

2021 全国大学生数学建模竞赛

西安交通大学校内选拔赛

竞赛时间：2021.7.23-2021.7.27

队伍编号 164

队长姓名 李泓宁 队长班级 储能 91 队长学号 2194510945

队员 1 姓名 程文捷 队员 1 班级 计算机 93 队员 1 学号 2194214336

队员 2 姓名 刘川 队员 2 班级 计算机 93 队员 2 学号 2194214363

基于 N-S 方程及 VOF 仿真分析的水滴铺展过程动力学研究

摘要

本题研究的问题是液滴的铺展问题。液滴铺展是指液滴与壁面接触并沿壁面延伸直至稳定的过程。该过程受多因素影响，如重力、表面张力、液滴粘度和液滴大小等。液滴铺展的过程不仅在理论上具有重要意义，还在实际生产中起着不可替代的作用。

针对问题一，我们首先给出了基于 Navier-Stokes 方程、Navier 边界条件和 Laplace 压强公式的二维情形下液滴铺展的模型，并给出了数值计算和仿真模拟的结果，分析得到液滴无初速度下落时最大铺展半径 $L_0=52.11\mu m$ 、稳定铺展半径为 $L_1=47.54\mu m$ 。接下来我们将模型沿圆柱坐标系拓展，得到了三维空间的水滴铺展模型。

针对问题二，我们首先分析了液滴从一定高度落下带来的影响主要在于降落前具有初速度，会影响表面压强等初始条件，接下来分析了问题一中模型继续成立的条件，得到韦伯数小于临界韦伯数 $We_{crit} = 2.3472$ 时满足成立的条件。最后我们研究了对最大铺展半径 L_0 与韦伯数的关系，并定义了铺展比 ζ ，得到临界韦伯数范围内铺展比 ζ 、最大铺展半径 L_0 与韦伯数的函数式。

针对问题三，我们首先根据一系列仿真分析得到了不同初速度下水滴在汽油表面铺展过程的一般规律，然后针对两个特定的参数，即最大铺展半径 $L_0(10^{-6}m)$ 和最大下沉距离 $D_0(10^{-6}m)$ 进行分析，发现在临界初速度 $V_0 = 2.0m/s$ 内 L_0 几乎不受影响而大于 V_0 后受到初速度影响接近线性。同时，最大下沉距离 D_0 一直与初速度有较好的线性关系。

【关键词】 N-S 方程 液滴铺展 VOF 仿真 量纲分析

一、问题重述

1.1 问题背景

本题研究的主要对象是液滴在壁面的铺展过程。液滴在平面的铺展现象是一种生活中常见的现象，如雨滴沿着玻璃向下滑落、水滴滴落到地板上等。在工业生产实际中，液滴在平面的铺展过程也有广泛的应用，如油层液封技术和半导体元器件生产的关键步骤等。

由于液滴铺展过程的重要性，许多来自不同领域如数学、物理和工程上的众多专家对其展开了诸多研究。陈石等^[1]研究了液体撞击固体平壁的静态铺展力学模型；焦云龙等^[2]研究了液滴在光滑表面铺展的动力学模型。

1.2 需要解决的问题

问题一：设有一水滴初始位于壁面且速度为 0。该水滴是直径为 $100\mu\text{m}$ 的球体且与壁面的接触角为 120° 。现需要计算液滴的铺展过程从而获得液滴稳定时的铺展状态。

问题二：设水滴从一定高度自由下落，探究下落速度对液滴铺展过程的影响。

问题三：设水滴在汽油表面铺展，重新考虑问题一和问题二，并阐述差异。

二、问题分析

2.1 对问题一的分析

问题一要求建立液滴铺展的动力学模型，涉及较多流体力学知识。为简化分析，可首先在二维尺度上对圆形水滴建模，得到圆形水滴的铺展过程。由于假设水滴在水平方向上具有各向同性，故建立圆柱坐标系将模型拓展到三维空间，得到三维水滴铺展的模型。

2.2 对问题二的分析

液滴从一定高度落下时，与壁面碰撞前会有一个初速度，进而导致碰撞时表面压强的改变，从而影响初始条件。同时应分析问题一中模型继续成立的条件。

2.3 对问题三的分析

问题三是一个多相流问题，针对两个液相之间的碰撞应根据仿真结果具体分析碰撞的形状特征，从而推测其铺展过程进行满足的模型。同时应对一些特征参数进行深入研究。

三、模型假设

为简化问题分析，本文对模型做出如下假设：

- (1) 采用润滑近似方法^[3]进行简化（详见下文）；
- (2) 液固两相界面的滑移采用 Navier 滑移条件分析（详见下文）；
- (3) 认为空气没有粘性，即液气表面张力连续；
- (4) 由于邦德数较小，忽略重力对铺展过程的作用，即认为表面张力在该过程中起绝对主导作用；
- (5) 由于研究条件的限制，本文用仿真软件分析代替实验。

