Problem 1

1. $f_x \frac{X}{Z} + c_x = x, f_y \frac{Y}{Z} + c_y = y$

2. $$Z\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & & c_x & 0 \\ & f_y & c_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem 2

根据系数进行匹配可得

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.375 & -4.5 \\ 0.375 & 7.5 \end{bmatrix} = sRK$$

结合相似、仿射矩阵的形式可知，我们可以设：

$$sR = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & \frac{1}{k_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & \frac{1}{k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 & -4.5 \\ 0.375 & 7.5 \end{bmatrix}$$

解上述线性方程，可知：

$$H_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_S = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} cos\frac{\pi}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} sin\frac{\pi}{4} & 2 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} sin\frac{\pi}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{2} cos\frac{\pi}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 3

1. **仿射变换的表达式或矩阵形式**：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

   其中 (x, y) 是原始坐标，(x', y') 是变换后的坐标，a, b, c, d 是线性变换的系数，t_x, t_y 是平移分量。

2. **平行线段长度比的代数形式**：
   假设有两个平行线段 AB 和 CD，它们在同一直线上，长度分别为 L_{AB} 和 L_{CD}。

   我们假设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$，则长度分别为：

$$L_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$L_{CD} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

3. **证明长度比在仿射变换下不变**：
   考虑上述仿射变换，应用于点 A, B, C, D，得到变换后的点 A', B', C', D' 的坐标。根据仿射变换的定义，有：

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

   其中 i 代表点 A, B, C, D。

   变换后的线段 $A'B'$ 和 $C'D'$ 的长度分别为：

$$L_{A'B'} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

$$L_{C'D'} = \sqrt{(x'_4 - x'_3)^2 + (y'_4 - y'_3)^2}$$

将仿射变换的表达式代入上述长度公式中，我们得到：

$$L_{A'B'} = \sqrt{(a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1))^2 + (c(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1))^2}$$

$$L_{C'D'} = \sqrt{(a(x_4 - x_3) + b(y_4 - y_3))^2 + (c(x_4 - x_3) + d(y_4 - y_3))^2}$$

注意到 AB 和 CD 是平行的，因此:

Case1: $x_3 = x_4, x_1 = x_2$, 则

$$\frac{L_{A'B'}}{L_{C'D'}} = \frac{|y_2 - y_1|}{|y_4 - y_3|} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$$

Case2: $\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = k$, 则

$$\frac{L_{A'B'}}{L_{C'D'}} = \frac{\sqrt{(a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1))^2 + (c(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1))^2}}{\sqrt{(a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1))^2 + (c(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1))^2}} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2((a + bk)^2 + (c + dk)^2)}}{\sqrt{(x_3 - x_4)^2((a + bk)^2 + (c + dk)^2)}} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_4|}$$

$$\frac{L_{AB}}{L_{CD}} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + k^2)}}{\sqrt{(x_3 - x_4)^2(1 + k^2)}} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_4|} = \frac{L_{A'B'}}{L_{C'D'}}$$

证毕.