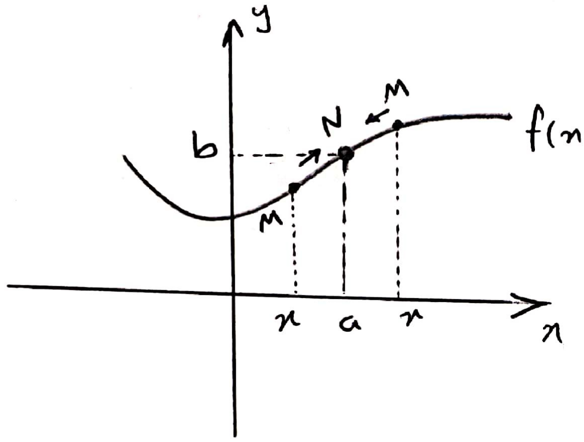
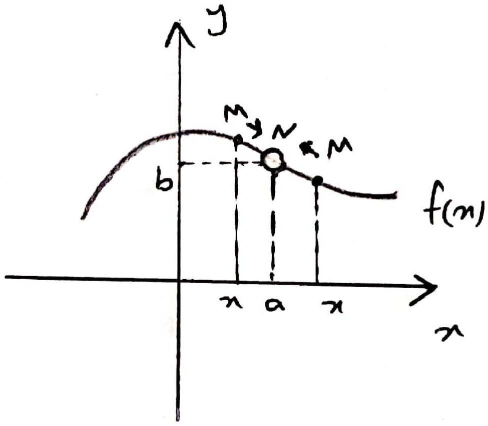
النهايات

تمهيد : عند دراسة نهاية تابع ما f عند نقطة $x=a$، فإننا نهتم بدراسة سلوك هذا التابع بجوار هذه النقطة. بمعنى آخر فإن المسألة المطروحة هي إيجاد أو البحث عن تراتيب y نقاط التابع عندما تسعى فواصلها إلى جوار القيمة $x=a$. من الواضح أن ذلك يكون على يمين أو يسار النقطة $x=a$



شكل (A)



شكل (B)

انظر الشكل A ، لاحظ أن النقطة M من الممكن أن تقترب من النقطة N من اليمين أو من اليسار ، و يحدث ذلك بالطبع عندما تسعى x إلى a بقيم أكبر (من اليمين) وعندما تسعى x إلى a بقيم أصغر (من اليسار) . في كلتا الحالتين سيكون تراتيب y النقطة M يسعى إلى b .

بنفس المفهوم تماماً نلاحظ من شكل B أن تراتيب y النقطة M سيسعى إلى b . مع الانتباه إلى أنه ليس من الضروري أن تكون النقطة $N(a,b)$ واقعة على الخط البياني للتابع $f(x)$ أصلاً. لأننا نتحرك بجوارها.

يمكننا أن نكتب ، عندما x تسعى إلى a فإن $f(x)$ تسعى إلى b

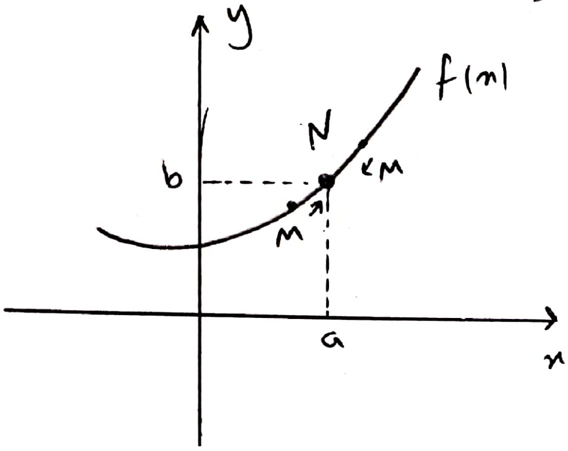
أو بشكل أفضل :

$$\lim_{x \to a} f(x) \underset{\text{تسعى}}{=} b$$

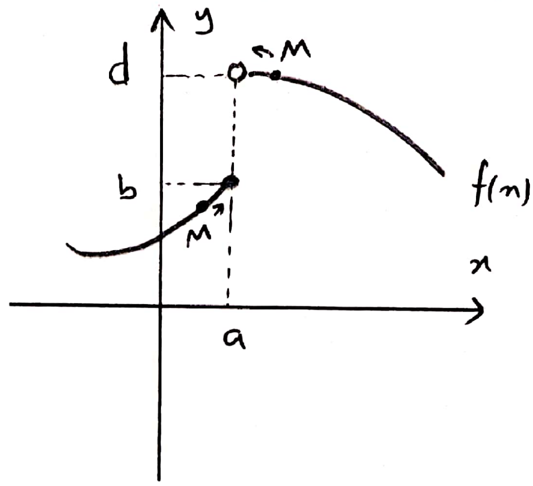
المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار :

من الواضح أنه عندما تقترب النقطة N من النقطة M فإن ذلك يكون من اليمين أو من اليسار. من المهم معرفة أن النهاية تكون موجودة فقط عندما تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار.



