第一周作业参考答案

1. 假设Ψ_1和Ψ_2是薛定谔方程$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi$的两个解，证明$\Psi=c_1\Psi_1+c_2\Psi_2$也是这个方程的解，其中$c_1,c_2$是任意常数。

证 Ψ_1和Ψ_2分别满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_1+V(\boldsymbol{r})\Psi_1, \tag{1}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_2+V(\boldsymbol{r})\Psi_2, \tag{2}$$

对任意常数c_1,c_2有

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial(c_1\Psi_1+c_2\Psi_2)}{\partial t}&=i\hbar c_1\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1+i\hbar c_2\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2\\&=c_1\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_1+V(\boldsymbol{r})\Psi_1\right]+c_2\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_2+V(\boldsymbol{r})\Psi_2\right]\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(c_1\Psi_1+c_2\Psi_2)+V(\boldsymbol{r})(c_1\Psi_1+c_2\Psi_2),\end{aligned} \tag{3}$$

即$\Psi=c_1\Psi_1+c_2\Psi_2$也是此薛定谔方程的解。

2. 设$\psi_1(\boldsymbol{r},t)$和$\psi_2(\boldsymbol{r},t)$是薛定谔方程$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi$的两个解，证明$\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3x$与时间无关。

证 ψ_1和ψ_2分别满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1+V(\boldsymbol{r})\psi_1, \tag{1}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_2+V(\boldsymbol{r})\psi_2, \tag{2}$$

以ψ_1^*左乘式(2)，ψ_2左乘式(1)的共轭，再相减即得

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^*\psi_2)&=\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_2\nabla^2\psi_1^*-\psi_1^*\nabla^2\psi_2)\\&=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2),\end{aligned} \tag{3}$$

再对全空间积分，得到

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3x&=\frac{\hbar^2}{2m}\int\nabla\cdot(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2)\mathrm{d}^3x\\&=\frac{\hbar^2}{2m}\oint(\psi_2\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},\end{aligned} \tag{4}$$

其中$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$为面元，按照波函数在无穷远处迅速趋于零的条件，式(4)右端之面积分为零，故得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3x=0, \tag{5}$$

即$\int\psi_1^*\psi_2\mathrm{d}^3x$与时间无关。

3. 证明在定态中，概率流密度与时间无关。

证　定态波函数其共轭可表示为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \tag{1}$$

$$\Psi^*(\boldsymbol{r},t)=\psi^*(\boldsymbol{r})e^{i\frac{E}{\hbar}t}, \tag{2}$$

概率流密度为

$$\boldsymbol{J}=\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)=\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*), \tag{3}$$

即定态的概率流密度与时间无关。

或根据定态波函数满足

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=E\Psi, \tag{4}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V(\boldsymbol{r})\Psi=E\Psi, \tag{5}$$

根据概率流密度的定义

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}&=\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)\\&=\frac{\hbar}{2mi}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\nabla\Psi+\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi-\frac{\partial\Psi}{\partial t}\nabla\Psi^*-\Psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi^*\right)\\&=\frac{1}{2m}(E\Psi^*\nabla\Psi-E\Psi^*\nabla\Psi+E\Psi\nabla\Psi^*-E\Psi\nabla\Psi^*)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

即定态的概率流密度与时间无关。

4. 由下列两定态波函数计算概率流密度：

(1) $\psi_1=\frac{1}{r}e^{ikr}$,　　(2) $\psi_2=\frac{1}{r}e^{-ikr}$.

从所得结果说明ψ_1表示向外传播的球面波，ψ_2表示向内（即向原点）传播的球面波。

(1)式概率流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\\&=\frac{\hbar}{2mi}\left[\frac{1}{r}e^{-ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{ikr}\right)-\frac{1}{r}e^{ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{-ikr}\right)\right]\\&=\frac{\hbar}{2mi}\frac{1}{r^2}\left(e^{-ikr}\nabla e^{ikr}-e^{ikr}\nabla e^{-ikr}\right)\\&=\frac{\hbar k}{m}\frac{\nabla r}{r^2}=\frac{\hbar k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.\end{aligned}$$

(2)式概率流密度为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\left[\frac{1}{r}e^{ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{-ikr}\right) - \frac{1}{r}e^{-ikr}\nabla\left(\frac{1}{r}e^{ikr}\right)\right] \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\frac{1}{r^2}\left(e^{ikr}\nabla e^{-ikr} - e^{-ikr}\nabla e^{ikr}\right) \\
&= -\frac{\hbar k}{m}\frac{\nabla r}{r^2} = -\frac{\hbar k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.
\end{aligned}
$$

所得结果说明ψ_1表示向外传播的球面波，概率流密度垂直球面向外，ψ_2表示向内（即向原点）传播的球面波，概率流密度垂直球面向内。