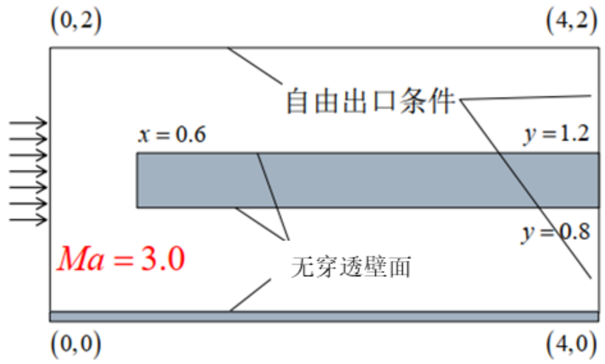
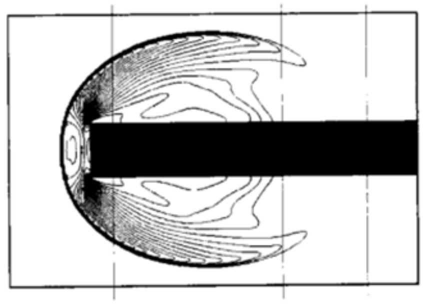
# 超声速气流绕过平头钝体流动——求解二维 Euler 方程

## 1　问题描述



初始条件参考：　$u=3.0, v=0, \rho=1.0, p=0.71429$

[任务描述]

基于二维Euler方程求非定常解，边界和初始条件见上页。

计算区域：$x\in[0,4], y\in[0,2]$

[要求]

网格形式自定。

空间格式需采用一种满足TVD的2阶格式或高阶格式，时间积分采用2阶或3阶TVD型Runge-Kutta方法。

可分析不同网格密度、不同限制器或其它方面对模拟结果的影响（可加分）。

## 2　问题分析

### 2.1 守恒型控制方程及其特征分析

二维守恒型 Euler 方程的无量纲形式如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}, \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{pmatrix}, \boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{pmatrix} \tag{2}$$

理想气体状态方程：

$$p=(\gamma-1)\rho e=(\gamma-1)\left[E-\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right)\right] \tag{3}$$

上述方程(1)-(3)已经封闭，下面补充在计算过程中可能用到的换算公式：内能和焓的计算公式：

$$E=\rho e+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right)=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right)=\frac{\rho RT}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} e&=\frac{p}{(\gamma-1)\rho}=c_vT=\frac{1}{\gamma-1}RT \\ h&=e+\frac{p}{\rho}=c_pT=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT \end{aligned} \tag{5}$$

将守恒型方程写成非守恒形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}=\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x},\quad \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y}=\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \tag{7}$$

非线性 Jacobian 系数矩阵：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}&=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2+\frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u\left[\frac{\gamma-2}{2}\left(u^2+v^2\right)-\frac{a^2}{\gamma-1}\right] & \frac{3-2\gamma}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2+\frac{a^2}{\gamma-1} & (1-\gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u})=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^2+\frac{\gamma-3}{2}v^2 & (1-\gamma)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ v\left[\frac{\gamma-2}{2}\left(u^2+v^2\right)-\frac{a^2}{\gamma-1}\right] & (1-\gamma)uv & \frac{1}{2}u^2+\frac{3-2\gamma}{2}v^2+\frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma v \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

系数矩阵的特征值及左右特征矢量分别为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_x=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{L}^{-1}&=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u-a & \\ & & & u+a \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Lambda}_y=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{L}^{-1}&=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \mu_3 & \\ & & & \mu_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v & & & \\ & v & & \\ & & v-a & \\ & & & v+a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{AR}_x=\lambda\boldsymbol{R}_x,\boldsymbol{BR}_y=\mu\boldsymbol{R}_y \\ &\boldsymbol{L}_x\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{L}_x,\boldsymbol{L}_y\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{L}_y \\ &\boldsymbol{L}_x\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{I},\boldsymbol{L}_y\boldsymbol{R}_y=\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u & 0 & u-a & u+a \\ 0 & 1 & v & v \\ \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) & v & h-au & h+au \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & u & u \\ 0 & v & v-a & v+a \\ u & \frac{1}{2}\left(v^2-u^2\right) & h-av & h+av \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{L}_x = \begin{pmatrix} 1-b_1 & b_2 u & b_2 v & -b_2 \\ -b_1 v & b_2 uv & 1+b_2 v^2 & -b_2 v \\ \frac{1}{2}\left(b_1+\frac{u}{a}\right) & -\frac{1}{2}\left(b_2 u+\frac{1}{a}\right) & -\frac{1}{2}b_2 v & \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1-\frac{u}{a}\right) & -\frac{1}{2}\left(b_2 u-\frac{1}{a}\right) & -\frac{1}{2}b_2 v & \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_y = \begin{pmatrix} -b_1 u & 1+b_2 u^2 & b_2 uv & -b_2 u \\ 1-b_1 & b_2 u & b_2 v & -b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1+\frac{v}{a}\right) & -\frac{1}{2}b_2 u & -\frac{1}{2}\left(b_2 v+\frac{1}{a}\right) & \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{2}\left(b_1-\frac{v}{a}\right) & -\frac{1}{2}b_2 u & -\frac{1}{2}\left(b_2 v-\frac{1}{a}\right) & \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix}，\quad b_1 = b_2\frac{\left(u^2+v^2\right)}{2}, b_2 = \frac{\gamma-1}{a^2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}_x\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{L}_x\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}_x\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}_y\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{L}_y\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}_y\boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{R}_y^{-1}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{13}$$

### 2.2 二维问题的算子分裂算法

对于二维 Euler 方程，采用算子分裂算法将其分裂成两个一维问题：

第一个半时间步：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

第二个半时间步：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

在求解时，对两个一维问题进行求解，按照两步对流场进行更新，以下介绍一维问题的求解方法。

### 2.3 一维守恒型方程的求解步骤

本文分别采用二阶 MUSCL 格式（Roe、vanLeer 和 Steger-Warming 通量格式）和 5 阶

精度 WENO 和 5 阶精度 WCNS 格式（Roe 通量格式）进行离散求解，时间积分可以采用 2 阶或者 3 阶 TVD 型 Runge-Kutta 方法。

**守恒型方程求解步骤为：**

（1）网格半节点处插值，MUSCL 插值或高阶插值；

（2）半节点处通量计算，Roe 格式或 WENO 的高阶通量插值；

（3）半节点处空间导数计算；

（4）时间积分过程。

以下按步骤对 3 种格式进行分析，编程时将 3 种方法写成统一步骤，只是调用不同的函数。

### 2.3.1 半节点插值方法

**（1）MUSCL 方法**

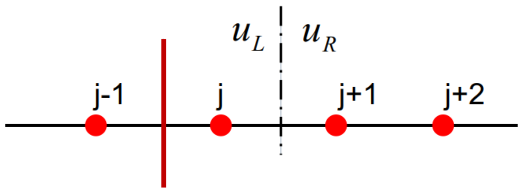
半节点处的变量值通过整数节点处的变量值插值得到：

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{L} &= u_j + \frac{\varepsilon}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\Delta u_{j-1/2} + \left(1+\kappa\right)\Delta u_{j+1/2}\right] \\ u_{j+1/2}^{R} &= u_{j+1} - \frac{\varepsilon}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\Delta u_{j+3/2} + \left(1+\kappa\right)\Delta u_{j+1/2}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{j+1/2} &= u_{j+1} - u_j \\ \Delta u_{j-1/2} &= u_j - u_{j-1} \end{aligned} \tag{17}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，为 0 阶插值，得到一阶迎风格式。

当 $\varepsilon = 1$ 时，$\kappa = -1$ 为二阶完全迎风格式；$\kappa = 0$ 为二阶迎风偏置格式；$\kappa = 1/3$ 时为二阶迎风偏置格式（三点插值，截断误差比 $\kappa = -1$ 和 $\kappa = 0$ 都小）；$\kappa = 1$ 时为中心差分格式。$\kappa = 0$ 和 $\kappa = 1/3$ 是最常用的格式。




在遇到激波时，还需要对 MUSCL 插值格式施加限制器，抑制激波可能导致的数值振荡。引入限制器对 $\Delta u_{j-1/2}$ 和 $\Delta u_{j+1/2}$ 进行限制，带限制器的 MUSCL 格式可写为：

