

骑自行车人体运动模型及动力学方程

勾靖国¹, 刘晓军²

(1. 山西大同大学煤炭工程学院, 山西大同 037003; 2. 楚天科技股份有限公司, 湖南长沙 410600)

摘 要: 文章通过分析骑自行车人体各环节的连接及运动, 将人体简化为具有完整约束铰链的有根树形多刚体系统, 利用罗伯逊-维登伯格算法推导了人体动力学方程。

关键词: 多刚体系统; 人体模型; 动力学方程

中图分类号: X703.5

文献标识码: A

在我国这样一个自行车王国中, 骑自行车已经司空见惯, 但如何将其在竞技中取得好的成绩却值得研究。因此, 研究骑自行车的人体动力学有着重要意义。

研究人体的运动, 在不考虑肌肉变形对各肢体质分布影响的前提下可以把人体简化为多刚体系统。对于不同的研究方向, 研究者提出了不同的人体模型: 不同的模型对应不同的运动, 四刚体人体模型用来分析潜水运动的过程是由 Miller 首先建立的; 十刚体力学模型用于模拟空间运动是由 Passerello & Huston^[1]建立的; Hanavan^[2]和 Hatze^[3]分别提出了能普遍应用十五体模型和跳远起跳的十七刚体运动员人体模型。

牛顿-欧拉法直观概念清楚, 但未知数多计算量大; 拉格朗日方程方法理论性和逻辑性强, 但推导过程繁冗; 凯恩方法表达式简单, 物理意义含糊方程不直观; 罗伯逊-维登伯格方法应用图论描述多刚体系统结构, 物理意义明确而形式简单。

在总结已有研究模型的基础上, 本文采用罗伯逊-维登伯格方法, 用完整约束铰链的有根树形多刚体系统建立人体动力学模型。通过力学分析和理论推导得到了骑自行车过程中人体的动力学方程。

1 人体多刚体系统模型的构建

本文在 Hanavan 模型基础上将骑车状态的人体系统建立为由铰连接的 12 个多刚体系统模型。刚体 $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{12}$ 分别代表零刚体及人体的左脚, 左小腿, 左大腿, 身躯, 右大腿, 左上臂, 右上臂, 头颈, 右小腿, 左前臂和手, 右前臂和手, 右

脚; 铰 H_1, H_2, \dots, H_{12} 分别代表相应的关节。 B_0, B_1 之间的连接简化为允许被连接刚体有相对移动的 4 个自由度的铰链, 见图 1, 余刚体之间的连接简化为纯转动球铰连接。应用图论方法表示人体模型的有向系统图, 见图 2。此系统为具有完整约束铰链的有根系统, 每个刚体由顶点表示 $S_i (i=0, 1, 2, \dots, 12)$; 铰用有向弧表示 $U_a (a=1, 2, \dots, 12)$ 。

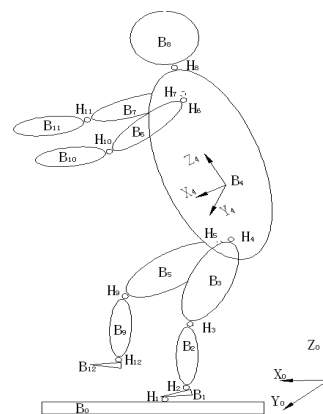


图1 人体多刚体系统模型

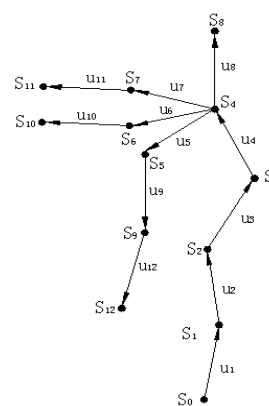


图2 人体有向系统图

2 树形多刚体系统结构的数学表达

2.1 关联矩阵及通路矩阵

由图2可得人体模型关联矩阵 S 和通路矩阵 T 。关联阵 S 是用来表示模型中刚体和铰链的约束状态的一个矩阵, 关联矩阵 S 中元素 S_{ia} 定义为:

$$S_{ia} = \begin{cases} 1, & \text{弧 } U_a \text{ 与顶点 } S_i \text{ 关联且背离 } S_i \\ -1, & \text{弧 } U_a \text{ 与顶点 } S_i \text{ 关联且指向 } S_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $i=0, 1, 2, \dots, 12; a=1, 2, \dots, 12$ 。

