حساب المثلثات 2

نتابع في هذا الفصل العمل مع حساب المثلثات من خلال علاقات وموضوعات جديدة ومهمة.

أولاً- دساتير النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

$$\cot(a+b)=\frac{\cot(a)\cot(b)-1}{\cot(a)+\cot(b)}$$
$$\cot(a-b)=\frac{\cot(a)\cot(b)+1}{\cot(a)-\cot(b)}$$

مثال:

$$\cos(105)=\cos(60+45)=\cos(60)\cos(45)-\sin(60)\sin(45)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

ثانيا- دساتير النسب المثلثية لضعف زاوية

كحالة خاصّة من القسم الأول. وبفرض أن a = b عندها يمكن الحصول على الدساتير المهمة التالية:

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2 a}$$
$$\cot(2a)=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot(a)}$$

مثال:

$$\cos(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(2x) = ?$$

الحل:

$$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{16} - 1$$
$$= \frac{2}{16} - 1$$
$$= \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

مثال:

$$\sin(x) - \cos(x) = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin(2x) = ?$$

الحل:

$$\sin x - \cos x = \frac{5}{13}$$
$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$
$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{25}{169}$$
$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\sin x \cdot \cos x = \frac{25}{169}$$
$$1 - \sin 2x = \frac{25}{169}$$
$$1 - \frac{25}{169} = \sin 2x$$
$$\frac{144}{169} = \sin 2x$$

مثال:

$$\sin(10) = m \Rightarrow \sin(70) = ?$$

الحل:

$$\begin{aligned} \sin 10° = m \quad \Rightarrow \quad \sin 70° &= \cos 20 \\ &= \cos(2 \cdot 10°) \\ &= 1 - 2 \cdot \sin^2 10° \\ &= 1 - 2m^2 \end{aligned}$$

مثال:

$$\cos(20)\cos(40)\cos(80) = ?$$

الحل:

$$\cos(20)\cos(40)\cos(80) =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{2 \cdot 2 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{\sin 80° \cdot \cos 80°}{4 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{2 \sin 80° \cdot \cos 80°}{2 \cdot 4 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{\sin 160°}{8 \cdot \sin 20°}$$

$$= \frac{1}{8}$$

ثالثًا: دساتير التحويل من مجموع إلى جداء

نستخدم هذه الدساتير في حال كان لدينا مجموع أو فرق نسب مثلثية، وأردنا الحصول على جداء نسب مثلثية.

$$\sin(a)+\sin(b)=2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a)-\sin(b)=2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

من الواضح أنّ a + b تمثل الزاوية الكبيرة. و a − b تمثل الزاوية الصغيرة

$$cos(a)+cos(b)=2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$cos(a)-cos(b)=-2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$
$$\tan(a)-\tan(b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

$$\cot(a)+\cot(b)=\frac{\sin(a+b)}{\sin(a)\sin(b)}$$
$$\cot(a)-\cot(b)=\frac{-\sin(a-b)}{\sin(a)\sin(b)}$$

مثال:

$$\frac{\cos(75)+\cos(15)}{\sin(75)-\sin(15)}=?$$

الحل:

$$=\frac{2\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}}{2\cdot\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}}=\frac{2\cdot\cos45^\circ\cdot\cos30^\circ}{2\cdot\sin30^\circ\cdot\cos45^\circ}=\cot30^\circ=\sqrt{3}$$

رابعًا: دساتير التحويل من جداء إلى مجموع

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$
$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$
$$\cos(x)\cdot\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

لاحظ من الدستورين الأخيرين أنّه يمكن التمييز بينهما بحسب قيمتي x و y. فإذا كانت x أكبر من y عندها نستخدم الدستور رقم 3. أمّا لو كان x أصغر من y فإنّنا نستخدم الدستور رقم 4.

مثال:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$$

الحل:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

خامسًا: التوابع المثلثيّة العكسيّة

سنتعامل مع أربعة توابع عكسية أساسيّة وهي arcsin و arccos و arctan و arccot.