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{L} &= u_j + \frac{1}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\varphi\left(\eta_{j-1/2}^{+}\right)\Delta u_{j-1/2} + \left(1+\kappa\right)\varphi\left(\eta_{j+1/2}^{-}\right)\Delta u_{j+1/2}\right] \\ u_{j+1/2}^{R} &= u_{j+1} - \frac{1}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\varphi\left(\eta_{j+3/2}^{-}\right)\Delta u_{j+3/2} + \left(1+\kappa\right)\varphi\left(\eta_{j+1/2}^{+}\right)\Delta u_{j+1/2}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

$$\eta^{-}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\Delta u^n_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}}=\frac{u^n_j-u^n_{j-1}}{u^n_{j+1}-u^n_j},\quad \eta^{+}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\Delta u^n_{j+\frac{3}{2}}}{\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}}=\frac{u^n_{j+2}-u^n_{j+1}}{u^n_{j+1}-u^n_j}$$

$$\eta^{-}_{j+\frac{3}{2}}=\frac{\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta u^n_{j+\frac{3}{2}}}=\frac{u^n_{j+1}-u^n_j}{u^n_{j+2}-u^n_{j+1}}=\frac{1}{\eta^{+}_{j+\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

$$\eta^{+}_{j-\frac{1}{2}}=\frac{\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta u^n_{j-\frac{1}{2}}}=\frac{u^n_{j+1}-u^n_j}{u^n_j-u^n_{j-1}}=\frac{1}{\eta^{-}_{j+\frac{1}{2}}}$$

限制器 $\varphi(\eta)$ 可以取多种形式，常用的限制器包括：Van Leer, minmod, superbee 等等。其形式如下：

$$\begin{cases} SUPERBEE & \psi(r_f)=\max(0,\min(1,2r_f),\min(2,r_f)) \\ MINMOD & \psi(r_f)=\max(0,\min(1,r_f)) \\ OSHER & \psi(r_f)=\max(0,\min(2,r_f)) \\ Van\ Leer & \psi(r_f)=\dfrac{r_f+|r_f|}{1+|r_f|} \\ MUSCL & \psi(r_f)=\max(0,\min(2r_f,(r_f+1)/2,2)) \end{cases} \tag{12.44}$$

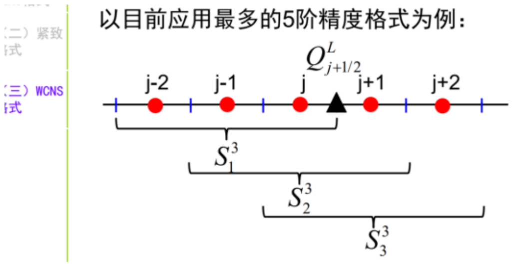
**（2）WENO 方法**

WENO 方法直接对半节点处通量进行插值，因此无需进行变量插值。

**（3）WCNS 方法**

WCNS 格式首先需要在 3 个模板上对半节点处的原始变量进行加权插值，然后通过 Roe 通量格式计算半节点处的通量值。

**以目前应用最多的5阶精度格式为例：**




$$S^3_1=\{I_{j-2},I_{j-1},I_j\}$$
$$S^3_2=\{I_{j-1},I_j,I_{j+1}\}$$
$$S^3_3=\{I_j,I_{j+1},I_{j+2}\}$$

**在三个模板上分别进行Lagrange插值：**

$$Q^L_{j+1/2}=Q_j+(x-x_j)g_j+\frac{1}{2}(x-x_j)^2 s_j \Rightarrow Q^L_{j+1/2}=Q_j+\frac{\Delta x}{2}g_j+\frac{\Delta x^2}{8}s_j$$

$$g^0_j=\frac{1}{2\Delta x}(Q_{j-2}-4Q_{j-1}+3Q_j) \qquad s^0_j=\frac{1}{\Delta x^2}(Q_{j-2}-2Q_{j-1}+Q_j)$$

$$g^1_j=\frac{1}{2\Delta x}(Q_{j+1}-Q_{j-1}) \qquad s^1_j=\frac{1}{\Delta x^2}(Q_{j-1}-2Q_j+Q_{j+1})$$

$$g^2_j=\frac{1}{2\Delta x}(-3Q_j+4Q_{j+1}-Q_{j+2}) \qquad s^2_j=\frac{1}{\Delta x^2}(Q_j-2Q_{j+1}+Q_{j+2})$$

对不同模板赋予比重（权系数）：

$$Q_{j+1/2}^{L}=\sum_{k=0}^{2}\omega_k^L Q_{j+1/2}^{L,k},\qquad \sum_{k=0}^{2}\omega_k^L=1$$

权系数采用WENO计算方式：

$$\omega_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2},\alpha_k=\frac{C_k^r}{\left(\varepsilon+IS_k\right)^2},(k=0,1,2)$$

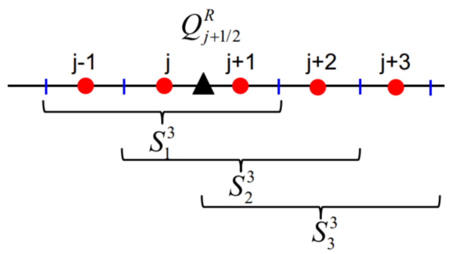
光滑因子为：

$$IS_k=\left(\Delta x\cdot g_j^k\right)^2+\left(\Delta x^2\cdot s_j^k\right)^2$$

最优权为：

$$C_0^L=\frac{1}{16},C_1^L=\frac{10}{16},C_2^L=\frac{5}{16}$$

对于 $Q_{j+1/2}^{R}$，类似地进行插值：




$$S_1^3=\left\{I_{j-1},I_j,I_{j+1}\right\}$$

$$S_2^3=\left\{I_j,I_{j+1},I_{j+2}\right\}$$

$$S_3^3=\left\{I_{j+1},I_{j+2},I_{j+3}\right\}$$

**半节点处原始变量右值（过程略）：**

$$Q_{j+1/2}^{R}=Q_{j+1}-\frac{\Delta x}{2}g_{j+1}+\frac{\Delta x^2}{8}s_{j+1}$$

$g_{j+1}$ 和 $s_{j+1}$ 的求法与上面相同。同样，对不同模板进行加权：

$$Q_{j+1/2}^{R}=\sum_{k=0}^{2}\omega_k^R Q_{j+1/2}^{R,k},\qquad \sum_{k=0}^{2}\omega_k^R=1$$

加权系数的求法：

$$\omega_k^R=\frac{\alpha_k^R}{\alpha_0^R+\alpha_1^R+\alpha_2^R},\quad \alpha_k^R=\frac{C_k^R}{\left(\varepsilon+IS_k\right)^2},\quad (k=0,1,2)$$

$$C_1^R=\frac{5}{16},C_2^R=\frac{10}{16},C_3^R=\frac{1}{16},\varepsilon=10^{-6}$$

### 2.3.2 半节点通量计算

**（1）Roe 方法**

本文中 MUSCL 方法和 WCNS 均采用 Roe 格式计算半节点处的通量值。

Roe 方法是一种近似 Riemann 解法，其对半节点处的精确通量进行近似，半节点处精确通量为：

$$\hat{F}=\frac{1}{2}\left[F\left(Q_L\right)+F(Q_R)-\left|A\left(Q_L,Q_R\right)\right|\bullet\left(Q_R-Q_L\right)\right]\tag{20}$$

Roe 格式对其中的精确雅可比矩阵 $A\left(Q_L,Q_R\right)$ 进行近似，用 Roe 平均量代替原始变量，得到近似雅可比矩阵 $\tilde{A}\left(Q_L,Q_R\right)=A\left(\bar{Q}_{Roe}\right)$，其中 Roe 平均变量为：

$$\bar{\rho}_{roe}=\sqrt{\rho_L\rho_R},\ \bar{u}_{roe}=\frac{u_L+Du_R}{1+D},\ \bar{H}_{roe}=\frac{H_L+DH_R}{1+D},\ D=\sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}$$
$$\bar{c}_{roe}=\sqrt{(\gamma-1)\left[\bar{H}_{roe}-\frac{(\bar{u}_{roe})^2+(\bar{v}_{roe})^2+(\bar{w}_{roe})^2}{2}\right]} \tag{21}$$

