الاحتمالات

الاحتمالات من العلوم الحديثة نسبيا. تستند الاحتمالات بشكل أساسي على طرائق العد، وعلى علم المجموعات. عملنا على تغطية طرائق العد في الفصل الماضي، وسنعمل على تغطية المجموعات بشكل مفصّل في الفصل القادم.

ولكن سنعمل الآن على إعطاء مقدمة بسيطة عن المجموعات تفيدنا في الاحتمالات.

ماهي المجموعة؟

هي تجميع لعناصر من نفس الطبيعة، كمجموعة المدن في تركيا، أو مجموعة الألوان في قوس قزح. أو مجموعة الأعداد الأولية الموجودة من 1 حتى 100، وغيرها الكثير.

وقد تكون المجموعة قابلة للعد مثل مجموعة الأعداد الطبيعية N أو غير قابلة للعد مثل R. وقد يكون عدد عناصرها منتهيًا مثل {1, 2, 3} وقد يكون غير منتهيًا مثل {1, 2, 3, ...}.

المجموعة الجزئية

نقول عن المجموعة A أنّها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر من A موجود في B. ونقول A محتوى في B ونكتب:

$$A \subset B$$

مثال:

$$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A = \{1,4,5\}, C = \{1,2,6,9\}$$

المجموعة A محتوى في B ولكن المجموعة C ليست محتواة في B (العدد 9 موجود في C وغير موجود في B).

العمليات على المجموعات

1- <u>التقاطع رمزه ∩</u>

تقاطع مجموعتين هو مجموعة تحتوي على العناصر المشتركة فقط بين المجموعتين.

مثال: أوجد التقاطع بين المجموعتين A = {2, 5, 8, 9} و B = {2, 6, 8, 10}

الحل: $A \cap B = \{2,8\}$

2- <u>الاجتماع رمزه ∪</u>

إجتماع مجموعتين هو مجموعة تحتوي على العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين.

مثال: أوجد الاجتماع بين المجموعتين A = {2, 5, 8, 9} و B = {2, 6, 8, 10}

الحل: $A \cup B = \{2,6,8,10,5,9\}$

3- الفرق رمزه \

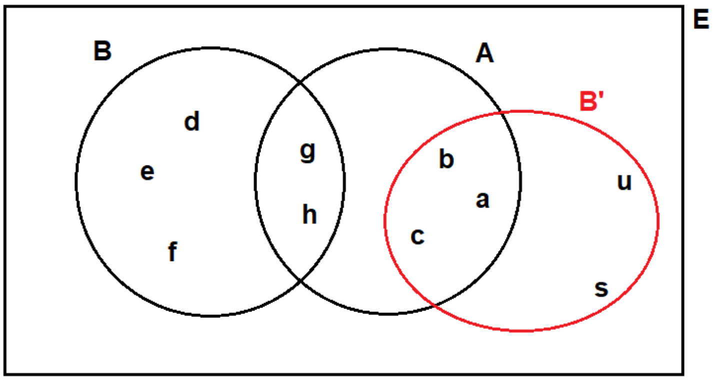
المجموعة A فرق B هي مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة A ولا تنتمي للمجموعة B.

مثال: ليكن {A = {2, 5, 8, 9 و {B = {2, 6, 8, 10 أوجد A\B

الحل: $A \setminus B = \{5,9\}$

المجموعة الشاملة

تأمّل الشكل التالي



نسمي المجموعة E التي تضم باقي المجموعات A و B و `B بالمجموعة الشاملة. من الواضح أنّ:

$$A \cap B = \{g, h\}$$

$$A \cup B = \{d, e, f, g, h, b, c, a\}$$

$$B \setminus A = \{d, e, f\}$$

المجموعة الجديدة هنا هي `B. لاحظ أنّ `B هي متمّم المجموعة B في E (بعبارة أخرى هي ما تحتاجه المجموعة B لكي تصبح E).

من الواضح أيضًا أنّ:

$$B' \cap B = \emptyset$$

$$B' \cup B = E$$

نسمي `B متمّم B في E، كما يمكن أن ندعو B و `B بمجموعتين متضادتين.

ملاحظة

في الاحتمالات نستبدل التقاطع بالحرف "و" والاجتماع بـ "أو"، وكما نعلم يمكن التعبير عن "و" بالضرب، والتعبير عن "أو" بالجمع.

