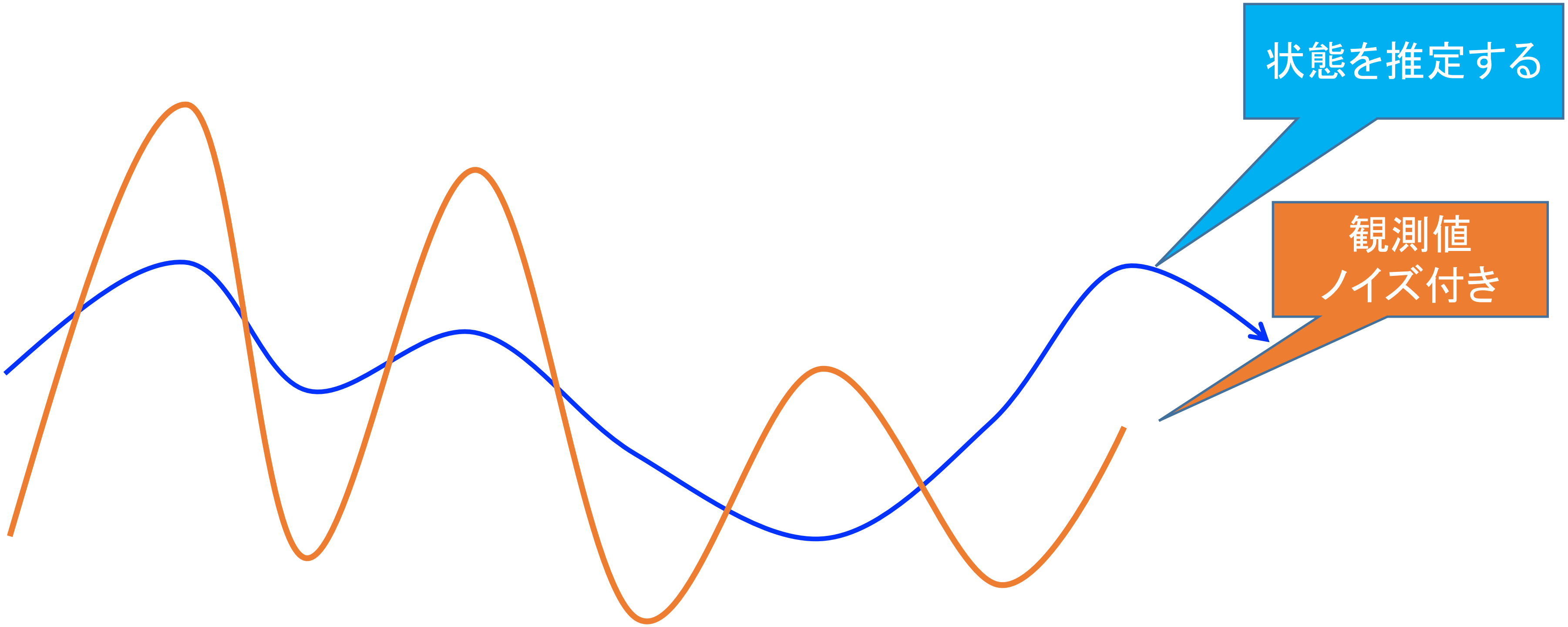
観測値＝ランダムウォーク（状態）＋観測誤差（ノイズ）



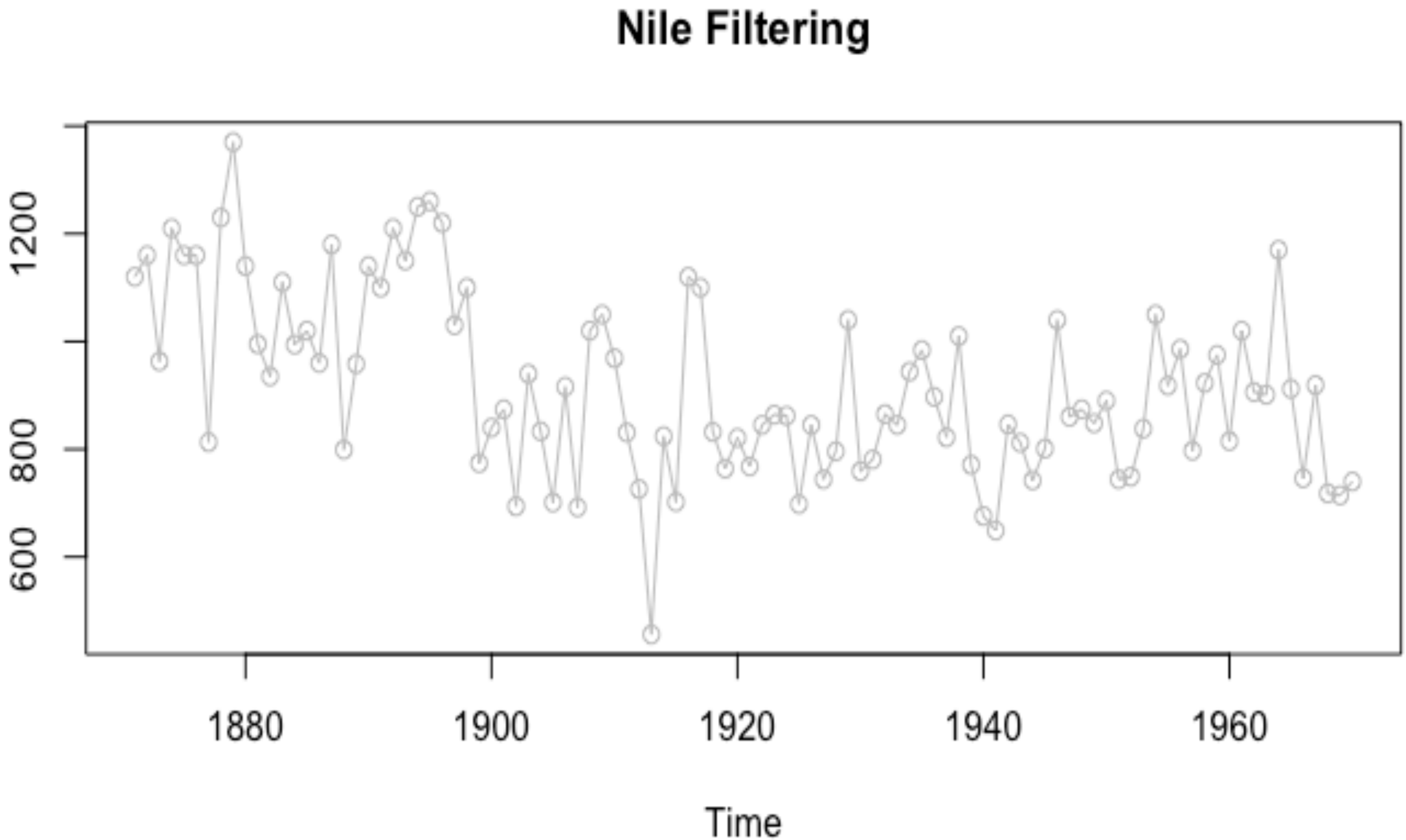
ローカル・レベル・モデル

見えない状態の部分がランダムウォークしていると仮定したモデル

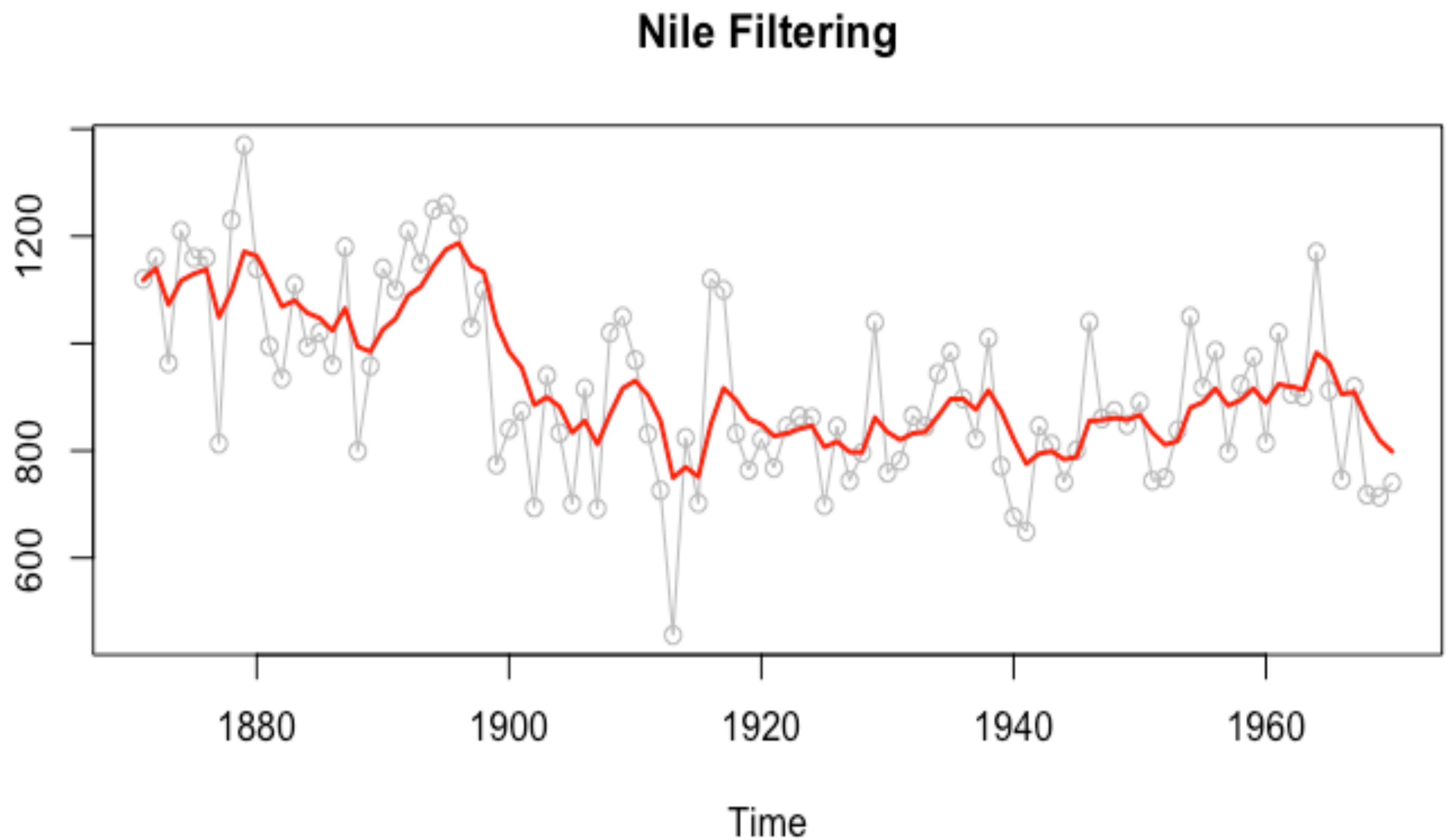
観測値＝ランダムウォーク（状態）＋観測誤差（ノイズ）



Nile データ



Nile データ



Kalman_filter.R

カルマンフィルタ設計の流れ

Step1

状態空間モデルの「型」を決める

Step2

その型に入れるパラメタを推定する

Step3

Step2 で推定されたパラメタを「型」に入れてカルマンフィルタを回す

Step4

カルマンフィルタ の結果を使ってスムージングする

Step1 状態空間モデルの「型」を決める

- dlm パッケージ

- dlmModPoly()

Order=1:ローカルレベルモデル（ランダムウォーク+ノイズ）

Order= 2 :ローカル線型トレンドモデル

- dlmModReg()
- dlmModSeas( )
- dlmModTrig( )
- dlmModARMA( )

Step2 その型に入れるパラメタを推定する

dlm

```
>Nile
>plot(Nile, type="o",col=8)
```

Step1　Modelの型を決める

```
>build.1 <- function(theta){
dlmModPoly(order=1, dV=exp(theta[1]), dW=exp(theta[2]))
}
```

Step 2　パラメタの推定

```
>fit.1 <- dlmMLE(Nile, parm=c(1, 1), build.1)
```

Step 3　推定されたパラメタで、モデルを組み直し、フィルタリングする

```
>mod.Nile <- build.1(fit.1$par)
>NileFilt <- dlmFilter(Nile, mod.Nile)
```

結果のPlot

```
plot(Nile, type="o", col=8, ylab="", main="Nile Filtering")
lines(dropFirst(NileFilt$m), col=2, lwd=2)
```

カルマンフィルター 2

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $\mathrm{Y}_n = X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

