

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ І ТЕОРІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Дипломна робота

Оцінка точності і обчислювальної складності
наближеного глобального розв’язування нелінійних
функціональних рівнянь

Студента 5-го курсу
спец. «Прикладна математика»
Гусная Юрія Васильовича
Науковий керівник:
проф. Бабич М. Д.

Ужгород — 2013

Зміст

Вступ.....	3
I. Теоретичні основи наближеного глобального розв’язування нелінійних функціональних рівнянь.....	5
1.1 Теоретичні основи побудови методів уточнення розв’язків нелінійних функціональних рівнянь.....	5
1.2 Характеристики точності і обчислювальної складності наближеного розв’язування нелінійних рівнянь.....	17
1.3 Зведення задачі наближеного розв’язування нелінійних функціональних рівнянь до систем нелінійних скалярних рівнянь та їх розв’язання ε -алгоритмом.....	29
II. Обчислювальний експеримент.....	48
2.1 Оцінки точності та обчислювальної складності, реалізація ε -алгоритму глобального розв’язування нелінійних рівнянь з одним невідомим.....	48
2.2 Оцінки точності та обчислювальної складності, реалізація ε -алгоритму глобального розв’язування систем нелінійних скалярних рівнянь.....	51
Висновок.....	55
Список використаної літератури.....	56
Додаток.....	58

Вступ

Проблема глобального розв'язування нелінійних функціональних рівнянь є дуже важливою і в той же час дуже складною і недостатньо розробленою. Нелінійні функціональні рівняння (НФР) як математичні моделі можуть відображати різні природні явища і процеси, наприклад, задачі фізики, біології, хімії, економіки і т.п. Розв'язки таких задач характеризують стан розглядуваного об'єкта або процесу. НФР в залежності від елементів, що їх породжують, можуть мати один розв'язок, скінченне число розв'язків, нескінченну множину таких розв'язків або не мати їх взагалі. Тому розрізнення цих випадків, як і знаходження самих розв'язків, набуває важливого значення.

Оскільки, як правило, НФР, які описують реальні процеси, мають складну структуру, то безпосереднє застосування до їх глобального розв'язування відомих методів є проблематичним як з точки зору їх функціональної реалізації, так і з точки зору обчислення необхідних елементів рівнянь, що входять в теореми існування та оцінки похибок. У зв'язку з цим для розв'язування таких рівнянь застосовуються елементи загальної теорії наближених методів. Ця теорія передбачає побудову для вихідного рівняння послідовності наближених рівнянь, доведення відповідних теорем про зв'язок таких рівнянь і збіжності методу переходу від вихідного рівняння до послідовності наближених рівнянь. Це є достатньою умовою для практичного розв'язування (за допустимих фіксованих значеннях параметра апроксимації) наближених рівнянь та проведення апостеріорного аналізу отриманих наближених розв'язків вихідного рівняння.

У даній роботі елементи теорії наближених методів реалізуються на нелінійних рівняннях з одним невідомим, системах нелінійних скалярних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь типу Урисона і Гаммерштейна. Оскільки наближене розв'язування рівнянь пов'язане з апроксимацією і реалізацією чисельного методу на обчислювальній машині, що викликає появу різного роду похибок, то в роботі розглянуто елементи теорії похибок

та їх оцінки, які супроводжують процес обчислення, та елементи теорії складності. Важливе значення при цьому набуває апіорна інформація про задачі та числові методи або обчислювальні алгоритми, а також оцінки їх характеристик.

I. Теоретичні основи наближеного глобального розв'язування нелінійних функціональних рівнянь

1.1 Теоретичні основи побудови методів уточнення розв'язків нелінійних функціональних рівнянь

Оператор стиску

Нехай оператор A визначений на деякій множині M банахового простору E і задовольняє умові Ліпшица.

$$\|Ax - Ay\| \leq q \|x - y\|, (x, y) \in M, \quad (1.1)$$

якщо $q < 1$, то кажуть, що A — оператор стиску, або стискуючий оператор, з коефіцієнтом стиснення $q \in (0, 1)$ [8].

Теорема 1 (принцип стискуючих відображень). Нехай множина M замкнена. Нехай оператор стиску A відображає дану множину в себе: $AM \subseteq M$

Тоді оператор A має в M єдину нерухому точку x^* .
Тобто рівняння

$$x = Ax \quad (1.2)$$

має єдиний розв'язок x^* .

Найчастіше розглядаються оператори стиску, визначені на всьому просторі E або на деякій кулі T . У випадку кулі теорему 1 зручно застосовувати в наступній формі.

Теорема 1.2. Нехай A — оператор стиску на замкненій кулі $T = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ банахового простору E , і нехай

$$\|Ax_0 - x_0\| \leq (1 - q) r. \quad (1.3)$$

Тоді оператор A в кулі T має єдину нерухому точку.

Використання еквівалентної норми

Нехай в просторі E окрім основної норми $\|\bullet\|$ визначеною є інша норма,

яку можна позначити як $\|\bullet\|^*$. Норми $\|\bullet\|$ і $\|\bullet\|^*$ називаються еквівалентними якщо $m\|x\| < \|x\|^* < M\|x\|$, $x \in E$, де $m, M > 0$. При переході до еквівалентних норм збіжні послідовності елементів простору залишаються збіжними, замкнені множини залишаються замкненими, а відкриті — відкритими.

Якщо оператор A в деякій нормі задовольняє умові Ліпшица, то при переході до еквівалентної норми, він також буде задовольняти умові [10]. Часто виникає ситуація, коли в деякій заданій нормі оператор A задовольняє умові Ліпшица, проте не є оператором стиску. Однак при переході до іншої, спеціально сконструйованої, еквівалентної норми, оператор A стає оператором стиску. В побудові такої спеціальної норми, як правило, полягають труднощі при дослідженні конкретних задач.

Відносна єдиність розв'язку

Конкретні задачі, як правило, зводяться до рівнянь, не зв'язаних з деяким визначеним функціональним простором. Проте одне і те ж рівняння можна розглядати як рівняння з оператором, що діє в різних множинах простору E . Припустимо, що деяким способом доведена єдиність розв'язку розглядуваного рівняння в множині M простору E . Звідси не випливає, що це рівняння не має інших розв'язків в просторі E і що воно не має розв'язків, що не належать E .

Спектральний радіус лінійного оператора

Якщо A — лінійний оператор, то умова стиску еквівалентна тому, що норма оператора A менша за 1 [7]. В зв'язку з цим виникає питання про побудову еквівалентних норм, при яких норма A буде меншою.

В теорії лінійних операторів доведено існування границі значень:

$\rho_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Число ρ_0 називається спектральним радіусом лінійного обмеженого оператора A . Звідси $\rho_0 \leq \|A\|$.

Спектральний радіус ρ_0 характеризується тим, що з нерівності $|\lambda| > \rho_0$ випливає існування обмеженого оператора $(A - \lambda I)^{-1}$. Якщо A — неперервний лінійний оператор, то $\rho_0 = |\lambda_0|$, де λ_0 — найбільше по модулю власне значення оператора A . Тут необхідно розглядати і дійсні, і комплексні власні значення оператора. Число $\lambda = \sigma + i\tau$ називається власним значенням оператора A , що діє на дійсному банаховому просторі E , якщо знайдуться такі $x, y \in E$, що $Ax = \sigma x - \tau y$, $Ay = \tau x + \sigma y$ ($\|x\| + \|y\| > 0$)

Оператори, що комутують з операторами стиску

Якщо оператор B , що відображає замкнену множину M банахового простору E в себе, комутує з оператором A ($AB = BA$), задовольняє на M умовам принципу стискуючих відображень, то нерухома точка оператора A є одночасно нерухомою точкою оператора B .

Якщо $Ax_* = x_*$, то $ABx_* = BAx_* = Bx_*$, тобто Bx_* - нерухома точка оператора A , тому $Bx_* = x_*$.

Нехай, наприклад, оператор B відображає замкнений простір M в себе і деяка його степінь $A = B^n$ є оператором стиску. Тоді $AB = B^{n+1} = BA$, а отже оператор B , на множині M має єдину нерухому точку, так як всі нерухомі точки оператора B є одночасно нерухомими точками оператора $A = B^n$.

Зважаючи на те, що рівняння $x = Ax$ на множині M має єдиний розв'язок, справедлива теорема

Теорема 2. Нехай рівняння $x = Ax$ має на множині M єдиний розв'язок. Нехай $BM \subseteq M$ і оператор B на M комутує з оператором A .

Тоді рівняння $x = Bx$ на множині M має хоча б один розв'язок.

Розв'язки на компактних множинах

Ствердження принципу стискуючих відображень перестає бути вірним, якщо оператор A на множині M не є оператором стиску [11], але

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|, \quad (x, y \in M, x \neq y) \quad (1.4)$$

Так, наприклад, відображення $Ax = x + \frac{1}{x}$ відображає промінь $[1, \infty)$ в себе і задовольняє умові (1.4), але не має на даному просторі нерухомої точки. Проте, якщо множина M компактна, то ствердження принципу стискуючих відображень зберігає свою силу.

Теорема 3. Нехай оператор A відображає замкнену множину M в компактну свою підмножину і на цій підмножині задовольняє умову (1.4).

Тоді оператор A має на множині M єдину нерухому точку.
Необхідно зауважити, що оператор A , такий що задовольняє умовам теореми, не повинен бути оператором стиску ні на M , ні на AM .

Рівняння з операторами рівномірного стиску

Нехай T — куля $\|x - x_0\| \leq \beta$ банахового простору E , а S — куля $\|z - z_0\| \leq \alpha$ банахового простору E_1 . Оператор $F(x, z)$, що залежить від параметра $z \in S$ і діє в просторі E , називається оператором рівномірного стиску, якщо при всіх $z \in S$, $\|F(x, z) - F(y, z)\| \leq q\|x - y\|$, $(x, y \in T)$ де $q < 1$, і q не залежить від z .

Припускаючи, що оператор рівномірного стиску $F(x, z)$ при кожному $z \in S$ відображає кулю T в себе, то із теореми 1 випливає існування єдиного розв'язку $x^* = x^*(z)$, в кулі T , рівняння $x = F(x, z)$

Теорема 4. Нехай оператор $F(x, z)$ неперервний по z при кожному фіксованому x .

Тоді розв'язок $x^*(z)$ неперервний.

Локальна теорема про неявну функцію

Нехай E, E_1, E_2 — банахові простори и $f(x, z)$ - оператор, визначений при $\|z - z_0\| \leq \alpha$, $(z, z_0 \in E_1)$ в кулі $\|x - x_0\| \leq \beta$ простору E із значеннями в просторі E_2 . Нехай $f(x_0, z_0) = 0$ тобто x_0 є розв'язком рівняння $f(x, z) = 0$ при $z = z_0$. Якщо при всіх z , близьких до z_0 , існують близькі до x_0 , розв'язки $x(z)$

попереднього рівняння, то кажуть, що дане рівняння визначає неявну функцію $x(z)$.

Питання про існування і властивості неявної функції, визначеної даним рівнянням, виникає в задачах аналізу. Одним із методів доведення теорем існування неявної функції являється метод, що ґрунтується на застосуванні принципу стискуючих відображень.

Теорема 5. Нехай оператор $f(x; z)$ задовольняє наступним умовам:

а) $f(x; z)$ неперервний по змінним x, z , при $\|z - z_0\| < \alpha$; $\|x - x_0\| < \beta$ і $f(x_0, z_0) = 0$;

б) оператор $f(x; z)$ при тих самих значеннях аргументів має похідну за Фреше $f'_x(x_0, z_0)$, неперервну по нормі операторів в точці (x_0, z_0) ;

в) для лінійного оператору $f'_x(x_0, z_0)$ існує обернений.

Тоді існують такі числа $\alpha, \beta > 0$, що для кожного z із кулі $\|z - z_0\| < \alpha$ рівняння $f(x, z) = 0$ в кулі $\|x - x_0\| < \beta$ має єдиний розв'язок $x^*(z)$. Функція $x^*(z)$ неперервна.

Послідовні наближення

Розглядається рівняння

$$x = Ax, \quad (1.5)$$

з оператором A , що діє в банаховому просторі E . А також послідовність

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad n = (1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

де x_0 — деякий початковий елемент. Послідовність x_n , може бути побудована тільки в тому випадку, якщо x_0 належить областям визначення всіх операторів A^n , $n = (1, 2, \dots)$.

Якщо послідовність x_n збігається до деякого елемента x_* , то з (1.6) випливає те, що x_* і є розв'язком рівняння (1.5). Тому умови, що забезпечують збіжність послідовності x_n і є умовами існування розв'язку

рівняння (1.5). Проте послідовність x_n можна розглядати як “джерело” все більш точних наближень до розв’язку (1.5). В зв’язку з цим необхідно знати, для яких рівнянь (1.5) послідовні наближення (1.6) збіжні.

Рівняння з оператором стиску

Теорема 6. Нехай оператор A відображає в себе замкнену множину $M \in E$ і є оператором стиску

$$\|Ax - Ay\| \leq q\|x - y\|, \quad (x, y \in M; q < 1). \quad (1.7)$$

Тоді послідовні наближення (2) при довільному початковому елементі $x_0 \in M$ збігаються до єдиного (в силу теореми 1) розв’язку x_* , рівняння (1.5)

Із рівності $x_* = Ax_*$ випливає нерівність

$$\|x_n - x_*\| = \|Ax_{n-1} - Ax_*\| \leq q\|x_{n-1} - x_*\|$$

звідки

$$\|x_n - x_*\| \leq q^n \|x_0 - x_*\|, \quad (n = 1, 2, \dots; x_0 \in M). \quad (1.8)$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_*\| = 0$.

