

一个物体运动的优化模型及应用

苏永福

(天津工业大学 理学院 数学系, 天津 300160)

[摘 要] 建立了一类具广泛应用价值的物体运动非线性泛函优化模型, 包括目标泛函, 决策函数, 约束条件, 可行函数空间. 决策函数是能量消耗分配函数, 可行函数空间中的能量消耗分配函数确定目标泛函值, 该模型的最优解是使目标泛函值最大的能量分配函数. 这个非线性泛函优化模型, 表述了一类物体运动能量转化为机械功的实际问题. 例如机动车行驶中如何控制燃料消耗方式, 使燃油消耗最少. 运动员在赛跑中如何分配体能消耗使成绩最好等. 该文从非线性泛函变分及优化理论角度对该模型进行了定量探讨. 所得结果可应用于物体运动功能转化相关实际问题中. 该文也提出了若干公开问题.

[关键词] 泛函模型; 最优化; 能量分配函数; 最优解; 应用

[中图分类号] O176; O177.91 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-1454(2008)02-0094-06

1 模型建立及应用背景

设 $v(t)$, $f(t)$, $E(t)$ 是定义在闭区间 $[0, T]$ 上非负连续函数, 且 $v(t)$ 具连续导数, E_0 是正常数, $g(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上连续函数. 我们称下面的积分-微分方程组(1)为物体运动功能系统:

$$\begin{cases} D = \int_0^T v(t) dt, & (1.1) \\ \frac{dw}{dt} = f(t) - g(v(t)), & (1.2) \\ f(t)v(t) = E(t), & (1.3) \\ \int_0^T E(t) dt = E_0, & (1.4) \\ v(0) = 0. & (1.5) \end{cases} \quad (1)$$

物体运动功能系统(1)表述了单位质量物体在自存内能 E_0 转化为驱动力 $f(t)$ 而进行运动时的运动学状态. 其中 $g(v(t))$ 表示物体在运动中所受阻力, 阻力是速率 $v(t)$ 的函数. $E(t)$ 表示内能消耗率, 我们称其为能量分配函数. (1.5) 表示物体初始速率为零. 可以证明给定满足(1.4)的能量分配函数 $E(t)$, 可以确定物体运动速率 $v(t)$, 从而可以确定物体所运动的路程 D . 我们的问题是, 如何选择能量分配函数 $E(t)$, 使物体所运动的路程 D 最长. 这个能量分配函数 $E(t)$ 称为最优能量分配函数. 从而, 系统(1)可表述为如下非线性泛函优化模型:

$$\begin{cases} \text{Max } D = \int_0^T v(t) dt, & (2.1) \\ \frac{dw}{dt} = f(t) - g(v(t)), & (2.2) \\ f(t)v(t) = E(t), & (2.3) \\ \int_0^T E(t) dt = E_0, & (2.4) \\ v(0) = 0, & (2.5) \end{cases} \quad (2)$$

其中(2.1)是目标泛函, $E(t), v(t)$ 是决策函数, (2.2), (2.3), (2.4)与(2.5)是约束条件.

事实上, 决策函数 $E(t), v(t)$ 并非独立, 可消去一个而以一个为决策函数. 例如, 消去 $E(t)$ 使模型以 $v(t)$ 为唯一决策函数的模型为

$$\begin{cases} \text{Max } D = \int_0^T v(t) dt, & (3.1) \\ \int_0^T \left[v(t) \frac{dv(t)}{dt} + g(v(t))v(t) \right] dt = E_0, & (3.2) \\ v(0) = 0. & (3.3) \end{cases} \quad (3)$$

本文主要研究消去 $v(t)$ 而以能量消耗分配函数 $E(t)$ 为决策函数的优化模型.

