حل المعادلات من الدرجة الثانية

للمعادلة من الدرجة الثانية الشكل العام التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

بحيث أنّ a و b و c أعداد حقيقية وأيضًا a غير معدوم.

أولًا: الطريقة العامة لحل معادلة من الدرجة الثانية

يمكن استخدام المميز في حل أي معادلة من الدرجة الثانية. فإذا كان لدينا المعادلة التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

يمكن حساب المميز باستخدام العلاقة التالية ثمّ نميّز 3 حالات:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$

المعادلة مستحيلة الحل في R

$\Delta = 0$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

جذر مضاعف (حلّين متطابقين)

$\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

جذرين مختلفين (حلّين مختلفين)

مثال

حل المعادلة التالية:

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

الحل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{6} = \frac{-2}{3}$$

ثانيًا: التحليل المباشر

نستخدم هذه الطريقة في حال كان أمثال x^2 يساوي الواحد. أي a=1.

في هذه الحالة نبحث عن عددين مجموعهما b وجداؤهما c، وليكن هذين العددين x_1 و x_2 ثم نكتب المعادلة على الشكل التالي:

المدرس حسام برهان – 0531 826 9389

$$(x+x_1)(x+x_2)=0$$

من الواضح أنّ لهذه المعادلة حلّين مختلفين هما: $x=-x_1, x=-x_2$

مثال

حل المعادلة التالية:

$$x^2-x-6=0$$

الحل:

نلاحظ أنّ a = 1. نبحث عن عددين مجموعها 1- وجداؤهما 6-. العددان هما: 3- و 2.

فالحلول هي: x = -2 و x = 3.

ملاحظة مهمة

من طريقة التحليل المباشر بحثنا عن عددين مجموعهما b وجداؤهما c. من الواضح أنّ هذين العددين سيكونان معكوسا الحلول الناتجة كما رأينا قبل قليل. هذا يعني أنّ:

$$x_1+x_2=-b$$
$$x_1\times x_2=c$$

وبصورة عامة، وعندما تكون a مختلفة عن الواحد يمكن التعميم على النحو التالي:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

ثالثًا: طريقة ضرب الأمثال

هذه الطريقة ليست طريقة متسلسلة رياضيًا، لكن نتائجها النهائية صحيحة. تم وضعها لتبسيط حل معادلة من الدرجة الثانية في حال كانت a لا تساوي الواحد، وفي حال لم نرغب باستخدام طريقة المميز. لفهمها بشكل جيّد سنأخذ المثال النموذجي التالي.

مثال نموذجي

حل المعادلة التالية:

$$3x^2-4x-4=0$$

1- نأخذ أمثال x^2 (وهي 3) ونضربها بالعدد الثابت 4-، فنحصل على المعادلة: $x^2 - 4x - 12 = 0$
2- نستخدم طريقة التحليل المباشر طالما أنّ أمثال x^2 أصبحت تساوي 1.
3- بعد التحليل المباشر نصل للشكل التالي: $(x-6)(x+2) = 0$
4- في الخطوة الأولى ضربنا بـ 3. لذلك سنقسّم الأعداد الثابتة في القوسين السابقين على 3 فنحصل على الشكل: $\left(x-\frac{6}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 0$.
5- نختصر ما يمكن اختصاره. والذي لا يمكن اختصاره نضعه أمثال للـ x.
6- في النتيجة نحصل على الشكل: $(x-2)(3x+2) = 0$.
7- بمتابعة الحل نحصل على الحلين: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$.

<u>ملاحظة مهمة حول الطريقة السابقة</u>

لا يجوز استخدام هذه الطريقة قبل إخراج أكبر عامل مشترك ممكن من جميع حدود المعادلة من الدرجة الثانية. فمثلًا المعادلة

$$6x^2 - 8x - 8 = 0$$

قبل استخدام الطريقة السابقة، يجب إخراج العدد 2 عامل مشترك من جميع الحدود.

<u>الأنماط التي يمكن مشاهدتها في تمارين YÖS</u>

تستخدم التمارين التي تأتي في امتحان YÖS الأساليب التي تناولناها قبل قليل. سنستعرض بعض النماذج التي قد تصادفها في هذه التمارين.

مثال1:

$$2x^2 + (m+1)x - 5 = 0$$
$$x_1(x_2-3) - x_2(3-x_1) = 7 \Rightarrow m = ?$$

الحل:

$$x_1(x_2-3) + x_2(3-x_1) = 7 \Rightarrow$$

$$x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + x_2x_1 = 7$$
$$2x_1x_2 - 3(x_1+x_2) = 7$$

$$\Rightarrow 2\left(-\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{-m-1}{2}\right) = 7$$

$$\Rightarrow m = 7$$

مثال 2:

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 5 = 0,$$

$$CK(SS) = \phi, m \in \mathrm{Z}, \Rightarrow \max(m) = ?$$

$$CK(SS) = \phi \Rightarrow \Delta = 4m^2 - 4(1)(\,m^2 - 2m + 5) < 0$$
$$\Rightarrow m < \frac{5}{2} \Rightarrow \max(m) = 2$$

مثال 3:

$$\sqrt{x + \sqrt{x-2}} = 2 \Rightarrow CK(SS) = ?$$

نربع الطرفين:

$$x + \sqrt{x-2} = 4$$

$$\sqrt{x-2} = 4 - x$$

نربع الطرفين مرة أخرى:

$$x - 2 = (4-x)^2$$

$\Rightarrow x = 6,$ مرفوض

$\Rightarrow x = 3,$ مقبول

سبب رفض قيمة x = 6 بسبب أنّه عندما نعوضها في المعادلة المفروضة سيؤدي ذلك إلى عدم تساوي طرفي المعادلة.

<u>ملاحظة مهمة</u>

بصورة عامة عند حل معادلات جذرية، يجب تعويض الحلول الناتجة ضمن المعادلة المفروضة، والتأكّد من عدم الحصول على تناقض في هذه الحالة. كأن يكون الطرفين غير متساويين (كما في المثال السابق) أو أن ينتج عدد سالب تحت الجذر التربيعي، أو أن يؤدي ذلك إلى أن تكون قيمة الجذر التربيعي سالبة.

مثال 4:

$$2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^{x} - 9 = 0 \Rightarrow CK(SS) = ?$$

الحل:

نفرض $t = 3^x$ ثم نعوض في المعادلة المفروضة:

$$2t^2 - 3t - 9 = 0$$

نتابع الحل بالطرق المعروفة فنحصل على: t = 3 و $t = -\frac{3}{2}$

هذا يعني أنّ:

$t = 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$t = 3^x = -\frac{3}{2}$ مرفوض

$$\Rightarrow CK(SS) = \{1\}$$