为了求$\left|\tilde{A}(Q_L,Q_R)\right|$，对$\tilde{A}(Q_L,Q_R)=A(\bar{Q}_{Roe})$进行特征分解：

$$A(\bar{Q}_{Roe})=L^{-1}\bar{\Lambda}_{roe}L \tag{22}$$

则：

$$\left|\tilde{A}(Q_L,Q_R)\right|=\left|A(\bar{Q}_{Roe})\right|=L^{-1}\left|\bar{\Lambda}_{roe}\right|L \tag{23}$$

由此可得到半节点处的通量值。同时，为了避免 Carbuncle 现象，需要引入熵修正，对特征值进行修正。本文采用 Harten 型的熵修正：

$$\lambda=\begin{cases}|\lambda| & |\lambda|\ge\varepsilon\\ \dfrac{\lambda^2+\varepsilon^2}{2\varepsilon} & |\lambda|<\varepsilon\end{cases} \tag{24}$$

$\varepsilon$为小量，一般取$0\le\varepsilon\le0.125$。

**（2）vanLeer 通量分裂法**

略去，可参考文献。

**（3）WENO 方法**

与 MUSCL 方法和 WCNS 方法不同，WENO 方法直接对半节点处的通量进行插值。

首先对通矢量进行分裂，计算得到整数节点处的正负通量，然后采用 WENO 格式分别插值半节点处的正通量和负通量。

本文采用 Steger-Warming 通量分裂方法，按照特征值的正负来分裂：

$$F=AU=L^{-1}\left(\Lambda^++\Lambda^-\right)LU=L^{-1}\Lambda^+LU+L^{-1}\Lambda^-LU=F^++F^- \tag{25}$$

两个方向的特征值可以分裂为：

$$\lambda_i^{\pm}=\frac{1}{2}\left(\lambda_i\pm\sqrt{\lambda_i^2+\varepsilon^2}\right)$$
$$\mu_j^{\pm}=\frac{1}{2}\left(\mu_j\pm\sqrt{\mu_j^2+\varepsilon^2}\right) \tag{26}$$

其中$\lambda_i$，$\mu_j$分别为两个方向的特征值，$i,j=1,2,3,4$，$\varepsilon$为小量，取为$\varepsilon=10^{-4}$。

根据特征值的正负可以将通量分裂为正负两部分：

$$
\boldsymbol{f}^{\pm}(\boldsymbol{u})=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{pmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1^{\pm}+\lambda_3^{\pm}+\lambda_4^{\pm} \\ 2(\gamma-1)u\lambda_1^{\pm}+(u-a)\lambda_3^{\pm}+(u+a)\lambda_4^{\pm} \\ 2(\gamma-1)v\lambda_1^{\pm}+v\lambda_3^{\pm}+v\lambda_4^{\pm} \\ (\gamma-1)(u^2+v^2)\lambda_1^{\pm}+(h-au)\lambda_3^{\pm}+(h+au)\lambda_4^{\pm} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{g}^{\pm}(\boldsymbol{u})=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{pmatrix} 2(\gamma-1)\mu_1^{\pm}+\mu_3^{\pm}+\mu_4^{\pm} \\ 2(\gamma-1)u\mu_1^{\pm}+u\mu_3^{\pm}+u\mu_4^{\pm} \\ 2(\gamma-1)v\mu_1^{\pm}+(v-a)\mu_3^{\pm}+(v+a)\mu_4^{\pm} \\ (\gamma-1)(u^2+v^2)\mu_1^{\pm}+(h-av)\mu_3^{\pm}+(h+av)\mu_4^{\pm} \end{pmatrix} \tag{27}
$$

以下考虑采用 WENO 插值求解半节点处的正负通量值。

当 $\hat{f}'>0$ 时，数值通量为 $\hat{f}^{+}_{j+1/2}$；当 $\hat{f}'<0$ 时，数值通量为 $\hat{f}^{-}_{j+1/2}$；，它们的模板 $S_k^{\pm}$ 分别为：

$$
\begin{aligned}
&S_0^{+}=\{x_{j-2},x_{j-1},x_j\} \qquad S_0^{-}=\{x_{j-1},x_j,x_{j+1}\}\\
&S_1^{+}=\{x_{j-1},x_j,x_{j+1}\}, \quad S_1^{-}=\{x_j,x_{j+1},x_{j+2}\}\\
&S_2^{+}=\{x_j,x_{j+1},x_{j+2}\} \qquad S_2^{-}=\{x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}\}
\end{aligned} \tag{28}
$$

线性插值函数多项式为：

$$
\begin{aligned}
&q_0^{+}(x_{j+1/2})=\frac{1}{3}f_{j-2}^{+}-\frac{7}{6}f_{j-1}^{+}+\frac{11}{6}f_j^{+} \qquad q_0^{-}(x_{j+1/2})=-\frac{1}{6}f_{j-1}^{-}+\frac{5}{6}f_j^{-}+\frac{1}{3}f_{j+1}^{-}\\
&q_1^{+}(x_{j+1/2})=-\frac{1}{6}f_{j-1}^{+}+\frac{5}{6}f_j^{+}+\frac{1}{3}f_{j+1}^{+}, \quad q_1^{-}(x_{j+1/2})=\frac{1}{3}f_j^{-}+\frac{5}{6}f_{j+1}^{-}-\frac{1}{6}f_{j+2}^{-}\\
&q_2^{+}(x_{j+1/2})=\frac{1}{3}f_j^{+}+\frac{5}{6}f_{j+1}^{+}-\frac{1}{6}f_{j+2}^{+} \qquad q_2^{-}(x_{j+1/2})=\frac{11}{6}f_{j+1}^{-}-\frac{7}{6}f_{j+2}^{-}+\frac{1}{3}f_{j+3}^{-}
\end{aligned} \tag{29}
$$

光滑因子计算公式：

$$
\begin{aligned}
IS_0^{+}&=\frac{13}{12}\left(f_{j-2}^{+}-2f_{j-1}^{+}+f_j^{+}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j-2}^{+}-4f_{j-1}^{+}+3f_j^{+}\right)^2\\
IS_1^{+}&=\frac{13}{12}\left(f_{j-1}^{+}-2f_j^{+}+f_{j+1}^{+}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j-1}^{+}-f_{j+1}^{+}\right)^2\\
IS_3^{+}&=\frac{13}{12}\left(f_j^{+}-2f_{j+1}^{+}+f_{j+2}^{+}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3f_j^{+}-4f_{j+1}^{+}+f_{j+2}^{+}\right)^2
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
IS_0^{-}&=\frac{13}{12}\left(f_{j-1}^{-}-2f_j^{-}+f_{j+1}^{-}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j-1}^{-}-4f_j^{-}+3f_{j+1}^{-}\right)^2\\
IS_1^{-}&=\frac{13}{12}\left(f_j^{-}-2f_{j+1}^{-}+f_{j+2}^{-}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_j^{-}-f_{j+2}^{-}\right)^2\\
IS_3^{-}&=\frac{13}{12}\left(f_{j+1}^{-}-2f_{j+2}^{-}+f_{j+3}^{-}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3f_{j+1}^{-}-4f_{j+2}^{-}+f_{j+3}^{-}\right)^2
\end{aligned} \tag{31}
$$

权重系数如下：

$$
\omega_k^{+}=\frac{\alpha_k^{+}}{\alpha_0^{+}+\alpha_1^{+}+\alpha_2^{+}}, \quad \alpha_k^{+}=\frac{C_k^{+}}{\left(\varepsilon+IS_k^{+}\right)^p}, \quad (k=0,1,2) \tag{32}
$$

$$
\omega_k^{-}=\frac{\alpha_k^{-}}{\alpha_0^{-}+\alpha_1^{-}+\alpha_2^{-}}, \quad \alpha_k^{-}=\frac{C_k^{-}}{\left(\varepsilon+IS_k^{-}\right)^p}, \quad (k=0,1,2) \tag{33}
$$

其中 p 为大于 2 的正整数，组合系数 $C_k^+$ 和 $C_k^-$ 为：

$$C_0^+=\frac{1}{10},C_1^+=\frac{3}{5},C_2^+=\frac{3}{10},C_0^-=\frac{3}{10},C_1^-=\frac{3}{5},C_2^-=\frac{1}{10} \tag{34}$$