关于非线性泛函优化模型(2)的一般定性与定量研究是十分有意义的. 在模型(2)中, 只要根据问题实际确定合理的阻力函数 $g(v(t))$, 该模型(2)即可合理刻划这一实际问题. 这时通过对模型(2)的优化求解或者定性研究, 即可得到对该实际问题有重要意义的结论. 例如机动车行驶中如何控制燃料消耗方式, 使燃油消耗最少. 运动员在赛跑中如何分配体能消耗使成绩最好等. 然而, 由于模型(3)中存在非线性积分微分方程(3.2), 其可解性研究至关重要. 因此在建模中还应考虑阻力函数 $g(v(t))$ 的确定是否利于非线性积分微分方程(3.2)的可解性或定性研究.

本文对模型(2)的一种约束方程可解的特殊形式进行了研究, 得到了有意义的结果. 关于非线性泛函优化模型(2)(3)的一般定性与定量研究我们将继续进行.

在(2)中取阻力函数 $g(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ 是给定常数, 模型(2)变为

$$\begin{cases} \text{Max } D = \int_0^T v(t) dt, & (4.1) \\ \frac{dv}{dt} = f(t) - \lambda v(t), & (4.2) \\ f(t)v(t) = E(t), & (4.3) \\ \int_0^T E(t) dt = E_0, & (4.4) \\ v(0) = 0. & (4.5) \end{cases} \quad (4)$$

Keller J B^[1,2]及苏永福等^[3]用模型(4)研究过赛跑最优速度控制问题. 本文继续运用变分及优化理论深入研究模型(4)的最优解存在性及能量消耗最优控制问题. 至于阻力函数 $g(v(t))$ 的其他可取形式已有文献讨论^[4-7].

定理1 微分方程(4.2)关于(4.3), (4.5)的初始问题在 $[0, T]$ 上有唯一连续解, 且其解由能量分配函数 $E(t)$ 确定.

证 由(4.2), (4.3)消去 $f(t)$, 得

$$\begin{aligned} \left[\frac{dv}{dt} + \lambda v(t) \right] v(t) &= E(t), \\ v(t) \frac{dv}{dt} + \lambda v^2(t) &= E(t), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [v^2(t)] + \lambda v^2(t) &= E(t). \end{aligned}$$

令 $u(t) = v^2(t)$, 则

$$\frac{du}{dt} + 2\lambda v(t) - 2E(t) = 0.$$

这是一阶线性微分方程, 满足初始条件 $u(0) = 0$ 的解为

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\int_0^t 2\lambda \xi d\xi} \int_0^t 2E(\xi) e^{\int_0^\xi 2\lambda \eta d\eta} d\xi, \\ u(t) &= 2e^{-2\lambda t} \int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi, \\ v(t) &= \sqrt{2} e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi}. \end{aligned}$$

由定理 1 的结果可知, 模型(4)的目标泛函可写为

$$D=\sqrt{2} \int_0^T e^{-\lambda} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi} dt.$$

从而模型(4)又可表述为

$$\begin{cases} \text{Max } D = \sqrt{2} \int_0^T e^{-\lambda} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi} dt, & (5.1) \\ \int_0^T E(t) dt = E_0. & (5.2) \end{cases} \tag{5}$$

由模型(5)可见, 在时间段 $[0, T]$ 上, 总能量 E_0 消耗率分配 $E(t)$ 完全决定了物体可运动的路程 D . 模型(5)的最优解就是使物体运动路程最长的能量 E_0 消耗率分配方式 $E^*(t)$. 例如, 当汽车所存燃油给定时, 如何确定消耗率分配方式, 使汽车能行驶最长路程. 同时对田径运动员而言, 如何分配体能的消耗, 能使在规定时间内所跑路程最长. 这个问题的对偶问题是, 在规定长度 D_0 的路段上, 如何确定燃油消耗方式, 可使汽车行驶时间最短. 赛道运动员如何分配体能的消耗, 才能使成绩最好. 对偶问题的优化模型为

$$\begin{cases} \text{Min } T = T(v(t)), & (6.1) \\ \int_0^T v(t) dt = D_0, & (6.2) \\ \int_0^T \left[v(t) \frac{dv(t)}{dt} + \lambda_v(t) \right] dt = E_0, & (6.3) \\ v(0) = 0. & (6.4) \end{cases} \tag{6}$$

2 模型的最优解

满足约束条件的决策函数全体称为可行域. 对模型(5)易证下面结论成立.

