التكامل هو من الموضوعات شديدة الأهمية في الرياضيات نظرًا لتطبيقاته العملية المهمة. سنتناول ما يهمنا في التكامل للتحضير لامتحان YÖS.

تمهيد

ليكن f تابعًا معرفًا على المجموعة D. المطلوب إيجاد التابع F انطلاقًا من التابع f بحيث أنّ:

$$F`(x) = f(x)$$

وذلك أيًا كانت x تنتمي إلى D.

نسمي F بالتابع الأصلي للتابع f. أي هو التابع الذي إذا اشتققناه نحصل على التابع f.

كمثال على ذلك، لنفرض أنّه لدينا التابع المعرف وفق ما يلي:

$$f(x) = 2$$

يكون التابع الأصلي F له هو:

$$F(x) = 2x + c$$

حيث c هو عدد حقيقي ثابت. وسبب ذلك هو أنّه إذا اشتققنا F فسنحصل مرّة أخرى على f كما هو واضح.

الشكل العام

ليكن f تابعًا معرفًا على المجموعة D، حسب تعريف التابع الأصلي السابق، نريد إيجاد تابع مثل F بحيث:

$$F`(x) = \frac{d\big(F(x)\big)}{dx} = f(x)$$
$$\Rightarrow d\big(F(x)\big) = f(x)\,dx$$

الشكل الأخير هو تفاضل F(x). التكامل هو الحالة المعاكسة للتفاضل في هذه الحالة. لذلك وبأخذ تكامل الطرفين:

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$$

من الواضح أنّ $\int$ هو رمز التكامل، نسمي F بتكامل f، ونسمي f بالتابع المُكامَل.

خواص التكامل

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad ; k \in R$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

قواعد أساسية في التكامل

1. $\int a\,dx = a\int dx = a \cdot x + C \quad (C \in R)$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (C \in R)$

3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \;,\; (C \in R)$ $\qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C \;,\; (C \in R)$ $\qquad \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \;,\; (C \in R)$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C \;,\; (C \in R)$ $\qquad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C \;,\; (C \in R)$ $\qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int (1+\cot^2 x) dx = -\cot x + c \ , \ (c \in R)$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + c \ , \ (c \in R)$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \ , \ (c \in R)$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \ , \ (c \in R)$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \ , \ (c \in R)$

$$\int g^{`}(x) \ g^{n}(x) \ dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

أمثلة

1

$$\int (12x^2 - 6x)\,dx = \int 12x^2 dx - \int 6x\,dx$$

$$= \frac{12x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + C$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + C$$

2

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x\,dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \int x^{1-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C$$

3

$$\int \left(2^x + x^3\right) dx = \int 2^x\,dx + \int x^3\,dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^4}{4} + C$$

4

$$\int \left(\sin x + \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \int \sin x\,dx + \int \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\cos x + 2\arctan x + C$$

5

$$\int (\tan^2 x + 3)\, dx = \int (\tan^2 x + 1 + 2)\, dx$$

$$= \int (\tan^2 x + 1)\, dx + \int 2\, dx$$

$$= \tan x + 2x + C$$

6

$$\int (\tan^2 x + 3)\, dx = \int (\tan^2 x + 1 + 2)\, dx$$

$$= \int (\tan^2 x + 1)\, dx + \int 2\, dx$$

$$= \tan x + 2x + C$$

تقنية تغيير المتحول في التكامل غير المحدود

من الممكن في بعض الأحيان تغيير المتحول الأساسي في التمرين بهدف جعله أكثر سهولة للحل. هذه التقنية مستخدمة في العديد من الموضوعات، كالنهايات مثلًا، لنأخذ الآن مثال نموذجي يوضّح طريقة الاستخدام.

مثال نموذجي:

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = ?$$

سنحاول معالجة هذا التكامل بشكل مبدئي بإخراج العدد **4** عامل مشترك من المقام، ومن ثم رفع $\frac{3x}{2}$ للقوة **2**:

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \int \frac{dx}{4 \cdot \left(1 + \frac{9}{4}x^2\right)} = \int \frac{dx}{4 \cdot \left(1 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2\right)}$$

نفرض الآن أنّ $u = \frac{3x}{2}$ فيكون $du = \frac{3}{2}\ dx$ وهذا يعطينا: $dx = \frac{2}{3}\ du$

نعوض في التكامل المعطى:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{2}{3}\,\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{12}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{6}arctan(u) + c$$

$$= \frac{1}{6}arctan\left(\frac{3x}{2}\right) + c$$

وهو المطلوب.