Нерівність (1.8) характеризує швидкість збіжності. Нерівністю (1.8) зручно користуватися тоді, коли відома апріорна оцінка $x_0 - x_*$

Для одержання такої оцінки можна використати нерівність

$$\|x_0 - x_*\| \leq \|x_0 - Ax_0\| + \|Ax_0 - Ax_*\| \leq \|x_0 - Ax_0\| + q\|x_0 - x_*\|,$$

із якої слідує, що

$$\|x_0 - x_*\| \leq \frac{1}{1-q} \|x_0 - Ax_0\|, \quad (1.9)$$

із (1.8) і (1.9) випливає нерівність

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_0 - Ax_0\|, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$

Нерівності (1.8) та (1.10) дозволяють визначити, скільки необхідно знайти послідовних наближень, щоб розв’язати рівняння (1.5) з деякою заданою точністю.

Так, наприклад, нерівність $\|x_n - x_*\| < \delta$ наперед буде виконана, якщо

$$n > \frac{1}{\ln q} \ln \frac{\delta(1-q)}{\|x_0 - Ax_0\|}$$

Проте умова (3) не є необхідною умовою збіжності послідовних наближень.

Лінійні рівняння

Оцінки (1.8) та (1.10), в загальному випадку, не можуть бути покращені, але при додаткових припущеннях можна гарантувати більш швидку збіжність.

Розглядається лінійне рівняння

$$x = Bx + f \quad (1.11)$$

Якщо $\|B\| < 1$, то з теореми 6 випливає збіжність послідовних наближень

$$x_n = Bx_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.12)$$

до розв'язку x_* рівняння (1.11).

Теорема 7. Нехай спектральний радіус $\rho(B)$ оператора B задовольняє нерівності $\rho(B) < 1$.

Тоді послідовні наближення (1.12) збігаються до розв'язку x_* рівняння (1.11) і для кожного ε , що $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, справедливою буде оцінка

$$\|x_n - x_*\| \leq c(\varepsilon) (\rho(B) + \varepsilon)^n \|x_0 - Bx_0 - f\|$$

Нелінійні рівняння

Розглядається нелінійне рівняння

$$x = Ax \quad (1.13)$$

Теорема 8. Нехай оператор A є диференційовним за Фреше в точці x_* , що є розв'язком рівняння (9). Через ρ_0 позначається спектральний радіус оператора $A'(x_*)$. Нехай $\rho_0 < 1$.

Тоді послідовні наближення

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.14)$$

збігаються до x_* , якщо початкове наближення x_0 достатньо близько до x_* .

При цьому справедлива оцінка

$$\|x_n - x_*\| \leq c(x_0, \varepsilon) (\rho_0 + \varepsilon)^n, \quad (1.15)$$

де ε — довільне додатне число.

Більш точніша оцінка, ніж (1.15), не може бути одержана без додаткових припущень.

Із (1.15) випливає, що послідовні наближення (1.14) збігаються до x_* швидше геометричної прогресії з якзавгодно малим знаменником, якщо похідна $A'(x_*) = 0$. Це зауваження може бути підсилено, якщо не тільки

$$\|Ax - Ax_*\| = o(\|x - x_*\|),$$

але й

$$\|Ax - Ax_*\| \leq L\|x - x_*\|^2 \quad (12)$$

Остання умова буде виконуватись, якщо оператор A диференційовний за Фреше в околі точки x_* , і похідна $A'(x)$ задовольняє умові Ліпшица

$$\|A'(x) - A'(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Вплив нульового наближення на оцінку швидкості збіжності

Зазвичай оцінки для деяких початкових наближень завищені. Наприклад, для лінійного рівняння

$$x = Ax,$$

де A — симетрична матриця, спектр якої складається з двох чисел $q_1, q_2 \in (0, 1)$, послідовні наближення $x_n = Ax_{n-1}$ збігаються до нульового розв'язку з швидкістю q_1^n при нульовому наближенні x_0 , для якого $Ax_0 = q_1 x_0$ і з швидкістю q_2^n , якщо $Ax_0 = q_2 x_0$

Таким чином при “вдалому” виборі початкового наближення в деяких випадках може вийти більш швидка збіжність послідовних наближень, ніж та, яка гарантується загальними оцінками. Якщо б виявилось, що в абсолютній більшості випадків збіжність більш швидка, то при наближеному розв'язуванні великого числа задач, швидкість збіжності необхідно було б характеризувати іншими оцінками.

Наприклад рівняння $x = Bx$, з самоспряженим лінійним оператором B , що діє в дійсному гільбертовому просторі H . Нехай оператор B має вигляд $Bx = B_1 P_1 x + B_2 P_2 x$, де P_1 — оператор ортогонального проектування на деякий підпростір H_1 , P_2 — оператор проектування на ортогональне доповнення H_2 до H_1 , $b_1 = \|B_1\|$, B_2 — самоспряжений оператор, що діє в H_2 , для якого $\|B_2\| = b_2 < b_1$.

Послідовні наближення $x_n = Bx_{n-1}$ до нульового розв'язку рівняння визначаються рівністю: $x_n = B_1^n P_1 x_0 + B_2^n P_2 x_0, (n = 1, 2, \dots)$.

Нехай $\|P_1 x_0\| > 0$. Тоді $b_1^n \|P_1 x_0\| \leq \|x_n\| \leq b_1^n \|x_0\|$.

Отже, майже для всіх початкових наближень (винятком є $P_1 x_0 = 0$), збіжність не повільніше геометричної прогресії із знаменником b_1 .

Розподіл похибок

При застосуванні ітераційного процесу $x_n = Ax_{n-1}, (n = 1, 2, \dots)$ обчислення проводять до тих пір, поки похибка $|x_n - x_{n-1}|$ перевищує деяку задану величину. Похибка $|x_n - x_*|$ при цьому може бути різною. При цьому найімовірніша похибка не буде значно меншою за максимальну.

Розглядається система лінійних алгебраїчних рівнянь $x = Ax + b$, де A — додатньовизначена матриця, всі власні значення $\lambda_i, (i = 1, \dots, m)$ менші 1, b — заданий вектор, x — шуканий вектор m -вимірному простору. Якщо послідовні наближення x_n шукаються по рекурентній формулі $x_{n+1} = Ax_n + b$ то найбільш імовірними похибками і будуть максимальні.

Нехай вводять позначення $\delta_n = Ax_n + b - x_n, \varepsilon_n = x_* - x_n$. Очевидно $\varepsilon_n = (I - A)^{-1} \delta_n, (n = 1, 2, \dots)$. Звідки $\varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n, (n = 1, 2, \dots)$. Отже $\delta_n = x_{n+1} - x_n = (I - A)\varepsilon_n = (I - A)^n \varepsilon_0$

Нехай ітераційний процес закінчується на p -му кроці, якщо вектор-

нев'язка $\delta_p = x_{p+1} - x_p$ потрапляє в деякий окіл G нуля (куля, куб). В силу останньої рівності похибка ε_p потрапить в окіл $G_0 = (I - A)^{-1} G$. Якщо матриця A має власні значення λ близькі до 1, то відповідні власні значення $(1 - \lambda)^{-1}$ матриці $(I - A)^{-1}$ будуть великими і область G_0 буде «сильно розтягнута» в напрямку відповідних власних векторів матриці A . Таким чином, може виявитись, що похибка ε_p буде великою, незважаючи на те, що діаметр області G був невеликим. Імовірність таких великих похибок більша ніж імовірність малих.

Вводяться позначення $G_n = A^{-n} G_0, (n = 1, 2, \dots)$. Якщо ітераційний процес закінчився на p -му кроці, то в силу останньої рівності початкова похибка ε_0 знаходилась в області G_p , причому $\varepsilon_0 \notin G_{p-1}$, так як в протилежному випадку процес закінчився б раніше.

Нехай область G – куля радіуса α , процес вважається закінченим якщо довжина вектора $\delta_p = x_{p+1} - x_p$ буде меншою за α . В даному випадку область G_0 являється еліпсоїдом, що містить в собі кулю G з півосями довжини $\frac{\alpha}{1 - \lambda_i}, (i = 1, \dots, m)$, розташованими по напрямках відповідних власних векторів матриці A .

Нехай G_{-1} еліпсоїд AG_0 . Його півосі будуть мати довжину $\frac{\alpha \lambda_i}{1 - \lambda_i}, (i = 1, \dots, m)$. Процес закінчується на p -му кроці, якщо $\varepsilon_0 \in G_p$ і $\varepsilon_0 \notin G_{p-1}$, тобто коли вектор ε_0 знаходиться в шарі $G_p \setminus G_{p-1}$. При цьому кінцева похибка буде знаходитися в шарі $A^p (G_p \setminus G_{p-1}) = G_0 \setminus G_1$. Таким чином, кінцева похибка ε_p належить G_{-1} тільки в тому випадку, якщо ε_0 належить G_0 .

Імовірність знаходження кінцевої похибки в елементі Δ_0 об'єму шару $G_0 \setminus G_1$ рівна сумі імовірностей знаходження початкової похибки в елементах $\Delta_n = A^{-n} \Delta_0, (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Нехай початкова похибка ε_0 рівномірна розподілена в кулі T достатньо великого радіусу R . В даному випадку імовірність $P(\Delta_n)$ знаходження початкової похибки в елементі $\Delta_n \subseteq T$ пропорційна об'єму даного елемента.

Очевидно $\Delta_n = \frac{\Delta_0}{\lambda_1^n \dots \lambda_m^n}$. Таким чином, імовірність $P(\Delta_0)$ потрапляння

кінцевої похибки в елемент Δ_0 визначається як $P(\Delta_0) = \frac{\Delta_0}{T} \sum_{k=0}^{n_0} \lambda_1^{-k} \lambda_2^{-k} \dots \lambda_m^{-k}$, де

n_0 - найменше натуральне число, що $\Delta_{n_0+1} \not\subset T$. Із останньої формули слідує, що щільність імовірності потрапляння кінцевої похибки в точку шару $G_0 \setminus G_{-1}$ для даної точки буде тим більша, чим пізніше вийде дана точка із шару T при послідовному застосуванні до неї операції A^{-1} .

Шар $G_0 \setminus G_{-1}$ розбивається на частини F_1, F_2, \dots (перші із даних множин можуть виявитись порожніми), кожна з яких складається із точок, що виходять із шару T після застосування операції A^{-1} рівно $k+1$ разів. При цьому множина F_k являється перетином шару $G_0 \setminus G_{-1}$ із шаром $A^{k-1}T \setminus A^kT$. Щільність розподілу імовірності кінцевої похибки буде на кожній множині F_k сталою і буде зростати із зростанням номера k .

Теорема 9. Нехай ітераційний процес $x_{n+1} = Ax_n + b$ закінчується тоді, коли довжина вектора-нев'язки стає меншою ніж α . Нехай початкова похибка рівномірно розподілена в шарі T радіуса R .

Тоді імовірність P того, що довжина кінцевої похибки знаходиться в

межах $\eta \frac{\alpha \lambda_m}{1 - \lambda_m} \leq \|\varepsilon\| \leq \frac{\alpha}{1 - \lambda_m}$, де λ_m - найбільше власне значення матриці A ,

збігається до 1, при $R \rightarrow \infty$, при довільному $\eta < 1$.

Дана теорема відображає властивість послідовних похибок $x_n - x_*$ - похибки при великих n близькі по напрямку до власного вектора, що відповідає найбільшому власному значенню.

Вплив похибок заокруглення

Розглядається операторне рівняння $x = Ax$ в довільному банаховому просторі E . Нехай оператор A відображає замкнену множину $M \subseteq E$ в себе і на множині M він є оператором стиску. Тобто

$\|Ax - Ay\| \leq q\|x - y\|, (x, y \in M, q < 1)$. При застосуванні послідовних наближень $x_n = Ax_{n-1}, (n = 1, 2, \dots)$. Як правило, точне відшукування x_n по раніше знайденому x_{n-1} є неможливим, так як при обчисленні значень оператора A доводиться застосовувати наближені формули, так як при чисельних розрахунках неминучими є похибки заокруглення. Зазвичай можливо стверджувати, що сумарна похибка, що виникає при застосуванні оператора A по нормі простору E не перевищує деяке число δ .

Таким чином, при побудові послідовних наближень справедливою буде рівність $x_n = Ax_{n-1} + h_n, (n = 1, 2, \dots)$, де випадковий елемент $h_n \in E$ невідомий, проте відома його оцінка $\|h_n\| \leq \delta, (n = 1, 2, \dots)$.

Дані послідовні наближення вже можуть бути не збіжними до розв'язку x_* . Проте для них справедливим буде $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_*\| \leq \frac{\delta}{1-q}$.

Дана формула дозволяє знайти наближений розв'язок, якщо необхідна більша точність, ніж $\frac{\delta}{1-q}$.

Оскільки оператор A є оператором стиску, то $\|x_{n+1} - x_*\| \leq q\|x_n - x_*\| + \delta$. Звідси $\|x_{n+1} - x_*\| \leq q^2\|x_{n-1} - x_*\| + q\delta + \delta \leq \dots \leq q^{n+1}\|x_0 - x_*\| + q^n\delta + q^{n-1}\delta + \dots + \delta$, а отже $\|x_{n+1} - x_*\| \leq q^{n+1}\|x_0 - x_*\| + \frac{\delta}{1-q}$.

