A. RINGKASAN

Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan yang besar, persamaan-persamaan nonlinear, masalah geometri yang rumit serta suatu persamaan yang sangat kompleks yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa terbagi atas dua metode, yaitu metode *one-step* dan metode *multi-step*. Salah satu metode *multi-step* adalah metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktor-korektor. Hal ini dikarenakan turunan suatu fungsi tidak dapat diperoleh menggunakan metode numerik.

Metode Adams-Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah. Langkah pertama adalah prediksi dan langkah kedua adalah koreksi. Metode prediktor-korektor adalah suatu satu himpunan dua persamaan untuk y_{r+1}. Persamaan pertama disebut *predictor*, persamaan kedua yang disebut *corrector*, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi. Metode prediktor-korektor ini akan menghasilkan kurva yang saling berimptit menandakan galat atau *error* yang dihasilkan sangat kecil.

B. PENDAHULUAN

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan yang besar, persamaan-persamaan nonlinear, masalah geometri yang rumit serta suatu persamaan yang sangat kompleks yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Metode numerik dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa terbagi atas dua metode, yaitu metode *one-step* dan metode *multi-step* (Apriadi, Prihandono, & Noviani, 2014).

Dalam memperoleh solusi menggunakan metode *one-step*, dibutuhkan sebuah nilai awal. Sedangkan dalam metode *multi-step* dibutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step*. Metode *multi-step* biasa disebut sebagai metode prediktor-korektor karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor. Salah satu metode *multi-step* adalah metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktor-korektor. Hal ini dikarenakan turunan suatu fungsi tidak dapat diperoleh menggunakan metode numerik (Kuzairi, Yulianto, & Safitri, 2016).

Galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat lebih kecil daripada galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk orde dua dan tiga. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat memberikan solusi yang cukup akurat dalam penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial biasa nonlinear (Side, Wahyuni, & Arifuddin, 2017).

C. PEMBAHASAN

1. Teori

Metode *one-step* hanya menggunakan data dari satu titik sebelumnya. Multi langkah menggunakan data dari beberapa data sebelumnya. Oleh karenanya umumnya metode *multi-step* lebih cepat mencapai konvergensi dengan tingkat keakuratan yang sama. Metode *multi-step* yang populer adalah metode 4 langkah Adams-Bashfosth. Dengan metode ini y_{r+1} diperoleh dari $y_{r+3}, y_{r+2}, y_{r+1}, y_r$. Guna menggunakan metode ini nilai-nilai 4 data awal $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dan (x_3, y_3) harus sudah ada untuk menghitung (x_r, y_r) untuk $r \geq 4$. Oleh karenanya metode ini harus digunakan dengan metode *one-step*.

Metode Adams-Bashforth-Moulton melibatkan dua langkah. Langkah pertama adalah prediksi dan langkah kedua adalah koreksi. Metode prediktor-korektor adalah suatu satu himpunan dua persamaan untuk y_{r+1}. Persamaan pertama disebut *predictor*, digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk) y_{r+1}; persamaan kedua, yang disebut *korector*, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk) y_{r+1}.

Diberikan PDB orde satu

$$y' = f(x, y(x)) \tag{2.1}$$

Integrasikan kedua ruas persamaan dari x_r sampai x_{r+1}:

$$\begin{aligned}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x))\, dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} y'(x)\, dx \\ &= y(x)\Big|_{x_r}^{x_{r+1}} \\ &= y(x_{r+1}) - y(x_r) \\ &= y_{r+1} - y_r\end{aligned}$$

