证明

定理 厄米算符的本征值必为实数。

答案: 当体系处于厄米算符 \hat{o} 的本征态 ψ_n 时,测量o的平均值即为本征值 o_n ,

$$\hat{O}\psi_n = O_n\psi_n,$$

$$\bar{O} = (\psi_n, \hat{O}\psi_n) = O_n(\psi_n, \psi_n) = O_n.$$

根据

$$\bar{O} = \left(\psi, \hat{O}\psi\right) = \left(\hat{O}\psi, \psi\right) = \left(\psi, \hat{O}\psi\right)^* = \bar{O}^*,$$

即厄米算符在任何状态下的平均值都为实数。所以在 ψ_n 态下平均值也必为实数,即厄米算符的本征值必为实数,定理得证。