定理 2 模型(5)的可行域是 Banach 空间 $C[0, T]$ 中非空闭凸集. 目标泛函连续且在可行域上有界, 从而模型(5)的最优解存在.

证 由于

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2} e^{-\lambda} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi}, \quad v^2(t) = 2 e^{-2\lambda} \int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi, \\ |v^2(t) - v_0^2(t)| &\leq 2 e^{-2\lambda} \int_0^t |E(\xi) - E_0(\xi)| e^{2\lambda \xi} d\xi \\ &\leq 2 e^{-2\lambda} \|E(\xi) - E_0(\xi)\| \int_0^t e^{2\lambda \xi} d\xi \\ &= \|E(\xi) - E_0(\xi)\| \frac{2(e^{2\lambda t} - 1)}{2\lambda e^{2\lambda}} \\ &\leq \|E(\xi) - E_0(\xi)\| \frac{e^{2\lambda t} - 1}{\lambda}. \end{aligned}$$

对任意 $\epsilon > 0$, 当 $\|E(t) - E_0(t)\| < \epsilon \frac{\lambda}{e^{2\lambda} - 1}$ 时, 有 $\|v^2(t) - v_0^2(t)\| < \epsilon$. 易见目标泛函连续. 令可行域为 K , 则

$$K = \left\{ E(t) \in C[0, T] : \int_0^T E(t) dt = E_0 \right\}.$$

易见 K 是 Banach 空间 $C[0, T]$ 中非空闭凸集且目标泛函在 K 上有界.

现在的问题是, 如何求得模型(5)的最优解. 本文应用阶梯函数法将模型(5)转化为有限维空间 \mathbb{R}^n 中非线性规划问题. 得到了模型(5)的近似最优解. 进而得到了模型(5)最优解的部分性质. 令

$$K^* = \left\{ E(t) : \int_0^T E(t) dt = E_0 \right\},$$

这里 K^* 是区间 $[0, T]$ 上全体 Riemann 可积且积分值等于 E_0 的函数之集. 我们称如下模型(7)是模型(5)的扩展模型.

$$\begin{cases} \text{Max } D = \sqrt{2} \int_0^T e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi} dt, & (7.1) \\ E(t) \in K^*. & (7.2) \end{cases} \quad (7)$$

若扩展模型(7)的最优解 $E^*(t)$ 不连续, 则称 $E^*(t)$ 为模型(5)的近似最优解. 对给定正整数 n 及非负数 $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, 定义模型(7)的决策函数为

$$E_n(t) = \begin{cases} E_1, & t \in [T_0, T_1], \\ E_2, & t \in [T_1, T_2], \\ E_3, & t \in [T_2, T_3], \\ \dots & \dots \\ E_i, & t \in [T_{i-1}, T_i], \\ \dots & \dots \\ E_n, & t \in [T_{n-1}, T_n], \end{cases} \quad (8)$$

这里 $T_i = \frac{iT}{n}, i=0, 1, 2, 3, \dots, n$ 且满足 $\sum_{i=1}^n \frac{T}{n} E_i = E_0$. 对于决策函数 $E_n(t)$, 其目标泛函值为

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{2} \int_0^T e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t E(\xi) e^{2\lambda \xi} d\xi} dt = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t E_i e^{2\lambda \xi} d\xi} dt \\ &= \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t e^{2\lambda \xi} d\xi} dt = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{e^{2\lambda t}}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sqrt{1 - e^{-2\lambda t}} dt. \end{aligned} \quad (1')$$

令 $\sqrt{1 - e^{-2\lambda t}} = s$, 则 $1 - e^{-2\lambda t} = s^2, dt = \frac{s}{\lambda(1-s^2)} ds$, 从而

$$\begin{aligned} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sqrt{1 - e^{-2\lambda t}} dt &= \int_{\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}}}^{\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}} \frac{s^2}{\lambda(1-s^2)} ds = \frac{1}{\lambda} \int_{\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}}}^{\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}} \left(\frac{1}{1-s^2} - 1 \right) ds \\ &= \frac{1}{2\lambda} \{ \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}) - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}}) \\ &\quad - \ln(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}) + \ln(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}}) \} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} (\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}} + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}}) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})}{(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} [\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}} - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}]. \end{aligned} \quad (2')$$

