上 海 交 通 大 学 试 卷 (B 卷)

(2021 至 2022 学年　第 2 学期期末考试)

班级号________________学号________________　　　　　　　　　　姓名 __________

课程名称________实变函数________　　　　　　　　　　　　　　成绩 __________

一、(20分)　(1). 证明：集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测 $\Longleftrightarrow$ E 满足 Carathéodory 条件：对任意的集合 $T \subset \mathbb{R}^d$,

$$m_*(T) = m_*(T \cap E) + m_*(T \cap E^c).$$

(2). 设集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ 满足: $A \cap B = \emptyset$, $m_*(A \cup B) < \infty$, 证明：

$$m_*(A \cup B) = m_*(A) + m_*(B) \iff \exists \text{ 可测集 } E \subset \mathbb{R}^d,\ s.t.\ A \subset E,\ B \subset E^c.$$

（Hint: $\exists\, G_\delta$ 集 $G \supset A,\ s.t.\ m(G) = m_*(A)$, 分别对 $A \cup B$ 和 B 关于 G 应用 Carathéodory 条件）

二、(20分)　(1). 设可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 函数 $f,\ f_k\ (k \geq 1)$ 都是 $L^1(E)$ 上的非负函数, 满足: 当 $k \to \infty$ 时, $f_k(x) \to f(x),\ a.e.\ x \in E$, 且 $\|f_k\|_{L^1(E)} \to \|f\|_{L^1(E)}$. 证明：对 E 的任一可测子集 A , 有

$$\int_A f_k(x)dx \to \int_A f(x)dx, \quad k \to \infty.$$

（Hint: 利用Fatou引理）

(2). 设函数 $f(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 令

$$g(\lambda) = m\left(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\right), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

证明：当 $1 \leq p < \infty$,

$$\int_E |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} g(\lambda) d\lambda.$$

（Hint: 利用 $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda$ 和 Fubini 定理）

三、(20分)　(1). 设函数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 令$h \in \mathbb{R}^d$, 考虑平移函数 $f_h(x) = f(x-h)$. 证明：

$$\|f_h - f\|_{L^1} \to 0, \quad h \to 0.$$

(2). 设函数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 令 $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d :\ |y-x| < r\}$: 以 x 为球心, $r > 0$ 为半径的球. 记

$$\tilde{f}_r(x) = \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)dy,$$

证明：

$$\|\tilde{f}_r - f\|_{L^1} \to 0, \quad r \to 0.$$

（Hint: 利用 $\tilde{f}_r(x) - f(x) = \frac{1}{m(B_r(0))} \int_{B_r(0)} [f(x-y) - f(x)]dy$, Fubini 定理和(1)中结论）

我承诺，我将
严格遵守考试纪律。

承诺人: ___________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
批阅人(流水阅)						

四、（20分） (1). 设函数 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, 令 $\Delta_n(x) = n\left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]$. 若

(i) $\Delta_n(x) \to 0,\ a.e. x \in \mathbb{R},\ n \to \infty$,

(ii) $\exists M > 0,\ s.t. \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\Delta_n(x)| \le M,$

证明：

$$f(x) = C\ (常数),\quad a.e.\ x \in \mathbb{R}.$$

（Hint: 考虑 $\int_a^b \Delta_n(x)dx,\ a, b$ 是 f 的 Lebesgue 点）

(2). 设函数 $f_k(x) \in BV[a, b]\ (k \ge 1)$, 且存在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x),\ s.t.\ \lim\limits_{k\to\infty} V_a^b(f - f_k) = 0.$. 证明：$f(x) \in BV[a, b]$, 且

$$\exists\ 子列\ \{f_{k_i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}},\quad s.t.\quad \lim_{i\to\infty} f'_{k_i}(x) = f'(x),\quad a.e.\ x \in [a, b].$$

（Hint: 利用 L^1 空间中收敛列的性质）

五、（20分） (1). 设可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 函数 $f_k \in L^1(E)\ (k \ge 1)$ 满足: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1(E)} < \infty$. 证明：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上 $a.e.$ 收敛, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in L^1(E)$,

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

(2). 设函数 $f_k(x) \in AC[a, b]\ (k \ge 1)$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处收敛于函数 $f(x)$. 证明：

$$若\ \sum_{k=1}^{\infty} V_a^b(f_k) < \infty,\ 则\ f(x) \in AC[a, b],\ 且\ f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x),\ a.e.\ x \in [a, b].$$

（Hint: 考虑 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ 和 $\int_a^x \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(t)dt$ ）

(共5题, 总分100分)