الاحتمالات

تمهيد: في تجربة رمي حجر نرد (زهر) مرة واحدة تكون جميع النتائج الممكنة للتجربة هي:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لنأخذ مجموعة جزئية من E ولتكن مجموعة الأعداد الزوجية ولنسمّها C:

$$E = \{2,4,6\}$$

الآن إذا أردنا حساب احتمال أن يظهر عدد زوجي عند رمي الزهر، نعمل على حساب عدد الحالات المناسبة لوقوع هذا الحدث وهي في مثالنا هذا هي 3 (عدد عناصر C)، ونحسب عدد الحالات الممكنة لوقوع هذا الحدث وهي في مثالنا 6 حالات (عدد النتائج الممكنة للتجربة). ونطبّق القانون التالي:

$$P(C) = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

من الواضح أنّ الاحتمال يجب أن لا يكون أكبر من الواحد وليس أصغر من الصفر. أي أنّه يجب أن يكون محصور بين الصفر والواحد ضمنًا. نسمي المجموعة E بالمجموعة الشاملة أو فضاء العينة. ونسمي المجموعة C حدث من فضاء العينة.

مجموعة أحداث التجربة

أي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة (فضاء العينة) نسميها بالحدث. يقع الحدث عند ظهور أحد عناصره عند إجراء التجربة.

الأحداث المتنافية

تشترك الأحداث في بعض الأحيان، ببعض العناصر معًا. ففي تجربة رمي حجر نرد (زهر) مرّة واحدة يشترك الحدث المعبر عن ظهور عدد زوجي مع الحدث المعبر عن ظهور رقم أكبر من 3، بعنصرين هما {4, 6}.

في أحيان أخرى لا تشترك الاحداث بأي عناصر مع بعضها. نسمي مثل هذه الأحداث بالأحداث المتنافية. ففي تجربة رمي حجر نرد لمرة واحدة، يكون الحدث المعبر عن ظهور عدد زوجي والحدث المعبر عن ظهور عدد فردي متنافيان.

بصورة عامة إذا كان لدينا مجموعة شاملة E تحتوي على 3 أحداث فقط، وهي متنافية فيما بينها، فإنّ مجموع احتمالات وقوعها هو الواحد ويمكن التعميم بالطبع على أكثر من 3 أحداث.

A و B و C أحدث متنافية:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

الحدث الابتدائي

هو حدث مكوّن من عنصر واحد فقط.

ملاحظة

في حال كان فضاء العينة مكوّن من أحداث ابتدائية بحيث لكل منها نفس الاحتمال، عندها نسمي فضاء العينة بفضاء متساوي الاحتمال.

الحدث الأكيد: هو الحدث E (لأنّ أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها)، واحتمال وقوعه 1.

الحدث المستحيل: هو الحدث Ø واحتمال وقوعه 0.

الحدثان المتتامان (المتضادان)

إذا كان A حدث من فضاء العينة E فإنّ `A هو الحدث المتمم له ويكون:

$$P(A`) + P(A) = 1$$

الاستقلال الاحتمالي

إذا كان لدينا حدثين A و B وكان وقوع أحدهما لا يؤثّر على وقوع الآخر، عندها نقول أنّ الحدثين مستقلين احتماليًا.

وفي هذه الحالة نحصل على علاقة مهمة وهي:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

وهي شرط الاستقلا الاحتمالي.

الاحتمال الشرطي

وهو عكس الاستقلال الاحتمالي، وفيه تكون الأحداث معتمدة على بعضها في الوقوع. أي يتغيّر احتمال وقوع حدث ما، بوقوع حدث آخر قبله.

فمثلًا في تجربة رمي حجر نرد. ليكن A هو حدث ظهور عدد زوجي، والحدث B هو حدث ظهور عدد أكبر من 3.

رأينا أنّ احتمال وقوع A هو $\frac{1}{2}$، ومن السهل حساب وقوع الحدث B وهو $\frac{1}{2}$ أيضًا. ولكن إذا فرضنا أنّ الحدث A قد وقع (أي ظهر عدد زوجي) فما هو احتمال وقوع B علمًا (بشرط) أنّ A قد وقع؟

عندما يقع الحدث A يصبح فضاء العينة مقتصرًا على A فقط. عندها يكون احتمال B علمًا أن A قد وقع هو $\frac{2}{3}$ أي أنّ احتمال B قد تغيّر عندما وقع الحدث A. نرمز لهذا الاحتمال الشرطي بالشكل $P(B|A)$ وتُقرأ احتمال B علما أن A قد وقع.

يمكن بالطبع استخدام قانون جاهز:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

عدد عناصر التقاطع: $n(A \cap B)$

عدد عناصر A: $n(A)$

بعض القوانين المهمة في الاحتمال

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$