الشكل (C)



الشكل (D)

من الشكل (C) نلاحظ أن النهاية عندما تقترب M من اليمين هي نفسها عندما تقترب M من اليسار وتساوي b كما هو واضح.

أما في الشكل (D) فإن النهاية عندما تقترب M من اليمين تساوي d أما عندما تقترب M من اليسار فإنها تساوي b. من الواضح أنه لا توجد نهاية في الشكل (D).

$\boxed{\text{الشكل (C)}}$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

a^+: بقيم أكبر أي من اليمين

a^-: بقيم أصغر أي من اليسار

$\boxed{\text{الشكل (D)}}$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

النهاية غير موجودة

قواعد أساسية في النهايات

لتكن f , g تابعين معرفين على D .

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\mp g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\mp\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}k=k\ ;\ k\ \text{ثابت}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\ ;\ g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a}f(x)|$$

$$\lim_{x\to a}\left(k\cdot f(x)\right)=k\lim_{x\to a}f(x)\ ;\ k\ \text{ثابت}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$
; يجب أن يكون ما تحت الجذر موجب إذا كانت n زوجية

$$\lim_{x\to a}\log(f(x))=\log(\lim_{x\to a}f(x))$$
; ما بعد اللوغاريتم يجب أن يكون موجب تماماً.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n\ ,\ \lim_{x\to a}k^{f(x)}=k^{\lim_{x\to a}f(x)}$$

المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

ملاحظة مهمة ومفيدة في حل التمارين

عند إيجاد نهاية تابع ما عند نقطة معينة مثل $x = a$. فإننا نحاول تعويض $x = a$ مكان كل x في علاقة التابع، فإذا لم يؤدِّ هذا التعويض إلى أي مشكلة فإنَّ نهاية التابع هي نفسها قيمته بعد التعويض.

أما إذا سبب ذلك التعويض مشكلةً ما، فإنه ينبغي علينا دراسة النهاية من اليمين ومن اليسار.

مثال:

① $$\lim_{x \to 1} (2x^2 + 3x - 1) = 2(1)^2 + 3(1) - 1 = 4$$

هنا التعويض لم يسبب مشكلة

② $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$$

هنا لا يمكن التعويض مباشرة لأننا سنحصل على مقام معدوم من الضروري هنا أخذ النهاية من اليمين واليسار. سنتناول طريقة معالجة هذا النوع من النهايات لاحقاً.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 3 \\ x - 1 & ; x < 3 \end{cases}$$

أوجد $\lim_{x \to 3} f(x)$.

هنا يجب أخذ النهاية من اليمين ومن اليسار:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 7$$

من الواضح أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار عند الـ 3. فالنهاية عند الـ 3 عموماً غير موجودة.

النهاية عند اللانهاية

من الممكن إيجاد النهايات في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ مع ملاحظة أنها ليسا مقدارين عددين، إنما يمكن معاملة المقادير العددية لسهولة العمل.

① $a>0 \Rightarrow a(+\infty)=+\infty \;,\; a(-\infty)=-\infty$

$$\frac{+\infty}{a}=+\infty \;,\; \frac{-\infty}{a}=-\infty$$

② $a\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{a}{\mp\infty}=0 \;;\; a\neq 0$

③ $a>0 \Rightarrow \dfrac{a}{0^+}=+\infty \;,\; \dfrac{a}{0^-}=-\infty$

0^+: مقدار صغير جداً لكنه موجب.

0^-: مقدار صغير جداً لكنه سالب

④ $\sqrt[2n]{+\infty}=+\infty \;,\; \sqrt[2n-1]{\mp\infty}=\mp\infty$

$2n$: زوجي، $2n-1$: فردي

⑤ $(\mp\infty)^{2n}=+\infty \;,\; (\mp\infty)^{2n-1}=\mp\infty$

⑥ $a>1 \Rightarrow a^{+\infty}=+\infty$

$a^{-\infty}=0$

$0<a<1 \Rightarrow a^{+\infty}=0$

$a^{-\infty}=+\infty$

أمثلة :

ⓐ $\lim_{x \to +\infty} 4^x = +\infty$　　ⓑ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

ⓒ $\lim_{x \to -\infty} 4^x = 0$　　ⓓ $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$

ⓔ $\lim_{x \to 2} \frac{4x+3}{2x-4}$

في هذا المثال لن نعوض بالعدد 2 مباشرة لأنه سيؤدي إلى مقام معدوم. لذلك يتوجب دراسة النهاية من اليمين ومن اليسار عند العدد 2 .

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4x+3}{2x-4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4x+3}{2x-4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

النهايتان من اليمين ومن اليسار غير متساويتان فالنهاية عند الـ 2 غير موجودة .

ملاحظة ① : اذا كان لدينا كثير حدود $P(x)$ وأردنا حساب النهاية عندما $x \to \mp\infty$ عندما نعوض في الحد الأعلى قوة فقط .

مثال:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

ملاحظة ②: في حال كان لدينا كسر بسطه كثير حدود ومقامه كثير حدود وأردنا إيجاد النهاية عندما $x \to \mp\infty$. فعندها نأخذ نهاية أعلى قوة في البسط على أعلى قوة في المقام ،

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4+5x-1}{x^2+x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$$

وبصورة عامة يمكن اعتماد مايلي:

اذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فالجواب هو $\mp\infty$.