由(1'), (2')我们得到

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_i} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})}{(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^n \sqrt{E_i} \frac{1}{\lambda} [\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}} - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}]. \end{aligned} \quad (3')$$

将(3')作为目标函数, 结合约束条件 $\sum_{i=1}^n \frac{T}{n} E_i = E_0$, 形成一个非线性规划. 这个非线性规划的最优解 $E_n(t)$ 就是模型(7)与模型(5)的近似最优解. 我们将这个非线性规划表示为简洁形式

$$\begin{cases} \text{Max } D = \sum_{i=1}^n c_i \sqrt{E_i}, & (9.1) \\ \sum_{i=1}^n E_i = \frac{nE_0}{T}, & (9.2) \end{cases} \quad (9)$$

这里 $E_i, i=1, 2, 3, \dots, n$ 是决策变量, 目标函数中系数 $c_i, i=1, 2, 3, \dots, n$ 为

$$c_i = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})}{(1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}})(1 + \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}})} + \frac{\sqrt{1 - e^{-2\lambda T_{i-1}}} - \sqrt{1 - e^{-2\lambda T_i}}}{\lambda\sqrt{\lambda}}, \tag{4'}$$

其中 $T_i = \frac{iT}{n}, i=1, 2, 3, \dots, n$.

若令 $x_i = \sqrt{E_i}$, 则规划(9)等价于下面规划(10)

$$\begin{cases} \text{Max } D = \sum_{i=1}^n c_i x_i, & (10.1) \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{nE_0}{T}. & (10.2) \end{cases} \tag{10}$$

非线性规划(10)可用 Lagrange 乘数法求解. 做 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \lambda \left[\frac{nE_0}{T} - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right],$$

解偏导方程组

$$\begin{cases} c_i - 2\lambda x_i = 0, & i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ \frac{nE_0}{T} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

得到

$$x_i = \frac{c_i}{2\lambda}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{4\lambda^2} = \frac{nE_0}{T}, \quad 2\lambda = \frac{\sqrt{T \sum_{i=1}^n c_i^2}}{\sqrt{nE_0}},$$

从而

$$x_i = \frac{c_i}{2\lambda} = \frac{c_i}{\sqrt{T \sum_{i=1}^n c_i^2}}, \quad i=1, 2, 3, \dots, n.$$

由此得到

$$E_i = x_i^2 = \frac{c_i^2}{4\lambda^2} = \frac{nE_0}{T} \frac{c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \frac{nE_0}{T} \frac{c_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i^2}, \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \tag{5'}$$

从而(5')是非线性规划(9)的最优解. 进而使阶梯函数 $E_n(t)$ (由(8)式定义)是模型(5)与(7)的近似最优解. 由(5')式可见, 这里的决策变量 E_i 由系数 c_i 确定. 从而我们可以通过对系数 c_i 的计算最终确定决策变量 E_i 的取值. 下面我们使用 Mathematica 软件来计算 c_i 和 E_i 的取值. 我们分别取 $\lambda=1, 2, 3, 4$ 及取 $n=100, T=100, E_0=1$, 这时模型(5)与(7)的近似最优解 $E_n(t)$ 的拟合示意图像分别如图 1—图 4 所示.