四、符号说明

以下为本文中用到的各种符号：

表 4.1 本文符号说明

符号	含义	单位
x, y, z	横、纵、竖坐标	μm
t	时刻	s
u, v, w	流体 t 时刻时在 (x, y, z) 点处的速度分量	m/s

ρ	流体密度	kg/m^3
p	流体表面压强	Pa
f	单位体积流体受力	N
μ	动力粘度	$Pa \cdot s$
b	滑移长度	m
γ_{lv}	表面张力系数	N/m
κ	曲率	m^{-1}
Bo	邦德数	$/$
We	韦伯数	$/$
Re	雷诺数	$/$
L	液滴铺展半径	μm
D	液滴下沉距离	μm

五、模型建立与问题求解

5.1 问题一的求解：液滴无初速度时的情况

5.1.1 建立二维液滴铺展的动力学模型

为简化分析，我们首先在本节中建立二维液滴铺展的动力学模型。习惯上粘性液滴的铺展过程采用润滑近似^[3]的方法进行简化，润滑近似方法是指：

- (1) 对于液滴的特征尺度而言，水平方向特征尺度远大于竖直方向特征尺度；
- (2) 铺展过程主要受表面张力影响；(3) 铺展过程为不可压缩 Newton 流体运动。

Navier-Stokes 方程是描述粘性不可压缩流体动量守恒的运动方程^[4]，是研究此种流体运动的基础。Navier-Stokes 方程的完全形式如式 (5.1.1)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (5.1.1)$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]\end{aligned}$$

其中 u, v, w 是流体 t 时刻时在 (x, y, z) 点处的速度分量, ρ 为流体密度, \mathbf{V} 是合速度, p 是压强, f 是单位体积流体受力, μ 是动力粘度。

为简化分析, 首先看二维情形下液滴铺展的过程。在二维情形下, 铺展过程的 Navier-Stokes 方程如式 (5.1.2)

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

由于假设水滴不可压缩, 故有连续性方程如式 (5.1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\tag{5.1.3}$$

将润滑近似理论应用于式 (5.1.2) 和式 (5.1.3), 由于水平方向的特征尺度远大于竖直方向的特征尺度, 故定义一个无量纲量 $\varepsilon = \frac{h_0}{L}$, ε 远小于 1. 在特征尺度上继续定义一系列无量纲量:

$$Z = \frac{z}{h_0}, X = \frac{x\varepsilon}{h_0}, W = \frac{w}{\varepsilon U_0}, U = \frac{u}{U_0}, T = \frac{\varepsilon U_0}{h_0} t, P = \frac{\varepsilon h_0}{\mu U_0} p$$

将其带入式 (5.1.2) 和 (5.1.3), 舍去带 ε 的项, 再将无量纲量还原, 可得式 (5.1.4) ~ (5.1.6)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\tag{5.1.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0\tag{5.1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\tag{5.1.6}$$

二维液滴如图 5.1.1 所示, 设横轴以下为固相、液滴外为气相, 则横轴与液滴交线为液固界面、液滴与气相交线为液气界面。液气界面轮廓用 $z = h(x, t)$ 表示, 其中 x 是对应横坐标值, t 是时刻。

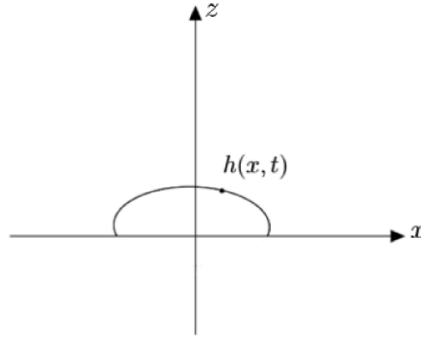


图 5.1.1 二维液滴示意图

在水滴铺展直到稳定的过程中，其与固体表面的界面边界处会产生一定程度的滑移。一种常用的边界条件为 Navier 边界条件^[5]，Navier 边界条件是指在 $z = 0$ 处，有

$$w = 0 \quad (5.1.7)$$

$$u = b \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.1.8)$$

其中 b 为滑移长度。

在液气界面 $z = h(x, t)$ 处，流体质点¹在 z 方向上的速度为该流体质点本身速度与流场变化速度之和，即式 (5.1.9)。

$$w = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.1.9)$$

同时认为空气没有粘性，即液气表面张力是连续的，故有式 (5.1.10)。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (5.1.10)$$