カルマンフィルター 2

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

$X_0 = 10$

W=6

V=3

$N(0,5)$

カルマンフィルター 2

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = X_n + V_n$

W=6

$X_0 = 10$

V=3

library(dlm)

V=3

W=6

X.0=10

カルマンフィルター 2

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = X_n + V_n$

$X_0 = 10$

V=3

W=6

```
library(dlm)

V=3
W=6
X.0=10

Time=c(0)
X=c(X.0)
Y=c(NA)
```

カルマンフィルター 2

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = X_n + V_n$

```
for(i in 1:20){
time=append(time,i)
X_next=X[i]+rnorm(1,mean=0,sd=sqrt(W))
X=append(X,X_next)
y_next =X_next +rnorm(1,mean=0,sd=sqrt(V))
y=append(y,y_next)
}

df1 <- data.frame(time=time, X=X, y=y)
```

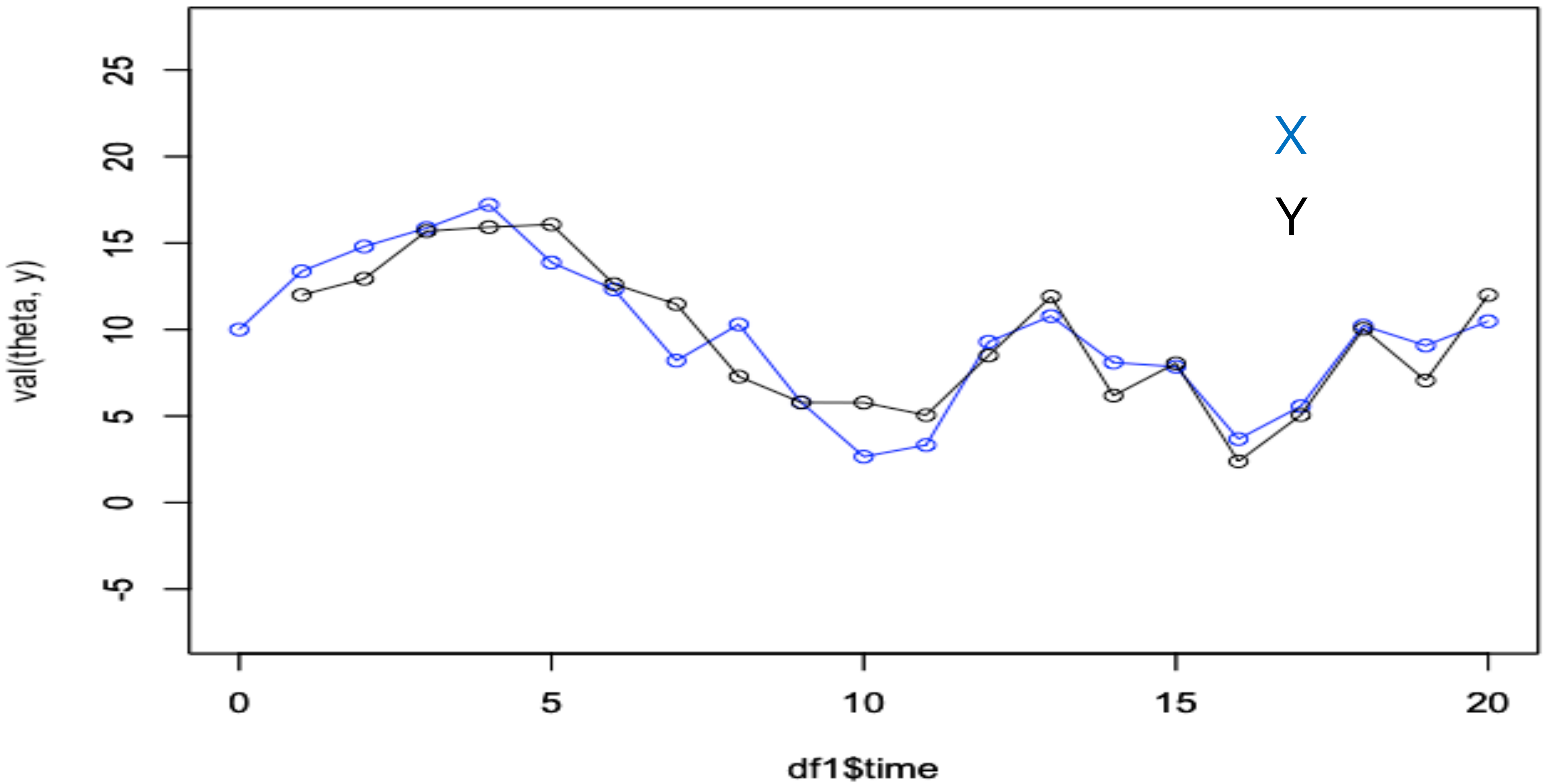
カルマンフィルター 2

```
minY <- min(df1$X)-10
maxY <-max(df1$X)+10
```

