第五周作业参考答案

1. 证明
厄米算符的对应于不同本征值的本征函数，彼此正交。

证明

设ψ_n和ψ_m分别时厄米算符$\hat{O}$的本征值为O_n和O_m的本征函数

$$\hat{O}\psi_n = O_n\psi_n,$$
$$\hat{O}\psi_m = O_m\psi_m,$$

并设(ψ_n, ψ_m)存在。利用$O_m^* = O_m$，取复共轭，右乘ψ_n积分得

$$\hat{O}^*\psi_m^* = O_m^*\psi_m^* = O_m\psi_m^*,$$

$$\left(\hat{O}\psi_m, \psi_n\right) = O_m(\psi_m, \psi_n).$$

利用厄米算符特性

$$\left(\hat{O}\psi_m, \psi_n\right) = \left(\psi_m, \hat{O}^\dagger\psi_n\right) = \left(\psi_m, \hat{O}\psi_n\right) = O_n(\psi_m, \psi_n),$$

两式相减可得

$$(O_m - O_n)(\psi_m, \psi_n) = 0.$$

因此，如两个本征值不同，$O_m \neq O_n$，则必须$(\psi_m, \psi_n) = 0$，定理得证。

2. 求角动量的z分量$\hat{l}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$的本征函数。

提示：当绕z轴旋转一圈后，$\varphi \to \varphi + 2\pi$，粒子回到原来位置。作为一个力学量所相应的算符，$\hat{l}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$必须为厄米算符。为了保证其厄米性，要求波函数满足周期性条件（或称为单值条件），

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

解　本征方程为

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi = l_z'\Phi,$$

$$\frac{\partial \ln\Phi}{\partial\varphi} = \frac{il_z'}{\hbar},$$

易于解出

$$\Phi(\varphi) = C\exp(il_z'\varphi/\hbar).$$

C为积分常数，可由归一化条件定之。当绕z轴旋转一圈后，波函数满足周期性条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

$$l_z' = m\hbar, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

即角动量z分量的本征值是量子化的。相应本征函数记为

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}.$$

利用归一化条件

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \mathrm{d}\varphi = 2\pi|C|^2 = 1,$$

通常取C为正实数，可得归一化波函数为

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}.$$

容易证明本征函数的正交归一性

$$(\Phi_m,\Phi_n)=\int_0^{2\pi}\Phi_m^*(\varphi)\Phi_n(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\delta_{mn}.$$