根据 Laplace 压强公式，液气界面处的压强条件为式 (5.1.11)

$$p(z = h) = -\gamma_{lv} \cdot \kappa \quad (5.1.11)$$

其中 γ_{lv} 为表面张力系数，对于水取 72 N/mm 。对式 (5.1.5) 两边积分，并且代入式 (5.1.11) 的初值条件，可得式 (5.1.12)。

$$p = -\rho g z + \sigma g h - \gamma_{lv} \cdot \kappa \quad (5.1.12)$$

¹ 流体质点：流体力学中微观上足够大、宏观上足够小、可以看作一个几何点的流体团称为流体质点

将 (5.1.12) 两边对 x 求导，代入式 (5.1.4) 得

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \quad (5.1.13)$$

两边对 z 积分，代入 (5.1.7) ~ (5.1.9) 得

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.1.14)$$

邦德数可以表明重力和表面张力中何种力占主导作用，其计算方法为

$$Bo = \frac{\rho g r^2}{\gamma_{lv}}$$

本液滴的直径为 $100\mu m$ ， $\gamma_{lv} = 72 N/mm$ ，取重力加速度 $g = 10 m/s^2$ ，可算得

本液滴的邦德数为 3.47×10^{-4} ，非常小。故可以忽略重力作用。忽略重力后式

(5.1.14) 可以化为.

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.1.15)$$

其中 κ 的计算方法为

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.1.16)$$

式 (5.1.15) 和 (5.1.16) 可以通过差分方法数值求解。得到最大铺展半径

$L_0 = 52.11\mu m$ 、稳定铺展半径为 $L_1 = 47.54\mu m$ 。截取部分图像如图 (5.1.2)、

(5.1.3)、(5.1.4)。

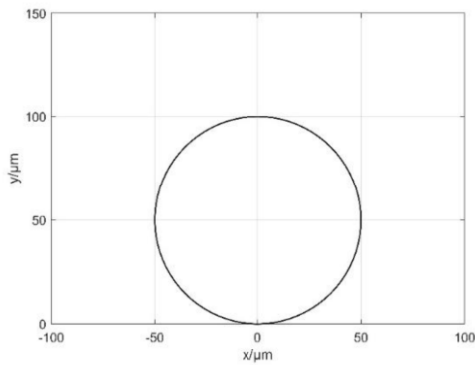


图 5.1.2 $t = 0$ 时，液滴为一圆形

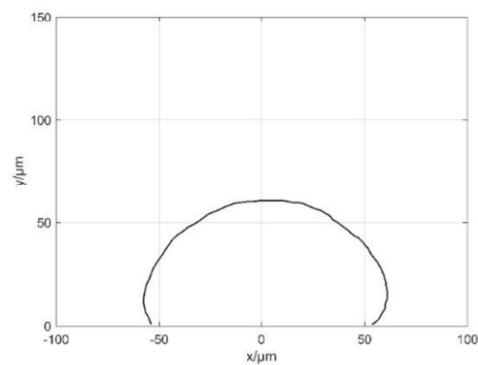


图 5.1.3 $t = 1.25 \times 10^{-4} s$ 时，液滴铺展达到最大

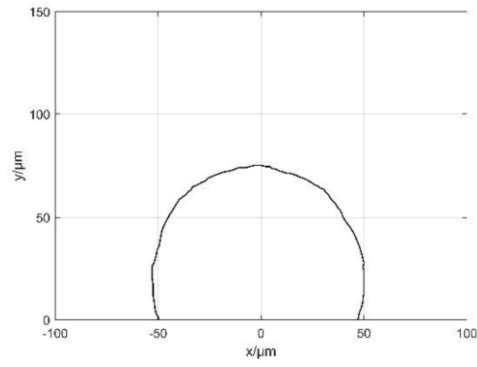


图 5.1.4 液滴稳定时状态

Fluent 是一个国际上流行的软件包，可用于流体相关的仿真。我们使用 Fluent 软件对所给条件在二维情形下进行仿真，设置参数如表 5.1.1.

表 5.1.1 本节所设仿真参数

模型	VOF	
重力加速度(m/s^2)	9.8	
大气压(Pa)	101325	
相	空气	水
名称	Air	water-liquid
材料类型	fluid	fluid
化学式	/	h2o<l>
密度[kg/m^3]	1.225	998.2
粘度[$kg/(m \cdot s)$]	1.7894×10^{-5}	0.001003

仿真得到图 (5.1.5) ~ (5.1.7)