半节点处通量值为：

$$\hat{f}_{j+1/2}=\hat{f}_{j+1/2}^{+}+\hat{f}_{j+1/2}^{-} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{j+1/2}^{+}&=\sum_{k=0}^{2}\omega_k^+q_k^+\left(f_{j-2}^+,f_{j-1}^+,f_j^+,f_{j+1}^+,f_{j+2}^+\right)\\ \hat{f}_{j+1/2}^{-}&=\sum_{k=0}^{2}\omega_k^-q_k^-\left(f_{j-1}^-,f_j^-,f_{j+1}^-,f_{j+2}^-,f_{j+3}^-\right)\end{aligned} \tag{36}$$

### 2.3.3 空间导数计算

以下仅以 x 方向空间导数为例，写出其空间导数的形式，其在 y 和 z 方向的形式类似。

（1）MUSCL 方法

$$F_j'=-\frac{1}{\Delta x}\left(\hat{F}_{j+1/2}-\hat{F}_{j-1/2}\right) \tag{37}$$

（2）WENO5 格式

$$F_j'=-\frac{1}{\Delta x}\left(\hat{F}_{j+1/2}-\hat{F}_{j-1/2}\right) \tag{38}$$

（3）WCNS-E6E5 格式

$$\begin{gathered}F_j'=\frac{a}{\Delta x}\left(\hat{F}_{j+1/2}-\hat{F}_{j-1/2}\right)+\frac{b}{\Delta x}\left(\hat{F}_{j+3/2}-\hat{F}_{j-3/2}\right)+\frac{c}{\Delta x}\left(\hat{F}_{j+5/2}-\hat{F}_{j-5/2}\right)\\ a=\frac{75}{64},b=-\frac{25}{384},c=\frac{3}{640}\end{gathered} \tag{39}$$

在边界附近，需要在 1、2 节点上采用边界、近边界差分格式，这里给出左边界形式，右边界类似，对于 WCNS-E6E5 格式，边界附近 1、2 点的通量 4 阶精度差分值为：

$$\begin{aligned}F_1'&=\frac{1}{\Delta x}\left(-\frac{11}{12}\hat{F}_{1/2}+\frac{17}{24}\hat{F}_{3/2}+\frac{3}{8}\hat{F}_{5/2}-\frac{5}{24}\hat{F}_{7/2}+\frac{1}{24}\hat{F}_{9/2}\right)\\ F_2'&=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{24}\hat{F}_{1/2}-\frac{9}{8}\hat{F}_{3/2}+\frac{9}{8}\hat{F}_{5/2}-\frac{1}{24}\hat{F}_{7/2}\right)\end{aligned} \tag{40}$$

在边界附近的 5 阶精度插值公式为：

$$\begin{aligned}q_{1/2}&=\frac{1}{128}\left(315q_1-420q_2+378q_3-180q_4+35q_5\right)\\ q_{3/2}&=\frac{1}{128}\left(35q_1+140q_2-70q_3+28q_4-5q_5\right)\end{aligned} \tag{41}$$

#### 2.3.4 时间导数计算

时间 3 阶精度的 TVD Runge-Kutta 方法：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{(0)}=\mathbf{U}^{n}\\
&\mathbf{U}^{(1)}=\mathbf{U}^{(0)}+\Delta t\mathbf{R}^{n}\left(\mathbf{U}^{(0)}\right)\\
&\mathbf{U}^{(2)}=\frac{3}{4}\mathbf{U}^{(0)}+\frac{1}{4}\mathbf{U}^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta t\mathbf{R}^{n}\left(\mathbf{U}^{(1)}\right)\\
&\mathbf{U}^{(3)}=\frac{1}{3}\mathbf{U}^{(0)}+\frac{2}{3}\mathbf{U}^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta t\mathbf{R}^{n}\left(\mathbf{U}^{(2)}\right)\\
&\mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^{(3)}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

用此方法进行计算时的稳定 CFL 数为 1.0。

### 2.4 网格设置

全场生成规则结构网格，设置两层虚拟点，$x$ 方向的虚拟点设置如图所示。

内场变量点（蓝色）坐标索引范围为[ist => ied], [jst => jed]；

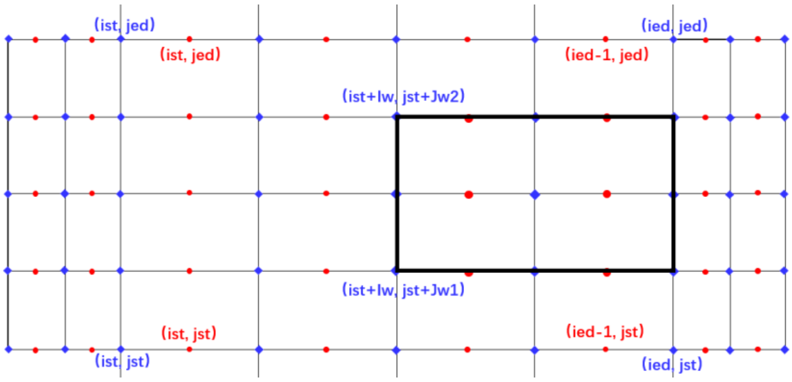
内场通量点（红色）坐标索引范围为[ist => ied-1], [jst => jed-1]；

变量虚拟点为：0, 1, ied+1, ied+2

通量虚拟点为：0, 1, ied, ied+1

其中，钝体物面的坐标索引范围为：[ist+Iw => ied], [jst+Jw1 => jst+Jw2]

在物面内的变量点和通量点分别标记，在计算时跳过，仅仅为计算过程提供虚拟点的变量值和通量，但是不参与更新。




### 2.5 初值、边界条件设置

**初值：**

$$\rho=1.0, u=3.0, v=0, p=0.71429$$

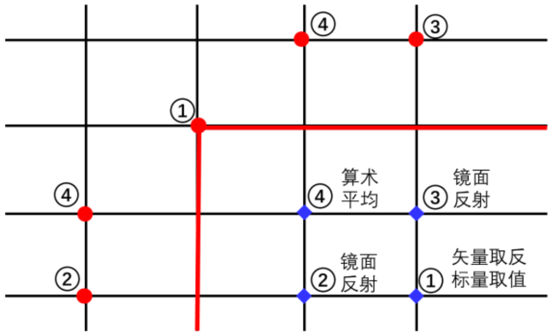
**边界条件：**

（1）左边界：给定均匀来流；

（2）上边界、右边界：变量一阶导数为 0；

（3）物面、下边界：无滑移壁面，标量直接取值，矢量取镜像，即：压力密度一阶导数为 0，平行物面速度分量直接取内场点值，垂直物面速度分量取负的内场点值。

**角点处理方式：**（以左上角点为例）角点处 4 个虚拟点的值按照如下图所示的方式给定。




## 3 计算结果

### 3.1 OpenMP 并行

为了加快计算速度，本文的程序采用 OpenMP 并行，通过移植，程序的并行效率如下表所示：

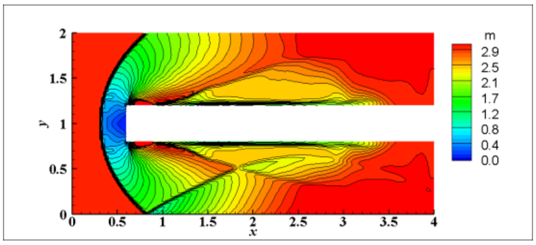
| 线程数 | 计算时间 | 加速比 | 并行效率 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1.34E+02 | | |
| 2 | 9.10E+01 | 1.47 | 73% |
| 4 | 5.23E+01 | 2.55 | 64% |
| 8 | 3.30E+01 | 4.05 | 51% |

### 3.2 不同格式计算结果的对比

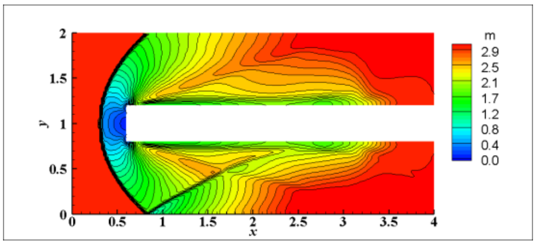
本节考察 5 种格式，分别为：Roe、Steger-Warming、van Leer、WENO5 和 WCNS-E6E5。本例中涉及到 MUSCL 插值的地方选择限制器为 van Leer 限制器，MUSCL 插值系数 $\kappa = 1/3$，为三阶迎风偏置插值。时间积分为 3 阶 TVD Runge-Kutta 方法，计算时间 $t$=1s，CFL 数取 0.3，网格节点数为 201×101，Roe 格式熵修正系数取 0.1。