" " " أصغر " " " " " 0 .

" " " تساوي " " " " " أمثال أكبر قوة على أمثال أكبر قوة.

حالات عدم التعيين

يوجد لدينا 7 حالات عدم تعيين وهي: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \cdot \infty$

1^{∞} ، 0^{0} ، ∞^{0}

يمكن إزالة كل منها كما سنرى لاحقاً.

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

في هذه الحالة يجب أن يحدث اختصار بين البسط والمقام لإزالة هذه الحالة.

مثال:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-15} = \frac{0}{0}$$

تحليل البسط والمقام:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x-5)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-5} = \frac{1}{-2}$$

مثال:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

بعض القواعد المهمة المتعلقة بحالة $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \frac{(x+2)\sin(x^2-4)}{(x^2-4)}$$

عندما $x \to 2 \Leftarrow x^2-4 \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\sin(x^2-4)}{x^2-4} = (2+2)\cdot 1 = 4$$

إزالة حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

بنفس الأسلوب نحاول إجراء اختصار بين البسط والمقام بحيث يتم اختصار المتسبب في هذه الحالة، أو أن نتبع خاصة معينة تنهي حالة عدم التعيين.

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x^3+2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

كما نعلم من قاعدة سابقة:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x^3+2x+1} = 0$$ (درجة البسط أصغر من درجة المقام)

المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4^{x+1} + 3^{x} + 2^{x}}{4^{x-1} + 3^{x} + 2} = ?$$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4^{x}}\left(4 + \left(\frac{3}{4}\right)^{x} + \left(\frac{2}{4}\right)^{x}\right)}{\cancel{4^{x}}\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^{x} + \left(\frac{2}{4^{x}}\right)\right)} = \frac{4+0+0}{\frac{1}{4}+0+0} = 16$$

إزالة حالة عدم التعيين $\infty - \infty$

نحاول رد هذه الحالة إلى أحد الشكلين: $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ويمكن استخدام القانون التالي لجعل الأمر أكثر سهولة!

$$\lim_{x \to \mp\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \lim_{x \to \mp\infty} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$\boxed{\text{حيث } a>0}$

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+3x+1} \right) = \infty - \infty$$ عدم تعيين

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x+1} = \sqrt{1} \lim_{x \to +\infty} |x+0| - \sqrt{1} \lim_{x \to +\infty} \left|x + \frac{3}{2}\right|$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x - \left(x + \frac{3}{2}\right) \right) = \frac{-3}{2}$$

إزالة حالة عدم التعيين $0 \cdot \infty$

نحاول رد هذه الحالة إلى الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ ومن ثم نتابع.

مثال:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \cot(2x) = 0 \cdot \infty$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \cot(2x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{\cot(2x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan(2x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{2 \cdot \tan(2x)} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

إزالة حالة عدم التعيين 1^{∞}

لتكن لدينا النهاية التالية:

$$\lim_{x \to +\infty} [1 + f(x)]^{g(x)}$$

من الواضح أنه عندما $f(x) \to 0$ و $g(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

فإننا نحصل على حالة عدم التعيين 1^{∞}.

في هذه الحالة نحسب هذه النهاية:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = k$$

فيكون جواب النهاية الأساسية المعطاة هو e^{k} (e العدد النيبري)

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+3}\right)^{x} = 1^{\infty}$$

عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{4}{x+3}\right)^{x} = \lim\left(1+\underbrace{\left(\frac{4}{x+3}\right)}_{f(x)}\right)^{\overbrace{x}^{g(x)}}$$

واضح أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

نوجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+3}\cdot x\right)$$

فنحصل $k = 4$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+3}\right)^{x} = \boxed{e^{4}}$$

إزالة حالة عدم التعيين 0^0 و ∞^0 :

في هذه الحالة سنلجأ إلى أخذ لغاريتم الطرفين قبل أخذ النهاية لكي نزيل حالة عدم التعيين هذه.

مثال: أوجد:

$$\lim_{x\to 0}\sin x^{\sin x}$$

واضح أننا سنحصل على الحالة 0^0.

لإزالة حالة عدم التعيين السابقة نفرض : $y = \sin x^{\sin x}$

$$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln \sin x$$

$$\ln y = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\sin x}}$$

نفرض أن $t = \frac{1}{\sin x} \Leftarrow$ $\sin x = \frac{1}{t}$ نفرض :

$$\ln y = \frac{\ln \frac{1}{t}}{t} = \frac{-\ln t}{t}$$

نهاية مهمة $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

عندما $x \to 0 \Leftarrow t \to +\infty$ إذا أصبحت النهاية المطلوبة على النحو التالي :

$$\lim_{t \to +\infty} (\ln y) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0$$

بما أن $\ln y \to 0 \Leftarrow y \to 1 \Leftarrow$

$$\lim_{x \to 0} \sin x^{\sin x} = 1$$

ملاحظة : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$

المدرس حسام برهان – 0531 826 9389