1.2 Характеристики точності і обчислювальної складності наближеного розв'язування нелінійних рівнянь

Елементи теорії похибок

Точність обчислювального алгоритму визначається мірою абсолютної повної похибки, складовими якої є абсолютні похибки:

- неусувна похибка – спричинена тим, що параметри і елементи рівнянь-моделей неадекватно відображають те вище, яке вони описують, а також похибки даних параметрів та елементів, викликані результатами їх визначення(вимірювання, зважування, оцінювання) або подання;
- похибка методу – виникає при застосуванні наближеного методу до розв'язання задач, за рахунок апроксимації, дискретизації точної задачі та застосування наближеного методу до апроксимаційної задачі;
- похибка заокруглення – виникає при реалізації наближеного методу на ЕОМ з вибраною конкретною моделлю обчислень та з урахуванням всіх арифметичних та логічних операцій, що супроводжують цей процес.

Нерідко вживається термін абсолютної обчислювальної похибки, що об'єднує похибку дискретизації та похибки методу і заокруглення. Для знаходження похибки дискретизації необхідно ввести апроксимаційні характеристики(функції або функціонали), що відображають близькість елементів вихідної задачі і наближеної до неї. Наприклад, при наближеному розв'язуванні нелінійного операторного рівняння $Ax=0$, що має багато ізольованих розв'язків, здійснюється перехід до деякого наближеного рівняння $A_n x=0$. В цьому випадку вказані функціонали, що відображають у нормі розглядуваних просторів близькість вихідного A і апроксимаційного A_n операторів і їх перших та других похідних, розглядаються на кулях ізольованих єдиних розв'язків.

Наближені числа та джерела їх виникнення

Наближене розв'язування задач із застосуванням різних обчислювальних

засобів приводить до подання (запису) дійсних чисел в ЕОМ та виконання над ними відповідних арифметичних операцій. Серед таких чисел розрізняють точні та наближені.

Під наближеним числом α розуміють число, “близьке” до відповідного йому числа α^* , і таке, що замінює α^* в різних вимірювальних, зважувальних, оцінювальних та інших засобів засобів, а також при записі дійсних чисел в обчислювальних пристроях з обмеженим числом розрядів та виконанні арифметичних операцій.

Різниця $\alpha^* - \alpha = \Delta\alpha$ називається похибкою наближеного числа α . Звідси $\alpha^* = \alpha + \Delta\alpha$, якщо $\alpha^* > \alpha$, то $\Delta\alpha > 0$, якщо $\alpha^* < \alpha$, то $\Delta\alpha < 0$. Коли знак $\Delta\alpha$ невідомий, тоді доцільно користуватись абсолютною похибкою наближеного числа α , тобто $\Delta(\alpha) = |\alpha^* - \alpha|$. Якщо α^* відоме, тоді $\Delta(\alpha)$ визначається згідно даної формули. Якщо ж α^* невідоме, що буває в дійсності, тоді знайти $\Delta(\alpha)$ із даної формули неможливо. У цьому випадку вводиться оцінка $\Delta(\alpha)$ зверху $|\alpha^* - \alpha| \leq \Delta(\alpha)$ і вона називається граничною абсолютною похибкою числа α . Таким чином α^* знаходиться в межах $\alpha - \Delta(\alpha) \leq \alpha^* \leq \alpha + \Delta(\alpha)$. Це означає, що $\alpha - \Delta(\alpha)$ є наближенням α^* із недостатчею, а $\alpha + \Delta(\alpha)$ - наближення α^* із надлишком. Тоді $\alpha^* = \alpha \pm \Delta(\alpha)$.

Таким чином під граничною абсолютною похибкою наближеного числа α розуміють довільне число $\Delta(\alpha)$ із множини невід’ємних чисел, що задовольняє нерівності $|\alpha^* - \alpha| \leq \Delta(\alpha)$. Практично доцільно знаходити $\Delta(\alpha)$ як найменше за наявних умов, що задовольняє даній нерівності.

Слід зауважити, що гранична похибка не дає повної характеристики щодо точності вимірювання або обчислення. Так, наприклад, якщо при вимірюванні двох балок отримано розміри $d_1 = 150,7 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см}$, $d_2 = 7,3 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см}$, то незважаючи на рівність їх граничних абсолютних похибок, якість вимірювання першої балки істотно вище ніж другої. Тут для характеристики точності вимірювання істотною є абсолютна похибка, яка приходить на одиницю вимірювальної довжини. Така величина називається

відносною похибкою наближеного числа α . Отже

$$\delta(\alpha) = \Delta(\alpha)/|\alpha^*| \quad \text{або} \quad \Delta(\alpha) = |\alpha^*| \delta(\alpha)$$

Аналогічно, як і для абсолютної похибки, вводиться поняття граничної відносної похибки, а саме: під граничною відносною похибкою наближеного числа α розуміють всяке число із множини чисел $\delta(\alpha)$, що задовольняє нерівності

$$\Delta(\alpha)/|\alpha| \leq \delta(\alpha) \quad \text{або} \quad \Delta(\alpha) \leq |\alpha| \delta(\alpha)$$

Звідси випливає двостороння оцінка α^* через α і $\delta(\alpha)$

$$|\alpha^* - \alpha| \leq |\alpha| \delta(\alpha) \quad \text{або} \quad \alpha(1 - \delta(\alpha)) \leq \alpha^* \leq \alpha(1 + \delta(\alpha))$$

Значущі та вірні значущі цифри наближеного числа.

Значущими цифрами наближеного числа називаються всі цифри в його записі, починаючи з першої ненульової зліва.

Наприклад: $a = 0,00457$, $a = 0,0045700$.

Значуща цифра наближеного числа називається вірною, якщо його абсолютна похибка не перевищує одиниці розряду, що відповідає даній цифрі.

Наприклад: $a = 0,00457$, $\Delta(a) = 0,000004$, $a = 0,0045700$,

$$\Delta(a) = 0,0000008$$

Іноді вживається термін “число вірних знаків після коми”.

Похибка методу та її оцінки

Похибка методу зумовлюється наступними причинами:

1. Точні оператори і вихідні дані, які характеризують задачу, замінюються наближеними. Наприклад, похідні замінюють скінченними різницями, інтеграли – скінченними сумами, функції – многочленами або таблицями їх значень у вузлах деякої сітки і т.д.
2. При розв’язуванні вихідної задачі будується нескінченний ітераційний процес, який обривається на певному кроці. Як правило, методи розв’язування таких задач містять в собі деякий параметр, при прямуванні якого до певної границі похибка методу прямує до нуля, що дозволяє цю

похибку регулювати. Крім того, через цей параметр та характеристики точного і наближеного операторів виражаються апіорна та апостеріорна оцінки похибки методу.

Нехай розглядається нелінійне операторне рівняння

$$Ax = 0 \quad (2.1)$$

де A – двічі диференційований за Фреше оператор, що діє з області свого визначення E гільбертового простору H у цей же простір. Рівняння (2.1) може характеризувати скінченну систему нелінійних скалярних рівнянь, нелінійне інтегральне рівняння із скінченними межами або інші рівняння.

Нехай необхідно знайти всі ізольовані розв'язки $x_i^*, (i=1, \dots, l)$ рівняння (2.1) в обмеженій області E .

В загальному випадку процес глобального наближеного розв'язування рівняння (2.1) полягає у виборі або побудові методу, за допомогою якого для кожного точного розв'язку x_i^* знаходиться послідовність наближених розв'язків $x_{in}^* \in E, (n=1, 2, \dots)$, де параметр n носить загальний смисл і не відображає конкретний спосіб побудови x_{in} . Ці послідовності будуються таким чином, щоб була можливість або теоретично довести їх збіжність до відповідних їм точних розв'язків x_i^* рівняння (2.1) або була підстава характеризувати практичну близькість (з ростом n) елементів цих послідовностей до відповідних їм точних розв'язків x_i^* . Вирішення цієї задачі передбачає відокремлення всіх ізольованих розв'язків x_i^* шляхом побудови таких замкнених підобластей $E_i \subset E$, зокрема замкнених куль \bar{S} , кожна з яких буде містити єдиний розв'язок із області E . Для цього потрібно знайти множини елементів v_1, v_2, \dots, v_l і дійсних чисел r_1, r_2, \dots, r_l , які називаються відповідно центрами і радіусами замкнених куль

$$\bar{S}(v_i, r_i) = \{x \in E : \|x - v_i\| \leq r_i\}, (i=1, \dots, l)$$

щоб на кожній із них виконувались деякі достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2.1). Дійсно, якщо такі пари (v_i, r_i) будуть знайдені, то

теорема існування розв'язку x_i^* рівняння (2.1) може бути визначена у багатьох випадках таким чином: якщо рівняння (2.1) запишеться записати у еквівалентному виді $x = x - \alpha Ax$, то відповідний йому ітераційний метод

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k Ax^k, k = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

в якому Ax^k відображає напрям руху ітераційного процесу, а послідовність $\{\alpha_k\}$ - послідовність дійсних чисел, що характеризує величину кроку ітераційного процесу. Критерій вибору Ax^k і α_k визначає той чи інший ітераційний метод.

Щодо існування єдиного розв'язку рівняння (1) та збіжності методу має місце узагальнена теорема

Теорема 1. Нехай у кулі $\bar{S}(x^0, r)$, де x^0 - один із елементів v_i , а r - відповідне йому значення r_i , виконуються умови

$$\|Ax^0\| \leq \delta_0, \|A'(x)\| \leq M(x^0, r), \|A''(x)\| \leq N(x^0, r), \quad (2.3)$$

$$|(A'(x)h, h)| \geq m(x^0, r)\|h^2\|, \text{ або } \|A'(x)h\| \geq m(x^0, r)\|h\|, \quad (2.4)$$

де $\delta_0, M(x^0, r), N(x^0, r), m(x^0, r)$ - константи які забезпечують виконання умов

$$q(r) = q(\delta_0, M(x^0, r), N(x^0, r), m(x^0, r)) < 1, \quad (2.5)$$

$$\varphi(r) = \varphi(\delta_0, M(x^0, r), N(x^0, r), m(x^0, r)) \leq r. \quad (2.6)$$

Тоді рівняння (2.1) має в кулі $\bar{S}(x^0, r)$ єдиний розв'язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x^k\}$, побудована згідно введеного ітераційного процесу(за відповідного вибору Ax^k і α_i), причому швидкість збіжності та оцінка похибки характеризується нерівністю

$$\Delta(x_k) = \|x^* - x^k\| \leq \varphi(\delta_0, M(x^0, r), N(x^0, r), m(x^0, r)) [q(r)]^k. \quad (2.7)$$

При $k = 0$

$$\|x^* - x^0\| \leq \varphi\left(\delta_0, M(x^0, r), N(x^0, r), m(x^0, r)\right) \quad (2.8)$$

що характеризує близькість точного і відповідного йому наближеного розв'язку, який може правити за початкове наближення для ітераційного процесу.

У табл. 1 наведені величини Ax^k , α_k , $q(r)$, $\varphi(r)$, $\Delta(x_k)$, що характеризують деякі ітераційні методи.

таблица 1

Метод	Ax^k	α_k	$q(r)$	$\varphi(r)$	$\Delta(x_k)$
Метод найшвидшого спуску	Ax^k	$\frac{\ Ax^k\ ^2}{(A'(x^k)Ax^k, Ax^k)}$	$\left(\frac{M^2}{m^2} + \frac{N\delta_0}{m^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_0}{m(1-q)}$	$\frac{\delta_0}{m}q^k$
Метод мінімальних нев'язок	Ax^k	$\frac{(A'(x^k)Ax^k, Ax^k)}{\ A'(x^k)Ax^k\ ^2}$	$\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta_0 N}{2m^2}$	$\frac{\delta_0}{m(1-q)}$	$\frac{\delta_0}{m(1-q)}q^k$
Метод мінімальних похибок	G^*Ax^k , $G^* = [A'(x^k)]$	$\frac{\ Ax^k\ ^2}{\ G^*Ax^k\ ^2}$	$\frac{\delta_0 N}{m^2}$	$\frac{2\delta_0}{m}$	$\frac{\delta_0}{m}\gamma^{\frac{k}{2}}$, $\gamma = 1 - \frac{m^2}{M^2}(1-q)$

Таким чином, необхідно знайти такі пари (v_i, r_i) , для яких буде справедливою теорема.

Також необхідно зазначити, що в деяких простих випадках ітераційний процес (2.2) реалізується безпосередньо для рівняння (2.1). Це може бути тоді, коли в області E розв'язок x^* єдиний, початкове наближення x^0 задається виходячи з апіорних даних задач, а структура і гладкість оператора A дозволяють практично реалізувати ітераційний процес (2.2) і знаходити величини умов (2.3) і (2.4), що забезпечують виконання нерівностей (2.5), (2.6) і отримання оцінок (2.7) та (2.8).

У загальному випадку процес наближеного розв'язування рівняння (2.1) полягає у побудові і наступному розв'язуванні послідовності нелінійних

рівнянь більш простої структури

$$Ax := x - \bar{A}_n x = 0, (n = 1, 2, \dots), \quad (2.9)$$

що апроксимують у певному розумінні рівняння (2.1) такі, що $A_n : E \subset H \rightarrow H$.

У теоретичному плані правомірність переходу від рівняння (2.1) до рівняння (2.9) базується на теоремі про розв'язність (при довільному або достатньо великому n) рівнянь (2.9) за даними існування розв'язку рівняння (2.1) і збіжності методу переходу до рівнянь (2.9), а також на оберненій теоремі про розв'язність рівняння (2.1) за даними існування (при допустимому фіксованому n) розв'язку рівняння (2.9). Вказані теореми дають теоретичне обґрунтування і практичний апарат для вирішення питання щодо відокремлення ізольованих розв'язків рівняння (2.1). Обидві теореми базуються на теоремі 1.