تقنية التكامل بالتجزئة

نستخدم هذه الطريقة غالبًا في حال كان لدينا تكامل من أحد الأشكال التالية:

$$\int g(x)cos(x).dx \qquad \int g(x)sin(x).dx$$

$$\int g(x)ln(x).dx \qquad \int g(x)e^x.dx$$

لفهم هذه الطريقة بأسلوب سهل وعملي، لنتناول المثال النموذجي التالي:

مثال نموذجي

أوجد:

$$I = \int x\ sin(x).dx$$

نفرض أنّ:

$$u(x) = x \Rightarrow u^{`}(x) = 1$$
$$v^{`}(x) = sin(x) \Rightarrow v(x) = -cos(x)$$

نستخدم القانون التالي:

$$I = u\,v - \int u^{`}\ v\ dx$$

$$I = -x\cos(x) - \int \left(-\cos(x)\right)dx$$
$$I = -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

<u>مثال نموذجي</u>

أوجد:

$$I = \int \ln(x).dx$$

نفرض أنَ:

$$u(x) = \ln(x) \Rightarrow u`(x) = \frac{1}{x}$$
$$v`(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

نستخدم القانون التالي:

$$I = u\,v - \int u`\,v\,dx$$

$$I = x\ln(x) - \int \left(\frac{1}{x}\;\; x\right)dx$$

$$I = x\ln(x) - x + c$$

<u>تكامل الكسور الجزئية</u>

نصادف في كثير من الأحيان تكاملات، يكون التابع المُكامَل فيها عبارة عن كسر، بسطه كثير حدود، ومقامه كثير حدود. ونميّز هنا حالتين أساسيتين:

<u>الحالة الأولى</u>: درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام

في هذه الحالة نقسّم البسط على المقام فورًا ونتابع عملنا في التكامل.

<u>الحالة الثانية</u>: درجة البسط أصغر تمامًا من درجة المقام

هنا ننظر إلى البسط، فإذا كان هو نفسه مشتق المقام، فالمسألة سهلة، وناتج التكامل هنا لغاريتم كما هو واضح. أمّا إذا لم يكن البسط مشتق المقام فعندها ننظر إلى المقام، فإذا أمكن تحليل المقام إلى جداء عوامل (أقواس) عندها يمكننا كتابة التابع المُكامَل على النحو التالي:

$$\frac{a}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

لتعيين A_1 نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $x - x_1$ ونجعل x تسعى إلى x_1.

لتعيين A_2 نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $x - x_2$ ونجعل x تسعى إلى x_2.

.

.

لتعيين A_n نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $x - x_n$ ونجعل x تسعى إلى x_n.

مثال

أوجد ما يلي:

$$\int \frac{3}{x^2 + x - 6} dx = ?$$

$$\frac{3}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $x + 3$ ونجعل x تسعى إلى -3.

$$\frac{3}{(-3-2)} = A + 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{5}$$

لتعيين B نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $x - 2$ ونجعل x تسعى إلى 2.

$$\frac{3}{(2+3)} = 0 + B \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{(x+3)(x-2)} = \frac{-\frac{3}{5}}{x+3} + \frac{\frac{3}{5}}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{x^2 + x - 6} dx = \int \left(\frac{-\frac{3}{5}}{x+3} + \frac{\frac{3}{5}}{x-2}\right) dx = -\frac{3}{5} ln|x+3| + \frac{3}{5} ln|x-2| + c$$

أمّا إذا كان المقام كثير حدود من المرتبة الثانية لا يمكن تحليله إلى جداء أقواس (مميزه أصغر من الصفر) في هذه الحالة نستخدم الإتمام إلى مربّع كامل بهدف الحصول على شكل مناسب يمكن معه إستخدام تقنية تغيير المتحول بهدف الوصول إلى حساب التكامل المطلوب.

مثال

أوجد ما يلي:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = ?$$

الحل:

سنستخدم الإتمام إلى مربع كامل في المقام لتحويله إلى الشكل $1 + (x+2)^2$:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x+2 &= u \\ dx &= du \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$$

$$= \arctan(x+2) + C$$