グラフ作成のため

```
plot(df1$time, df1$X, ylim=c(minY,maxY),type="o", col="blue", ylab="val(X, y)")
par(new=TRUE)
plot(df1$time, df1$y, ylim=c(minY,maxY), type="o", ylab="")
```

Yのデータのみが与えられたとして、カルマンフィルタにより状態の推定を行う



Step1 モデルの型を決める

状態方程式 $X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

W=6

$N(0,5)$

$X_0 = 10$

V=3

Dlm関数を使用する場合

```
m.0=0
C.0=5
mod1=dlm( m0=m.0, C0=C.0, FF=1, V=3, GG=1, W=6 )
unlist(mod1)
```

Step1 モデルの型を決める

状態方程式 $X_n = GG * X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = FF * X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

W=6

V=3

dlmmodpoly()関数を使用する場合

```
m.0=10
C.0=50
mod1 <- dlm( m0=m.0, C0=C.0, FF=1, V=3, GG=1, W=6 )
```

Step1 モデルの型を決める

状態方程式 $X_n = GG * X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = FF * X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

W=6

V=3

dlmmodpoly()関数を使用する場合

m.0=10
C.0=50

mod1 <- dlm(m0=m.0, C0=C.0, FF=1, V=3, GG=1, W=6)

Step1 モデルの型を決める

状態方程式 $X_n = GG * X_{n-1} + W_n$

観測方程式 $Y_n = FF * X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

W=6

V=3

dlmmodpoly()関数を使用する場合

m.0=10
C.0=50

mod1 <- dlm(m0=m.0, C0=C.0, FF=1, V=3, GG=1, W=6)

Step1 モデルの型を決める

状態方程式　$X_n = X_{n-1} + W_n$

観測方程式　$Y_n = X_n + V_n$

$X_0 \sim N(\mu, \sigma)$

W=6

V=3

dlmmodpoly()関数を使用する場合

```
m.0=10
C.0=50
mod1 <- dlmModPoly( order=1, m0=m.0, C0=C.0, dV=3, dW=6 )
unlist(mod1)
```