Практичне розв'язування рівняння (2.9) здійснюється безпосередньо, якщо це дозволяє структура оператора A_n (n - фіксоване), або задача розв'язування рівняння (2.9) зводиться до еквівалентної задачі розв'язування відповідної СНСР, яка може бути реалізована за допомогою \mathcal{ES} -алгоритму. В обох випадках за різних фіксованих n можуть бути знайдені всі ізольовані розв'язки $x_{in}^* = v_i$, що надалі приймаються за центри куль $\bar{S}(v_i, r_i)$.

Конструктивний алгоритм визначення радіусів r_i закладений в оберненій теоремі. Він полягає у тому, що для кожного значення $v_i = x^0$ обчислюються величини δ_0 , $M(x^0, r)$, $N(x^0, r)$, $m(x^0, r)$ з умов (2.3) і (2.4), які в цьому випадку (крім δ_0) будуть функціями шуканого радіуса $r_i = r$. Підставивши їх у (2.5), (2.6) одержимо систему нерівностей відносно r для кожного $v_i = x^0$. Інтервал сумісності цих нерівностей і визначає область допустимих значень радіуса r , що характеризують замкнені кулі єдиних розв'язків рівняння (2.1).

У теоремах існування, що відображають зв'язок між рівняннями (2.1) та (2.9) поряд з оцінками норм операторів A, A_n та їх двох похідних, істотну

роль відіграє близькість операторів A, A', A'' та A_n, A'_n, A''_n . Ця близькість визначається в кулі $\bar{S}(v, r)$, де виконуються достатні умови існування єдиного розв'язку, таким чином: кажуть, що на елементі $x \in \bar{S}(v, r)$ виконуються умови апроксимації операторів $A^m(x)$ операторами $A_n^m(x)$, якщо існують такі функціонали $\eta_m(n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, що виконуються нерівності $\|A^m(x) - A_n^m(x)\| \leq \eta_m(n, x)$, де $m=0, 1, 2$,

$$A^0(x) = Ax, A^1(x) = A'(x), A^2(x) = A''(x).$$

Таким чином, сформульований підхід щодо відокремлення всіх ізольованих розв'язків рівняння (2.1) полягає у тому, що елементи v_i знаходяться як розв'язки апроксимаційних рівнянь (2.9), а радіуси r_i визначаються із оберненої теореми існування розв'язків рівняння (2.1).

Похибки заокруглення та їх оцінки

При реалізації обчислювального алгоритму на ЕОМ похибки заокруглень можуть виникати за рахунок запису чисел в ЕОМ, виконання арифметичних операцій та виводу чисел.

На сучасних ЕОМ прийнято дві форми запису числа з фіксованою та плаваючою комою.

У режимі фіксованої коми всі числа в ЕОМ мають модуль, менший за 1, а число знаків після коми фіксоване. Таким чином комп'ютер оперує з числами,

що мають вигляд $x = \pm \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k q^{-k} = \pm (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\tau})$, де q – ціле число, яке

характеризує основу числення, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\tau}$ – цілі числа в межах $0 \leq \alpha_k \leq q$.

У режимі плаваючої коми комп'ютер оперує з числами вигляду

$$x = \pm q^p \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k q^{-k} = \pm q^p (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\tau}),$$

де p – порядок числа, причому $|p| = p_0$, а α_k – мантиса.

Для знаходження оцінок похибок заокруглення при наближеному розв'язуванні задач потрібно знати, як обчислюються похибки заокруглення окремих арифметичних операцій у режимі фіксованої та плаваючої коми. Припускається, що всі числа, які беруть участь в обчисленнях точні, стандартні, з плаваючою комою, а арифметичні операції виконуються в режимі із фіксованим правилом заокруглення, причому похибки заокруглення в основних арифметичних операціях такі, що мають місце формули

$x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)(1 + \varepsilon)$, $x_1 \otimes x_2 = x_1 \times x_2 (1 + \varepsilon)$, $|\varepsilon| \leq 2^{-\tau}$, де \oplus, \otimes - псевдооперації, тобто відповідні арифметичні операції із заокругленням результату до τ двійкових розрядів у мантисі.

Застосування наведених співвідношень у складних обчисленнях приводить до оцінок вигляду $(1 - 2^{-\tau})^r \leq 1 + \varepsilon \leq (1 + 2^{-\tau})^r$, які не зовсім зручні.

Для спрощення цих оцінок доцільно ввести наступне обмеження на r :

$$r \times 2^{-\tau} < 0.1.$$

Таке обмеження повністю узгоджується з практичними застосуваннями і приводить до оцінок

$$(1 - 2^{-\tau})^r \leq 1 + 1.06 \times r \times 2^{-\tau},$$

$$(1 + 2^{-\tau})^r \leq 1 + 1.06 \times r \times 2^{-\tau},$$

$$\text{або } |\varepsilon| < 1.06 \times r \times 2^{-\tau}.$$

На основі даних нерівностей можна навести оцінки похибок заокруглення для деяких основних формул обчислень.

Загальний випадок множення

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n = (1 + E),$$

$$\text{де } (1 - 2^{-\tau})^{n-1} \leq 1 + E \leq (1 + 2^{-\tau})^{n-1},$$

$$|E| = (n - 1) \times 1.06 \times 2^{-\tau}.$$

Загальний випадок додавання

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus = (x_1(1 + \varepsilon_1) + x_2(1 + \varepsilon_2) + \dots + x_n(1 + \varepsilon_n)),$$

де

$$1 + \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \dots (1 + \varepsilon_n),$$

$$1 + \varepsilon_2 = (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \dots (1 + \varepsilon_n),$$

...

$$1 + \varepsilon_r = (1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_{r+1}) \dots (1 + \varepsilon_n),$$

...

$$1 + \varepsilon_n = 1 + \varepsilon_n,$$

$$(1 - 2^{-\tau})^{n-r+1} \leq 1 + \varepsilon_r \leq (1 + 2^{-\tau})^{n-r+1}, r = 1, 2, \dots, n,$$

$$|\varepsilon_r| \leq (n - r + 1) \times 1.06 \times 2^{-\tau}$$

Сума парних добутків

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i \otimes y_i = x_1 y_1 (1 + \varepsilon_1) + x_2 y_2 (1 + \varepsilon_2) + \dots + x_n y_n (1 + \varepsilon_n),$$

де

$$(1 - 2^{-\tau})^{n-r+2} \leq 1 + \varepsilon_r \leq (1 + 2^{-\tau})^{n-r+2}, r = 1, 2, \dots, n,$$

$$|\varepsilon_r| \leq (n - r + 2) \times 1.06 \times 2^{-\tau}$$

На основі цих формул можна отримати оцінки похибок заокруглення при розв'язуванні різних задач обчислювальної математики.

Елементи теорії обчислювальної складності

Розміром деякої задачі з певного класу задач називають число, яке характеризує кількість вхідних даних, від яких залежить складність виконання алгоритму.

Мірою складності алгоритму A для задачі α з деякого класу задач називають число $\sigma_A(\alpha)$, яке є сумою складностей операторів, які виконуються при розв'язуванні задачі α алгоритмом A . Зауважимо, що якщо для певного класу задач існує декілька алгоритмів, то може не існувати алгоритму з найменшою складністю.

Нехай $K(n)$ — множина задач певного класу розміру n , тоді число σ_A^n ,

яке рівне $\max \sigma_A(\alpha), \alpha \in K(n)$ — називають мірою складності алгоритму A класу задач $K(n)$ в гіршому розумінні.

Величину $\bar{\sigma}_A^n = \frac{\sum_{\alpha \in K(n)} \sigma_A(\alpha)}{\|K(n)\|}$ називають мірою складності алгоритму A

для для задачі класу $K(n)$ в середньому.

Границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_A^n = \sigma_A$ — асимптотична складність алгоритму A для задачі класу $K(n)$.

Нехай задані дві функції $f(n)$ і $g(n) > 0$. $f(n) = O(g(n))$ — $f(n)$ має порядок $g(n)$, якщо $\exists c, \exists n_0, \forall (n > n_0): f(n) \leq c g(n)$

Алгоритм має поліноміальну складність, якщо \exists поліном $P_k(n)$ (k — степінь полінома, n — змінна), що $\sigma_A^{(n)} = O(P_k(n))$.

Задача ефективно розв'язується, якщо для задачі існує алгоритм з поліноміальною складністю.

Алгоритм A має експоненціальну складність, якщо $\exists c_1, a_1 > 0; c_2, a_2 > 0$, що $c_1 a_1^n < \sigma_A^{(n)} < c_2 a_2^n$.

Якщо для задачі не існує алгоритму з поліноміальною складністю, то задачу називають важко розв'язною.

Алгоритм A називається оптимальним алгоритмом для задач певного класу, якщо $\forall B, n: \sigma_A^{(n)} \leq \sigma_B^{(n)}$.

Клас задач, для яких невідомий алгоритм поліноміальної складності, але якщо він знайдений хоча б для одної задачі із даного класу, то такий алгоритм існує і для всіх інших задач даного класу. Такий клас задач називається класом NP-повних задач.

Виявляється, що між цими класами алгоритмів є істотна різниця: при великих розмірностях задач (які, зазвичай, найцікавіші на практиці), поліноміальні алгоритми можуть бути виконані на сучасних комп'ютерах, тоді як експоненціальні алгоритми для практичних розмірностей задач, як правило, не можуть виконатися повністю. Зазвичай розв'язання задач, що породжують експоненціальні алгоритми, пов'язаний з повним перебором всіх

можливих варіантів, і зважаючи на практичну неможливість реалізації такої стратегії, для їх розв'язання розробляються інші підходи.

Наприклад, якщо навіть існує експоненціальний алгоритм для знаходження оптимального розв'язку деякої задачі, то на практиці застосовуються інші, ефективніші поліноміальні алгоритми для знаходження не обов'язково оптимального, а лише прийняттого розв'язку (наближеного до оптимального). Але навіть якщо задача допускає розв'язання за допомогою поліноміального алгоритму, його можна побудувати лише після глибокого вникання в суть поставленої задачі.

Складність	Коментар	Приклади
$O(1)$	Сталий час роботи незалежно від розміру задачі	Очікуваний час пошуку в хеші
$O(\log \log n)$	Дуже повільне зростання необхідного часу	Очікуваний час роботи інтерполюючого пошуку n елементів
$O(\log n)$	Логарифмічне зростання — подвоєння розміру задачі збільшує час роботи на сталу величину	Обчислення x^n , двійковий пошук
$O(n)$	Лінійне зростання — подвоєння розміру задачі подвоїть необхідний час	Лінійний пошук, додавання і віднімання чисел
$O(n \log n)$	Лінеаритмічне зростання — подвоєння розміру задачі збільшить необхідний час трохи більше ніж вдвічі	Сортування злиттям або купою; нижня границя сортування порівнянням
$O(n^2)$	Квадратичне зростання — подвоєння розміру задачі вчетверо збільшує необхідний час	Елементарні алгоритми сортування
$O(n^3)$	Кубічне зростання — подвоєння розміру задачі збільшує необхідний час у 8 разів	Звичайне множення матриць
$O(c^n)$	Експоненціальне зростання - збільшення розміру задачі на 1 призводить до c -кратного збільшення необхідного часу; подвоєння розміру задачі підносить необхідний час у квадрат	Деякі задачі комівояжера, алгоритми пошуку повним перебором

1.3 Зведення задачі наближеного розв'язування нелінійних функціональних рівнянь до систем нелінійних скалярних рівнянь та їх розв'язання ε алгоритмом

Методи наближеного розв'язання нелінійних рівнянь з одним невідомим

Розглянемо задачу наближеного знаходження усіх коренів рівняння

$$f(x)=0$$

де $f(x)$ — задана і неперервна функція на деякому скінченному проміжку $a < x < b$.

У порядку черговості підлягають розв'язанню такі задачі (1-4):

1. про межі розташування на числовій прямій коренів рівняння, їх характер та кількість;
2. відокремлення коренів, тобто знаходження таких інтервалів зміни аргументу x , кожний з яких містить тільки один корінь;
3. наближене обчислення коренів із заданою точністю.

Відокремлення розв'язків у випадку довільної функції

Для довільних функцій $f(x)$ задовільного алгоритму розв'язання перших двох задач не існує. Тут можуть бути використані такі твердження[1].

Якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях деякого відрізка $[a, b]$ приймає значення різних знаків, а перша похідна цієї функції на цьому відрізку не змінює свого знаку, то корінь рівняння $f(x)=0$ на $[a, b]$ - єдиний.

Якщо на кінцях відрізка $[a, b]$ функція $f(x)$ приймає значення різних знаків, то між a і b знаходиться непарне число коренів рівняння $f(x)=0$; якщо ж на кінцях відрізка $[a, b]$ функція приймає значення однакових знаків, то між a і b або немає коренів цього рівняння, або їх буде парне число (з урахуванням кратностей). Слід зауважити, що в цьому випадку виявити корені парної кратності дуже складно. Потрібні додаткові дослідження.

