

自行车约化动力学模型及控制

于瑞晗¹熊佳铭¹李博²王伟²刘才山^{1*}

¹北京大学, 工学院, 湍流与复杂系统国家重点实验室, 100871

²北京航空航天大学, 机械工程及自动化学院, 100191

摘要 本文基于 Gibbs-Appell 方程, 得到了 Whipple 自行车的约化动力学模型。在此基础上, 对自行车采取一种比例转向控制率, 得到了受控运动方程, 并分析了该方程的两类平衡点, 分别对应于自行车匀速直线运动和匀速圆周运动。这两种运动存在临界稳定速度, 本文通过数值仿真和实验对此进行了验证。

关键词: 自行车 约化动力学模型 比例控制 平衡点 稳定性

一、背景介绍

在已有文献中, 自行车的控制总是基于简化的动力学模型, 如倒立摆模型^[1]、质点模型^[2]、二级倒立摆模型^[3]。利用这些模型, 人们可以控制自行车进行稳定的直线运动, 但是由于缺乏对自行车动力学的理解, 很难实现自行车的圆周运动或动态转弯。因此, 为了提高自行车的性能, 需要建立一个完整的非线性动力学模型。根据我们已有工作^[4], 将 Gibbs-Appell^[5]方程应用于 Whipple 自行车模型是一种比较好的选择。该模型是一个包含完整约束和非完整约束的非线性多体动力学模型, 且具有约化形式。对自行车采取一种比例转向控制率, 利用该动力学模型, 可以得到一个二阶常微分方程来刻画自行车的受控运动。本文针对自行车匀速直线运动和匀速圆周运动所对应的平衡点进行了理论分析、数值仿真和实验验证。

二、研究内容

2.1 Whipple 自行车的 Gibbs-Appell 方程组

本文采用经典的 Whipple 自行车模型^{[4] [6]}, 即自行车由四部分刚体组成, 分别为后轮、后框架、前轮以及前框架。各部分刚体之间的相对运动认为是无摩擦的, 且前后车轮在路面上处于纯滚动状态。

选取三个准速度 $\dot{\sigma} = (\dot{\theta}, \dot{\delta}, \dot{\phi}_r)$, 其中 θ, δ, ϕ_r 分别代表自行车后框架倾角、车把转角和后轮转角。自行车的 Gibbs-Appell 方程组具有如下形式:

$$m_{ij}\ddot{\sigma}^j + c_{i,jk}\dot{\sigma}^j\dot{\sigma}^k = P_i + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中 $\tau_1 = 0$, τ_2 和 τ_3 分别为自行车上的车把转向力矩和后轮驱动力矩。另外上述方程组各系数仅是 θ, δ 的函数, 且具有以下性质: $c_{3,33}(\theta, \delta) \equiv 0$, $P_3(\theta, \delta) \equiv 0$, $c_{1,33}(0, 0) = c_{2,33}(0, 0) = P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0$ 。

2.2 控制率与受控运动方程

人们普遍认为, 自行车自稳定的关键是车把转向车身倾斜的方向, 根据这种现象我们采取如下的控制率:

$$\begin{cases} \delta = c_1\theta, \\ \dot{\phi}_r = \omega_0, \end{cases}$$

其中, c_1 是转向系数, ω_0 是后轮的给定角速度。我们选择 θ 作为唯一的独立坐标。将控制率带入 Gibbs-Appell 方程组, 我们得到控制自行车运动的二阶常微分方程:

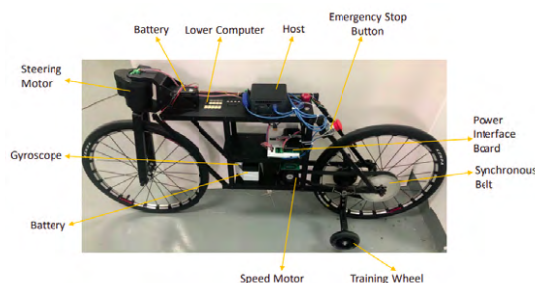
$$M_1^{c_1}(\theta)\ddot{\theta} + h_1^{c_1, \omega_0}(\theta, \dot{\theta}) = 0,$$

其中 $M_1^{c_1} = m_{11}(\theta, c_1\theta) + c_1 m_{12}(\theta, c_1\theta)$ 。

上述受控方程的平衡点分为两类, 分别代表自行车的匀速直线运动和匀速圆周运动。通过 Hurwitz 判据分析平衡点的指数稳定性, 发现转向系数 c_1 必须为负, 且存在匀速直线运动和匀速圆周运动的稳定速度临界值。我们通过数值仿真对该结论进行了验证。

2.3 实验验证

针对上述现象, 我们进行了实验验证, 实验模型如图 1 所示。实验采取了两种工况, 其中 $c_1 = -4$, ω_0 分别为 7rad/s 和 6rad/s。当 ω_0 为 7rad/s 时, 自行车做稳定的匀速直线



运动; 当 ω_0 为 6rad/s 时, 自行车做稳定的圆周运动。这与理论结果一致。

图 1 自行车实验模型

三、结论

本文基于 Gibbs-Appell 方程建立了 Whipple 自行车的约化动力学模型, 并提出了一种比例控制律来实现自行车的无人驾驶。我们得到了一个二阶常微分方程来刻画自行车的受控运动, 其平衡点对应于自行车的匀速直线运动和匀速圆周运动。在转向系数为负的情况下, 我们发现后轮存在一个临界角速度: 当角速度高于该临界值时, 匀速直线运动是稳定的; 当角速度稍低于该临界值时, 匀速直线运动不稳定, 但会出现一对对称的稳定匀速圆周运动解; 当角速度进一步降低时, 自行车会出现真正的失稳。本文通过数值仿真和实验证实了上述理论结果。

参考文献

- 1 Lowell, J. The stability of bicycles. American Journal of Physics, 1982, 50(12):1106-1112.
- 2 Getz N H, Marsden J E. Control for an Autonomous Bicycle. Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996, 2.
- 3 Keo L, Yoshino K, Kawaguchi M, et al. Experimental results for stabilizing of a bicycle with a flywheel balancer// IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2011, Shanghai, China, 9-13 May 2011. IEEE, 2011.
- 4 Xiong J, Wang N, Liu C. Stability analysis for the Whipple bicycle dynamics. Multibody System Dynamics, 2020, 48(4).
- 5 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 2012.
- 6 Meijaard J P, Papadopoulos J M, Ruina A, and Schwab A L. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. in Proceedings of the Royal Society of London A:

Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 463, pp. 1955–1982, The Royal Society, 2007.