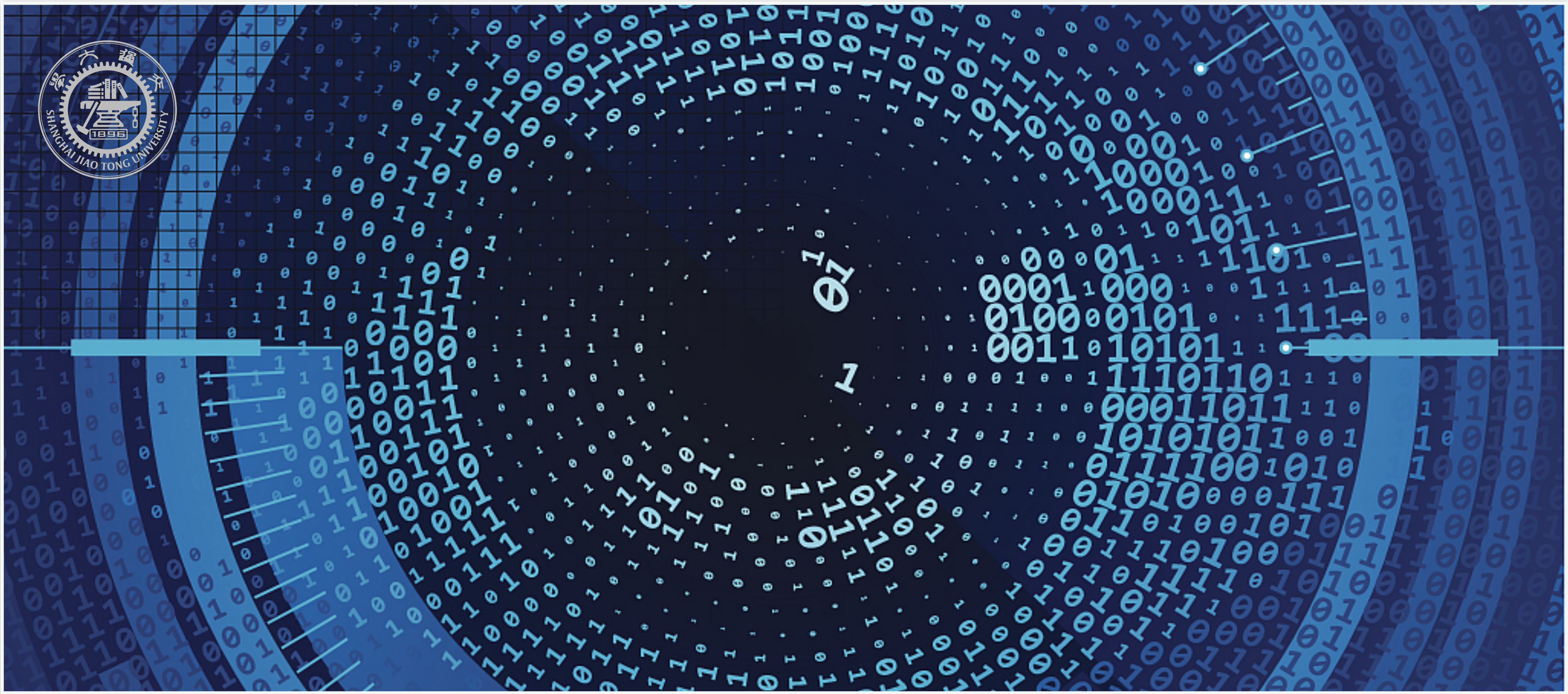


上海交通大学

# 计算机视觉

教师：赵旭
班级：AI4701

2024 春

# 2. 射影几何与变换

# 主要内容

- 射影几何基础
- 2D几何变换

# 2D射影空间：点与线

- 平面上的1个点：$(x, y)^T$- 列向量表示
- 平面上的1条线：$ax + by + c = 0$
  - $(a, b, c)^T$- 线的向量表示
  - $(a, b, c)^T$ 和 $k(a, b, c)^T, k \neq 0$表示同一直线
  - 齐次向量（Homogeneous vector）：等价类
- 所有的 $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)^T$ 张成了 2D射影空间：$\mathbb{P}^2$