Для розв'язання перших двох задач можуть бути використані такі підходи і способи:

1. складається таблиця значень функції $f(x)$ на досить густій сітці аргументу x . Переміна знаку у двох сусідніх точках означає наявність принаймні одного кореня між ними;
2. будується графік функції за таблицею. Він часто дозволяє знаходити задовільні з точки зору задач техніки наближені значення коренів. Слід зауважити, що побудова графіків нерідко дозволяє виявити і корені парної кратності;
3. за допомогою елементів математичного аналізу, а саме часткового або повного дослідження функції, будується графік функції $f(x)$, який допомагає наближено визначити межі коренів та відокремити ці корені;
4. рівняння $f(x)=0$ зводиться до такого еквівалентного рівняння $f_1(x)=f_2(x)$, в якому графіки функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ простіші за $f(x)$. Наприклад, рівняння $x\cos(x)-2=0$ можна записати $\cos(x)=2/x$. У цьому випадку абсциси точок перетину цих графіків дають значення коренів рівняння $f(x)=0$;
5. рівняння $f(x)=0$ зводиться до еквівалентної системи двох рівнянь з двома невідомими. Наприклад, нехай $f(x)=x-f_1(x)=0$. Тоді, ввівши нову змінну y , можна записати

$$\begin{cases} y=x \\ y=f_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=x-\alpha f(x), \alpha=const \end{cases}$$

Як у першому, так і другому випадках для знаходження з наперед заданою точністю наближених значень відокремлених коренів застосовуються ітераційні методи. Найбільш ефективними є методи дихотомії (ділення пополам), простої ітерації, Ньютона, хорд та інші.

Слід зауважити, що ітераційні методи з точки зору їх чисельної реалізації мають ту важливу властивість, що в них не накопичуються обчислювальні

похибки. Обчислювальна похибка, як правило, еквівалентна похибці заокруглення на одному кроці ітерації, що веде до погіршення чергового наближення. Але це може вплинути тільки на число ітерацій і ні в якому разі не на точність кінцевого результату. Такі методи є стійкими навіть стосовно грубих помилок в обчисленнях, зумовлених збоями ЕОМ за умови, що отримане чергове наближення не вийшло за межі області збіжності ітераційного процесу.

Критерієм зупинки ітераційного процесу є умова
$$\frac{(x_n - x_{n-1})}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon.$$

Слід зауважити, що відомі також й інші методи відокремлення і наближеного знаходження коренів многочлена. Найбільш поширений із них метод квадратування Лобачевського-Греффе. Однак з точки зору реалізації на ЕОМ він не є ефективним через швидке зростання величин чисел, що веде до переповнення.

Відокремлення та уточнення ізольованих розв'язків систем нелінійних скалярних рівнянь.

Відомо, що системи нелінійних скалярних рівнянь (СНР) можуть бути як математичними моделями різних природних процесів і явищ, так і дискретними аналогами різних нелінійних варіаційних задач, диференціальних та інтегральних рівнянь, задач мінімізації, тощо.

Проблема глобального розв'язування таких систем є надто складною. Як правило, її розв'язання здійснюється комбінованим методом відокремлення ізольованих розв'язків та їх ітераційного уточнення[13],[14]. Якщо локальні ітераційні методи уточнення ізольованих розв'язків, побудованих на різних ідеях, досліджені досить повно, то методи відокремлення ізольованих розв'язків розроблені недостатньо, що зумовлене складністю цієї задачі.

Основи εs алгоритму відокремлення розв'язків

Одним із методів відокремлення ізольованих розв'язків нелінійних функціональних рівнянь, є εs алгоритм[2],[3]. Він базується на покритті

області, яка за апіорними даними містить усі розв'язки СНСР, послідовністю ε_k -сіток ($k=1,2,\dots$), з наступною перевіркою певних умов, які забезпечують генерування послідовностей елементів ε_k -сіток, що збігаються до різних ізольованих розв'язків.

Отже, розглянемо СНСР вигляду

$$\begin{cases} u_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ u_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \dots \\ u_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

де функції f_1, f_2, \dots, f_n визначені і двічі неперервно диференційовні на деякій обмеженій області G дійсного арифметичного n -вимірного простору E_n , метризованого елементами деякої множини Q , тобто кожній парі точок $u, v \in E_n$ відповідає елемент $\rho(u, v) \in Q$ — віддаль між u і v .

Запишемо систему (3.1) в еквівалентній операторній формі

$$\bar{F}(\bar{u}) := \bar{u} + F(\bar{u}) = 0, \quad (3.2)$$

де $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ - вектор, а $F(\bar{u}) = (f_1(\bar{u}), f_2(\bar{u}), \dots, f_n(\bar{u}))$ - вектор функція.

Нехай потрібно знайти усі ізольовані розв'язки $\bar{u}_l^* (l = \overline{1, m}) (m < \infty)$ системи (2) на n -вимірному замкненому кубі $\bar{R} \subset E_n$.

$$\bar{R} = \{ \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) : a < u_i < b ; i = \overline{1, n} ; -\infty < a, b < \infty, d = b - a \}$$

Практична реалізація наближеного методу розв'язування системи (3.1) або (3.2) передбачає обрив на певному етапі процесу побудови послідовності наближених розв'язків. Це означає, що задається число $\varepsilon > 0$ і для кожного фіксованого l шукається таке k і елемент \bar{u}_{lk} послідовності наближених умов розв'язків, починаючи з якого буде виконуватись одна із наступних умов $\rho(\bar{u}_{lk}, F(\bar{u}_{lk})) < \varepsilon$ — малість нев'язки, або $\rho(\bar{u}_l, \bar{u}_{lk}) < \varepsilon$ — близькість відповідних розв'язків. Наближений розв'язок \bar{u}_{lk} , що задовольняє одній із наведених умов, називається відповідно ε - розв'язком за нев'язкою або ε - розв'язком за аргументом. Таким чином, задача глобального наближеного розв'язування системи (3.2) полягає у знаходженні m

відповідних ε розв'язків. Основні складові εs - алгоритму відокремлення ізольованих розв'язків системи (3.2).

Означення 1. Множина L_1 метричного простору X називається ε - сіткою для множини $L_2 \in X$, якщо для будь-якої точки $x \in L_2$ знайдеться точка $z \in L_1$, така що $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Означення 2. Збіжна послідовність $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^k$, точок простору E_n називається розв'язувальною для оператора F , якщо $\rho(\bar{u}^k, F(\bar{u}^k)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Наступна теорема встановлює зв'язок між розв'язками рівняння (3.2) та розв'язувальними послідовностями для оператора $F(\bar{u})$.

Теорема 1. Для існування в області \bar{R} хоча б одного ізольованого розв'язку рівняння (3.2) з неперервною вектор-функцією $F(\bar{u})$ необхідно і досить існування для $F(\bar{u})$ хоча б однієї розв'язувальної послідовності $\bar{u}^k (k=1, 2, \dots)$.

Наведена теорема є основною для практичного розв'язання проблеми відокремлення всіх ізольованих в області \bar{R} розв'язків рівняння (3.2) за допомогою εs - алгоритму. Дійсно, оскільки, в загальному випадку, число m розв'язків рівняння (3.2) та місце їх розташування в області \bar{R} невідомо, то всю інформацію про ці розв'язки будемо одержувати в процесі побудови за допомогою εs - алгоритму розв'язувальних послідовностей, елементи яких з ростом ε_k -сіток будуть згущатися навколо ізольованих точних розв'язків рівняння (3.2), визначаючи таким чином їх кількість і апроксимуючи їх із заданою точністю.

Реалізація εs - алгоритму передбачає відображення оператором F куба \bar{R} у себе, тобто $F(\bar{R}) \subset \bar{R}$, та наявність додатної послідовності чисел $\gamma_k, (k=1, 2, \dots)$, яка збігається до нуля, причому такої, що ряд, складений із чисел $\varepsilon_k(\gamma_k)$, збігається при $k \rightarrow \infty$. За даними γ_k і $\varepsilon_k(\gamma_k)$ будується послідовність ε_k сіток шляхом багаторазового подрібнення вихідного куба

\bar{R} (компактної у собі множини) на кубики \bar{R}_{ik}^k з однаковими на кожному

етапі подрібнення довжинами їх сторін $d_k = (b-a) \cdot 2^{-k}$. Куб R_{i0}^0 називають *кубом 0-го етапу подрібнення*. Центри кубиків \bar{R}_{ik}^k , що є елементами ϵ_k сіток, позначають через \bar{u}_{ik}^k , де $i_k = 1, 2, \dots, 2^{kn}$ - число кубиків k -го етапу. При $k=0, i_0=1, \bar{u}_{i0}^0$ - центр куба \bar{R}_{i0}^0 .

Отже, нехай дано рівняння (3.2) і апіорі невідома кількість його ізолюваних розв'язків та місце їх розташування в області \bar{R} . Будується послідовність $\epsilon_k(\gamma_k)$ сіток, які покривають область \bar{R} і за допомогою вектор функції $F(\bar{u})$ відображається у послідовність γ_k сіток, що належать \bar{R} . Відповідні елементи цих сіток утворюють масив пар

$$\Delta_i^k = (\bar{u}_i^k, F(\bar{u}_i^k)), i = 1, 2, \dots, s_k$$

При кожному k із даного масиву потрібно відібрати ті пари, для яких виконується умова

$$\rho(\bar{u}_i^k, F(\bar{u}_i^k)) \leq \epsilon_k(\gamma_k) + \gamma_k \quad (3.3)$$

З таких пар (при кожному k) утворюються ланцюжки за таким правилом.

Нехай на k і $k+1$ сітках знайдені відповідно пари $\Delta_1^k, \Delta_2^k, \dots, \Delta_{s_k}^k$ і $\Delta_1^{k+1}, \Delta_2^{k+1}, \dots, \Delta_{s_{k+1}}^{k+1}$. Тоді пари $\Delta_i^k (i = 1, 2, \dots, s_k)$ зіставляються пари $\Delta_j^{k+1}, (j = 1, 2, \dots, s_{k+1})$, для яких будуть виконуватись умови

$$\rho(\bar{u}_i^k, \bar{u}_i^{k+1}) \leq \epsilon_{k+1}(\gamma_{k+1}) + \epsilon_k(\gamma_k) \quad (3.4)$$

$$\rho(F(\bar{u}_i^k), F(\bar{u}_i^{k+1})) \leq \gamma_k + \gamma_{k+1} \quad (3.5)$$

Продовжуючи цей процес, можна побудувати множини розв'язувальних послідовностей, кожній з яких буде відповідати ізолюваний розв'язок рівняння (3.2), причому одному і тому ж розв'язку може відповідати підмножина розв'язувальних послідовностей.

Таким чином, у теоретичному плані суть ϵs алгоритму щодо застосування до рівняння (3.2) полягає у відокремленні всіх ізолюваних його розв'язків шляхом побудови за допомогою умов (3.3)-(3.5) відповідних їм підмножин розв'язувальних послідовностей, елементи яких будуть апроксимувати ізолювані точні розв'язки із заданою точністю, допустимою

на ЕОМ.

Критерієм зупинки ε_s алгоритму є досягнення на елементах \bar{u}_i^k ε_k сіток заданої точності за нев'язкою або виконання на них достатніх умов деякого локального ітераційного методу.

Ефективність ε_s алгоритму суттєво залежить від точності апроксимації лівих частин (3.3)-(3.5) величинами y_k і $\varepsilon_k(y_k)$. Має місце теорема

Теорема 2. Нехай куб \bar{R} , що відображається вектор-функцією $F(\bar{u})$ у себе, покривається послідовністю рівномірних ε_k сіток, елементи яких є центрами \bar{u}_i^k кубів \bar{R}_i^k , причому $F(\bar{u}_i^k) \in \bar{R}_{ik}^k$. Тоді для кожного куба \bar{R}_i^k , що містить хоча б один розв'язок рівняння (3.2), послідовності y_k і $\varepsilon_k(y_k)$ пов'язані рівністю $y_k = 2\varepsilon_k(y_k)$, причому в евклідовій нормі E_n

$$\varepsilon_k(y_k) = d\sqrt{n} \cdot 2^{-k}$$

Якщо для кожного ізольованого розв'язку рівняння (3.1) потрібно знайти відповідний йому ε розв'язок за нев'язкою, тоді з (3.4) із урахуванням значень y_k і $\varepsilon_k(y_k)$ можна визначити номер сітки k_l на якій він досягається. Теоретично $k_l = \log_2(3d\sqrt{n}\varepsilon^{-1})$. Слід зауважити, що реальний номер сітки k_l задовольняє умові $\bar{k}_l \leq k_l$, причому k_l і \bar{k}_l для різних ізольованих розв'язків можуть бути різними, що залежить від диференціальних властивостей функцій f_1, f_2, \dots, f_n .

Застосування ε_s алгоритму доцільно здійснювати доти, поки елементи ε_k сіток не утворять множини, на кожній з яких знайдеться елемент, що буде ε розв'язком або на якому будуть виконуватися достатні умови функціонування деякого локального ітераційного методу. Вибір такого методу визначається практичною можливістю реалізувати його достатні умови існування та збіжності й обчислити апостеріорну оцінку похибки.

Відокремлення і уточнення розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь (НІР)

Існує багато задач фізики, хімії, біології, економіки, математичними моделями яких є одновимірні НІР із сталими межами інтегрування. Основним показником, що визначає доцільність вибору таких НІР при математичному моделюванні, є можливість за їх допомогою компактно формулювати граничні задачі, та досягати спрощеності у практичних обчисленнях при їх розв'язанні, а також можливості(у багатьох випадках) переходу від задачі розв'язування НІР до еквівалентним їм задач розв'язування систем нелінійних скалярних рівнянь(СНСР).

Характерною ознакою таких рівнянь є те, що в залежності від елементів, що їх породжують, вони можуть мати єдиний розв'язок, скінченну або нескінченну множину ізолюваних розв'язків або не мати розв'язків взагалі.