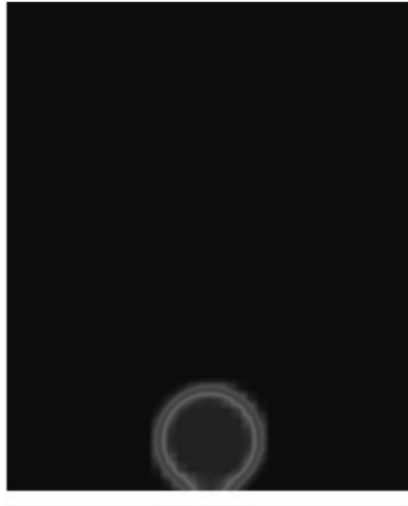


图 5.1.5 $t = 1 \times 10^{-5} \text{s}$ 时，液滴刚开始接触界面

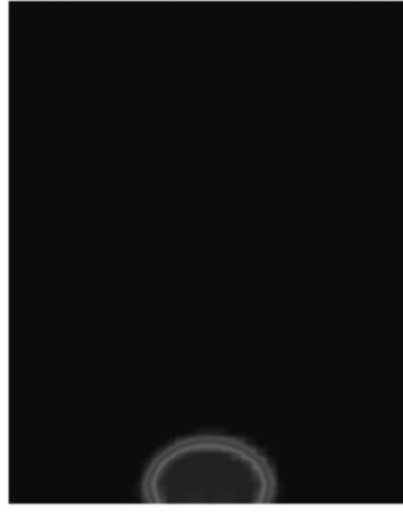


图 5.1.6 $t = 5 \times 10^{-5} \text{s}$ 时，液滴正在表面上铺展

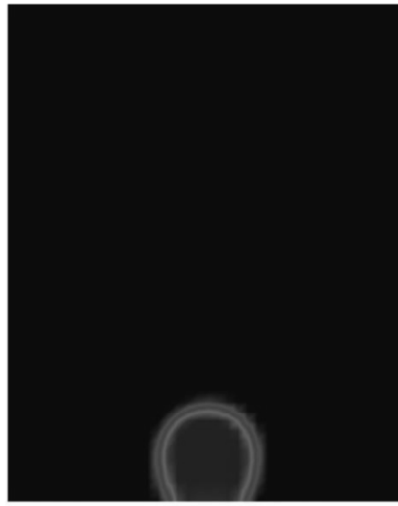


图 5.1.7 液滴在固体上达到稳定铺展状态

可见，数值求解结果与仿真结果十分接近，说明结果较为精确。

5.1.2 建立三维液滴铺展的动力学模型

由于液滴在水平方向上各条件相同，故假设液滴水平方向具有各向同性。

建立圆柱坐标系如图（5.1.8）。

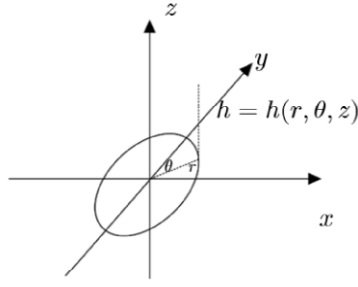


图 5.1.8 圆柱坐标系

现在圆柱坐标系下修改 5.1.1 节模型。设 u_r, u_z 为 r, z 方向速度，在圆柱坐标系下，连续性方程 (5.1.3) 应修改为式 (5.1.17)。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (5.1.17)$$

曲率计算公式 (5.1.16) 应修改为式 (5.1.18)。

$$\kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\frac{\partial h}{\partial r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)^2}} \right) \quad (5.1.18)$$

其他方程由不同符号相应改为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

$z = 0$ 时，有

$$\begin{aligned} u_z &= 0 \\ u_r &= b \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

$z = h$ 时，有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_r}{\partial z} \right|_{z=h} &= 0 \\ u_z &= \frac{\partial h}{\partial t} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} \\ p(z=h) &= -\gamma_{lv} \cdot \kappa \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

由式 (5.1.17) ~ (5.1.21) 可以得到式 (5.1.22)。

$$\mu \frac{\partial h}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right] = 0 \quad (5.1.22)$$

其中, κ 可由 (5.1.18) 求解。三维液滴铺展示意图如下。

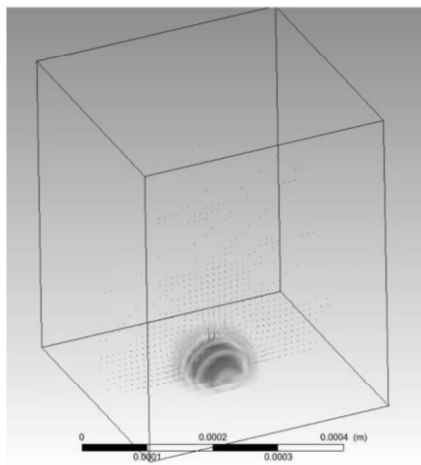


图 5.1.9 三维液滴铺展示意图

5.2 问题二的求解：液滴从一定高度下落的情况

5.2.1 对上节模型的推广

液滴从一定高度自由下落时, 与壁面接触前会有一个初速度 u_z 。另一方面, 液滴会在空中受空气阻力作用而变形。由于本问题研究的液滴尺寸较小, 液滴形状主要由表面张力决定, 故不考虑空气对液滴形状的影响。