# 2D射影空间：点与线

- A point $\mathbf{x} = (x, y)^T$ lies on the line $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$, 则有：
  - $ax + by + c = 0$
  - 向量内积形式：$(x, y, 1)(a, b, c)^T = (x, y, 1)\mathbf{l} = 0$
  - $(kx, ky, k)\mathbf{l} = 0$
  - 点的齐次表示：$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$
  - 齐次表示下的点也属于2D射影空间$\mathbb{P}^2$

# 2D射影空间：点与线

- A point $\mathbf{x} = (x, y)^T$ lies on the line $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$, 则有：
  - $ax + by + c = 0$
  - 内积为0，则在这个线上
  - 向量内积形式：$(x, y, 1)(a, b, c)^T = (x, y, 1)\mathbf{l} = 0$
  - $(kx, ky, k)\mathbf{l} = 0$
  - 点的齐次表示：$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$
  - 齐次表示下的点也属于2D射影空间$\mathbb{P}^2$

# 2D射影空间：点与线

- 自由度：2
- 两条线的交点：$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$
- 过两点的直线：$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$
- 无穷远点（平行线的交点）
  - 两条线 $\mathbf{l} = (a, b, c)^T, \mathbf{l}' = (a, b, c')^T$
  - 交点为：$(b, -a, 0)^T$ 　　概念完备了，如果加入这样的交点
- 无穷远线：$\mathbf{l}_\infty = (0,0,1)^T$, 无穷远点的集合

# 2D射影空间：点与线

- 点和线的对偶关系：
  - $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0$
  - $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$

