第二周习题参考答案

1. 由归一化条件可知:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}|Ae^{kx}|^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}|Ae^{-kx}|^2\mathrm{d}x=1.$$

由此得: $A^2=k$.

在$|x|\le 1/k$找到粒子的概率:

$$P=\int_{-1/k}^{1/k}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{A^2}{k}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)=1-\frac{1}{e^2}.$$

2. 设$V(-x)=V(x)$, 则对应于任何一个能量本征值E, 总可以找到方程 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi+V(x)\psi=E\psi$的一组完备的解, 它们中每一个都具有确定的宇称（奇偶性）。(注意, 每一个解的宇称并不一定相同。)

证明

假设$\psi(x)$为定态薛定谔方程的一个解, 属于能量E。当$x\to -x$时, $\frac{\mathrm{d}^2}{[\mathrm{d}(-x)]^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}$, 按假设$V(-x)=V(x)$, 所以定态薛定谔方程化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(-x)+V(x)\psi(-x)=E\psi(-x),$$

可见$\psi(-x)$也是方程的一个解, 也属于E。我们可以构造下列具有确定宇称的波函数

$$f(x)=\psi(x)+\psi(-x)=f(-x),$$
$$g(x)=\psi(x)-\psi(-x)=-g(-x),$$

$f(x)=f(-x)$具有偶宇称, $g(x)=-g(-x)$具有奇宇称。$f(x)$与$g(x)$也是方程的解, 属于E。而$\psi(x)$与$\psi(-x)$（同属于E）均可用$f(x)$和$g(x)$线性叠加来表示, 即

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)],$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(x)-g(x)],$$

定理得证。

3. 设粒子限制在一维无限深势阱中运动,

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0,x>a\end{cases}$$

解的形式为

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx\,, k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$

由$x=0$和$x=a$处的边界条件可得$B=0, k_n=\frac{n\pi}{a}, n=1,2,3,\cdots$，确定定态波函数中系数$A$的值。

由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x=1,$$

可得

$$\int_0^a A^2\sin^2 kx\,\mathrm{d}x=1,$$

$$\Rightarrow A^2\int_0^a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x=A^2\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\cos 2n\pi+\frac{1}{2}\right)=\frac{aA^2}{2},$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{a}}.$$

4. 设粒子限制在二维无限深势阱中运动,

$$V(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x<a,0<y<b\\ \infty, & \text{其他地方}\end{cases}$$

求粒子能量允许值和相应的波函数。

提示：二维无限深势阱可改写为

$$V(x,y)=V_a(x)+V_b(y),$$

$$V_a(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0, x>a\end{cases}, \qquad V_b(y)=\begin{cases}0, & 0\le y\le b\\ \infty, & y<0, y>b\end{cases}$$

然后用分离变量法求解。

因二维无限深势阱可写为$V(x,y)=V_a(x)+V_b(y)$，可用分离变量法，设

$\psi(x,y)=\psi_a(x)\psi_b(y)$，满足的方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_a(x)\psi_b(y)+[V_a(x)+V_b(y)]\psi_a(x)\psi_b(y)=E\psi_a(x)\psi_b(y), \tag{1}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V_a(x)\right]\psi_a(x)\psi_b(y)=E_a\psi_a(x)\psi_b(y), \tag{2}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V_b(y)\right]\psi_a(x)\psi_b(y)=E_b\psi_a(x)\psi_b(y), \tag{3}$$

$$E=E_a+E_b. \tag{4}$$

方程(2)中$\psi_a(x)$的解可以表示为

$$\psi_a(x)=A\sin kx+B\cos kx\,, \qquad k=\sqrt{\frac{2mE_a}{\hbar^2}}, \tag{5}$$

对于无限深势阱，要求波函数在阱壁上及阱壁外为 0，可以得到

$$B=0, \qquad \sin kx=0, \tag{6}$$

$$k_n=\frac{n\pi}{a}, \qquad E_{an}=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2ma^2}, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{7}$$

利用归一化条件可得

$$\psi_a(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{8}$$

同理方程(3)中$\psi_b(y)$的解为

$$\psi_b(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad E_{bn}=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2mb^2}, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9}$$

因此粒子能量$E=E_a+E_b$的允许值为

$$E_{n_1n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right), \quad n_1,n_2=1,2,3,\cdots$$

相应的波函数为

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\left(\frac{n_1 \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{b} y\right).$$