无量纲数在流体的分析中起着重要的作用, 其中韦伯数^[6]是一个著名的无量纲数, 定义为 $We = \rho U^2 L / \gamma_{lv}$ 。 L 是反应液滴水平方向的量, 本文取 $100\mu m$ 。韦伯数反映了惯性力与表面张力的比值, 当韦伯数达到一定程度 (称为临界韦伯数) 时, 惯性力会突破表面张力的作用从而破坏 5.1 节中的分析。如液滴下降高度大于某一高度值时, 液滴会反弹甚至破裂, 从而不能使用 5.1 节的结论。这种情况涉及较多力学分析, 难度较大, 故本文只考虑韦伯数小于临界韦伯数的情况。

为确定临界韦伯数, 我们先采用仿真软件在各个高度进行模拟实验。经过大量实验可以确定 H 取 $0.0845m$ 时达到临界状态 (如图 (5.2.1a)、(5.2.1b)、(5.2.2a)、(5.2.2b)), 此时落地前初速度为 $1.3m/s$, 临界韦伯数 $We_{crit} = 2.3472$ 。



图 5.2.1a 达到最大铺展面积时，
液滴产生明显凹形形变

图 5.2.1b 液滴会向上弹起，
恰好脱离壁面



图 5.2.2a 达到最大铺展面积时，
液滴产生明显凹形形变

图 5.2.2b 液滴弹起，
完全脱离壁面

液滴在一定高度下落时，需对 5.1 节的进行相关修改。为此先引入流体力学中常用的伯努利方程^[6]。对于理想不可压缩流动过程，有式 (5.2.1)。

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = c \quad (5.2.1)$$

其中 V 为流体平均速度， c 是一个常数。故在具有初速度时，式 (5.1.20) 中压强 p 应满足式 (5.2.2)。

$$p = p^* - \frac{\rho g V^2}{2} \quad (5.2.2)$$

由动量定理

$$\frac{dK}{dt} = F$$

有

$$-\rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr \frac{\partial V}{\partial t} = \rho V^2 \cdot 2\pi r \cdot dr$$

化简得到

$$h \frac{\partial V}{\partial t} = -V^2$$

即

$$V(x, t) = \frac{V_0}{1 + V_0 \int_0^t \frac{d\tau}{h(x, t = \tau)}} \quad (5.2.3)$$

初值条件为

$$V(x, t = 0) = V_0 \quad (5.2.3)$$

其中 V_0 是碰撞地面前初速度，应小于 $1.3m/s$ 。将（5.2.2）和（5.2.3）代回 5.1 节中模型即完成修正。

5.2.2 对最大铺展半径 L_0 与韦伯数关系的研究

韦伯数与最大铺展半径之间存在一定的关系，这是因为韦伯数越大代表液滴初始高度越大，与壁面接触前的初速度也越大。本节对韦伯数与最大铺展半径 L_0 展开研究，现设置一系列高度梯度，利用仿真软件 Fluent 测量最大铺展半径。参数同表 5.1.1，仅修改初速度。结果如表 5.2.1。

表 5.2.1 数据测量结果

高度	初速度 V_0	韦伯数	最大铺展半径	铺展比
$H(10^{-3}m)$	(m/s)	We	$L_0(10^{-6}m)$	ζ
0	0	0	51.2195	1.0244
4.5	0.3	0.1250	51.9862	1.0397
8.0	0.4	0.2222	53.4148	1.0683
10.1	0.45	0.2813	55.2023	1.1040

12.5	0.5	0.3472	56.9833	1.1397
24.5	0.7	0.6805	57.7778	1.1556
40.5	0.9	1.1250	58.9403	1.1788
60.5	1.1	1.6806	59.7101	1.1942
84.5	1.3	2.3472	61.0839	1.2217

其中铺展比 ζ 定义为最大铺展半径除以原半径 $50\mu m$.

使用 Matlab 软件编程绘制图象如图 (5.2.3)

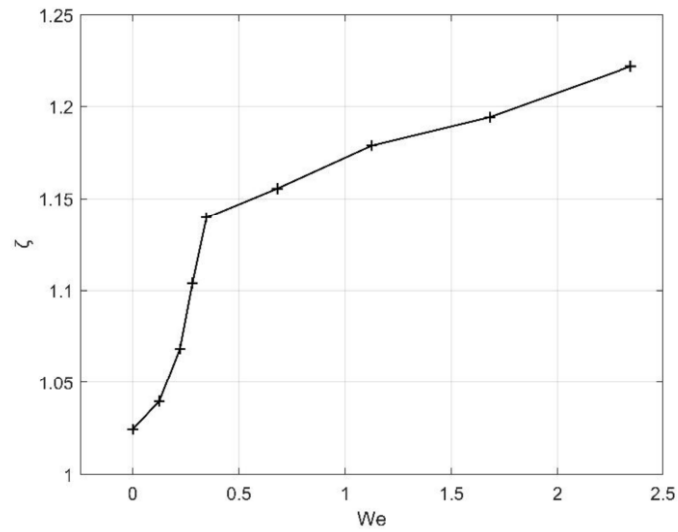


图 5.2.3 ζ 与 We 的关系

可以看出, $We < 0.3472$ 时图像大致呈指数关系; $We > 0.3472$ 时图像线性程度较好。故第一段我们采用指数拟合, 第二段采用线性拟合。

将 $We < 0.3472$ 的数据点做对数处理, 得到 $\ln(\zeta - 1)$ 和 We 的关系图象如 (5.2.4) .