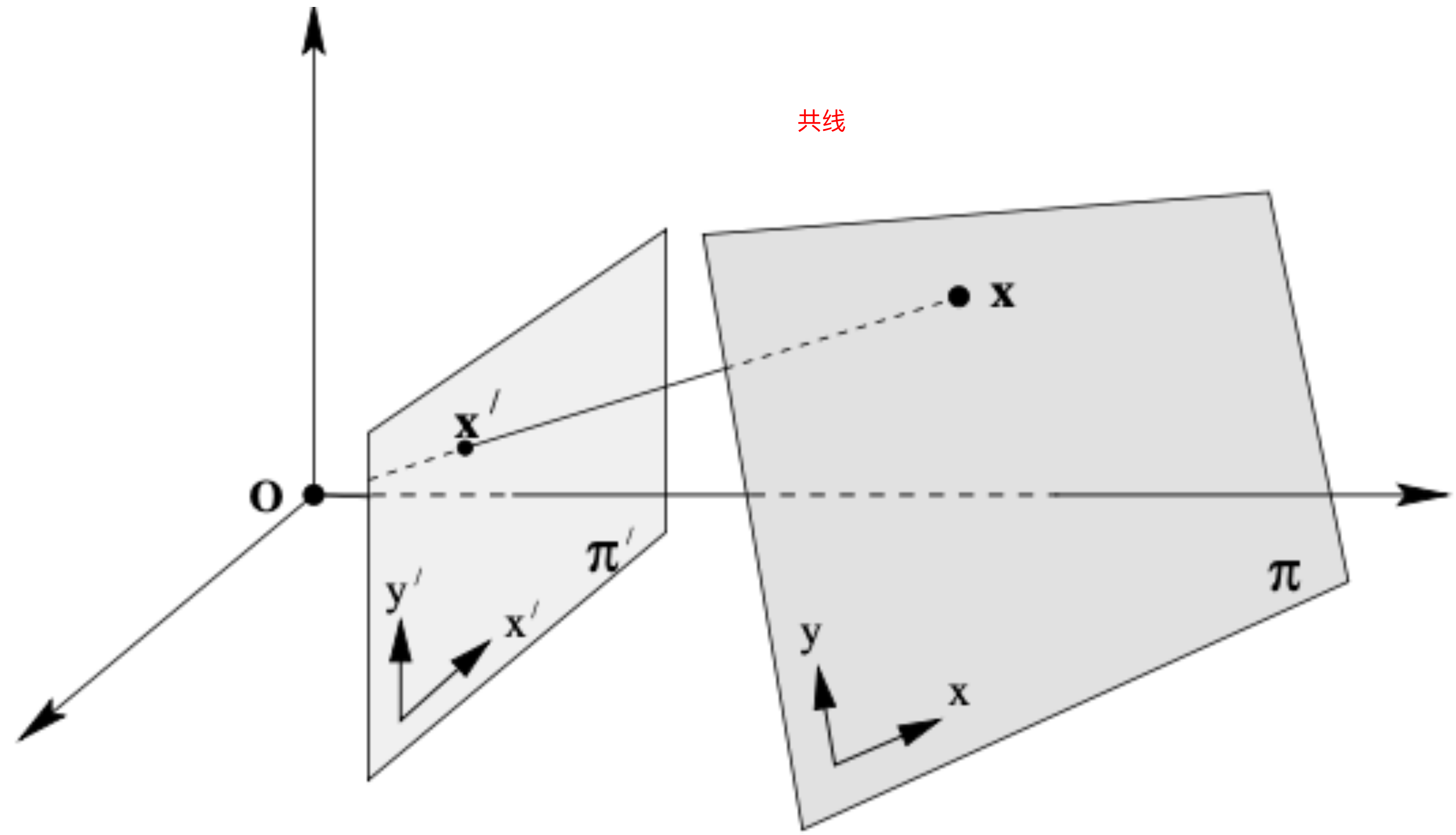
# 2D射影空间：点与线

- 点和线的对偶关系：
  - $\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0$
  - $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$

# 射影变换

一条线还是线

- 射影变换（单应-Homography）：$\mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$. 如果3个点共线，则变换后的3个点也共线，反之亦然。
  - 可逆性：射影变换的逆也是射影变换
  - 组合性：2个射影变换的组合仍是射影变换
- 定理：一个映射$h : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$是单应，则当且仅当存在一个$3 \times 3$非奇异矩阵$H$，使得：$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}$