通路矩阵 T 描述的是系统内各刚体与零刚体之间的通路状态, 关联矩阵 T 中元素 T_{ai} 定义为:

$$T_{ai} = \begin{cases} 1, & \text{弧 } U_a \text{ 属于 } S_0 \text{ 至 } S_i \text{ 的通路且指向 } S_0 \\ -1, & \text{弧 } U_a \text{ 属于 } S_0 \text{ 至 } S_i \text{ 的通路且背离 } S_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $a=1, 2, \dots, 12$ 。

则根据定义可得到 S, T 为了保证描述的一致性, 球铰采用卡尔登角为广义坐标, 这时 $P_{ai} \kappa_{ai}$ 分别表示铰链的转轴单位矢量, 滑移轴方向的一个单位矢量。

2.2 铰链位置矢量矩阵与通路矢量矩阵

铰链位置矢量矩阵与通路矢量矩阵是刚体模型中参数的矢量表达。

刚体 B_i 上铰链的分布情况用铰链位置矢量来表示。铰链位置矢量矩阵 C 的元素定义为: $C_{ia} = S_{ia} c_{ia}, (i, a=1, 2, \dots, 12)$; 通路矢量矩阵定义 D 为: $D = CT$ 。

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3 具有完整约束铰链系统的广义内力列阵

系统内除 B_0, B_1 之间多加一个平动力元件外, 其余只加一个转动动力元件, 得到系统的广义内力列阵。

$$Q = (\alpha^T S + \beta^T \times P) \cdot X - P \cdot Y \quad (1)$$

$\rho_{i^*(a)a}, \rho_{i^*(a)a}$ 是两个刚体与力元件的连接点对各自质心的位置; X, Y 分别为力元对刚体作用的内力和内力偶矩, 其中:

$$\begin{cases} \alpha = (PT \times CT - \kappa T)^T \\ \beta = -(PT)^T \\ \kappa_{al} = \frac{\partial C_{i^*(a)a}}{\partial q_{al}} \end{cases} \quad (a, l=1, 2, \dots, 12);$$

$$P_{ia} = S_{ia} \rho_{ia} \quad (i, a=1, 2, \dots, 12) \quad (2)$$

3 人体多刚体系统动力学方程

将骑车状态的人体运动的模型简化成有根树形多刚体系统, 他们之间由完整约束铰链约束, 由多刚体系统动力学、计算多体系动力学^[4-5]可知, 其动力学方程为:

$$A^* \ddot{q} = B^* \quad (3)$$

q 是多刚体系统的广义坐标。

$$A^* = (PT) \cdot K \cdot (PT)^T - [PT \times C \cdot (TmT) \kappa^T] - [PT \times C \cdot (TmT) \kappa^T] + \kappa (TmT) \kappa^T \quad (4)$$

$$B^* = (PT) \cdot [K \cdot V + G - L + (CT) \times (F + mT^T h - m\ddot{r}_{01} 1_{12}) - (\kappa T) \cdot [F + mT^T (g + h) - m(CT)^T \times V - m\ddot{r}_{01} 1_{12}]] + Q \quad (5)$$

m_i 是刚体 B_i 的质量; $m = \text{diag}(m_1 m_2 \dots m_{12})$; A^* 是广义质量阵; F, L 是作用在系统内各刚体上的主动里主矢和主矩的 12×1 列阵, 是纯转动铰链系统刚体质心的加速度; J_i 是刚体对质心的惯性张量, $J = \text{diag}(J_1 J_2 \dots J_{12})$ 。根据增广体质心的定义可得出:

$$\sum_{j=1}^{12} b_{ij} m_j = 0, (i=1, 2, \dots, 12) \quad (6)$$

在通路矢量 d_{ij} 和增广体矢量 b_{ij} 之间的关系式。

$$d_{ij} = b_{i0} - b_{ij} (i, j=1, 2, \dots, 12) \quad (7)$$

矩阵 K 为增广矩阵元对其上通向零刚体的铰接点的惯性张量, 它的元素如下矩阵。

$$K_{ij} = \begin{cases} J_i + \sum_{k=1}^{12} m_k (d_{ik}^2 E - d_{ik} d_{ik}), (s_i = s_j) \\ M(b_{j0} \cdot d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}), (s_i < s_j) \\ M(d_{ji} \cdot b_{i0} E - d_{ji} b_{i0}), (s_i > s_j) \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $i, j=1, 2, \dots, 12$ 。