在计算过程中，由于角点处理的问题，导致计算压力出负，Roe 格式在钝体头部上下两侧的流场已经受到严重“污染”（头部红色高 Ma 斑块），图中结果显示 Steger-Warming 通量格式的计算结果较好，且鲁棒性高。这可能是由于 Steger-Warming 耗散较大，适合具有强激波，强间断的流动模拟。另外，两种 5 阶格式并不能体现出明显的精度优势，因为在激波主导的流动中，高阶格式也发生了降阶，高阶格式更适合于模拟分离流动，接触间断等，像双马赫反射算例。

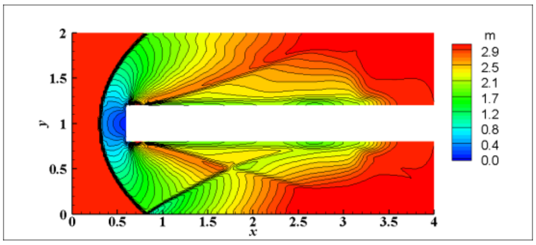
为了考察压力出负是否是由于插值导致，本节还采用一阶精度 Roe 格式进行计算，得到的结果显示一阶结果流场中没有出负导致的斑块，但是激波的分辨率不高。



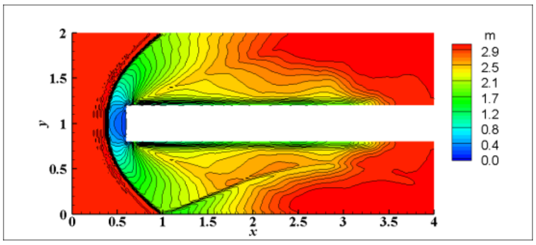
Roe（MUSCL）



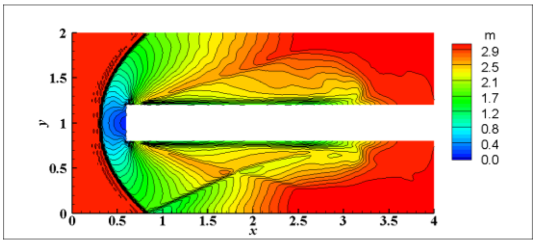
Steger-Warming



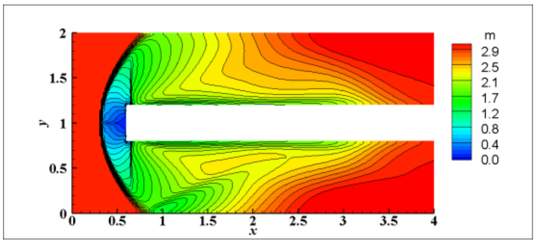
VanLeer



WENO5



WCNS-E6E5



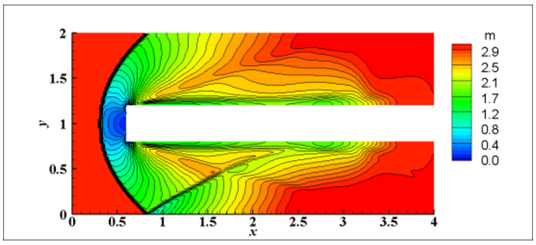
Roe(一阶精度)

**图　五种格式的求解结果**

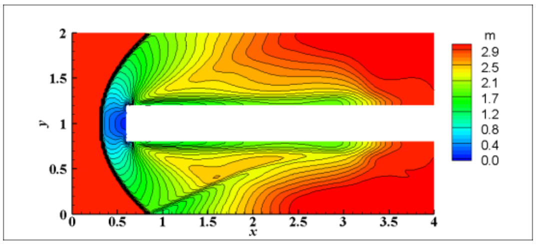
### 3.3 不同限制器的比较

根据 3.1 节的比较结果，本节选择 Steger-Warming 通量格式，考察三种不同的限制器，对比其结果差异，三种限制器分别为 vanLeer、minmod 和 superbee，$1^{st}$-order 为一阶结果。网格节点数为 201×101。

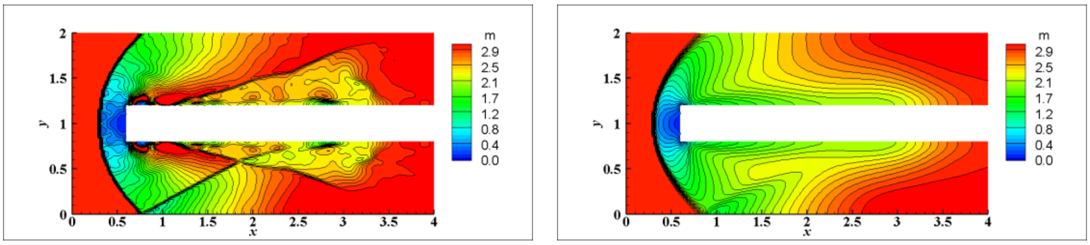
底部物面的反射激波的清晰程度可以反映出限制器的耗散大小。由结果可见，由于 superbee 的耗散最小，导致计算鲁棒性很差，计算压力出负导致流场被严重污染，而 vanLeer 和 minmod 限制均能够稳定计算，$1^{st}$-order 一阶结果已经将底部物面的反射激波耗散掉了，无法清晰分辨激波。



Van Leer



minmod

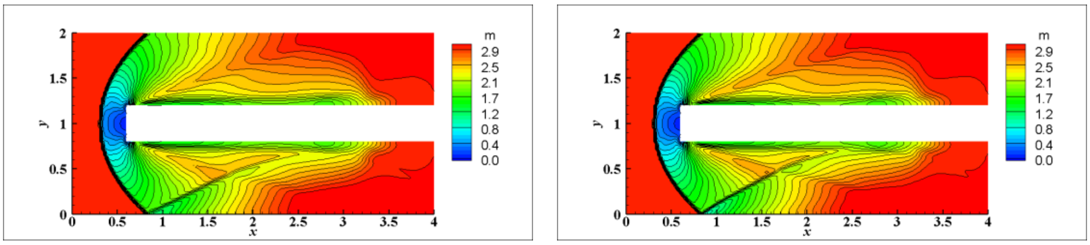



Superbee　　　　1st-order

图　三种限制器的求解结果

### 3.4 不同时间精度的比较

本节选择 Steger-Warming 格式，van Leer 限制器，考察 RK1、TVD-RK2 和 TVD-RK3 的计算结果差异，网格节点数为 201×101。时间一阶精度的 RK1，计算发散，而时间二阶 TVD-RK2 和三阶 TVD-RK3 均能够正常计算，结果显示 TVD-RK3 结果激波清晰程度略高，但是优势并不明显，因为空间精度只有二阶，因此在后续计算时选择 TVD-RK2 即可达到要求的精度。

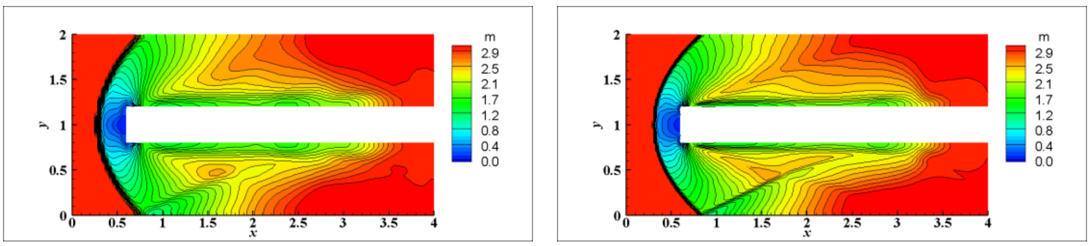



TVD-RK2　　　　TVD-RK3

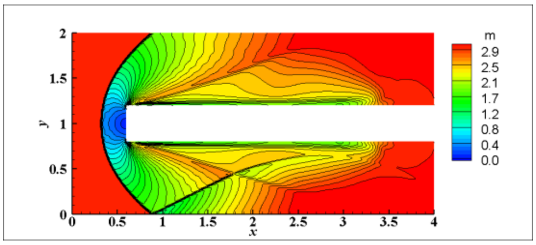
图　三种时间精度的求解结果

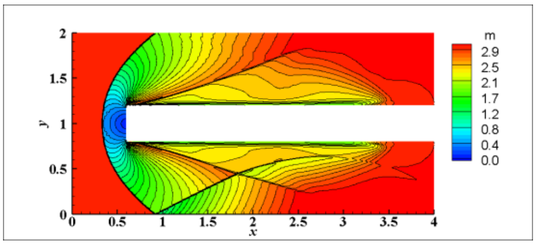
### 3.5 不同网格密度的比较

本节选择 Steger-Warming 格式，vanLeer 限制器，时间精度取 TVD-RK2，考察网格密度的影响。网格节点数为 101×51、201×101、401×201、801×401。结果显示，网格密度越大，激波位置越精细。