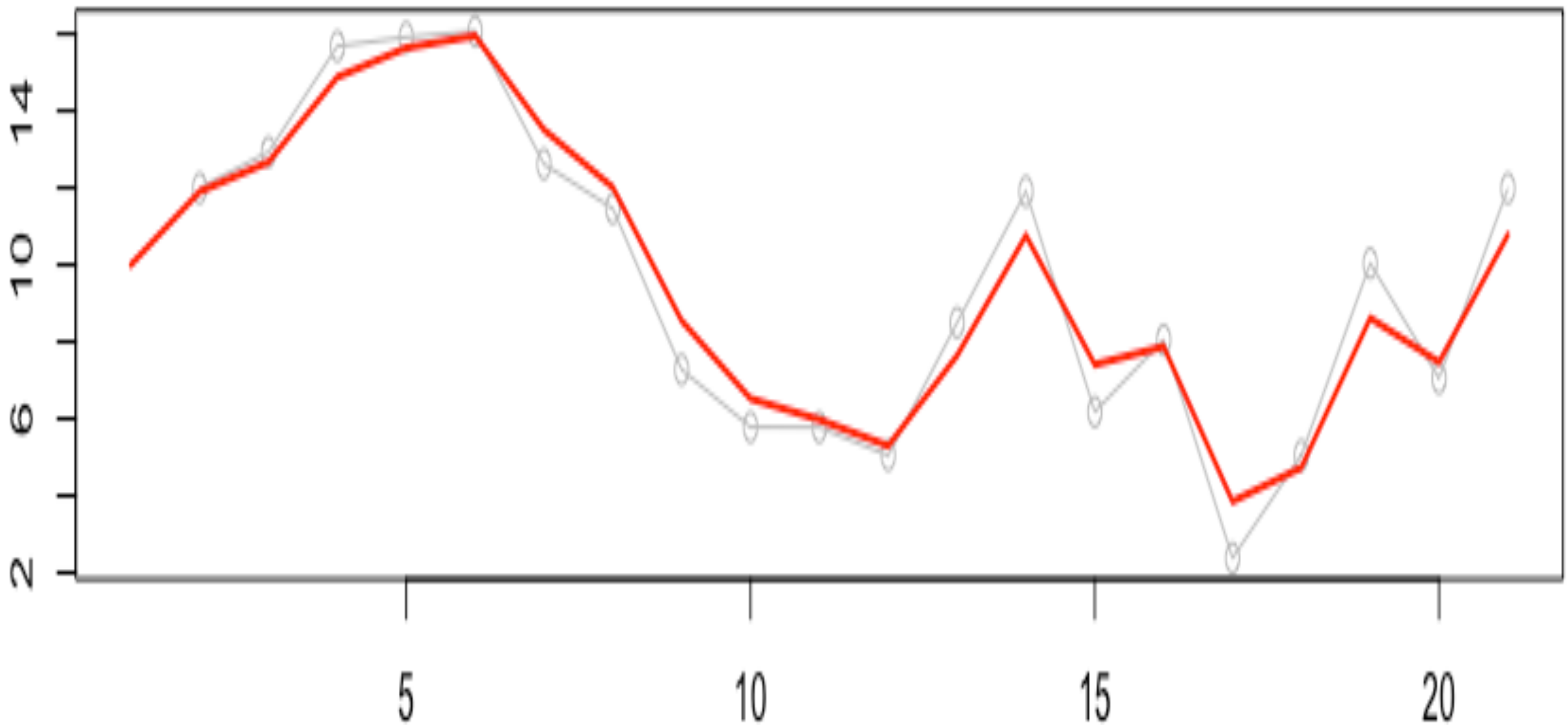
Step 3　フィルタリングする

```
fit_mod1 <- dlmFilter(y,mod1)
```

Step4　可視化する

```
plot(y, type="o", col=8, ylab="", main="")
lines(dropFirst(fit_mod1$m), col=2, lwd=2)
```

推定値



Part6 カルマンゲイン

カルマンフィルター

(1)　$P(y_n|x_n)$

$\longleftrightarrow$ $X_n(\omega) = x_n$という実現値をとったときのY_nの分布？

$\longleftrightarrow$ $Y_n = \mathrm{c}X_n + V_n$ なのでY_nは正規分布

$\longleftrightarrow$ $E[Y_n] = \mathrm{E}[\mathrm{c}x_n + V_n] = \mathrm{cE}[x_n] = cx_n$

$V[Y_n] = \mathrm{V}[\mathrm{c}x_n + V_n] = V[V_n] = 1$

$\longleftrightarrow$ $P(y_n|x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y_n - cx_n)^2}$