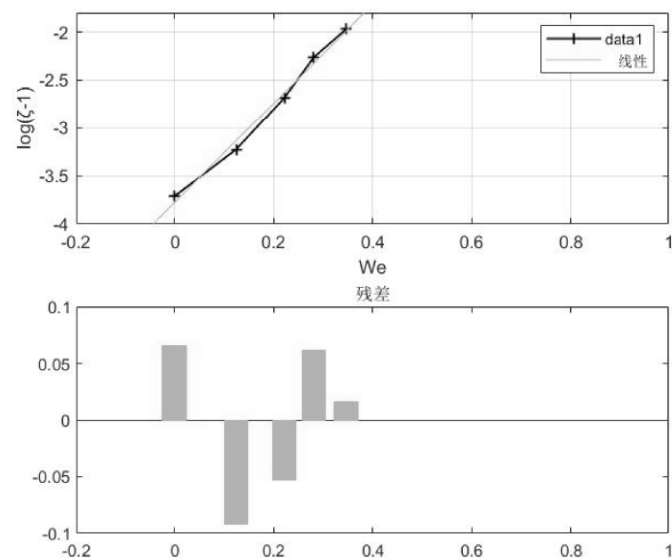


图 5.2.4 $\ln(\zeta - 1)$ 和 We 的关系

可以看出处理后线性程度好，拟合结果为

$$\ln(\zeta - 1) = 5.1692We - 3.7798$$

即

$$\zeta = e^{5.1692We - 3.7798} + 1, 0 < We < 0.3472$$

对 $We > 0.3472$ 采用线性拟合，得到图 (5.2.5) .

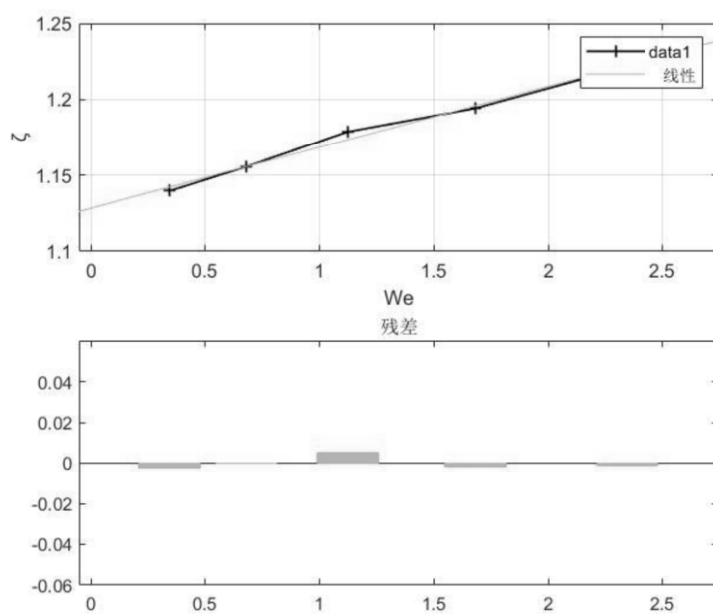


图 5.2.5 ζ 与 We 的关系

$$\zeta = 0.040179We + 1.1283, 0.3472 < We < 2.3472$$

综上所述，在临界韦伯数范围内，铺展比与韦伯数的关系为

$$\zeta = \begin{cases} e^{5.1692We-3.7798} + 1, & 0 < We < 0.3472 \\ 0.040179We + 1.1283, & 0.3472 < We < 2.3472 \end{cases} \quad (5.2.4)$$

最大铺展半径 L_0 与 We 的关系为

$$L_0 = \begin{cases} 50(e^{5.1692We-3.7798} + 1), & 0 < We < 0.3472 \\ 50(0.040179We + 1.1283), & 0.3472 < We < 2.3472 \end{cases} \quad (5.2.45)$$

5.3 问题三的求解

本问题要求建立水滴在汽油表面铺展的模型，该问题涉及到多相流的边界问题。多相流的特点是在相间的界面有作用力存在，由于相的分布非常复杂，多相流运动规律比单相流的流体运动规律复杂得多。目前处理有关问题多从宏观出发，根据单相流体的连续性理论加以修正。由于水滴入油涉及到水与汽油的相互作用，两种流体各自的独特性质使得该问题愈发复杂。关于此问题的研究尚属国内外学界前沿热点，暂无学者得到有效结论。故本文仅基于 Fluent 软件仿真对液滴铺展过程中的几点特征进行讨论。

在 Fluent 软件中设置参数如表 5.3.1.