Nyatakan y_{r+1} diruas kiri persamaan dan suku lainnya diruas kanan

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x))\, dx \tag{2.2}$$

Persamaan prediktor diperoleh dengan menghampiri fungsi $f(x, y(x))$ ke dalampolinom interpolasi derajat tiga. Untuk itu, diperlukan empat buah titik yang berjarak sama, yaitu: $(x_{r-3}, f_{r-3}), (x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$. Dari ke empat titik tersebut, dibentuk polinom interpolasi Lagrange derajat tiga:

$$
\begin{aligned}
f(x, y(x)) \approx\ & \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})(x - x_r)f_{r-3}}{(x_{r-3} - x_{r-2})(x_{r-3} - x_{r-1})(x_{r-3} - x_r)} + \\
& \frac{(x - x_{r-3})(x - x_{r-1})(x - x_r)f_{r-2}}{(x_{r-2} - x_{r-2})(x_{r-2} - x_{r-1})(x_{r-2} - x_r)} + \\
& \frac{(x - x_{r-3})(x - x_{r-2})(x - x_r)f_{r-1}}{(x_{r-1} - x_{r-3})(x_{r-1} - x_{r-2})(x_{r-1} - x_r)} + \\
& \frac{(x - x_{r-3})(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})f_r}{(x_r - x_{r-3})(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})} \\
\approx\ & \frac{1}{-6h^3}(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})(x - x_r)f_{r-3} + \\
& \frac{1}{2h^3}(x - x_{r-3})(x - x_{r-1})(x - x_r)f_{r-2} - \\
& \frac{1}{2h^3}(x - x_{r-3})(x - x_{r-2})(x - x_r)f_{r-1} + \\
& \frac{1}{2h^3}(x - x_{r-3})(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})f_r
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Substitusikan Persamaan (2.3) ke dalam Persamaan (2.2). hasil integrasi Persamaan (2.2) memberikan

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(-9f_{r-3} + 37f_{r-2} - 59f_{r-1} + 55f_r) \tag{2.4}$$

yang merupakan persamaan prediktor (Murni, Ginting, & Narwen, 2018).

Persamaan korektor dibentuk dengan cara yang sama seperti pada persamaan prediktor. Tetapi, titik-titik yang diperlukan untuk pembentukan polinom interpolasi adalah $(x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$, dan titik baru $x_{r+1}, f^*_{r+1} = (x_{r+1}, f(x_{r+1}, y^*_{r+1}))$. Dari ke empat titik tersebut, terbentuk polinom interpolasi Lagrange derajat tiga. Kemudian, integrasikan polinom interpolasi tersebut dengan selang $[x_r, x_{r+1}]$,

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f^*_{r+1}) \tag{2.5}$$

$$f^{(0)}_{r+1} = f\left(x_{r+1}, y^{(0)}_{r+1}\right) \tag{2.6}$$

yang merupakan persamaan korektor.

Jadi, metode Adam-Bashforth-Moulton dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Prediktor:\ y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(-9f_{r-3} + 37f_{r-2} - 59f_{r-1} + 55f_r)$$

$$Korektor: \; y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{r+1}^*)$$

Galat per langkah metode Adam-Bashforth-Moulton adalah dalam orde $O(h^5)$, yaitu:

$$Prediktor: \; E_p = Y_{r+1} - y_{r+1}^* \approx \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(t), x_{r-3} < t < x_{r+1}$$

$$Korektor: \; E_p = Y_{r+1} - y_{r+1} \approx -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(t), x_{r-3} < t < x_{r+1}$$

(Abdullah, 2016).