カルマンフィルター

(2)　$P(x_n)$：　事前分布

⟷　データy_nが得られる前のX_nの分布

⟷　データy_nが得られる前のX_{n-1}の分布

⟷　いま　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$ なので

いま　$E[X_n] = E[aX_{n-1} + bW_n] = a\mu_{n-1}$

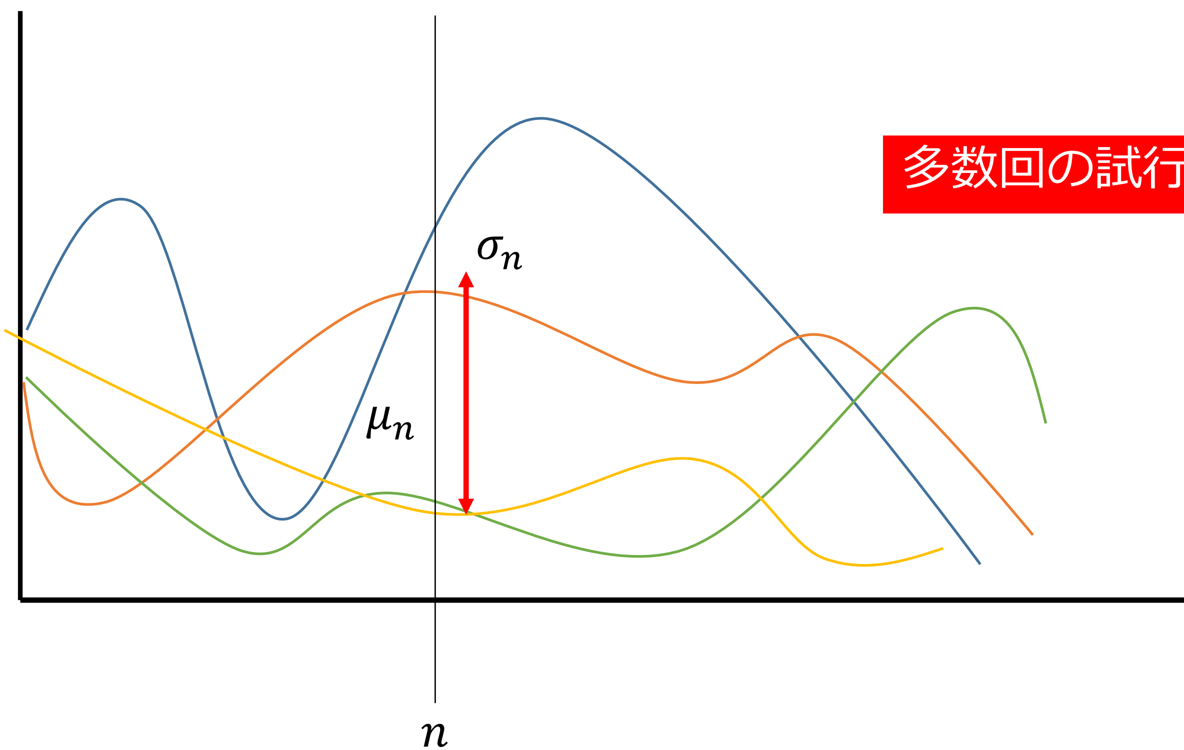
$$V[X_n] = V[aX_{n-1} + bW_n] = a^2\sigma_{n-1}^2 + b^2$$

ゆえに、$P(x_n) = \frac{1}{N} e^{-\frac{1}{2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}(x_n - a\mu_{n-1})^2}$ の正規分布にしたが

カルマンフィルター

- X_nの振る舞いについて何も情報をもたないとき

X_nはN$(\mu_n\ \sigma_n)$　$\mu_n = a\mu_{n-1}, \sigma_n = a^2\sigma_{n-1}^2 + b^2$に従って変化。