κ 和 P 分别表示转轴矩阵和滑移轴矩。

$$\begin{cases} V = -T^T(\dot{\varpi} + \dot{\varpi}^*) + \dot{\varpi}_0 1_{12} \\ \dot{\varpi} = \beta \dot{q} + \dot{\varpi}_0 1_{12} \\ \dot{\varpi}^* = \dot{\varpi}_{i^*(a)} \times \Omega_a \\ \Omega_a = \sum_{l=1}^3 p_{al} \dot{q}_{al} \end{cases} \quad (9)$$

$\varpi + \varpi^*$ 是广义坐标及其对时间的一次导数的函数。

h 是具有如下元素的列阵:

$$\begin{cases} h_a = s_a + 2\omega_{i^*(a)} \times \dot{c}_{i^*(a)} \\ \dot{c}_{i^*} = \kappa^T \dot{q} \\ s_a = \sum_{l=1}^3 \sum_{r=1}^3 \frac{\partial^2 c_{i^*(a)r}}{\partial q_{al} \partial q_{ar}} \dot{q}_{al} \dot{q}_{ar} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $a = 1, 2, \dots, 12$, G 是具有如下元素的列阵:

$$G_i = M \left\{ \sum_{j=i} d_{ij} \times [\omega_j \times \omega_j \times b_{j0}] + b_{i0} \times \sum_{j \neq i} \omega_j \times \omega_j \times d_{ji} \right\} + \omega_i \times K_{ii} \quad (11)$$

具体到个人, 测量到他的身高体重后, 利用中国人体各环节质量质心对体重身高的二元回归方程系数表及给出的回归方程算出所要的数据, 然后代入上面的方程中就可算出人体动力学方程。

4 结论

本文通过多刚体动力学, 把骑自行车的人体简化为有根树形多刚体系统, 其相互间通过完整的铰链约束, 通过编写程序用计算机可以算出人体的角速度、质心加速度和各铰点的关节力矩。

参考文献

- [1] Passerello G E, Huston R L. Human attitude control [J]. J Biomechanics, 1971, 4(2): 95 - 102.
- [2] Hanavan E P. A mathematical model of the human body [R]. AMRL Technical Report (TR - 64 - 102). Wright - Patterson Air Force Base, OH, 1964.
- [3] Hatze H. A comprehensive model for human motion simulation and its application to take-off phase of the long jump [J]. J Biomechanics, 1981, 14(3): 136 - 142.
- [4] 袁士杰, 吕哲勤. 多刚体系统动力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1992.
- [5] 洪嘉振. 计算多体系动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

Human Motion Model and Dynamic Equation of Bicycle Riders

GOU Jing-guo¹, LIU Xiao-jun²

(1. School of Coal Engineering, Shanxi Datong University, Datong Shanxi, 037003;
2. Truking Technology Limited, Changsha Hunan, 410600)

Abstract: Based on the analysis of riding a bicycle, the human body's linking and moving, the human body is simplified as the holonomic constraints of a hinge-tree multi-body system, the dynamics equations of human body were found by using Roberson-Wittenburg method.

Key words: multi-body system, human model, dynamic equation

[责任编辑 石白云]

(上接第49页)

A New Topological Index N for the Heat of Combustion of Alkyl Benzene

GENG Zhe, QI Zheng-xing, WU Qi-xun

(Shool of Chemistry and Life Science, Qinghai University for Nationalities, Xining Qinhai, 810007)

Abstract: A general empiric formula which is used to correlate thermodynamic properties with molecular topological indexes of alkyl benzenes is proposed in this paper as follows: $H = a \cdot N + b \cdot N/T + c \cdot T/E + d$, where Y stands for thermodynamic property of a alkyl benzene, are studied through the regression and calculation on computer. The correlation coefficients and mean relation errors show the result is satisfactory.

Key words: Topological index; alkyl benzene; heat of combustion

[责任编辑 杨德兵]