Оскільки ні кількість розв'язків вихідного НІР, ні місце їх розташування в заданій області апріорі невідомі, то всю інформацію про це можна отримати тільки при розв'язуванні НІР, наближеного в певному розумінні до вихідного і такого, для якого існують наближені методи розв'язання із визначенням числа усіх його розв'язків та обчисленням величин, як гарантують апостеріорну оцінку близькості точного і відповідного йому наближеного розв'язків, що еквівалентно відокремленню розв'язків.

Процес наближеного розв'язування НІР передбачає вирішення таких задач:

- 1) дослідження теоретичних питань, які відображають зв'язок вихідного(точного) рівняння і відповідної йому послідовості апроксимаційних(наближених) рівнянь у розумінні існування розв'язків таких рівнянь та їх відповідності, а також збіжності методу переходу до апроксимаційних рівнянь;
- 2) конструювання таких апроксимаційних рівнянь, які б допускали можливість свого точного або наближеного розв'язання з визначенням числа усіх розв'язків або зводилась до таких еквівалентних рівнянь, для яких апріорі відомі методи їх розв'язання;

- 3) реалізація точного або за допомогою ЕОМ наближеного методу розв'язування апроксимаційних рівнянь або рівнянь, їм еквівалентних;
- 4) знаходження апостеріорних оцінок близькості отриманих наближених розв'язків апроксимаційних рівнянь до відповідних їм розв'язків вихідного рівняння, тобто відокремлення розв'язків.

Про апроксимаційну розв'язність НІР Урисона

Розглянемо НІР

$$Tu(x) := u(x) - \int_0^1 K[x, y, u(y)] - f(x) = 0 \quad (3.6)$$

де $u(x)$ - шукана функція, а функції $K[x, y, u(y)]$ і $f(x)$ є неперервними за всіма своїми аргументами в області $\bar{E} = \{(x, y, u) : 0 \leq x, y \leq 1, \|u\| \leq d < \infty\} \subset C[0, 1]$.

У припущенні, що в області \bar{E} рівняння (3.6) має скінченну множину точних розв'язків $\Omega = \{u_i^*(x), i = \overline{1, l}\}$, поставимо задачу: відшукати неперервні ϵ розв'язки для всіх $u_i^*(x)$ за допомогою побудови і наступного розв'язання НІР більш простої структури, що апроксимують рівняння (1). Нехай побудована послідовність наближених рівнянь

$$T_n u(x) := u(x) - \int_0^1 K_n[x, y, u(y)] dy - f_n(x), n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

де функції $K_n[x, y, u(y)]$ і $f_n(x)$ належать $C(\bar{E})$.

Якщо при будь-яких або достатньо великих(допустимих) значеннях n рівняння (3.7) має розв'язки $u_n^i(x)$ і при кожному фіксованому i для послідовності $u_n^i(x)$ має місце співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n^i(x), \Omega) = 0 \quad (3.8)$$

то кажуть, що метод переходу до рівнянь (3.7) збігається. Вираз $\rho(u_n^i(x), \Omega)$ означає відстань від елементів послідовності $u_n^i(x)$ до множини ізольованих розв'язків Ω .

Послідовність розв'язків $u_n^i(x)$ називається відповідною розв'язку

$u_n^*(x) \in \Omega$ якщо виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n^*(x), u_n^i(x)) = 0$

Виконання умови (3.8) є достатньою підставою для практичного розв'язання рівнянь (3.7) при кожному фіксованому n і проведення апостеріорного аналізу отриманих наближених розв'язків. При цьому більш повним і доцільним вважається аналіз методу переходу до рівнянь (3.7) і відповідності розв'язків рівнянь (3.6) і (3.7) при наявності оцінок

$$\rho(u_n^i(x), \Omega) \leq \varepsilon_n \quad (3.9)$$

$$\rho(u_n^*(x), u_n^i(x)) \leq \varepsilon_n \quad (3.10)$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ характеризує швидкість збіжності методу переходу. Оцінки (3.9), (3.10) впливають із доведення теореми про можливість розв'язання рівняння (3.7) за відомою можливістю розв'язання рівняння (3.6). При фіксованому n нерівність (3.10), що характеризує апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку $u_n^i(x)$, випливає із теореми про розв'язність рівняння (3.6) за відомою можливістю розв'язання рівняння (3.7). Фактично нерівність (3.10) означає кулю єдиності кожного розв'язку рівняння (3.6), а процес відшукування таких куль характеризує процес відокремлення розв'язків рівняння (3.6). Можна вважати, що метод переходу до рівнянь (3.7) збігається. Це надає право для практичного розв'язування (при фіксованому n) апроксимаційних рівнянь (3.7) і отримання апостеріорної оцінки похибки кожного ізольованого розв'язку, тобто відокремлення розв'язків рівняння (3.6).

Якщо при деякому $n, \varepsilon_n \leq \varepsilon$, де ε характеризує задану точність наближеного розв'язку, то реально обчислений наближений розв'язок $u_n^i(x)$, що задовольняє умові (5), називається ε розв'язком рівняння (3.6) за аргументом.

Якщо при деякому $n \|T u_n^i(x)\| \leq \varepsilon$, то $u_n^i(x)$ називається ε розв'язком рівняння (3.6) за нев'язкою.

Практична реалізація процесу відокремлення ізольованих розв'язків рівняння (3.6) полягає у побудові замкнених куль $\bar{S}(v_i, r_i), i = \overline{1, l}$, кожна з

яких містить один розв'язок. Елементи v_i є точними або наближеними розв'язками рівняння (3.7) при допустимому фіксованому n , а радіуси r_i визначаються із достатніх умов локальних теорем існування відповідних розв'язків і збіжності ітераційних методів.

Про побудову апроксимаційних рівнянь для НІР Урисона

Для наближеного розв'язування вищенаведених класів рівнянь можуть бути застосовані поліноміально-апроксимаційні методи і методи механічних квадратур для дискретизації НІР і зведення їх до еквівалентної задачі СНСР з наступним застосуванням εs алгоритму відокремлення всіх ізольованих розв'язків СНСР та знаходження для них відповідних ε розв'язків за нев'язкою. Для подальшого уточнення розв'язків та знаходження ε розв'язків за нев'язкою і аргументом використовують ітераційні методи (простої ітерації, найшвидшого спуску, мінімальних нев'язок та похибок, метод Ньютона та ін.)

Для наближеного розв'язування рівнянь (3.7) застосовують відомий метод вироджених ядер.

Нехай у рівнянні (3.7) функції $K_n[x, y, u(y)]$ і $f_n(x)$ виражаються через системи лінійно-незалежних функцій $\varphi_i(x), \psi_i(x)$, тобто

$$K_n[x, y, u(y)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \psi_i(x) \sum_{j=1}^m u^j(y), f_n(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(x) \quad (3.11)$$

У цьому випадку розв'язок рівняння (2) визначається формулою

$$u'_n = \sum_{v=1}^n a_v \varphi_v(x) \quad (3.12)$$

де a_1, a_2, \dots, a_n - невизначені коефіцієнти. Підставивши (3.11), (3.12) у (3.7) і прирівнявши коефіцієнти при однакових $\varphi_v(x)$, одержимо щодо невідомих a_1, a_2, \dots, a_n систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР).

$$a_k = \alpha_k \int_0^1 \psi_k(y) \sum_{j=1}^m \left[\sum_{v=1}^n a_v \varphi_v(y) \right]^j dy + \beta_k, k = \overline{1, n} \quad (3.13)$$

еквівалентну рівнянню (3.7).

Для дискретизації рівняння (3.6) застосуємо метод механічних квадратур

$$\int_0^1 z(y) dy = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} z(y_{jn}) + r_n(z), n=1,2,\dots \quad (3.14)$$

де точки y_{jn} називаються вузлами, а дійсні числа α_{jn} коефіцієнтами квадратурної формули, причому припускається, що $\alpha_{jn} > 0, 0 \leq y_{1n} < y_{2n} < \dots < y_{nn} \leq 1$

Квадратурний процес (3.14) називається збіжним, якщо залишковий(додатковий) член $r_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якої функції $z(y)$ непервної на відрізку $[0,1]$.

За допомогою квадратурної формули (3.14) рівняння (3.6) можна замінити наближеним рівнянням

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} K(x, y_{jn}, u(y_{jn})) + f(x) \quad (3.15)$$

аналітичні розв'язки якого визначаються рівністю

$$u_n^* = \Phi_n \bar{\xi}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} K(x, y_{jn}, \bar{\xi}_{jn}) + f(x) \quad (3.16)$$

де $\bar{\xi}_n = (\bar{\xi}_{1n}, \bar{\xi}_{2n}, \dots, \bar{\xi}_{nn})$ - розв'язок нормальної системи нелінійних скалярних рівнянь

$$\bar{\xi}_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} K(x_{in}, y_{jn}, \bar{\xi}_{jn}) + f(x_{in}), i = \overline{1, n} \quad (3.17)$$

що апроксимує рівняння (3.6).

Таким чином, замість розв'язку $u^*(x)$ рівняння (3.6) будемо шукати його значення у вузлах інтерполяції y_{jn} . Точні або наближені значення $\bar{\xi}_{jn}$, що дорівнюють $u^*(y_{jn})$ визначаються із системи (3.17).

Знаходження всіх ізольованих розв'язків систем (3.13) і (3.17) здійснюється за допомогою εs алгоритму. Підставивши знайдені набори чисел $(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), i = \overline{1, l}$ у (3.12), а $(\bar{\xi}_{1n}, \bar{\xi}_{2n}, \dots, \bar{\xi}_{nn})$ в (3.16), одержимо всі наближені аналітичні розв'язки рівняння (3.6). Ці розв'язки $u_{in}^* = v_i$ надалі можуть служити центрами куль $\bar{S}(v_i, r_i)$ і початковими наближеннями в ітераційних процесах уточнення розв'язків.

Відокремлення розв'язків і апостеріорна оцінка похибки

У припущенні, що в області \bar{E} функції $K[x, y, u(y)]$ і $K_n[x, y, u(y)]$ двічі неперервно диференційовні за змінною $u=u(x)$, визначені відповідно до (3.6), (3.7) оператори $T: \bar{E} \rightarrow C[0,1]$, $T_n: \bar{E} \rightarrow C[0,1]$ є двічі неперервно диференційовними за Фреше за змінною u на будь-якому елементі $w=w(x) \in C[0,1]$, $\|w\| \leq d < \infty$ причому

$T'(w), T_n'(w), T''(w), T_n''(w)$ мають вигляд

$$T'(w)h = h(x) - \int_0^1 K'[x, y, w(y)]h(y)dy \quad (3.18)$$

$$T_n'(w)h = h(x) - \int_0^1 K_n'[x, y, w(y)]h(y)dy \quad (3.19)$$

$$T''(w)hh_1 = - \int_0^1 K''[x, y, w(y)]h(y)h_1(y)dy \quad (3.20)$$

$$T_n''(w)hh_1 = - \int_0^1 K_n''[x, y, w(y)]h(y)h_1(y)dy \quad (3.21)$$

Для подальшого ітераційного уточнення розв'язків рівняння (3.6) може бути використаний один із вищенаведених ітераційних методів, із яких впливають оцінки точності за нев'язкою і аргументом та пов'язані з ними оцінки обчислювальної складності, складовими яких є елементи інформаційних операторів.

Інформаційні оператори, що є носіями даних про задачі та чисельні методи або обчислювальні алгоритми їх розв'язування, в даному випадку дають інформацію про досліджувані рівняння, та дані, що використовують методи або обчислювальні алгоритми їх розв'язування.

Дослідження та оцінка обчислювальної складності наближеного розв'язування будь-яких задач обчислювальної та прикладної математики переважає дослідження оцінок таких взаємопов'язаних між собою характеристик чисельних методів або обчислювальних алгоритмів, як точність отриманих розв'язків за нев'язкою та аргументом і часову складність

або зашальний час отримання ε розв'язків. Ці питання розглядаються на прикладі ітераційного уточнення розв'язків рівняння (3.6), для чого використовується метод мінімальних похибок, реалізований у просторі $L_2[0,1]$, шляхом побудови ітераційної послідовності за формулою

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k g_k \quad (3.22)$$

де $g_k = \text{grad}(Tu_k, Tu_k) = [T'(u^k)] * Yu^k$, а коефіцієнти α_k визначаються з умови $\|u^{k+1} - u^*\| = \min$ і мають вигляд

$$\alpha_k = - \frac{\|T(u^k)\|^2}{\|T'(u^k) * T(u^k)\|^2}$$

У цьому випадку (3.22) буде набувати вигляду

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|T(u^k)\|^2}{\|T'(u^k) * T(u^k)\|^2} [T'(u^k)] * T(u^k), k=0,1,\dots \quad (3.23)$$

Має місце аналог теореми існування та збіжності.