2. Simulasi Numerik

Berikut ini adalah program yang membandingkan hasil Adams-Bashfort dengan hasil Adams-Moulton khusus untuk PD di atas. Pada program ini nilai awal $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dihitung dari solusi eksak $y(t) = t + e^{-t}$.

```
%Adams - membandingkan hasil Adam - Bashfort
%         dengan Adams-Moulton khusus untuk y'=-y+t+1
%         solusi eksak y(t)=t+exp(-t)
clear; help Adams;
a=0; b=1; N=10;
h=(b-a)/N;
yab=zeros(N+1,1);
yam=zeros(N+1,1);
f=inline('-y+t+1','t','y');
fx=inline('t+exp(-t)');
alpha=1; alpha1=fx(0.1); alpha2=fx(0.2); alpha3=fx(0.3);
yab(1)=alpha; yab(2)=alpha1; yab(3)=alpha2; yab(4)=alpha3;
yam(1)=alpha; yam(2)=alpha1; yam(3)=alpha2;
yam(4)=(22.1*yam(3)+0.5*yam(2)-0.1*yam(1)+0.24*2+2.25)/24.9;
disp('t      A-B      err      A-M      err');
for i=4:N
    t=0.1*i;
    y=fx(t-h);
    fprintf('%5.3f  %12.8f  %12.8f  %12.8f  %12.8f\n', (i-1)*h,
yab(i), abs(y-yab(i)), yam(i), abs(y-yam(i)));
    yab(i+1)=(18.5*yab(i)+5.9*yab(i-1)-3.7*yab(i-2)+0.9*yab(i-
3)+0.24*(i-1)+2.25)/24;
```

```
    yam(i+1)=(22.1*yam(i)+0.5*yam(i-1)-0.1*yam(i-2)+0.24*(i-1)+2.25)/24.9;
end
y=fx(0.1*N);
fprintf('%5.3f  %12.8f  %12.8f  %12.8f  %12.8f\n',N*h, yab(N+1), abs(y-yab(N+1)), yam(N+1), abs(y-yam(N+1)));
```

Hasil dari program di atas adalah:

```
>> adams
 Adams - membandingkan hasil Adam - Bashfort
         dengan Adams-Moulton khusus untuk y'=-y+t+1
         solusi eksak y(t)=t+exp(-t)

t      A-B      err      A-M      err
0.300    1.04081822    0.00000000    1.02997463    0.01084359
0.400    1.05907292    0.01124713    1.04985225    0.02046780
0.500    1.08661360    0.01991706    1.07730317    0.02922749
0.600    1.11944634    0.02936530    1.11165979    0.03715185
0.700    1.15953934    0.03704597    1.15226296    0.04432234
0.800    1.20495443    0.04437453    1.19851851    0.05081045
0.900    1.25578916    0.05078050    1.24988854    0.05668112
1.000    1.31118903    0.05669041    1.30588633    0.06199311
```

Terlihat error dari Adams-Moulton (A-M) lebih kecil dari error Adams-Bashfort (A-B).

Metode eksplisit Adams-Bashfortmudah diprogramkan karena suku w_{i+1} terdefinisi secara eksplisit di ruas kiri, sementara metode implisit Adams-Moulton agak sulit diprogramkan karena tidak semua fungsi $f(t, y)$ dapat diubah ke bentuk eksplisit. Sebagai contoh, persamaan diferensial $y^1 = e^y, 0 \leq t \leq 0.25, y(0) = 1$ apabila akan diselesaikan melalui metode implisit Adams-Moulton ternyata tidak dapat diubah menjadi bentuk eksplisit. Perhatikan bentuknya pada persamaan di bawah ini:

$$w_{i+1} = w_t + \frac{h}{24}[9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_t} = 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{t-2}}]$$

dapatkah diubah menjadi eksplisit? Di mana suku w_{i+1} hanya ada pada ruas kiri.