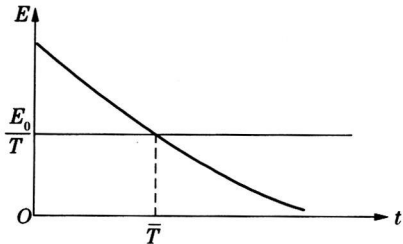


图 1

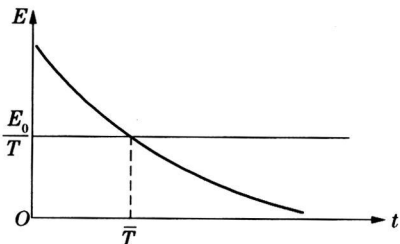


图 2

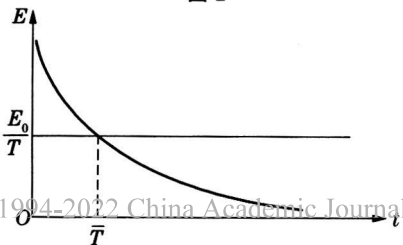


图 3

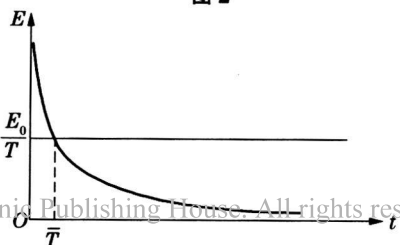


图 4

由上述图 1—4 可知,对于模型(5)表述的功能转化系统,其最优解 $E(t)$ 是递减的,即能量消耗速率是递减的.将时间段 $[0, T]$ 分为两段 $[0, T]$, $[T, T]$, 在 $[0, T)$ 上消耗速率大于平均消耗速率 $\frac{E_0}{T}$, 在 $(T, T]$ 上消耗速率小于平均消耗速率 $\frac{E_0}{T}$.

至此可知,当模型(2)中的函数 $g(u) = \lambda u$ 时,即是物体运动阻力与速度成正比.物体所存能量一定时,为使物体所运动路程最长,其能量消耗速率应随时间而递减.整个时间段分为两段,前段 $[0, T)$ 能量消耗速率大于平均速率 $\frac{E_0}{T}$, 后段 $(T, T]$ 能量消耗速率小于平均速率 $\frac{E_0}{T}$. 这时时间分段点 T 的确定十分重要.并且,还需对能量消耗速率函数 $E(t)$ 的形态进行更精确的研究与探讨.该模型更一般形式的定性与定量研究对许多物体运动问题有重要意义.为此,本文提出如下未解问题.

3 未解的问题

1. 如何计算极限函数 $E(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(t)$ 及近似最优解的误差估计;
2. 在模型(2)中,如何根据实际问题来确定合理非线性函数 $g(u)$;
3. 非线性函数 $g(u)$ 的性态与模型最优解的控制关系的研究;
4. 能量消耗速率函数 $E(t)$ 形态的进一步研究;
5. 该模型在哪些方面具有应用;
6. 该模型的更一般形式如何建立;
7. 如果物体还有能量输入,如何建立模型.

[参 考 文 献]

- [1] Keller J B. Optimal velocity in a race[J]. Amer Monthly, 1974, (81): 474—480.
- [2] Keller J B. A theory of competitive in optimal strategies in sports[M]. New York: Ladany S P and Machol R E eds. North-Holland Amsterdam, 1977.
- [3] 苏永福,张武军. 赛路速度的能量控制数学模型[J]. 体育数学与体育系统工程, 1991, 1(2): 7—10.
- [4] 韩宗奇. 用滑行试验法测定汽车空气阻力系数研究[J]. 汽车技术, 2001, 24(5): 24—26.
- [5] 纪文君. 海面阻力系数的流体力学研究[J]. 海洋技术, 2002, 21(2): 17—21.
- [6] 余志生. 汽车理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.
- [7] 葛新发, 等. 赛艇兴波阻力的计算[J]. 武汉体育学院学报, 2004, 38(4): 64—67.

A Nonlinear Functional Optimal Model of Motion of Substance and Applications

SU Yong-fu

(Department of Mathematics, School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China)

Abstract: The article will establish a nonlinear functional optimizing model of motion of substance which is constituted by objective functional, decision function, constraint condition and feasible space of function. The decision function, that is expressed the speed of distribute of energy. This nonlinear functional optimizing model will express a kind of problem which about the transform energy into mechanical work of motion of substance. This article will give several results about optimal solution and applications by using variational method. The article will also advance some open problems.

Key words: functional model; optimization; optimal solution; motion of substance; applications