表 5.3.1 本节所设仿真参数

模型	VOF	
重力加速度(m/s^2)	9.8	
大气压(Pa)	101325	
相	汽油	水
名称	gasoline-liquid	water-liquid
材料类型	fluid	fluid
化学式	c16h29<l>	h20<l>
密度[kg/m^3]	830	998.2
粘度[$kg/(m \cdot s)$]	0.00332	0.001003

在仿真中测得数据如表 5.3.2.

表 5.3.2 仿真测得数据

初速度 V_0 (m/s)	韦伯数 We	雷诺数 Re	最大铺展半 径 $L_0(10^{-6}m)$	最大下沉 距离 $D_0(10^{-6}m)$	铺展比 ζ	下沉 比 ξ
0	0	0	40.4762	54.7619	0.8095	0.5476
0.5	0.7143	62.5	39.8810	50.0000	0.7976	0.5000
1	2.8571	125.0	40.2439	58.2525	0.8049	0.5825
1.5	6.4286	187.5	39.8810	57.1429	0.7976	0.5714
2.0	11.4286	250	54.7620	66.6667	1.0952	0.6667
2.5	17.8571	312.5	54.9020	70.3125	1.0980	0.7031
3.0	25.7143	375.0	60.0840	75.5032	1.2017	0.7550
3.5	35.0000	437.5	65.6865	76.5625	1.3137	0.7656
4.0	45.7143	500.0	70.2380	88.0952	1.4048	0.8810
4.5	57.8571	562.5	70.2400	88.0960	1.4048	0.8810
5.0	71.4286	625.0	75.0000	92.8571	1.5000	0.9286

其中下沉比 ξ 定义为最大下沉距离与水滴直径的比值，即 $\xi = \frac{D_0}{100}$ ；雷诺数 $Re = \rho \frac{VL}{\mu}$. 计算韦伯数和雷诺数时，水和汽油的表面张力需修正为 $\gamma_u = 35 \times 10^{-3} N/m$ ，粘度 $\mu_{油} = 0.8 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ 。

绘制 We ， Re 和两个比值之间的关系，得到图（5.3.1）和（5.3.2）。

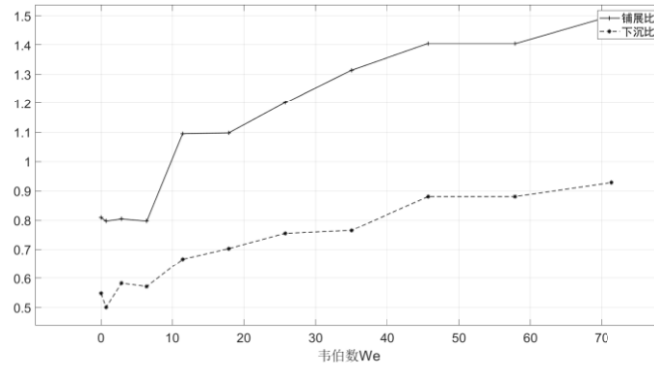


图 5.3.1 韦伯数与铺展比、下沉比的关系

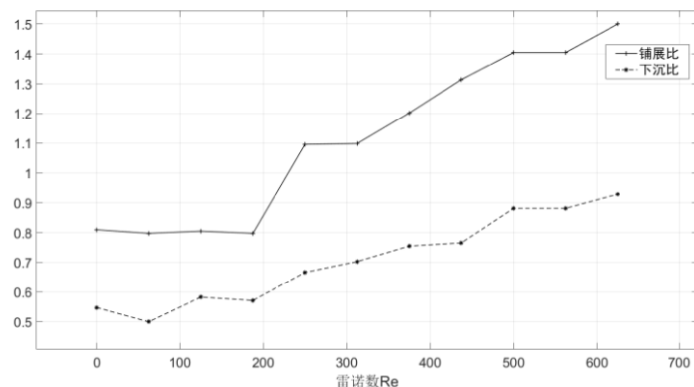


图 5.3.1 雷诺数与铺展比、下沉比的关系

从图中可以看到，无论是韦伯数还是雷诺数，与铺展比的关系都有一个临界值，该值即为初速度为 $2.0m/s$ 时对应的韦伯数 11.4286 和雷诺数 250。仿真发现该值即为水滴入油恰好出现下陷空腔的对应值，说明下陷空腔对水滴铺展具有重要影响。高于此值可近似认为关系线性，有

$$\zeta = 0.0071199We + 1.0188$$

$$\zeta = 0.0011606Re + 0.78054$$

无论是韦伯数还是雷诺数，与下沉比的关系都有较好的线性程度，有

$$\xi = 0.0058004We + 0.56249$$

$$\xi = 0.00069836Re + 0.48926$$

六、模型评价与推广

本文模型综合分析各方面条件，以第一问模型为核心，层层递进，由表及里，得到了一定范围下的最佳结果，具有较好的正确性和合理性。首先建立了液滴铺展的二维模型，接着推广到三维，建立了完整的液滴铺展模型。另一方面，借助量纲分析的方法，引入一系列无量纲数，大大简化了分析难度。