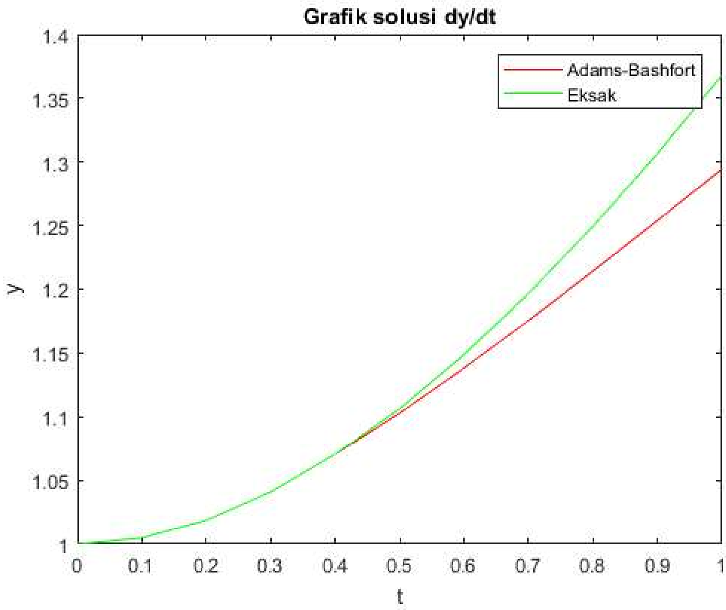
Berikut adalah program Matlab dari Metode Adams-Bashfort 4 langkah:

```
% Explicit - solusi IVP dengan metode Adams-Bashfort empat
langkah.
clear; help Explicit;
% definisi dy/dt=f(t,y)
f=inline('-y+t+1','t','y');
% solusi exact
fx=inline('t+exp(-t)');
% input
a=0; b=1; n=10; alpha=1;
h=(b-a)/n;
t=a; w=alpha;
y=fx(t);
fprintf('pada t=%4.2f, w=%10.8f, y=%10.8f, err=%10.8f\n', t, w, y,
abs(w-y));
% definisi vektor
vt =zeros(4,1);
vw =zeros(4,1);
vt(1)=t;
vw(1)=w;
yplot=zeros(n+1,1);
yplot(1)=alpha;
tplot=a:h:b;
% tiga titik pertama dengan Runge-Kutta
for i=1:3
    k1 = h*f(vt(i), vw(i));
    k2 = h*f(vt(i)+h/2, vw(i)+k1/2);
    k3 = h*f(vt(i)+h/2, vw(i)+k2/2);
    k4 = h*f(vt(i)+h, vw(i)+k3);
    vw(i+1)=vw(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    vt(i+1)=a+i*h;
    y=fx(vt(i+1));
    yplot(i+1)=vw(i+1);
    fprintf('pada t=%4.2f, w=%10.8f, y=%10.8f,
err=%10.8f\n',vt(i+1), vw(i+1), y, abs(vw(i+1)-y));
end
%titik berikutnya memakai Adams-Bashfort
for i=4:n
```

```
   w=vw(4)+h*(55*f(vt(4),vw(4))-
59*f(vt(3),vw(3))+37*f(vt(2),vw(2))-9*f(vt(1),vw(1)))/24;
   yplot(i+1)=w;
   t=a+i*h;
   y=fx(t);
   fprintf('pada t=%4.2f, w=%10.8f, y=%10.8f, err=%10.8f\n',t, w,
y, abs(w-y));
   for j=0:2
       vt(j+1)=vt(j+2);
       vw(i+1)=vw(j+1);
   end;
   vt(4)=t;
   vw(4)=w;
end
%plot hasil
fplot=fx(tplot);
plot(tplot, yplot, 'r', tplot, fplot, 'g');
title('Grafik solusi dy/dt');
xlabel('t');
ylabel('y');
legend('Adams-Bashfort','Eksak');
```

Hasil uji coba program di atas adalah sebagai berikut:

```
>> explicit
  Explicit - solusi IVP dengan metode Adams-Bashfort empat
langkah.
pada t=0.00, w=1.00000000, y=1.00000000, err=0.00000000
pada t=0.10, w=1.00483750, y=1.00483742, err=0.00000008
pada t=0.20, w=1.01873090, y=1.01873075, err=0.00000015
pada t=0.30, w=1.04081842, y=1.04081822, err=0.00000020
pada t=0.40, w=1.07032310, y=1.07032005, err=0.00000305
pada t=0.50, w=1.10306629, y=1.10653066, err=0.00346437
pada t=0.60, w=1.13830583, y=1.14881164, err=0.01050581
pada t=0.70, w=1.17546964, y=1.19658530, err=0.02111566
pada t=0.80, w=1.21411675, y=1.24932896, err=0.03521222
pada t=0.90, w=1.25390722, y=1.30656966, err=0.05266243
pada t=1.00, w=1.29457905, y=1.36787944, err=0.07330039
```



Gambar 1 Grafik program eksplisit

Karena error terlalu kecil (orde 10^{-5}) maka kurva Adams-Bashfort dan kurva eksak berimpit.