Теорема 3. Нехай у кулі $\bar{S}(v, r) = \{u \in \bar{E} : \|u - v\| \leq r\}$ із заданим v і r виконуються умови

$$\|Tv\| \leq \eta_1 \quad (3.24)$$

$$\|T'(u)\| \leq M(r, v), \|T''(u)\| \leq N(r, v) \quad (3.25)$$

$$\|T'(u)h\| \geq m(r, v)\|h\|, m > 0 \quad (3.26)$$

де $\eta_1, M(r, v), N(r, v), m(r, v)$ - такі константи, що забезпечують справедливості нерівностей

$$\gamma(r) = \frac{\eta_1 N(r, v)}{m^2(r, v)} < 1 \quad (3.27)$$

$$\frac{2\eta_1}{m(r, v)} \leq r \quad (3.28)$$

Тоді рівняння (3.6) має в кулі $\bar{S}(v, r)$ єдиний розв'язок u^* , до якого, починаючи з $u^0 = v$, монотонно і сильно збігається послідовність u^k , побудована відповідно до (3.23), причому має місце оцінка похибки

$$\|u^* - u^k\| \leq \frac{\eta_1}{m(r, v)} \left[1 - \frac{m^2(r, v)}{M^2(r, v)} (1 - \gamma(r)) \right]^{\frac{k}{2}} = \frac{\eta_1}{m(r, v)} q^{\frac{k}{2}} \quad (3.29)$$

Звідси при $k=0$ одержимо оцінку близькості відповідних розв'язків u^* і

$u^0 = v$ рівнянь (3.6) і (3.7), тобто

$$\|u^* - v\| \leq \frac{\eta_1}{m(r, v)} \leq r \quad (3.30)$$

що означає належність розв'язку $u^* \in \bar{S}(v, r)$

Використовуючи цю теорему у припущенні, що при кожному $v_i = u_{i_n}^*(x)$ величини $M(r, v), N(r, v), m(r, v)$ є нелінійними скалярними функціями радіуса $r = r_i$, можна відокремити всі ізольовані розв'язки рівняння (3.6). Це досягається такими значеннями $v_i = u_{i_n}^*(x)$ і відповідними їм $r = r_i$, при яких система нерівностей (3.27), (3.28) буде сумісною. У цьому випадку функції $M(r, v), N(r, v), m(r, v)$ природно виразити через аналогічні, обчислювані згідно з (3.25), (3.26) величини M_n, N_n, m_n , що обмежують у кулі $\bar{S}(v, r)$ похідні $T_n'(w), T_n''(w)$ оператора $T_n(u)$, і функціонали $\eta_i(n, u) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, i = 1, 2, 3$, що характеризують у цій кулі близькість операторів T, T_n та їх похідних $T'(w), T_n'(w), T''(w), T_n''(w)$, а саме для довільного $u \in \bar{S}(v, r)$ мають місце нерівності

$$\|T^{i-1}(u) - T_n^{i-1}(u)\| \leq \eta_i(n, u), T^0 = T, i = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

Величини $M(r, v), N(r, v), m(r, v)$ у цьому випадку матимуть вигляд

$$M(r, v) = M_n + N_n(r, \|v\|)r + \eta_2(n, r, \|v\|) \quad (3.32)$$

$$N(r, v) = N_n(r, \|v\|) + \eta_3(n, r, \|v\|) \quad (3.33)$$

$$m(r, v) = m_n - N_n(r, \|v\|)r + \eta_2(n, r, \|v\|) \quad (3.34)$$

Оцінка характеристик задач і алгоритмів

Для визначення числових значень величин, що входять в оцінки (3.32)-(3.34), введемо такі позначення:

$$\bar{m}_1 = \min_{0 \leq x, y \leq 1} K_n'[x, y, v(y)] ,$$

$$\bar{m}_2 = \min_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 K_n'[x, y, v(y)] dy ,$$

$$M_1 = \max_{0 \leq x, y \leq 1} K_n'[x, y, v(y)] ,$$

$$M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 K_n' [x, y, v(y)] dy ,$$

$$M_3 = \left(\int_0^1 \int_0^1 (K_n' [x, y, v(y)])^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.35)$$

Мають місце леми

Лема 1. Оцінки норм операторів $T_n'(v), T_n''(v)$, визначених формулами (3.19), (3.21) характеризуються нерівностями

$$\|T_n'(v)\| \leq M_n = \begin{cases} (1 + \overline{M}_1), & \text{якщо } K_n' [x, y, v(y)] < 0, \\ \sqrt{(1 + \overline{M}_3^2)}, & \text{якщо } K_n' [x, y, v(y)] \geq 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\|T_n'' \leq \overline{M}_3\| \quad (3.37)$$

Лема 2. Оцінка знизу значення оператора $T_n'(v)h$, визначеного формулою (3.19), характеризується нерівністю

$$\|T_n'(v)h\| \geq m_n \|h\|, h(x) \in C[0,1] \quad (3.38)$$

де $m_n = 1$, якщо $K_n' [x, y, v(y)] < 0$;

$m_n = 1 - \overline{M}_1$, якщо $K_n' [x, y, v(y)] \geq 0, 0 \leq \overline{M}_1 < 1$;

$m_n = \overline{m} - 1 - 1$, якщо $K_n' [x, y, v(y)] > 0, \overline{m}_1 > 1$.

Методика обчислення величин $\eta_2, \eta_3, N_n(n, r, \|v\|)$ залежить від структури функцій $K_n' [x, y, v(y)]$ і $K_n'' [x, y, v(y)]$.

Про обчислювальну точність і складність

Важливим елементом при дослідженні є розв'язків і ефективних алгоритмів їхнього обчислення є повна похибка, складовими якої у загальному випадку є: E_v — неусувна похибка, E_μ — похибка методу, що в даному випадку складається із похибки апроксимації $E_{\mu 1}$ і похибки ітераційного процесу $E_{\mu 2}$;

E_τ — похибка заокруглення за рахунок фіксованої довжини мантиси τ у режимі плаваючої коми, способу заокруглення, порядку виконання арифметичних операцій і т.д. Іноді вживається термін “обчислювальна похибка” E_0 , яка рівна $E_\mu + E_\tau$.

Надалі будемо вважати, що вхідна інформація задана точно, а проміжна — з похибкою, допустимою для подальшої реалізації наближених методів. Похибка апроксимації $E_{\mu 1}$, що виникає за рахунок подання функцій $K_n[x, y, u(y)]$ і $f_n(x)$ у вигляді (3.11) характеризується функціоналом $\eta_1(n, u)$ із (3.31), а похибка $E_{\mu 2}$ ітераційного процесу (3.23) — оцінкою (3.29).

У випадку, що розглядається, з точністю до порядку виконання арифметичних операцій можливі три варіанти обчислювальної схеми:

1. Апроксимаційна схема, коли наближені розв'язки або ε розв'язки знаходяться шляхом збільшення розмірності простору або довжини відрізків апроксимантів (3.11), що призводить до збільшення розмірності системи (3.13). У цьому випадку похибка методу буде складатися з похибки апроксимації, яка характеризується при $i=1$ функцією $\eta_1(n, u)$ із (3.31), посможеної на деяку константу C , а похибка заокруглення буде сумісна з похибкою заокруглення обчислення нев'язки розв'язуваної системи.
2. Ітераційна схема, коли початкові наближення $u^0 = v$ відомі з деякою похибкою, тобто віддалені від відповідних точних розв'язків на $\delta > \varepsilon$, а ε розв'язки уточнюються, наприклад, згідно (3.23) для рівняння (3.6). У цьому випадку похибку початкових наближень можна трактувати як похибку проміжних вихідних даних і співвіднести її до неусувної похибки. Похибка методу в цьому випадку буде характеризуватися оцінкою (3.29), а похибка заокруглення буде сумісна з похибкою заокруглення на одному кроці ітерації.
3. Комбінована схема, коли до моменту відокремлення розв'язків і можливості їхнього ітераційного уточнення розв'язків, тобто для знаходження ε розв'язків, застосовується ітераційна процедура (3.23). У цьому випадку похибки розв'язків, отриманих апроксимаційним методом, можна співвіднести до неусувної похибки, а похибку методу і заокруглення або розглядати як в п.2, або похибку

методу розглядати як суму похибок апроксимації і ітерації, а похибку заокруглення оцінювати як і в п.2.

Слід зазначити, що в усіх наведених схемах оцінки похибок заокруглення виражаються через деякі скалярні функції, що залежать від параметру апроксимації, розмірності простору, у якому розглядається задача, структури нелінійних рівнянь, довжини розрядної сітки τ , порядку виконання арифметичних операцій, їхньої кількості і т.д.

Позначимо через $Q_1(n, c_1), Q_2(n, c_2), Q_3(n, c_3)$ скалярні функції, що характеризують число всіх арифметичних операцій при обчисленні відповідно $T(u^k), [T'(u^k)] * T(u^k)$ і $\alpha_k = \|T(u^k)\|^2 / \|[T'(u^k)] * T(u^k)\|^2$. Параметр n означає розмірність простору або довжину відрізків у розкладі (6), c_1, c_2, c_3 — константи.

Нехай $Q_4(n, c_4)$ (c_4 — константа) характеризує число всіх арифметичних операцій при реалізації одного кроку ітераційного процесу (3.23). Тоді оцінка похибки заокруглення запишеться у вигляді:

$$\|u_n^k - u_{nr}^k\| \leq \|u_n^k\| \bar{C}(q) \sum_{i=1}^4 Q_i(n, c_i) * 1,06 * 2^{-\tau}, (\bar{C}(q) = \text{const}) \quad (3.39)$$

Склавши (3.30) при $i=1$ і (3.39) при $k=0$, одержимо оцінку обчислювальної похибки апроксимаційної схеми

$$\begin{aligned} \|u_n^* - u_{nr}^0\| &\leq \|u_n^* - u_n^0\| + \|u_n^0 - u_{nr}^0\| \leq \\ &\leq \frac{C \eta_1(n, \|u_n^0\|)}{m(r, \|u_n^0\|)} + \|u_n^0\| \bar{C}(q) \sum_{i=1}^4 Q_i(n, c_i) * 1,06 * 2^{-\tau} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Аналогічно, склавши (3.29) і (3.39) одержимо оцінку обчислювальної похибки ітераційної схеми.

$$\begin{aligned} \|u_n^* - u_{nr}^k\| &\leq \|u_n^* - u_n^k\| + \|u_n^k - u_{nr}^k\| \leq \\ &\leq \frac{\eta_1(n, \|u_n^k\|)}{m(r, \|u_n^k\|)} q^{\frac{k}{2}} + \|u_n^k\| \bar{C}(q) \sum_{i=1}^4 Q_i(n, c_i) * 1,06 * 2^{-\tau} \end{aligned} \quad (3.41)$$

На основі нерівностей (3.40), (3.41) компіляцією можна одержати оцінку обчислювальної похибки для комбінованої схеми.

Таким чином, маючи оцінки похибки (3.40), (3.41) можна порушувати

питання про гарантовану можливість побудови й обчислення ε розв'язків рівняння (3.6). З іншого боку, на підставі скалярних функцій $Q_i(n, c_i), i=\overline{1,4}$, можна визначити час реалізації кожної із вищезазначених схем, тобто оцінити обчислювальну складність кожної з них. Позначимо через t_c час виконання на ЕОМ деякої “середньої” операції. Тоді час реалізації апроксимаційного методу при деякому фіксованому значенні $n=\bar{n}(\varepsilon)$ буде

$$T_{app}=Q_1(\bar{n}, \tau, c_1)t_c \quad (3.42)$$

для ітераційного методу —

$$T_{im}=k \sum_{i=1}^4 Q_i(\bar{n}, \tau, c_i)t_c \quad (3.43)$$

для комбінованого методу —

$$T_k=Q_1(\bar{n}, \tau, c_1)t_c+k \sum_{i=1}^4 Q_i(\bar{n}, \tau, c_i)t_c \quad (3.44)$$

На основі (3.42)-(3.44) можна обчислювати складність алгоритму знаходження ε розв'язку.

II. Обчислювальний експеримент

2.1 Оцінки точності та обчислювальної складності, реалізація ε -алгоритму глобального розв'язування нелінійних рівнянь з одним невідомим

Постановка задачі

Нехай задано нелінійне рівняння

$$f(x)=0$$

де $f(x)$ — неперервна функція на скінченному проміжку $a < x < b$.

Необхідно ізолювати розв'язки даного рівняння на заданому проміжку.

Реалізація ε -алгоритму для відокремлення розв'язків

Реалізація ε -алгоритму для випадку нелінійних рівнянь з одним невідомим полягає у розбитті початкового проміжку $[a,b]$ на n підпроміжків, для кожного з яких знаходиться середня точка, потрібно знайти значення функції в даній точці, якщо воно буде досить близьке до нуля (менше за деяке ε), а довжина проміжку більша за деяке δ (мінімальна довжина проміжку), то рекурсивно алгоритм продовжується для даного підпроміжку. Процес обривається, коли точка, яка задовольняє дані умови також буде задовольняти і умовам збіжності певного ітераційного методу уточнення коренів.

Таким чином програмна реалізація ε -алгоритму для випадку нелінійних рівнянь з одним невідомим може бути реалізована наступним чином

```
var eps = 0.1,  
    n = 100,  
    rec = 0,  
    delta = 0.01;
```



```

function es(a, b) {
    var h = (a + b) / n,
        _a, _b, _c;

    rec++;

    for (var i = 0; i < n; i++) {
        _a = a + i*h;
        _b = _a + h;
        _c = (_a + _b) / 2;

        if (Math.abs( f(_c) ) <= eps / rec) {
            if (check_convergency(_c)) {
                if (Math.abs(b - a) <= delta ) {
                    console.log('found in ', _a, _b, 'point is ', _c);
                    rec--;
                    return;
                } else {
                    es(_a, _b);
                }
            }
        }
    }
}

```

Контрольний приклад

Знайти всі ізольовані розв'язки рівняння $\sin(x)=0$ на проміжку $[0,10]$, де $\varepsilon=0.1$, $\delta=0.01$, $n=100$

```

husa@husa-laptop:~/Документи/diploma/code$ node main.js
found in 0 1e-7 point is 5e-8
found in 3.141 3.1416283 point is 3.14131415
found in 6.283 6.2842567 point is 6.283628350000001
found in 9.424 9.4258849 point is 9.42494245

```

Результати обчислювального експерименту

Як видно з прикладу результати роботи алгоритму є задовільними з точки зору точності, одержані результати можна використати як і наближені до точних, якщо постановка реальної задачі допускає таку точність. При розв'язуванні було виконано порядку 400 операцій, проте кількість операцій можна легко покращити маніпулюючи значеннями ε , δ і n , але при цьому потрібно враховувати, що при малих n або ж при великих ε чи δ , розв'язок може не задовольнити умови, тоді він буде втрачений. Оскільки всі операції, окрім перевірки на збіжність, не є високозатратними, то велика кількість перевірок компенсується потужністю сучасних комп'ютерів (розміром стеку, об'ємом оперативної пам'яті та розміром процесорної пам'яті).

