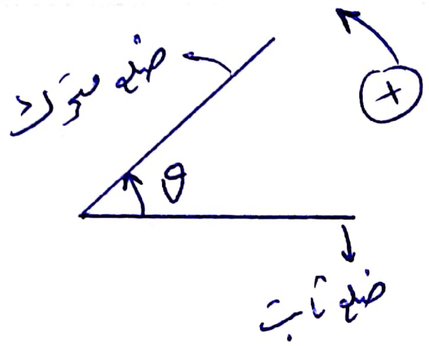
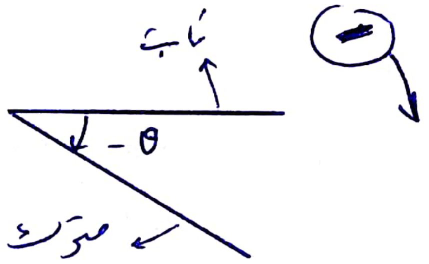
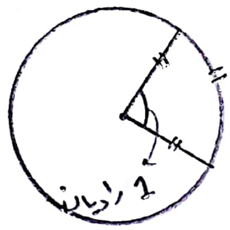



- يوجد لأي زاوية قياسان. موجب إذا دار ضلعها بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة. وسالب إذا دار الضلع مع عقارب الساعة.

- تُقاس الزوايا بعدة قياسات من أشهرها الدرجات والراديان. تُقسم الزاوية الكاملة الدائرية إلى 360 قسم وبالتالي فإن الدرجة الواحدة هي $\frac{1}{360}$ أي أنها جزء من 360 جزء.

- الراديان هو واحدة قياس دائري. ويتم تقديره عندما تحصر الزاوية المركزية في دائرة قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة. عندها نقول أن قياس هذه الزاوية 1 راديان.




- قياس الزاوية الدائرية الكاملة هو $2\pi$ راديان. والعدد $\pi$ هو عدد حقيقي ساوي قيمته تقريباً 3.14.

- للتحويل بين الدرجات والراديان نستخدم التناسب التالي:

القياس بالدرجات ← $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ → القياس بالراديان

القياس المرجعي لزاوية :

- إذا كانت لدينا الزاوية $\theta$ وأضفنا $360^\circ$ لها عندها سنحصل على دورة كاملة ونصل إلى نفس مكان الزاوية $\theta$ القديم. أي لا يتأثر قياس الزاوية عند إضافة $360k$ لها.

- فإذا حصلنا على قياس زاوية ولكن $1000$ درجة عندها يمكننا حذف عدد صحيح من الدورات $360^\circ$ والباقي يمثل قيمة قياس الزاوية الفعلي. أي يمكننا أن نكتب :

$$1000 \equiv x \pmod{360} \Rightarrow x = 1000 - 720 = 280^\circ$$

- كما يمكننا أن نصادف زاوية سالبة مثل : $-1472$

$$-1472 \equiv x \pmod{360} \Rightarrow x = -1472 - (-1800) = 328$$

- كما يمكن أن نرى نمطاً من الأسئلة على الصورة التالية :

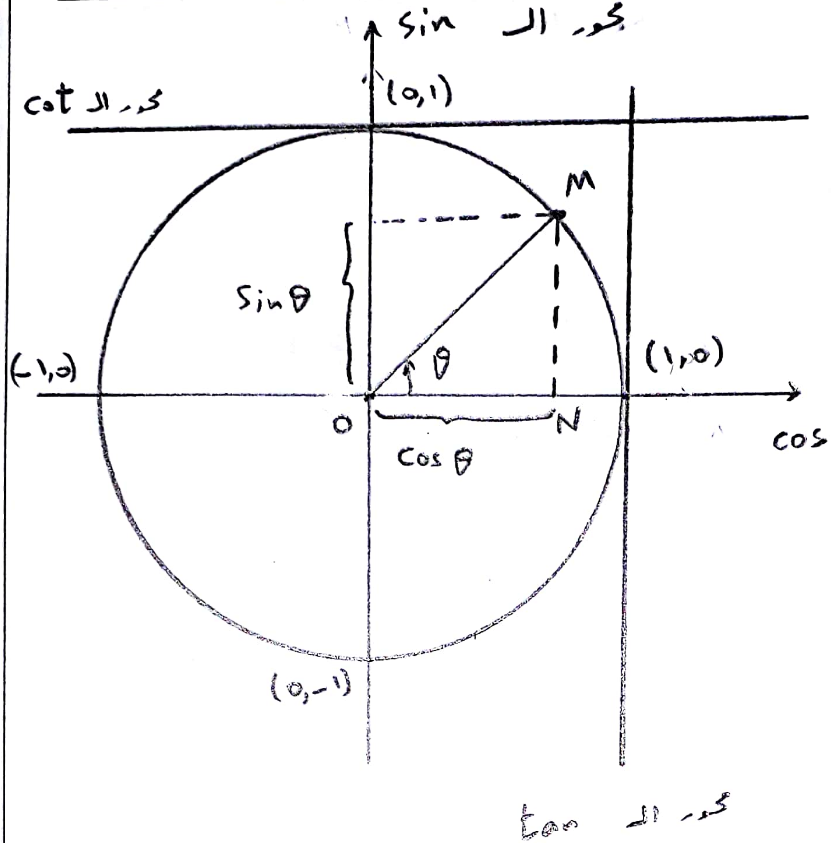
$$780 = x + 360 \cdot k \Rightarrow x = ?$$

