

《音乐与数学》研究题

2025—2026 学年第一学期

从下列 6 个题目中 **任选一题**

1 管乐器的超吹 (overblow)

超吹可以激发高次泛音, 从而在不改变指法的情况下演奏出更高的音. 记未超吹时音高的基频为 f . 长笛作为开管, 可以产生各次泛音, 所以超吹时发出 $2f$ 频率的音, 即高八度的音级. 单簧管作为闭管, 只能产生偶次泛音 ($3f, 5f, \dots$), 所以单簧管超吹时得到的是高 12 度的音级, 频率为 $3f$.

然而同样作为闭管乐器, 双簧管和唢呐超吹时得到的却是高八度、而非高 12 度的音. 研读参考文献, 试对此现象作出理论解释.

参考文献

- [1] David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 第 3 章.
- [2] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*, Vol. I, The MIT Press, Cambridge, 2006, 第 8 章.
- [3] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991, 第 2 章、第 3 章.

2 我国古代律制问题·其一

在我国古代文献中有不少关于生律过程的描述,但也给后人留下一些有趣的问题.例如:《管子·地员》中描述的三分损益法可以产生十二律,与《吕氏春秋》中描述的生律方法相比,二者各自产生的律制是相同的吗?又如,在《吕氏春秋》的生律过程中,为何上生得到蕤宾后,没有按照上下交替的规则进行下生,而是再次上生得到大吕?研读参考文献,对上述问题提出你自己的观点,并加以论证.

参考文献

- [1] 刘永福,《吕氏春秋》音律相生法的分析和解读,中国音乐学,2017(3): 67-74.
- [2] 薛冬艳,十二律旋宫走向历法、律法解——释左旋、右旋及损益相生问题,中国音乐,2017(1): 155-162.
- [3] 宋克宾,需回归原典、分清语境解读古代乐律问题,音乐探索,2014(1): 80-85.
- [4] 宋克宾,十二律“三分损益”上下相生究竟是什么在上生、下生?中国音乐,2013(4): 57-62.
- [5] 丁慧,“大阴阳与蕤宾重上”和“小阴阳与蕤宾下生”,湖北师范学院学报(哲学社会科学版),Vol. 32(2012), no. 1, 58-69.

3 机器作曲 · 遗传算法

1. 采用下述方法 之一产生初始种群

(a) 从具有相同节拍的若干歌曲、乐曲中选取 10 ~ 20 个长度相等 (例如 4 小节) 的片段.

(b) 随机产生: 给定乐音体系

$$S = \{F_3, \sharp F_3, \dots, B_3, C_4, \sharp C_4, \dots, B_4, C_5, \sharp C_5, \dots, \sharp F_5, G_5\}.$$

随机选取 S 中的音级, 配以不同的时值, 产生 10 ~ 20 段 4/4 拍、4 小节的“旋律”, 其中音符的最短时值为八分音符.

2. 根据课上介绍, 搜索相关参考文献. 在任何一个软件平台 (例如 MATLAB, Mathematica, Java, Python, C++ 等) 上实现遗传算法. 遗传操作应包括交叉 (crossover), 变异 (mutation) 以及对旋律进行的移调、倒影、逆行变换等.

3. 探索建立适应度函数 (fitness function), 用以指导旋律进化的方向.

4. 把初始种群作为遗传算法的输入, 对其进行遗传迭代, 看是否能够得到较好的音乐片段.

5. 真实、客观、准确地描述你所完成的各项工作及得到的实际结果, 形成完整的实验报告. 着重讨论适应度函数的选取对于最终产生旋律的音乐特性之间的联系, 以及对算法本身效率的影响.

4 我国古代律制问题 · 其二

1978 年出土的曾侯乙编钟, 以其宏大的规模、完备的音列和“一钟双音”的结构震惊世界, 是研究先秦音乐和古代科技的宝贵实物. 请围绕编钟的声学原理与律制特点回答以下问题:

1. 曾侯乙编钟具有“一钟双音”的独特性质. 请研究其发声的物理原理, 解释为何敲击不同部位可以产生两个不同音高的声音;
2. 曾侯乙编钟具有完备的音列, 其音阶、音程关系反映了当时高超的乐律学水平. 基于钟上铭文和实测音高, 学界对曾侯乙编钟的律制存在多种解读. 请调研相关文献, 分析曾侯乙编钟的律制特点 (例如, 它更接近于三分损益律、纯律还是某种独特的律制?).
3. (选答) 司马迁在《史记·律书》中记载“钟律调自上古”, 你认为什么是钟律? 钟律是一种律制么? 对上述问题提出你自己的观点, 并加以论证.

参考文献

- [1] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991, 第 21 章.
- [2] 缪天瑞, 律学 (第三次修订版), 北京: 人民音乐出版社, 1996, §.17、§.133-136.
- [3] 黄翔鹏, 曾侯乙钟、磬铭文乐学体系初探, 音乐研究, 1981 (1):24-55.

5 简约主义

20 世纪 60 年代, 以史蒂夫·赖希 (Steve Reich)、菲利普·格拉斯 (Philip Glass) 等为代表的一批美国作曲家开创了“简约主义” (Minimalism) 音乐流派.

这一流派的一个核心特征是，音乐不再由传统的主题发展构成，而是采用简单的和声语言重复短小的音乐动机，使用最少的音乐材料达到尽可能大的效果。请你在下面两首曲目中自选一首：

1. 史蒂夫·赖希，《钢琴相位》(Piano Phase)
2. 史蒂夫·赖希，《小提琴相位》(Violin Phase)

利用音乐与数学的知识，做如下的分析：

1. 识别出构成音乐基础的一个或多个最短的、不断重复的旋律/节奏片段。用谱例和数学模型精确描述这些“片段”的内部结构。
2. 分析这些“片段”在乐曲中是如何演变的，请识别并用清晰的数学模型描述其背后的数学“算法”或“规则”。
3. 你所建立的两个数学模型是否有某种几何结构？如果有的话，请分析并可视化它。

并回答下面两个问题：

1. 你认为你所选的这首曲子的结尾是预先确定的吗？不看完整的乐谱，你能判断出来吗？为什么这是一个重要的音乐问题？谈谈你的理解。
2. (选答) 从数学逻辑和思想文化两方面，讨论简约主义的创作方法与传统西方音乐曲式结构的根本异同。

调研相关文献，对上述问题提出你自己的观点，加以论证并形成一份完整的报告。

6 最平滑圈与六音系统

课程中所授音网与新黎曼理论，用数学模型描述了大三和弦、小三和弦之间的和弦关系与转换方法。使用新黎曼主义理论做分析的学者们，也利用数学模型扩展其边界，建构了许多与新黎曼理论存在联系的和弦转换图表。请你：

1. 阅读提供的参考文献，分析并举例说明其与课程中所授音网与新黎曼理论的联系与异同；
2. 自选中、外曲目各一，使用参考文献中提出的模型做曲目分析。

参考文献

- [1] Cohn, Richard. 1996. "Maximally Smooth Cycles, Hexatonic Systems, and the Analysis of Late-Romantic Triadic Progressions." *Music Analysis* 15 (1): 9.

扩展阅读

- [1] Childs, Adrian P. 1998. "Moving beyond Neo-Riemannian Triads: Exploring a Transformational Model for Seventh Chords." *Journal of Music Theory* 42 (2): 181.
- [2] Douthett, Jack, and Peter Steinbach. 1998. "Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition." *Journal of Music Theory* 42 (2): 241.