然而本文模型也有不足之处。水滴入油时相的分布非常复杂，多相流运动规律比单相流的流体运动规律复杂得多，故分析角度较窄。另一方面由于条件限制，本文只能借助仿真代替实验，有一定的局限性。

参考文献

- [1] 陈石、陶英、沈胜强、李德伟. 平壁液滴静态铺展影响因素的研究 [J]. 力学学报, 2014, 46.
- [2] 焦云龙、刘小君、逢明华、刘焜. 固体表面液滴铺展与润湿接触线的移动分析 [J]. 物理学报, 2016, 65(1).
- [3] ORON A A D, STEPHEN H. AND BANKOFF, S. GEORGE. Long-scale evolution of thin liquid films [J]. Rev Mod Phys, 1997, 69(3): 931-80.
- [4] Navier–Stokes equations [Z]. Wikipedia
- [5] 吴承伟、马国军、周平. 流体流动的边界滑移问题研究进展 [J]. 力学进展, 2008, 38(3): 265.
- [6] 张鸣远. 流体力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

附录

本文所用主要程序

Chafen.m 用于数值计算

```
clc;clear;format compact;
a = 1;
t_scale = 1000;
x_scale = 200;
r = 100*10(-6);%半径为 100 微米
L0 = 4 * r;
i = (2*L0)/(2*x_scale+1);%空间步长
tao = 1/t_scale;%时间步长
x_index = zeros(2*x_scale+1,1);
for tmp = x_scale+1:(2*x_scale+1)%设置 x 轴值
    x_index(tmp) = (tmp-(x_scale+1))*i;
end
for tmp = 1:x_scale
    x_index(tmp) = -(x_scale+1-tmp)*i;
end
t_index = t_scale/tao;
gamma = 72*10(-3);
miu = 1.01*10(-3);
b=1*10(-9);
% h1 = zeros(x_scale,t_scale);%新建 h1 矩阵, 上半圆
% h2 = zeros(x_scale,t_scale);%新建 h2 矩阵, 下半圆
h = zeros(2*x_scale,t_scale);%设圆心为原点
k = zeros(2*x_scale,t_scale);
```

```

for x = 1 : 1 : 2*x_scale+1%初值条件，注意多一个 0
    if(r^2-(x_index(x))^2>0)
        h(x,1) = sqrt(r^2-(x_index(x))^2);
    end
end
for t = 1: 1 : t_scale%设置边界条件
    h(1,t) = -r;
    h(2*x_scale+1,t) = -r;
end
for t = 2 : t_scale-1
    for x = 2 : 2*x_scale - 1
        k(x,t) = a*(h(x+1,t)-h(x-1,t))/(2*i);
        h(x+1,t) = (((-
4/3)*(h(x,t)^2+2*b*h(x,t))./(h+2*b))*((k(x+1,t)+k(x-1,t)-
2*k(x,t))./(k(x+1,t)-k(x-1,t)))-(2*i^2*miu*(h(x,t+1)-h(x,t-
1)))./(((h(x,t)^2+2*b*h(x,t)))*gamma*tao*(k(x+1,t)-k(x-1,t)))+h(x-1,t);
        h(x,t+1) = ((-
tao*gamma*(h(x,t)^2+2*b*h(x,t))*gamma)/2*miu*i^2)*(h(x+1,t)-h(x-
1,t))*(k(x+1,t)-k(x-1,t))-
(2*tao*(h(x,t)^3/3+b*h(x,t)^2)*gamma)*(k(x+1,t)+k(x-1,t)-
2*k(x,t)))/(miu^2*i^2)+h(x,t-1);
    end
end
end

```

Plot.m 用于绘制图像

```
plot(We,puzhan,"black+-","linewidth",1);  
grid;  
axis equal;  
axis([-0.2,0.5,-4,-1.8]);  
hold on;  
plot(We,xiachen,"black*--","linewidth",1)  
  
plot(reeee(:,1),reeee(:,2),"black+-","linewidth",1);  
grid;  
axis equal;  
axis([-0.2,0.5,-4,-1.8]);  
hold on;  
plot(Re,xiachen,"black*--","linewidth",1)
```