101×51　　　　201×101



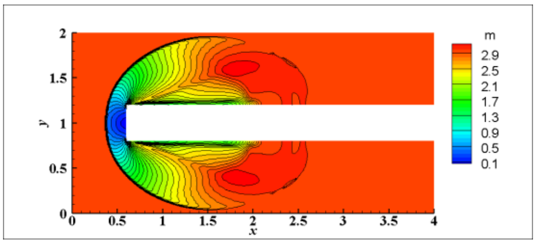



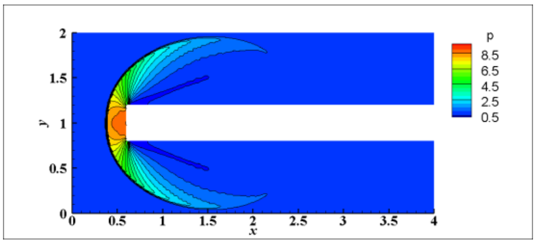

401×201　　801×401

**图　网格密度的影响**

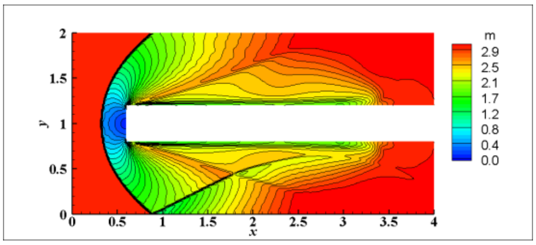
### 3.6 不同时刻的流场

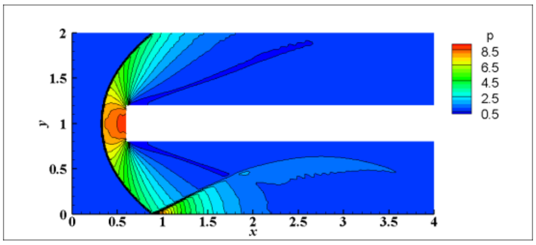
本节选择 Steger-Warming 格式，vanLeer 限制器，时间积分取 TVD-RK2，网格节点数为 401×201，模拟时间分别为 0.5s、1s、2s、3s、4s、5s、6s 和 10s，结果显示出了激波在不同时刻的演化过程，流动由非定常过程过渡到最终的定常状态。



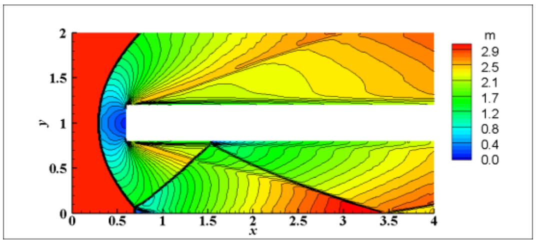



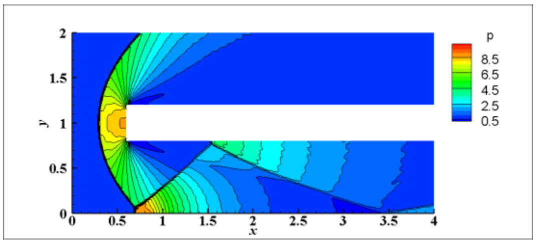

0.5s　　0.5s



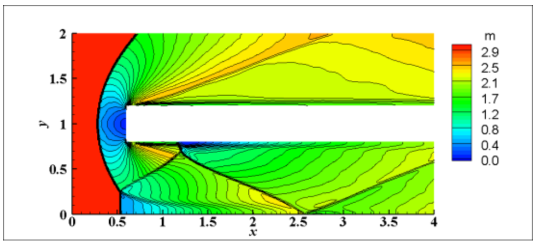



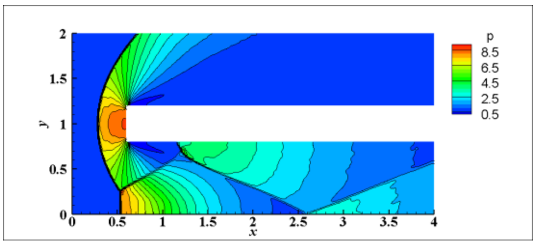

1s　　1s




2s　　2s




3s　　3s

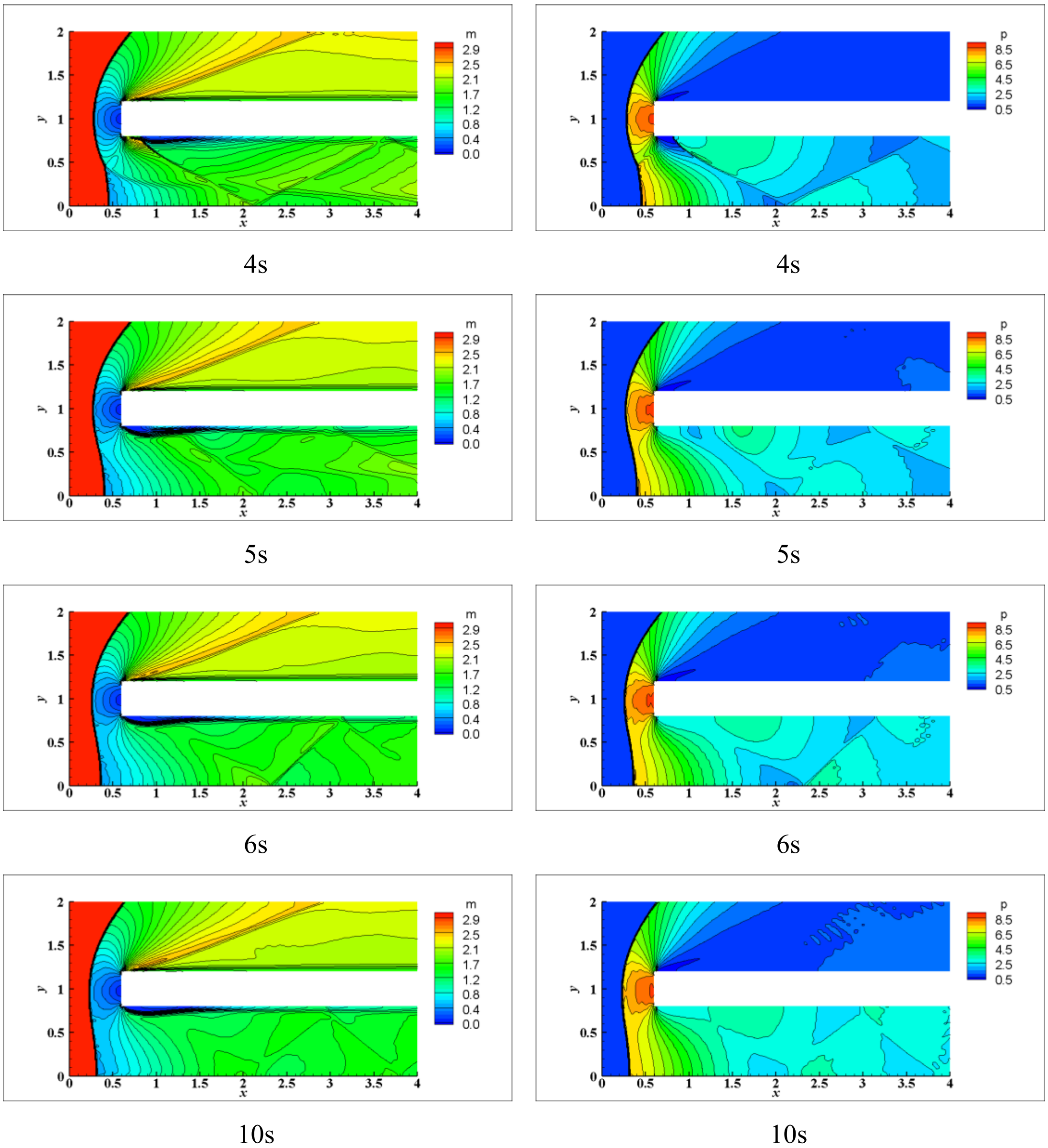



图 不同时刻的计算结果

## 4 附录：

程序源码 github 仓库： [nianhuawong/2D_Euler_Solver (github.com)](https://github.com/nianhuawong/2D_Euler_Solver)