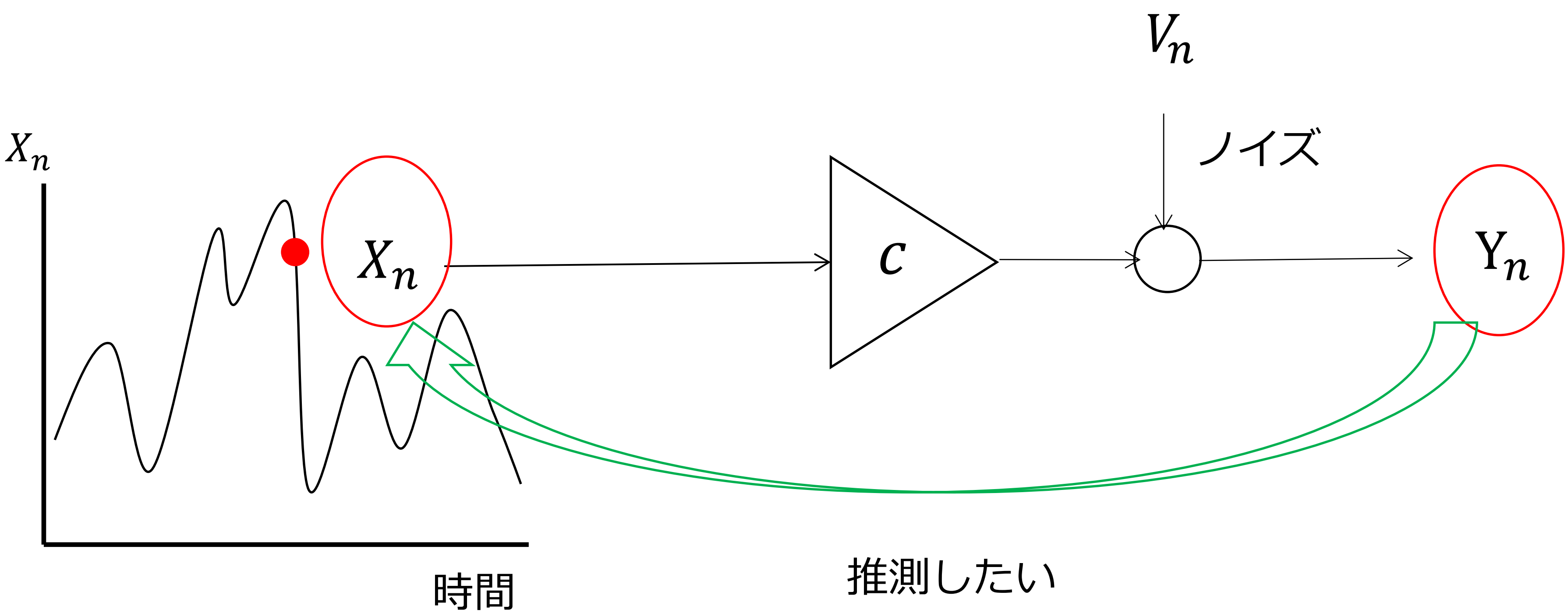
多数回の試行に対する統計的な性質

カルマンフィルター

- X_nの振る舞いについてさらに

$$Y_n = cX_n + V_n$$

なる出力確率変数　Y_n が得られるとする。



カルマンフィルター

事前分布

- 時刻n-1においてX_{n-1}がN($\mu_{n-1}\ \sigma_{n-1}$)に従っているとする

⟷ データ$y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$をもとに、X_{n-1}がμ_{n-1}の周辺に値を取っているとよそくしている。

➡ データy_nが新たに得られた時、X_nが従うN($\mu_n\ \sigma_n$)を求める

⟷ $$P(x_n|y_n) = \frac{P(y_n|x_n)P(x_n)}{P(y_n)}$$

事前分布

事後分布

ベイズの定理を利用

カルマンフィルター

(1)　$P(y_n|x_n)$

⟷ $X_n(\omega) = x_n$という実現値をとったときのY_nの分布？

⟷ $Y_n = \mathrm{c}X_n + V_n$ なのでY_nは正規分布

⟷ $E[Y_n] = \mathrm{E}[\mathrm{c}x_n + V_n] = \mathrm{cE}[x_n] = cx_n$

$V[Y_n] = \mathrm{V}[\mathrm{c}x_n + V_n] = V[V_n] = 1$

⟷ $$P(y_n|x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y_n - cx_n)^2}$$

カルマンフィルター

(2)　$P(x_n)$：　事前分布

⟷　データy_nが得られる前のX_nの分布

⟷　データy_nが得られる前のX_{n-1}の分布

⟷　いま　$X_n = aX_{n-1} + bW_n$ なので

いま　$E[X_n] = E[aX_{n-1} + bW_n] = a\mu_{n-1}$

$$V[X_n] = V[aX_{n-1} + bW_n] = a^2\sigma_{n-1}^2 + b^2$$

ゆえに、$P(x_n) = \frac{1}{N} e^{-\frac{1}{2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}(x_n - a\mu_{n-1})^2}$ の正規分布にしたが

カルマンフィルター

$$P(x_n|y_n) = \frac{P(y_n|x_n)P(x_n)}{P(y_n)} = \frac{1}{N}e^{-\frac{(x_n-\mu_n)^2}{2(\sigma_n^2)}}$$

新しいデータ

$$\mu_n = a\mu_{n-1} + \frac{c(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}{1+c^2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}(y_n - ac\mu_{n-1})$$

$$\boxed{\sigma_n^2 = \frac{(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}{1+c^2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}}$$

分散はデータに依存しない

カルマンフィルター

$$P(x_n|y_n) = \frac{P(y_n|x_n)P(x_n)}{P(y_n)} = \frac{1}{N}e^{-\frac{(x_n-\mu_n)^2}{2(\sigma_n^2)}}$$

新しいデータ

$$\mu_n = \mathrm{a}\mu_{n-1} + \frac{c(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}{1+c^2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}(y_n - ac\mu_{n-1})$$

$$\boxed{\sigma_n^2 = \frac{(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}{1+c^2(a^2\sigma_{n-1}^2+b^2)}}$$

分散はデータに依存しない