تمهيد: ظهرت فكرة الأعداد المركبة من خلال مصادفتنا لمعادلات من الشكل:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

المعادلة السابقة لا تملك حلاً في $\mathbb{R}$ لأن المميز Δ أصغر من الصفر. في الواقع $\Delta = -3$. لذلك اتفق العلماء على افتراض عدد تخيلي قيمته $i^2 = -1$.

فيكون $\Delta = 3i^2$ بمتابعة الحل نحصل على:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نسمي كل من x_1 و x_2 بعددين مركبين وهما لا ينتميان إلى $\mathbb{R}$ بل إلى مجموعة أخرى أوسع منها هي $\mathbb{C}$.

الشكل الجبري للعدد المركب

الشكل الجبري هو: $Z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$

نسمي x بالقسم الحقيقي ونرمز له بالرمز $Re(Z)$.

ـ ـ y ـ التخيلي (لأنها مضروبة بالعدد التخيلي i) ونرمز له بالرمز $Im(Z)$.

مثال: $Z = 2+3i$ ، $Z = 3-4i$ ، $Z = \sqrt{2}-\sqrt{3}i$

مرافق عدد مركب

مرافق عدد مركب $Z = x+iy$ نحصل عليه بعكس إشارة القسم التخيلي أي يصبح $x - iy$. ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أي: $\bar{Z} = x - iy$

بعض القواعد الخاصة بالمرافقات

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z + \overline{z} = 2\,Re(z)$$

$$z - \overline{z} = 2\,Im(z)$$

$$\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

القوى الطبيعية للعدد i

$i = \sqrt{-1}$

$$\boxed{\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \end{aligned}}$$

اعتباراً من i^6 ستتكرر هذه الإجابات أي أن قوى i ستعطي حصراً إحدى الاجابات الأربع.

مثال: $i^{2000} = 1$ لأن 2000 تقبل القسمة على 4.

$$i^{135} = i^{132} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

132 تقبل القسمة على 4.

$$i^{2107} = i^{2016} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

تساوي عددين مركبين

$z_1 = x_1 + iy_1 \,,\; z_2 = x_2 + iy_2$

اذا كان $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

العمليات على الأعداد المركبة

1) الجمع :

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) الطرح :

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

3) الضرب : نضرب كما لو أننا نضرب كثير حدود بكثير حدود آخر.

مثال :

$(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2$

$= 2 + i + 3 = 5 + i$

4) القسمة : نضرب بسط والمقام بمرافق المقام.

مثال :

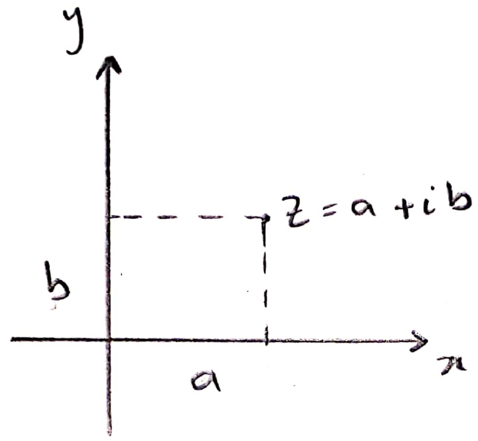
$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{2+i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

مرافق المقام

$$= \frac{6 - 2i + 3i - i^2}{9 - i^2}$$

$$= \frac{7+i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{i}{10}$$

التمثيل الهندسي للعدد المركب

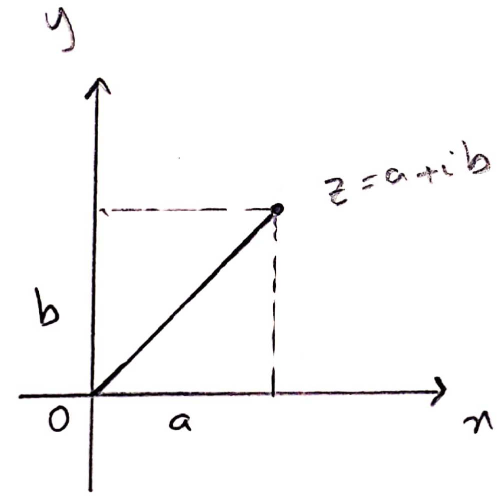


يمكن تمثيل أي عدد مركب مثل $z = a + ib$ بنقطة في المستوي فاصلتها a و ترتيبها b.