### 4.1 双马赫反射算例

双马赫反射算例其实比平头钝体算例更简单，平头钝体需要设置的无穿透物面边界条件，以及设置计算点的标记还比较麻烦，而双马赫反射的全场点参与计算，而且边界条件也要简单得多。其算例设置可参考文献：

Journal of Computational Physics 228 (2009) 8481–8524

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jcp

# Very-high-order WENO schemes

G.A. Gerolymos *, D. Sénéchal, I. Vallet

*Institut d'Alembert, Case 161, Université Pierre et Marie Curie (UPMC), 4 place Jussieu, 75005 Paris, France*

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 12 January 2009
Received in revised form 2 July 2009
Accepted 11 July 2009
Available online 24 September 2009

*Keywords:*
High-order schemes
WENO schemes
Smoothness indicators
Euler equations
Hyperbolic conservation laws

ABSTRACT

We study WENO$(2r-1)$ reconstruction [D.S. Balsara, C.W. Shu, Monotonicity prserving WENO schemes with increasingly high-order of accuracy, J. Comput. Phys. 160 (2000) 405–452], with the mapping (WENOM) procedure of the nonlinear weights [A.K. Henrick, T.D. Aslam, J.M. Powers, Mapped weighted-essentially-non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points, J. Comput. Phys. 207 (2005) 542–567], which we extend up to WENO17 ($r=9$). We find by numerical experiment that these procedures are essentially nonoscillatory without any stringent CFL limitation (CFL $\in [0.8, 1]$), for scalar hyperbolic problems (both linear and scalar conservation laws), provided that the exponent $p_\beta$ in the definition of the Jiang–Shu [G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, J. Comput. Phys. 126 (1996) 202–228] nonlinear weights be taken as $p_\beta = r$, as originally proposed by Liu et al. [X.D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially nonoscil-

### *8.3.3. Woodward–Colella double-Mach-reflection of a strong shockwave*

This test-case, introduced by Woodward and Colella [26], solves the 2-D Euler equations in the domain $x \in [0,4]$, $y \in [0,1]$, with ICS corresponding to a $M_{SW}$=10 shockwave, inclined at 60° with respect to the $x$-axis, and propagating to the right, against a region of still air (state $\underline{v}_B$),

$$\underline{v}(x,y,t=0) = \underline{v}_0(x,y) = \begin{cases} \underline{v}_A := [8, 8.25\cos\frac{\pi}{6}, -8.25\sin\frac{\pi}{6}, 116.5]^T & x \leqslant \frac{1}{6} + \frac{y}{\tan\frac{\pi}{3}} \\ \underline{v}_B := [1.4, 0, 0, 1]^T & x > \frac{1}{6} + \frac{y}{\tan\frac{\pi}{3}} \end{cases} \tag{60}$$

where $\underline{v}_A$ corresponds to the state trailing behind the right-moving shockwave. The boundary-conditions correspond to the exact shockwave motion at the upper boundary ($y=1$), fixed state $\underline{v}_B$ at inflow and in the region $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}$ on the lower boundary ($y=0$), continued by a reflecting wall ($x > \frac{1}{6}$)

$$\underline{v}(x=0,y,t) = \underline{v}_A \quad \forall t,y \tag{61a}$$

$$\underline{v}(0 \leqslant x \leqslant x_{SW_u}(t), y=1, t) = \underline{v}_A \quad \forall t \tag{61b}$$

$$\underline{v}(x_{SW_u}(t) < x \leqslant 4, y=1, t) = \underline{v}_B \quad \forall t \tag{61c}$$

$$\underline{v}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}, y=0, t\right) = \underline{v}_A \quad \forall t \tag{61d}$$

$$\partial_x \underline{v}(x=4,y,t) = 0 \quad \forall t,y \tag{61e}$$

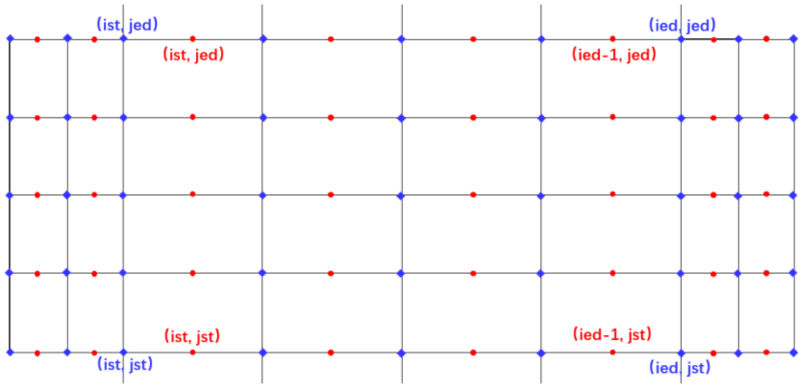
$$\begin{bmatrix} \partial_y \rho \\ \partial_y u \\ v \\ \partial_y p \end{bmatrix} \left(\frac{1}{6} < x \leqslant 4,\ y=0,t\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \tag{61f}$$

where

$$x_{SW_u}(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} + S_{SW_x} t; \quad S_{SW_x} = \frac{S_{SW}}{\sin\frac{\pi}{3}}; \quad S_{SW} = 10 \tag{61g}$$

is the instantaneous shockwave location on the upper boundary ($y=1$).

## 网格虚拟点设置如下：



以下给出了 **WCNS-E6E5** 格式的 **4** 阶边界通量和 **4** 阶边界插值格式。

显格式 WCNS-E-5：

$$E_j' = \frac{75}{64h}\left(\tilde{E}_{j+1/2} - \tilde{E}_{j-1/2}\right) - \frac{25}{384h}\left(\tilde{E}_{j+3/2} - \tilde{E}_{j-3/2}\right) + \frac{3}{640h}\left(\tilde{E}_{j+5/2} - \tilde{E}_{j-5/2}\right)$$

为了与 5 阶精度内点格式相匹配，在边界和边界附近采用显式 4 阶精度格式：

$$E_1' = \frac{1}{24h}\left(-22\tilde{E}_{1/2} + 17\tilde{E}_{3/2} + 9\tilde{E}_{5/2} - 5\tilde{E}_{7/2} + \tilde{E}_{9/2}\right) \tag{2.24}$$

$$E_2' = \frac{1}{24h}\left(\tilde{E}_{1/2} - 27\tilde{E}_{3/2} + 27\tilde{E}_{5/2} - \tilde{E}_{7/2}\right)$$

摘自张毅锋博士论文

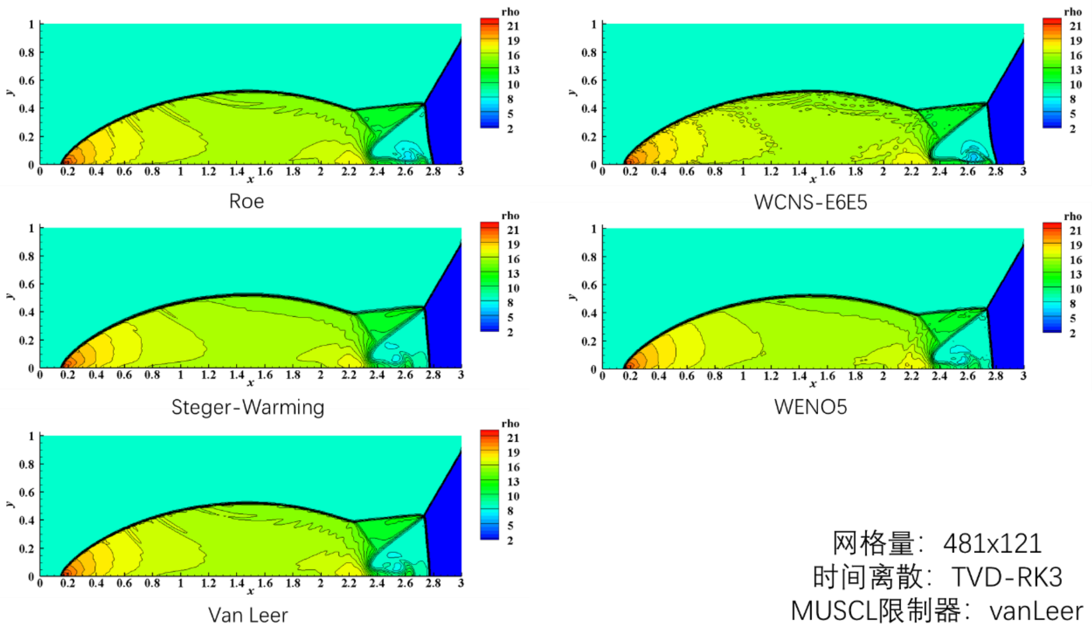
$$E_{N-1}' = -\frac{1}{24h}\left(\tilde{E}_{N+1/2} - 27\tilde{E}_{N-1/2} + 27\tilde{E}_{N-3/2} - \tilde{E}_{N-5/2}\right)$$

