اللغاريتم

تمهيد: اللغاريتم هو التابع العكسي لتابع القوة، انظر إلى الحالة التالية:

$$a^x = y \quad ..(*)$$

فيما مضى كنا نهتم بقيمة y إذا أُعطيت قيمة الأس x للأساس a. لآن سيحدث العكس. إذ أننا سنعرف قيمة y وقيمة الأساس a ولكنا بحاجة لمعرفة قيمة الأس. إذاً اللغاريتم هو البحث عن الأس. ونكتب العلاقة (*) كما يلي:

$$\log_a y = x$$

a ← أساس اللغاريتم.

مثال: $x = ? \Leftarrow \log_2 x = 4$

الحل: $x = 16 \Leftarrow x = 2^4$

خواص اللغاريتم

1 $\log_a 1 = 0$

مثال:

$\log_3 \left(\log_2 (x-1)\right) = 0$

$\Rightarrow \log_2 (x-1) = 1$

$\Rightarrow x - 1 = 2^1$

$\Rightarrow \boxed{x = 3}$

2 $\log_a a = 1$

$\log_5 (x+1) = 1$

$\Rightarrow x + 1 = 5$

$x = 4$

3 $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_4 16 = ?$

$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2$

$= 4(1)$

$= 4$

المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

4

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$$

مثال:

$$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3}$$

5

- $a^{\log_a x} = x$
- $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

مثال:

$$3^{2\log_3 6} = 3^{\log_3 6^2} = 6^2 = 36$$

6

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

مثال:

$$\log_3(75) = \log_3(3\cdot 5^2) = \log_3 3 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5$$

7

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

مثال:

① $\log_2(x\cdot y^2) = 4$

② $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = -5$

$\Rightarrow x = ?$

الحل:

من ①:

$\log_2 x + 2\log_2 y = 4$ — ③

من ②:

$\log_2 x - \log_2 y = -5$ — ④

③ − ④ $\Rightarrow$

$3\log_2 y = 9 \Rightarrow 2^3 = y$

$y = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

8

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

هنا b قيمة اختيارية

مثال:

$\log_2 3 = a \Rightarrow$

$\log_6 24 = ?$

$$\log_6 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 8}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{a+3}{1+a}$$

9

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\frac{1}{\log_3 5} = \log_5 3$$

$\boxed{10}$ $\log_{10} x = \log x$

اذا لم يذكر الأساس فالأساس هو 10 بشكل افتراضي

$\boxed{11}$ $\log_e x = \ln x$

اللغاريتم الذي أساسه العدد النيبري e يسمى باللغاريتم الطبيعي.

$\boxed{e \simeq 2.718...}$

$\boxed{12}$ $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c \boxed{d} = \log_a \boxed{d}$

ويمكن التعميم لأي عدد من اللغاريتمات المتسلسلة.

مثال:

$$\log_4 9 \cdot \log_{27} 125 \cdot \log_5 2 =$$

$$\frac{2}{2}\log_2 3 \cdot \frac{3}{3}\log_3 5 \cdot \log_5 2 =$$

$$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = \log_2 2 = 1$$

التابع العكسي للتابع اللغاريتمي

تحدثنا في مطلع الدرس كيف أنّ التابع اللغاريتمي هو التابع العكسي لتابع القوة. والعكس صحيح بالطبع. فإذا كان لدينا تابع القوة التالي $f(x)=a^x$ فإن التابع العكسي له هو: $f^{-1}(x)=\log_a x$.

تذكر من بحث التوابع أنّ: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ حيث أن الدالة I هي دالة المطابقة. لذلك فيمكننا أن نكتب بكل سهولة:

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$$

* إن منطلق (مجموعة تعريف) اللغاريتمي $f(x) = \log_a g(x)$ هي أن يكون تابع اللغاريتم موجب تماماً. أي $g(x) > 0$. أما مستقره (مجموعة قيمه) فهي $\mathbb{R}$ بالكامل. كما أن: $a > 0$ و $a \neq 1$.

المعادلات اللغاريتمية

أي معادلة تحتوي على لغاريتم كتابع تعتبر معادلة لغاريتمية. يفترض أن يوجد الطالب شروط الحل قبل البدء بحل أي معادلة لغاريتمية لكن لضرورة الحل السريع في الامتحان يمكن تجاوز هذا الأمر، ومن ثم نعوض الحلول الناتجة في المعادلة المعطاة للتأكد من أنها لا تسبب أي مشاكل.

مثال: حل المعادلة التالية:

$$\log_2(3x-2) = 4 + \log_2(x-5) \Rightarrow x = ?$$

الحل:

$$\log_2(3x-2) = \log_2 16 + \log_2(x-5)$$

$$\log_2(3x-2) = \log_2(16(x-5))$$

$$\Rightarrow 3x-2 = 16x-80 \Rightarrow 13x = 78 \Rightarrow x = 6$$

نعوض x في المعادلة اللغاريتمية المعطاة فنجد أنها لا تؤدي إلى قيم سالبة لتابع أي لغاريتم موجود في المعادلة، لذلك فقيمة $x = 6$ هو حل مقبول.

المتراجحات اللغاريتمية

ليكن f و g تابعين بحيث $f(x)>0$ و $g(x)>0$. ونميز حالتين :

① الأساس $a>1$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

② الأساس $0<a<1$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

ينتج ذلك من كون التابع اللغاريتمي يصبح تابعاً متزايداً إذا كان $a>1$

" " " متناقصاً " " $0<a<1$

توضيح :

$\log_{a>1} \left(f(x)\right) \rightarrow$ كلما زادت (نقصت) قيمة تزيد (تنقص) قيمة اللغاريتم كاملاً.

$\boxed{\text{التابع المتزايد}}$

$\log_{0<a<1} \left(f(x)\right) \rightarrow$ - كلما زادت قيمة تنقص قيمة اللغاريتم كاملاً.

- كلما نقصت قيمة ، تزيد قيمة اللغاريتم كاملاً.

$\boxed{\text{التابع المتناقص}}$

مثال : $\log_4(x-1) > 2 + \log_4(2x-1)$ $x \in \mathbb{Z}$

أوجد $ÇK(SS)$.

الحل :

$$\log_4(x-1) > \log_4 16 + \log_4(2x-1)$$

$$\log_4(x-1) > \log_4(32x-16)$$

الأساس $4 > 1$ ⇐

$$x-1 > 32x-16$$

$$15 > 31x \Rightarrow x < \frac{15}{31}$$

نعوض قيمة لـ x في المعادلة المعطاة لنتأكد أنها لن تعطينا قيم سالبة بعد اللغاريتم. سنختار القيمة $x=-1$:

$$\underbrace{\log_4(-2) > 2 + \log(-3)}_{\text{تناقض واضح.}}$$

أي قيمة لـ x تكون أصغر من $\frac{15}{31}$ سنحصل على نفس التناقض.

اذاً مجموعة الحلول هي $\emptyset$. أي لا توجد حلول.