من هنا نجد أن الأعداد الحقيقية هي عبارة عن أعداد مركبة ولكن تقع على محور ox أي أن b لها معدوم.

هذا يعني أن $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

طويلة (طول) عدد مركب :



نسمي طول الخط oz بطويلة z ونرمز له بالرمز $|z|$

من الواضح أن :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وهذا ينتج من فيثاغورث.

خواص طويلة عدد مركب

① $z\cdot\bar{z} = |z|^2$ (لأن $z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$)

② $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

③ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$

④ $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

⑤ $|z^n| = |z|^n$

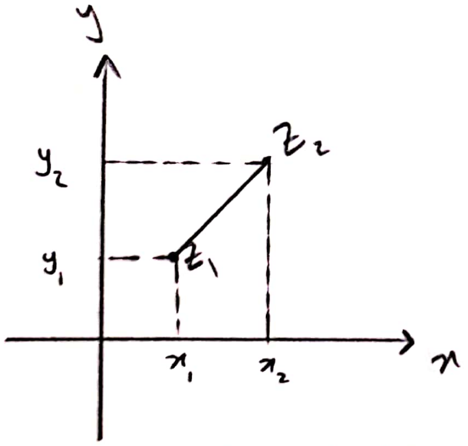
⑥ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

مثال:

$z = \frac{(2+i)^2\cdot(3-4i)}{3+i}$ احسب $|z|$.

$$|z| = \left|\frac{(2+i)^2\cdot(3-4i)}{3+i}\right| = \frac{|(2+i)^2|\cdot|3-4i|}{|3+i|} = \frac{|2+i|^2\cdot|3-4i|}{|3+i|}$$

$$= \frac{5\cdot 5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$



البعد بين نقطتين في المستوي العقدي

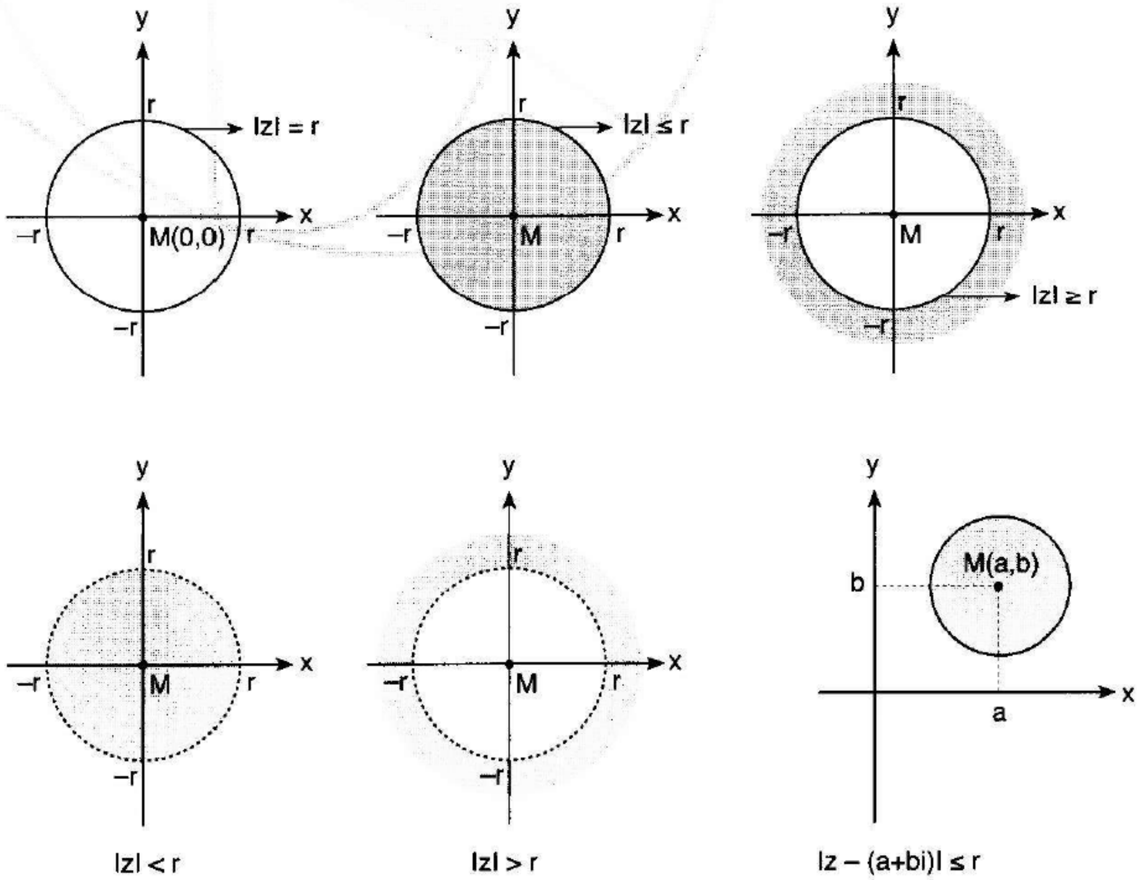
لتكن: $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