بنفس الأسلوب ثم نكتب : $x = 780 - 720 = 60$

- ويمكن أن نستخدم في نفس النمط قياس الزوايا مثل :

$$\frac{27\pi}{5} = x + 2\pi k \Rightarrow \frac{20\pi + 7\pi}{5} = x + 2\pi k$$

$$4\pi + \frac{7\pi}{5} = x + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{7\pi}{5}$$




## الدائرة المثلثية :

هي دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 1 .

استبدلنا تسمية محور ox بمحور الـ cos ومحور oy بمحور الـ sin

كما رسمنا محور مماس للدائرة عند النقطة (1,0) ويوازي محور oy أسميناه محور الـ tan .

وأيضاً رسمنا محور مماس للدائرة عند النقطة (0,1) وهو موازي لمحور ox وأسميناه محور الـ cot .

من المثلث القائم : $\overset{\triangle}{OMN}$ نجد أن :

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

وذلك حسب فيثاغورث ، وهي العلاقة الأساسية في علم المثلثات .

- من الواضح بالنظر إلى الدائرة المثلثية أن كل من الـ sin و الـ cos تتحول قيمتاهما بين -1 و 1 .

## تابع الـ Cosine

هو تابع منطلقه $\mathbb{R}$ ومستقره $[-1,1]$ ؛

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$

## تابع الـ sine :

هو تابع منطلقه $\mathbb{R}$ ومستقره $[-1,1]$ : $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

## تابع الـ tangent :

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,,\, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

لاحظ منطلق هذا التابع أنه يستثني القيم التي لا يكون عندها الـ tan معرفاً وهي الزاوية $\frac{\pi}{2}$ زائد عدد صحيح من الدورات.

والزاوية $\frac{3\pi}{2}$ " " " " " " .

"انظر الدائرة المثلثية لتعرف السبب."

كما أن مستقره $\mathbb{R}$.

## تابع الـ Cotangent

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + 2\pi k \,,\, 2\pi + 2\pi k \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

وبنفس الأسلوب تم استثناء الزاوية : $\pi$ زائد عدد صحيح من الدورات.

" : $2\pi$ " " " " " .

من منطلق التابع. كما أن المستقر هو $\mathbb{R}$.

## بعض العلاقات المهمة :

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
3. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
4. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
5. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$
6. $\tan x \cdot \cot x = 1$
7. $x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \sin x = \cos y \\ \tan x = \cot y \end{array}}$

مثال: $\tan x = ? \Leftarrow \dfrac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 5\cos x} = \dfrac{2}{3}$

الحل:

$$\frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 5\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}\left[3\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right]}{\cancel{\cos x}\left[2\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + 5\right]} = \frac{3\tan x - 1}{2\tan x + 5} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{13}{5}$$

مثال: نفرض أن: $\min(A) = ? \Leftarrow A = 7\sin x - 6\cos y$

الحل:

كي نحصل على أصغر قيمة لـ A فإنه يجب أن يكون $-6\cos y$ أكبر ما يمكن

$7\sin x$ أصغر ...

$\sin x = -1 \;،\; \cos y = +1 \Leftarrow$

$$\Rightarrow \min(A) = -7 - 6 = -13$$

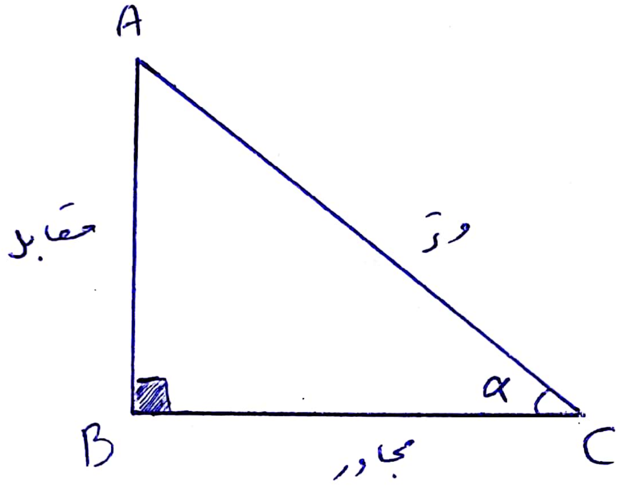
مثال: $\sin x\cos x = ? \Leftarrow \sin x + \cos x = \dfrac{3}{4}$

الحل: نربع الطرفين:

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \dfrac{9}{16} \Leftarrow (\sin x + \cos x)^2 = \dfrac{9}{16}$

$1 + 2\sin x\cos x = \dfrac{9}{16} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{-7}{32}$

## النسب المثلثية في المثلث القائم:




$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

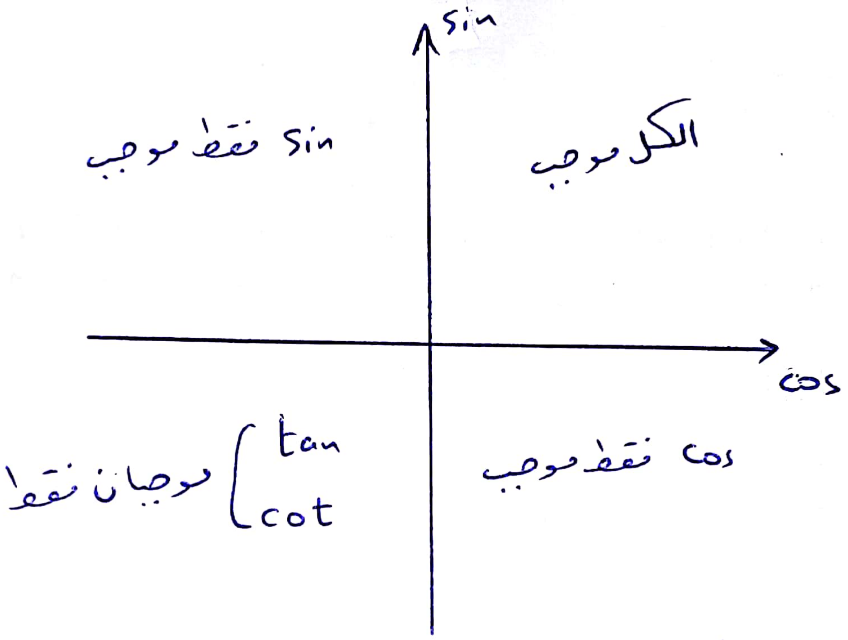
$$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$$

## النسب المثلثية لبعض الزوايا الشهيرة

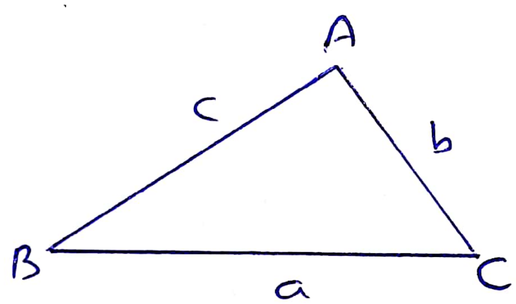
| | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |
| tan | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | N/A | 0 |
| cot | N/A | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | N/A |

## خواص مهمة

* اذا كان $x+y=90$ ⇐ $x$ و $y$ متتامتان ⇐ $\cos x=\sin y$ و $\sin x=\cos y$
* " " $x+y=180$ ⇐ $x$ و $y$ متكاملتان ⇐ $\sin x=\sin y$ و $\cos x=-\cos y$
* " " $x+y=0$ ⇐ $x$ و $y$ متعاكستان ⇐ $\sin x=-\sin y$ و $\cos x=\cos y$
* $-\sin(x)=\sin(-x)$ * $\tan(-x)=-\tan(x)$
* $\cos(x)=\cos(-x)$ * $\cot(-x)=-\cot(x)$




نظرية ال sin :




$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$R$: نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث

نظرية ال cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$a \to b \to c \to a$

نظرية ال tan :

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{\tan\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}$$



المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

## الإرجاع إلى الربع الأول :

النسبة المثلثية لا تتغير بوجود مضاعفات $\pi$ ؛

$$\sin(\underbrace{\pi k \mp \theta}) = \mp \sin(\theta)$$

تتحدد بحسب مكان الزاوية في أي ربع

$$\tan(\pi k \mp \theta) = \mp \tan\theta$$

$$\cos(\underbrace{\pi k \mp \theta}) = \mp \cos\theta$$

$$\cot(\underbrace{\pi k \mp \theta}) = \mp \cot\theta$$

---

تنقلب النسبة المثلثية

$$\sin(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} k \mp \theta}) = \mp \cos(\theta) \;;\; \boxed{k \text{ فردي}}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} k \mp \theta) = \mp \sin(\theta) \;;\; \boxed{k \text{ فردي}}$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} k \mp \theta) = \mp \cot\theta \;;\; \boxed{k \text{ فردي}}$$

$$\cot(\tfrac{\pi}{2} k \mp \theta) = \mp \cot\theta \;;\; \boxed{k \text{ فردي}}$$

### أمثلة :

* $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
* $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha$
* $\cos(120) = \cos(90+30) = -\sin(30) = -\frac{1}{2}$
* $\sin(210) = \sin(180+30) = -\sin(30) = \frac{-1}{2}$



المدرس حسام برهان – 0531 826 9389