1 - تابع الـ sin العكسي رمزه: arcsin أو $\sin^{-1}$:

المنطلق: [1 ,1-] والمستقر: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

2- تابع الـ cos العكسي رمزه: arccos أو $\cos^{-1}$:

المنطلق: [1 ,1-] والمستقر: $[0,\pi]$.

3 - تابع الـ tan العكسي رمزه arctan أو $\tan^{-1}$:

المنطلق: R والمستقر: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

4 - تابع الـ cot العكسي رمزه arccot أو $\cot^{-1}$:

المنطلق: R والمستقر: $[0,\pi]$.

عندما نستخدم تابع الـ sin العكسي مثل: $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ فإنّنا نبحث عن الزاوية θ التي يكون جيبها (sin) يساوي $\frac{1}{2}$. وبنفس الطريقة نستخدم باقي التوابع المثلثية العكسية.

مثال:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

الحل:

بفرض:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = x$$

نأخذ cos الطرفين:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \cos(x)$$

هذا يعني أنّ الزاوية x هي $\frac{\pi}{3}$. ولا داعي لمناقشة حلول أخرى، لأنّ المستقر يجب أن يكون $[0,\pi]$

مثال:

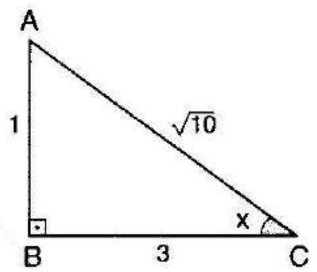
$$\sin(\ \arctan\frac{1}{3}\ ) = ?$$

الحل:

$$\arctan\frac{1}{3} = x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{3}\right) = \sin x$$

$$\tan x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



سادسًا: حل المعادلات المثلثيّة

1- حل المعادلة sin(x) = sin(a):

$$\sin(x) = \sin(a) \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2\pi k \\ x = \pi - a + 2\pi k \end{cases}$$

أي أنّه إما أن تكون الزاويتان a و x متساويتان أو متكاملتان. علمًا أنّ k هو عدد صحيح.

مثال:

حل المعادلة $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} &= \sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ÇK(SS)} = \left\{ x : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

2- حل المعادلة cos(x) = cos(a):

$$\cos(x) = \cos(a) \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2\pi k \\ x = -a + 2\pi k \end{cases}$$

أي أنّه إما أن تكون الزاويتان a و x متساويتان أو متعاكستان. علمًا أنّ k هو عدد صحيح.

حل المعادلة $\cos(x) = \frac{1}{2}$

الحل:

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

3- حل المعادلة tan(x) = tan(a):

$$\tan(x) = \tan(a) \Rightarrow x = a + \pi k$$

أي تكون الزاويتان a و x متساويتان. علمًا أنّ k هو عدد صحيح.

مثال:

حل المعادلة: $\tan(2x - 60) = 1$

الحل:

$$\tan(2x - 60^\circ) = 1$$

$$\tan(2x - 60^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$2x - 60^\circ = 45^\circ + k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$2x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$$

مثال:

4- حل المعادلة cot(x) = cot(a):

$$\cot(x) = \cot(a) \Rightarrow x = a + \pi k$$

أي تكون الزاويتان a و x متساويتان. علمًا أنّ k هو عدد صحيح.

أنماط أخرى تأتي في امتحانات YÖS

1 - إذا كان $\tan(x+45)=2$ أوجد $\sin(x)$.

الحل:

$$\tan(x+45^\circ)=\frac{\tan x+\tan 45^\circ}{1-\tan x\cdot\tan 45^\circ}$$

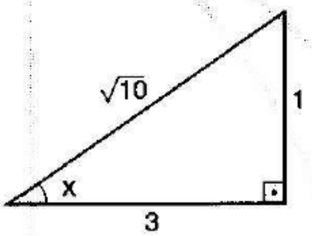
$\tan x = t \Rightarrow$

$t+1=2-2t$

$3t=1$

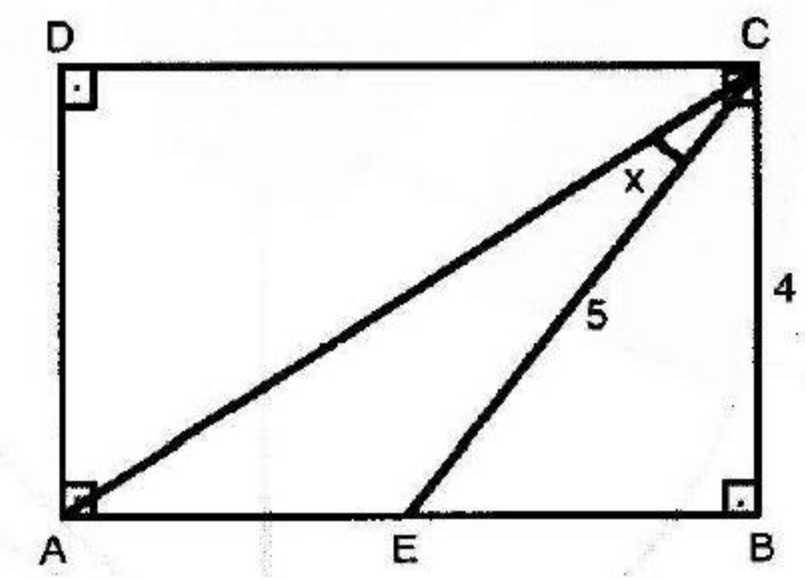
$t=\frac{1}{3}$

$\tan x=\frac{1}{3}$



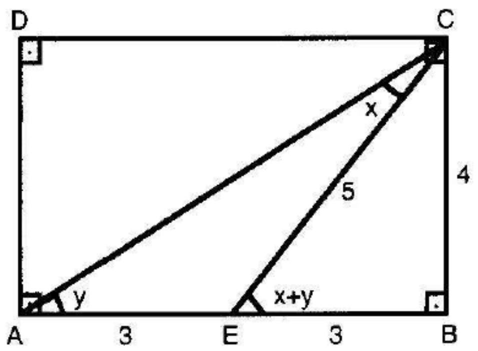
$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{10}}$

2 - ليكن لدينا الشكل التالي:



حيث ABCD مستطيل و AE = EB أوجد tan(x).

الحل:



$$|EB|^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow |EB| = 3$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{\tan x + \frac{4}{6}}{1 - \tan x \cdot \frac{4}{6}} \Rightarrow \tan x = \frac{6}{17}$$

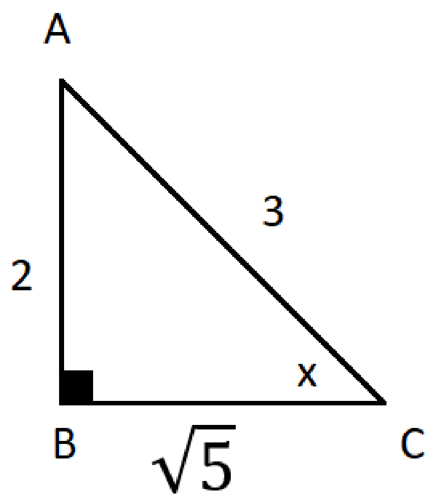
3 - احسب قيمة ($\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

الحل:

هنا نبدأ بفرض أنّ $x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ فيكون المطلوب حساب cos(x).

بما أنّ $x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ هذا يعني أنّ $\sin(x) = \frac{2}{3}$

لنرسم المثلث ABC ولنعيّن عليه نسبة الـ sin:



نجد بسهولة أنّ $BC = \sqrt{5}$ وذلك حسب فيثاغورث.

هذا يعني أنّ $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

4 - ليكن لدينا ما يلي:

$$0 < x < 90°$$

$$\sin(2x + 20°) = \cos 10° \Rightarrow \sum x = ?$$

الحل:

$$\sin(2x + 20°) = \cos 10°$$

$$\sin(2x + 20°) = \sin 80°$$

I. $2x + 20° = k \cdot 360° + 80, \quad (0 < x < 90°)$

$k = 0 \Rightarrow 2x + 20° = 80°$

$2x = 60° \Rightarrow x = 30°$

II. $2x + 20° = (180° - 80°) + k \cdot 360°$

$k = 0 \Rightarrow 2x + 20° = 100°$

$2x = 80° \Rightarrow x = 40°$

$$\sum x = 70°$$