لنأخذ طويلة العدد المركب $|z_1 - z_2|$:

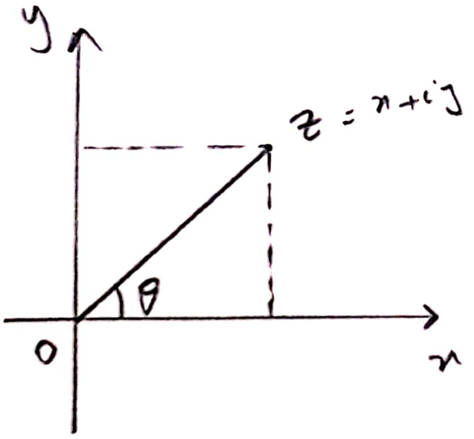
$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ وهذا نسميه دستور البعد بين نقطتين

نتائج مهمة



الشكل المثلثي للعدد المركب :

نفرض $z = x+iy$ ونوجد $|z|$: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$



ولاحظ أن :

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z|\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z|\sin\theta$$

$$\Rightarrow z = |z|.\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

نرمز لـ $|Z|$ بالرمز r : $\quad Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

أو : $\quad Z = r\,cis(\theta)$

نسمي θ بزاوية العدد المركب Z ونرمز لها بالرمز $Arg(Z)$.

مثال: أوجد الشكل المثلثي للعدد المركب $Z = 2 - 2i$.

$$x = 2 \;,\; y = -2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

الـ tan يكون سالب في الربعين الثاني والرابع. ولكن وبملاحظة قيم x و y نجد أن العدد المركب يقع في الربع الرابع $\Leftarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ أو $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$$\Rightarrow Z = (2\sqrt{2})\,cis\,\frac{7\pi}{4}$$

$|Z|$.

خواص الشكل المثلثي

اذا كان: $Z_1 = r_1\,cis(\theta_1)$ و $Z_2 = r_2\,cis(\theta_2)$

عندها:

① $Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2\,cis(\theta_1 + \theta_2)$

② $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,cis(\theta_1 - \theta_2)$

③ $Z_1^n = r_1^n\,cis(n.\theta_1)$ ⟵ دستور دموافر

خواص زاوية العدد المركب

$$Arg(z) = \theta$$

$$Arg(\bar{z}) = -\theta$$

$$Arg(z^n) = n\theta$$

$$Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta$$

الجذور من المرتبة n لعدد مركب

ليكن z عدد مركب على الشكل التالي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

إن الجذور من المرتبة n تعطى على الشكل التالي:

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

حيث: $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \underline{n-1}$

انتبه

مثال: أوجد الجذر من الرتبة 2 (الجذر التربيعي) للعدد المركب:

$$z = 4(\cos(90) + i\sin(90))$$

الحل:

$$w_k = \sqrt{4}\left(\cos\frac{90 + 360k}{2} + i\sin\frac{90 + 360k}{2}\right)$$

$$= 2(\cos(45 + 180k) + i\sin(45 + 180k))$$

$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2(\cos 45 + i\sin 45)$, $k = 1 \Rightarrow w_1 = 2(\cos 225 + i\sin 225)$

أي : $w_0 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $w_1 = 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$