Algoritma dari metode Prektor-Korektor tersebut disajikan sebagai berikut:

Algoritma: Prediktor-Korektor

Input : batas[a,b], nilai awal α, itmax N

Output: w sebagai solusi pada titik b, atau x(b)

Langkah:

1. Tetapkan $f(t, y)$, batas [a,b], nilai awal alpha, dan itmax N
2. Hitung h=(b-a)/N
3. Nilai awal: t0=a, w0=alpha
4. Cetak(t,w)
5. Untuk i=1,2,3 kerjakan:

    %mencari titik awal

    a. k1 = h*$f(t_{i-1}, w_{i-1})$

    b. k2 = h*$f(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1} + \frac{k1}{2})$

    c. k3 = h*$f(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1} + \frac{k2}{2})$

    d. k4 = h*$f(t_{i-1} + h, w_{i-1} + k3)$

    e. w_i = $w_{i-1} + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6$

    f. t = a+ih

g. cetak (t_i, w_i)

6. Untuk i=4,… N lakukan:

a. t = a+ih

b. w = $w_3 + h[55f(t_3,w_3) - 59f(t_2,w_2) + 37f(t_1,w_1) - 9f(t_0,w_0)]/24$

c. w = $w_3 + h[9f(t,w) - 19f(t_3,w_3) - 5(t_2,w_2) + f(t_1,w_1)]/24$

d. cetak (t, w)

e. Untuk j=0,1,2

- $t_j = t_{j+1}$
- $w_j = w_{j+1}$

f. $t_3 = t$; $w_3 = w$

7. Selesai

Berikut ini adalah implementasi dalam Matlab untuk metode Prediktor-Korektor

```
%PreCor - solusi IVP dengan metode Predictor-Corector
%Predictor pakai Adams-Bashfort
%Predictor pakai Adams-Moulton
clear; help PreCor;
%definisi dy/dt = f(t,y)
f = inline('-y+t+1','t','y');
%solusi exact
fx = inline('t+exp(-t)');
%input
a=0; b=1; n=10; alpha=1;
h=(b-a)/n;
vw=zeros(4,1);
vt=zeros(4,1);
t=a; w=alpha;
vw(1)=w;
vt(1)=a;
yplot=zeros(n+1,1);
yplot(1)=alpha;
tplot=a:h:b;
%empat titik pertama dengan Runge-Kutta
for i=1:3
    k1=h*f(t,vw(i));
    k2=h*f(t+h/2,vw(i)+k1/2);
    k3=h*f(t+h/2,vw(i)+k2/2);
```