2.2 Оцінки точності та обчислювальної складності, реалізація ε -алгоритму глобального розв'язування систем нелінійних скалярних рівнянь

Постановка задачі

Нехай задано СНСР вигляду

$$\begin{cases} u_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ u_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \dots \\ u_n = f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

де функції f_1, f_2, \dots, f_n визначені і двічі неперервно диференційовні на деякій обмеженій області G дійсного арифметичного n -вимірного простору E_n , метризованого елементами деякої множини Q , тобто кожній парі точок $u, v \in E_n$ відповідає елемент $\rho(u, v) \in Q$, що характеризує віддаль між u і v .

Дана система в еквівалентній операторній формі

$$\bar{F}(\bar{u}) := \bar{u} + F(\bar{u}) = 0,$$

де $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ - вектор, а $F(\bar{u}) = (f_1(\bar{u}), f_2(\bar{u}), \dots, f_n(\bar{u}))$ - вектор функція.

Нехай потрібно знайти усі ізольовані розв'язки системи даної системи на n -вимірному замкненому кубі $\bar{R} \subset E_n$.

$$\bar{R} = \{ \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) : a < u_i < b ; i = \overline{1, n} ; -\infty < a, b < \infty, d = b - a \}$$

Реалізація ε -алгоритму для відокремлення розв'язків

Практична реалізація наближеного методу розв'язування системи передбачає обрив на певному етапі процесу побудови послідовності наближених розв'язків. Це означає, що задається число $\varepsilon > 0$ і для кожного фіксованого l шукається таке k і елемент \bar{u}_{lk} послідовності наближених умов розв'язків, починаючи з якого буде виконуватись одна із наступних умов $\rho(\bar{u}_{lk}, F(\bar{u}_{lk})) < \varepsilon$ - малість нев'язки, або $\rho(\bar{u}_l, \bar{u}_{lk}) < \varepsilon$ - близькість

відповідних розв'язків. Наближений розв'язок \bar{u}_{lk} , що задовольняє одній із наведених умов, називається відповідно ε - розв'язком за нев'язкою або ε - розв'язком за аргументом. Таким чином, задача глобального наближеного розв'язування системи полягає у знаходженні m відповідних ε - розв'язків.

Таким чином програмна реалізація ε s-алгоритму для випадку систем нелінійних скалярних рівнянь може бути реалізована наступним чином

```
var Eps = 0.2,
    step = 100,
    rec = 0;

function ES(cube) {
    var i = 0, j = 0, k = 0,
        n = cube.length,
        h = [],
        _cube = [],
        _a, _b, _x;

    rec++;

    for (; i < n; i++) {
        h[i] = ( Math.abs(cube[i][0]) + Math.abs(cube[i][1]) ) / step;
    }

    for (i = 0; i < step; i++) {
        for (j = 0; j < step; j++) {
            for (k = 0; k < step; k++) {
                _cube = [
                    [ cube[0][0] + i * h[0], cube[0][0] + (i+1) * h[0] ],
                    [ cube[1][0] + j * h[1], cube[1][0] + (j+1) * h[1] ],
                    [ cube[2][0] + k * h[2], cube[2][0] + (k+1) * h[2] ]
                ]

                //get center point of cube;
                _x = getCenter(_cube);
```

```

// check if current point is valid for futher iterations
if ( normaVector(F(_x)) < ( Eps ) && rec < 10) {
    if (check(_x)) {
        FOUND.push(_x)
        rec--;
    } else {
        ES(_cube);
    }
}
_cube = [];
}
}
}

```

Контрольний приклад

Знайти всі ізольовані розв'язки СНСР

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1^2 + (u_2 - u_3)^2 - 3, \\ f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_2^2 + (u_1 - u_3)^2 - 4, \\ f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_3^2 + (u_1 - u_2)^2 - 5 \end{cases}$$

в області $\bar{R} = [-2, 2; -3, 3; -3, 3]$, $\varepsilon = 0.4$, $n = 100$.

```

husa@husa-laptop:~/Документи/diploma/code$ node main.js
done with "1.71867, 2.03128, 2.34369"
done with "1.71867, -2.0313, 2.032"
done with "0.39078, 0.70206, 2.2636"
done with "-0.39072, -0.702, -2.2629"
done with "0.14995, -2.0313, -0.14995"
done with "-0.14995, -2.0313, 0.14995"
done with "1.64009, -0.71, -0.24"
done with "-1.64009, 0.70131, 0.23493"

```

Контрольний приклад 2

Знайти всі ізольовані розв'язки СНСР

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1^2 + (u_2 - u_3)^2 - 5, \\ f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_2^2 + (u_1 - u_3)^2 - 6, \\ f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_3^2 + (u_1 - u_2)^2 - 7 \end{cases}$$

в області $\bar{R}=[-2.5, 2.5; -3, 3; -3, 3]$, $\varepsilon=0.2$, $n=100$.

```
husa@husa-laptop:~/Документи/diploma/code$ node main.js
done with "-2.22500, -2.43000, -2.67000"
done with "-2.22500, -2.43000, -2.61000"
done with "-2.22500, 0.39000, 0.21000"
done with "-0.27500, -0.45000, -2.67000"
done with "-0.22500, 2.43000, 0.21000"
done with "-0.17500, -0.39000, -2.61000"
done with "-0.17500, 2.43000, 0.21000"
done with "0.17500, -2.43000, -0.21000"
done with "0.22500, -2.43000, -0.21000"
done with "0.27500, 0.45000, 2.67000"
done with "2.22500, -0.39000, -0.21000"
done with "2.22500, 2.43000, 2.61000"
```

Таким чином для методу мінімальних похибок для двох розв'язків одержані наступні оцінки:

u_1	u_2	u_3	δ	m	M	N	q	r
-2.225	-2.429	-2.610	0.1561	4.392	8.459	7.46	0.0323	0.0711
2.225	-0.390	-0.210	0.144	4.392	8.472	7.44	0.0298	0.065

Результати обчислювального експерименту

На одержаних результатах задовольняються умови збіжності ітераційного методу уточнення розв'язків — методу найменших похибок, тобто знайдені точки можуть бути використані як початкові наближення для подальшого уточнення за допомогою ітераційних методів. При розв'язанні даної задачі було виконано порядку 10^6 операцій, і кількість операцій буде швидко зростати із збільшенням розмірності задачі, тому при застосуванні ε -алгоритму необхідно попередньо дослідити задачу для вибору кращих ε і n .

В даній реалізації було також введено обмеження на глибину рекурсії для попередження зациклення в результаті можливих непередбачуваних збоїв.

Висновок

Теоретичні основи елементів загальної теорії наближених методів застосовані для аналізу точності і обчислювальної складності наближеного глобального розв'язування нелінійних функціональних рівнянь.

На конкретних прикладах проведено аналіз і реалізації методу відокремлення ізольованих розв'язків нелінійних функціональних рівнянь — εs -алгоритму. Було програмно реалізовано εs -алгоритм для розв'язання задач відокремлення ізольованих розв'язків нелінійних рівнянь з одним невідомим та систем нелінійних скалярних рівнянь.

Проведено аналіз даного методу на основі таких характеристик: збіжність методу, точність одержаного результату, кількість необхідних арифметико-логічних операцій, глибина рекурсії.

Список використаної літератури

1. Бабич М. Д., Бабич В. М. Про чисельне розв'язування нелінійних функціональних рівнянь з багатьма розв'язками – Київ, 2002. – 3-36с.
2. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. Об одном алгоритме приближенного решения нелинейных операторных уравнений – К.:Кибернетика, 1991. – 21-28с.
3. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений – К.:Кибернетика, 1982. – 74-79с.
4. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Б. В. Численные методы в задачах и упражнениях – М.:Высшая школа, 2000. – 190с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.Наука, 1973. – 632с.
6. Березин И. С., Жыдков Н. П., Методы вычислений – М.:Наука, 1966 – Т.1. – 632с.; М.Физматгиз, 1962. – Т.2. – 620с.
7. Калиткин Н. Н. Численные методы – М.:Наука, 1978. – 512с.
8. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений – М.:Наука, 1969. – 417с.
9. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа – М.:ГИФМЛ, 1962. – 394с.
10. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы – Киев.:Наук. Думка, 1993. – 288с.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа М.:Наука, 1965. – 520с.
12. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. К вопросу оптимизации вычислений – К.:Кибернетика. – 1994. — 65-94с.
13. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными – М.:Мир, 1975. – 558с.

14. Островский А. Решение уравнений и систем уравнений – М.:ИЛ, 1963. – 367с.
15. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений – М.:Мир, 1985. – 263с.
16. Фридман В. М. Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения – Докл АН СССР. – 1961.
17. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров – М.:Наука, 1972. – 244с.

Додаток

Програмна реалізація ε s-алгоритму для ізолювання розв'язків систем нелінійних скалярних рівнянь.

```
function distance( a, b) {  
    var i = 0,  
        n = a.length,  
        ret = 0;  
  
    if (n !== b.length) return;  
    for (; i < n; i++) {  
        ret += Math.pow(b[i] - a[i], 2);  
    }  
    return Math.pow(ret, 0.5);  
}
```

```
function normaMatrix(A) {  
    var res = 0,  
        i = 0, j = 0,  
        n = A.length, m = A[0].length;  
  
    for (; i < n; i++) {  
        for (; j < m; j++) {  
            res += A[i][j]*A[i][j];  
        }  
    }  
    return Math.pow(res, 1/2);  
}
```

```
function normaVector(A) {  
    var res = 0,  
        i = 0,  
        n = A.length;  
  
    for (; i < n; i++) {  
        res += A[i]*A[i];  
    }  
    return Math.pow(res, 1/2);  
}
```

```
function inverse(_A) {  
    var temp,  
        N = _A.length,
```

```

E = [];

for (var i = 0; i < N; i++)
    E[i] = [];

for (i = 0; i < N; i++)
    for (var j = 0; j < N; j++) {
        E[i][j] = 0;
        if (i == j)
            E[i][j] = 1;
    }

for (var k = 0; k < N; k++) {
    temp = _A[k][k];

    for (var j = 0; j < N; j++)
    {
        _A[k][j] /= temp;
        E[k][j] /= temp;
    }

    for (var i = k + 1; i < N; i++)
    {
        temp = _A[i][k];

        for (var j = 0; j < N; j++)
        {
            _A[i][j] -= _A[k][j] * temp;
            E[i][j] -= E[k][j] * temp;
        }
    }
}

for (var k = N - 1; k > 0; k--)
{
    for (var i = k - 1; i >= 0; i--)
    {
        temp = _A[i][k];

        for (var j = 0; j < N; j++)
        {
            _A[i][j] -= _A[k][j] * temp;
            E[i][j] -= E[k][j] * temp;
        }
    }
}

```

```

    for (var i = 0; i < N; i++)
        for (var j = 0; j < N; j++)
            _A[i][j] = E[i][j];
    return _A;
}

function max(a) {
    var i = 1, n = a.length, max = a[0];
    for (; i < n; i++) {
        if (a[i] > max) max = a[i];
    }
    return max;
}

function check(u, r) {
    var d = normaVector( F(u) ),
        N = normaVector(F__(u)),
        m = 1 / normaMatrix( inverse( F_(u) ) );

    return ((d * N) / (m*m)) < 1 && (2*d / m) < r;
}

function getCenter(cube) {
    var ret = [];
    i = 0,
    n = cube.length;

    for (; i < n; i++) {
        ret.push( (cube[i][0] + cube[i][1]) / 2 );
    }
    return ret;
}

var Eps = 0.4,
    step = 100,
    rec = 0;

function ES(cube) {
    var i = 0, j = 0,
        n = cube.length,
        h = [],
        _cube = [],
        _a, _b, _x;

    rec++;

```

```

for (; i < n; i++) {
    h[i] = ( Math.abs(cube[i][0]) + Math.abs(cube[i][1]) ) / step;
}

for (i = 0; i < step; i++) {
    //create small cube
    for (j = 0; j < n; j++) {
        _a = cube[j][0];
        _b = cube[j][1];
        _cube.push( [ _a + i*h[j] , _a + (i+1)*h[j] ] );
    }

    // get center point of cube;
    _x = getCenter(_cube);

    // check if current point is valid for futher iterations
    if ( normaVector(F(_x)) < ( Eps ) && rec < 10) {
        if (check(_x, Eps/rec )) {
            console.log('done with "' + _x.join(', ') + '"');
        } else {
            ES(_cube);
        }
        rec--;
    }

    _cube = [];
}
}

```

де $F(u)$, $F_{-}(u)$, $F_{--}(u)$ — задані функції, що відповідають оператору, його першій та другій похідній відповідно.