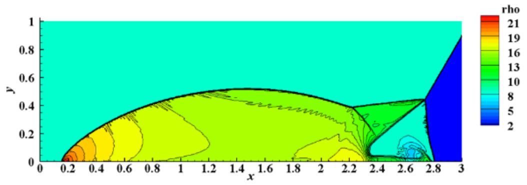
$$E_N' = -\frac{1}{24h}\left(-22\tilde{E}_{N+1/2} + 17\tilde{E}_{N-1/2} + 9\tilde{E}_{N-3/2} - 5\tilde{E}_{N-5/2} + \tilde{E}_{N-7/2}\right)$$

边界插值格式：

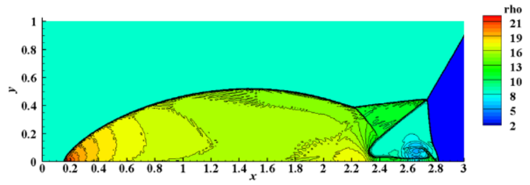
$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{1/2} &= \frac{1}{16}\left(5U_0 + 15U_1 - 5U_2 + U_3\right) \\
\tilde{U}_{3/2} &= \frac{1}{16}\left(-U_0 + 9U_1 + 9U_2 - U_3\right) \\
\tilde{U}_{N-1/2} &= \frac{1}{16}\left(-U_{N+1} + 9U_N + 9U_{N-1} - U_{N-2}\right) \\
\tilde{U}_{N+1/2} &= \frac{1}{16}\left(5U_{N+1} + 15U_N - 5U_{N-1} + U_{N-2}\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

以下给出了几种格式在几套逐次加密的网格计算得到的结果，具体就不再详细分析了。

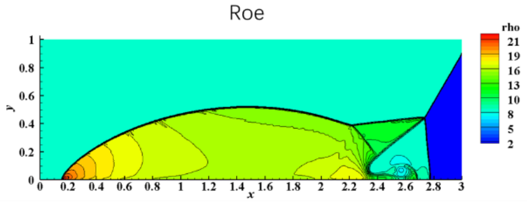




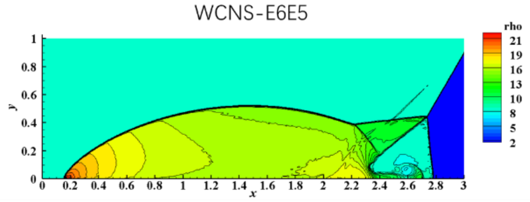

Roe



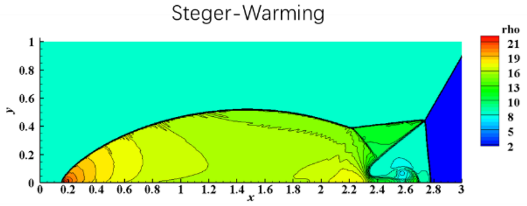

WCNS-E6E5




Steger-Warming

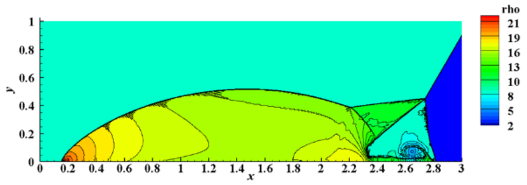



WENO5

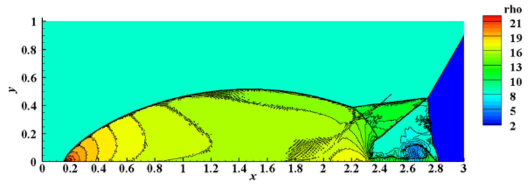



Van Leer

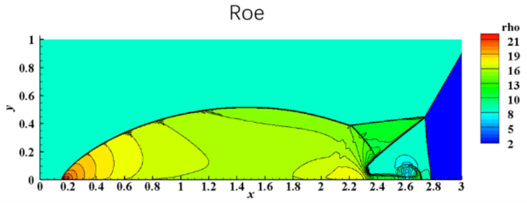
网格量：961x241
时间离散：TVD-RK3
MUSCL限制器：vanLeer



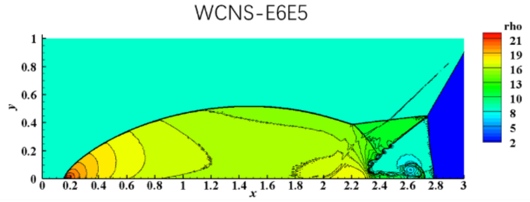

Roe



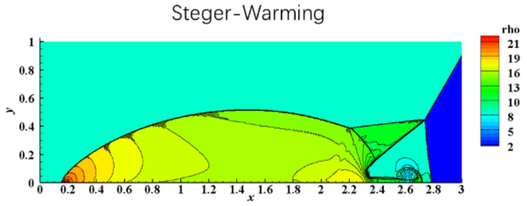

WCNS-E6E5




Steger-Warming

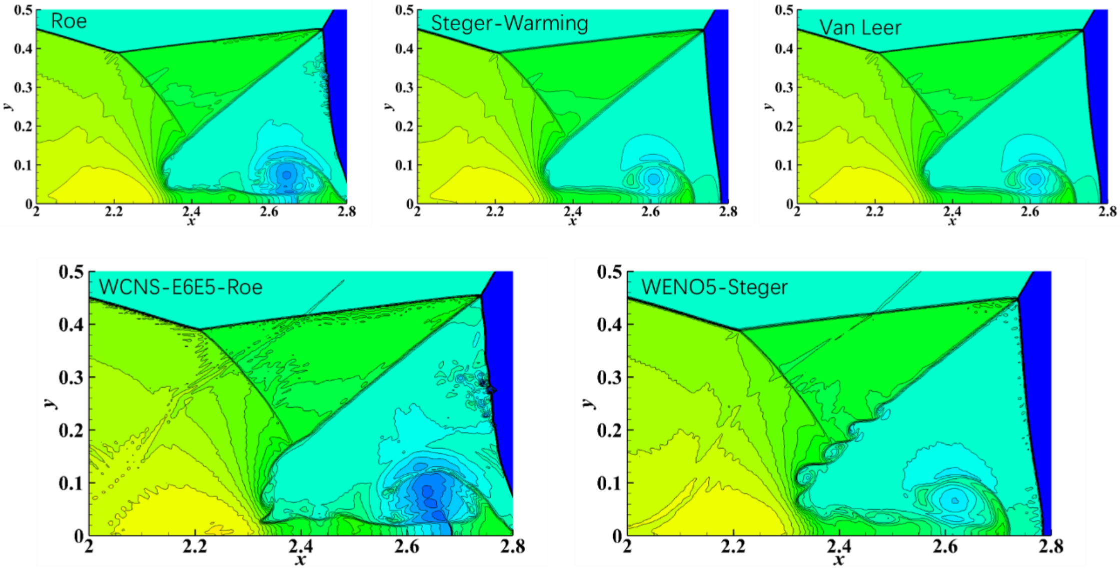



WENO5




Van Leer

网格量：1921x481
时间离散：TVD-RK3
MUSCL限制器：vanLeer




网格量：1921x481，时间离散：TVD-RK3，MUSCL限制器：vanLeer

**以下是论文中采用高阶 WENO5、WENO11 和 WENO17 高阶格式计算得到的结果。**