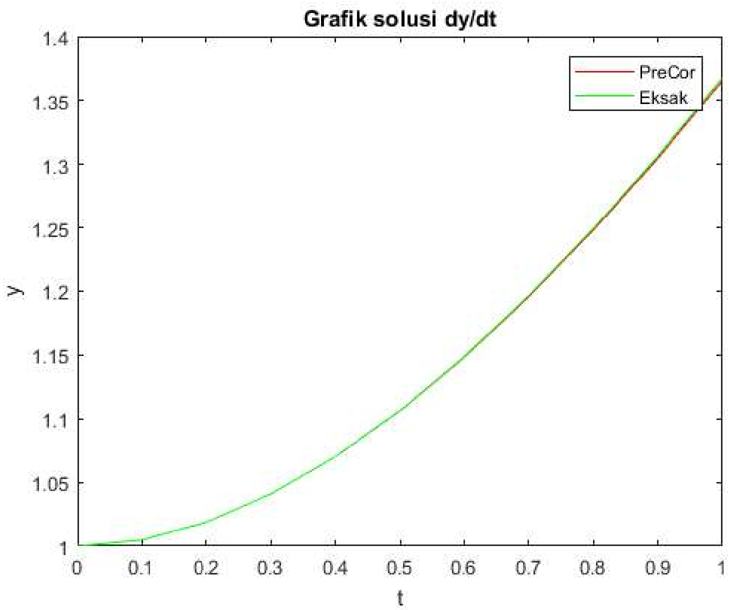
```
    k4=h*f(t+h, vw(i)+k3);
    vw(i+1)=vw(i)+(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    t=a + i*h;
    vt(i+1)=t;
    y=fx(t);
    fprintf('pada t=%4.2f, w=%10.8f, y=%10.8f,
err=%10.8f\n',t,vw(i+1), y, abs(vw(i+1)-y));
    yplot(i+1)=vw(i+1);
end
%titik berikutnya memakai Predictor-Corector
for i = 4:n
    t = a+ i*h;
    w = vw(4) + h*(55*f(vt(4),vw(4)) - 59*f(vt(3), vw(3)) +
37*f(vt(2),vw(2)) + f(vt(2),vw(2)))/24;
    w = vw(4) + h*(9*f(t,w)+19*f(vt(4),vw(4)) - 5*f(vt(3),vw(3)) +
f(vt(2),vw(2)))/24;
    yplot(i+1)=w;
    y=fx(t);
    fprintf('pada t=%4.2f, w=%10.8f, y=%10.8f,
err=%10.8f\n',t,w,y, abs(w-y));
    for j=0:2
        vt(j+1) = vt(j+2);
        vw(j+1) = vw(j+2);
    end
    vt(4) = t;
    vw(4) = w;
end
%plot hasil
fplot=fx(tplot);
plot(tplot,yplot,'r',tplot,fplot,'g');
title('Grafik solusi dy/dt');
xlabel('t');
ylabel('y');
legend('PreCor','Eksak');
```

Hasil uji coba program di atas adalah sebagai berikut:

```
>> precor
 PreCor - solusi IVP dengan metode Predictor-Corector
 Predictor pakai Adams-Bashfort
```

```
 Predictor pakai Adams-Moulton

pada t=0.10, w=1.00483750, y=1.00483742, err=0.00000008
pada t=0.20, w=1.01873090, y=1.01873075, err=0.00000015
pada t=0.30, w=1.04081842, y=1.04081822, err=0.00000020
pada t=0.40, w=1.07030505, y=1.07032005, err=0.00001500
pada t=0.50, w=1.10635486, y=1.10653066, err=0.00017580
pada t=0.60, w=1.14835900, y=1.14881164, err=0.00045263
pada t=0.70, w=1.19576330, y=1.19658530, err=0.00082200
pada t=0.80, w=1.24806493, y=1.24932896, err=0.00126403
pada t=0.90, w=1.30480788, y=1.30656966, err=0.00176178
pada t=1.00, w=1.36557862, y=1.36787944, err=0.00230082
```



Gambar 2 Grafik program prediktor-korektor

Kedua kurva berimpit menandakan error yang sangat kecil dari metode Prediktor-Korektor.

D. DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, S. (2016). *Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton Pada Persamaan Logistik Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan*.

Apriadi, Prihandono, B., & Noviani, E. (2014). Metode Adams-Bashforth-Moulton Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *3*(2), 107–116.

Kuzairi, Yulianto, T., & Safitri, L. (2016). Aplikasi Metode Adams Bashforth-Moulton (ABM) Pada Model Penyakit Kanker. *Jurnal Matematika "MANTIK,"* *2*(6), 14–21.

Murni, D., Ginting, B., & Narwen. (2018). Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat Untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde Tiga Koefisien Konstan. *Jurnal Matematika*, *5*(2), 21–25.

Side, S., Wahyuni, M. S., & Arifuddin, R. (2017). Solusi Numerik Model Verhulst pada Estimasi Pertumbuhan Hasil Panen Padi dengan Metode Adam Bashforth-Moulton (ABM). *Jurnal Terapan*, *2*(1), 1–9.