共线
x
x′
O
π′
π
y′
x′
y
x

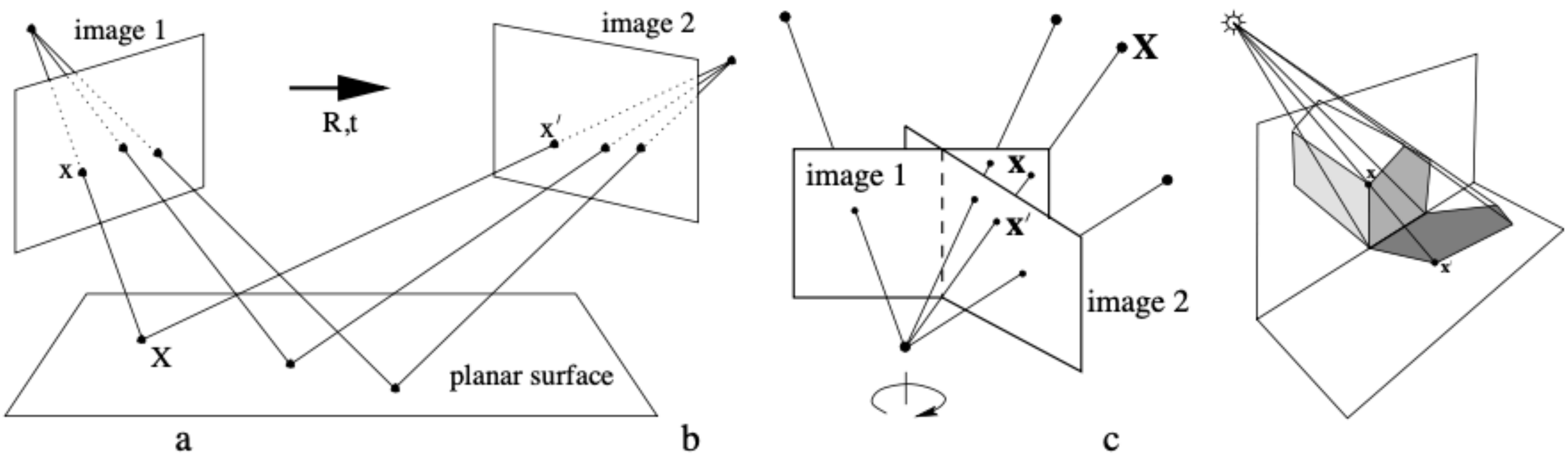
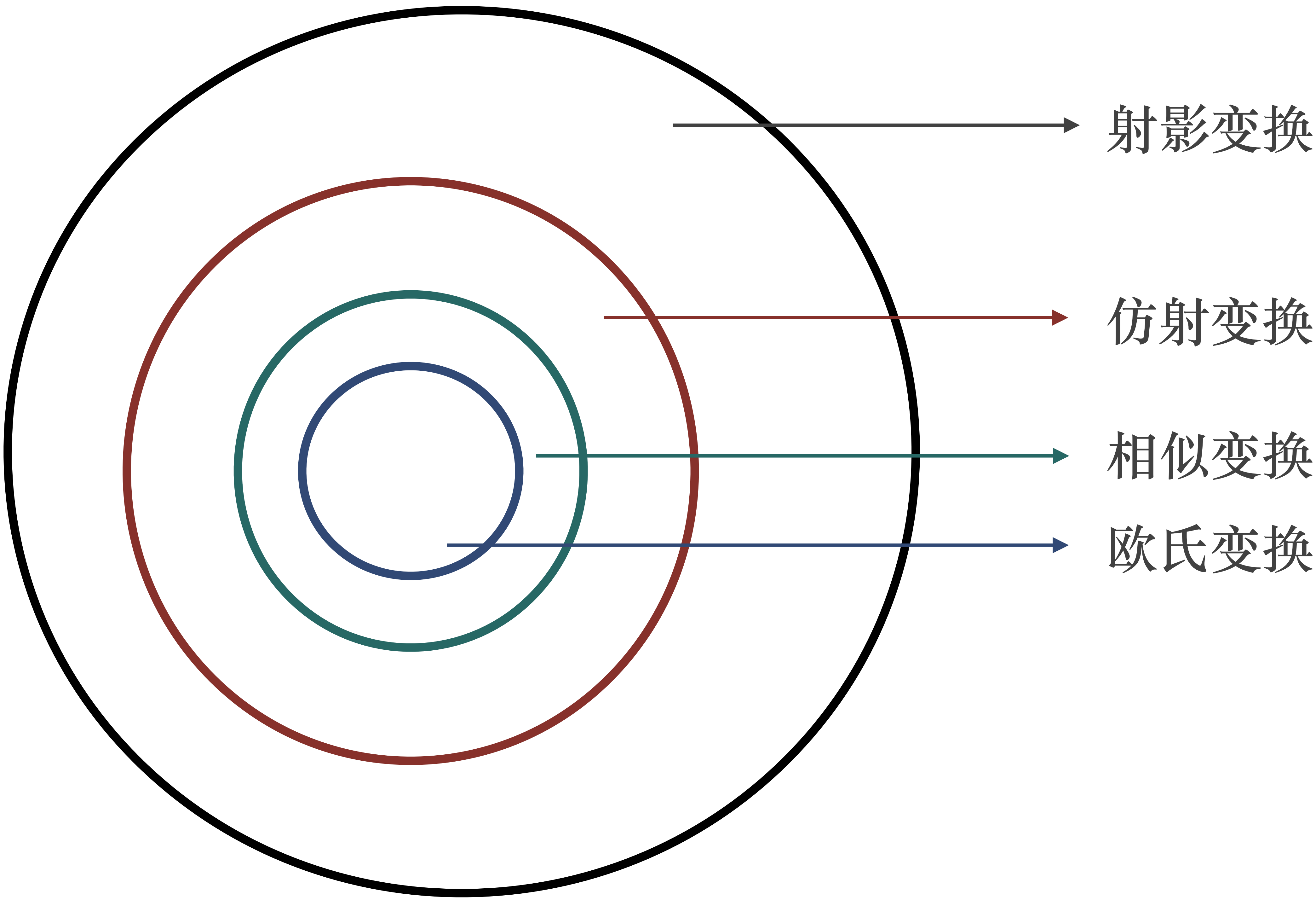



image 1
image 2
R,t
x′
x
X
planar surface
a
b
image 1
X
x
x′
image 2
c
x
x′

# 变换的层次



# 欧氏变换

- 两点间距离不变
- 两条线之间的夹角不变
- 面积不变
- 3个自由度，可以通过2个点对应求解

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \epsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

where $\epsilon = \pm 1$.

$$\mathbf{x}' = \mathrm{H}_{\mathrm{E}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

# 相似变换

- 长度的比不变
- 两条线之间的夹角不变
- 面积的比不变
- 形状不变
- 4个自由度，可以通过2个点对应求解

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathrm{H_S}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s\mathrm{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

# 仿射变换

- 平行关系不变
- 平行线段的长度比不变
- 面积的比不变
- 6个自由度，可以通过3个点对应求解

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_{\mathtt{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathtt{A} = \mathtt{R}(\theta)\,\mathtt{R}(-\phi)\,\mathtt{D}\,\mathtt{R}(\phi)$$

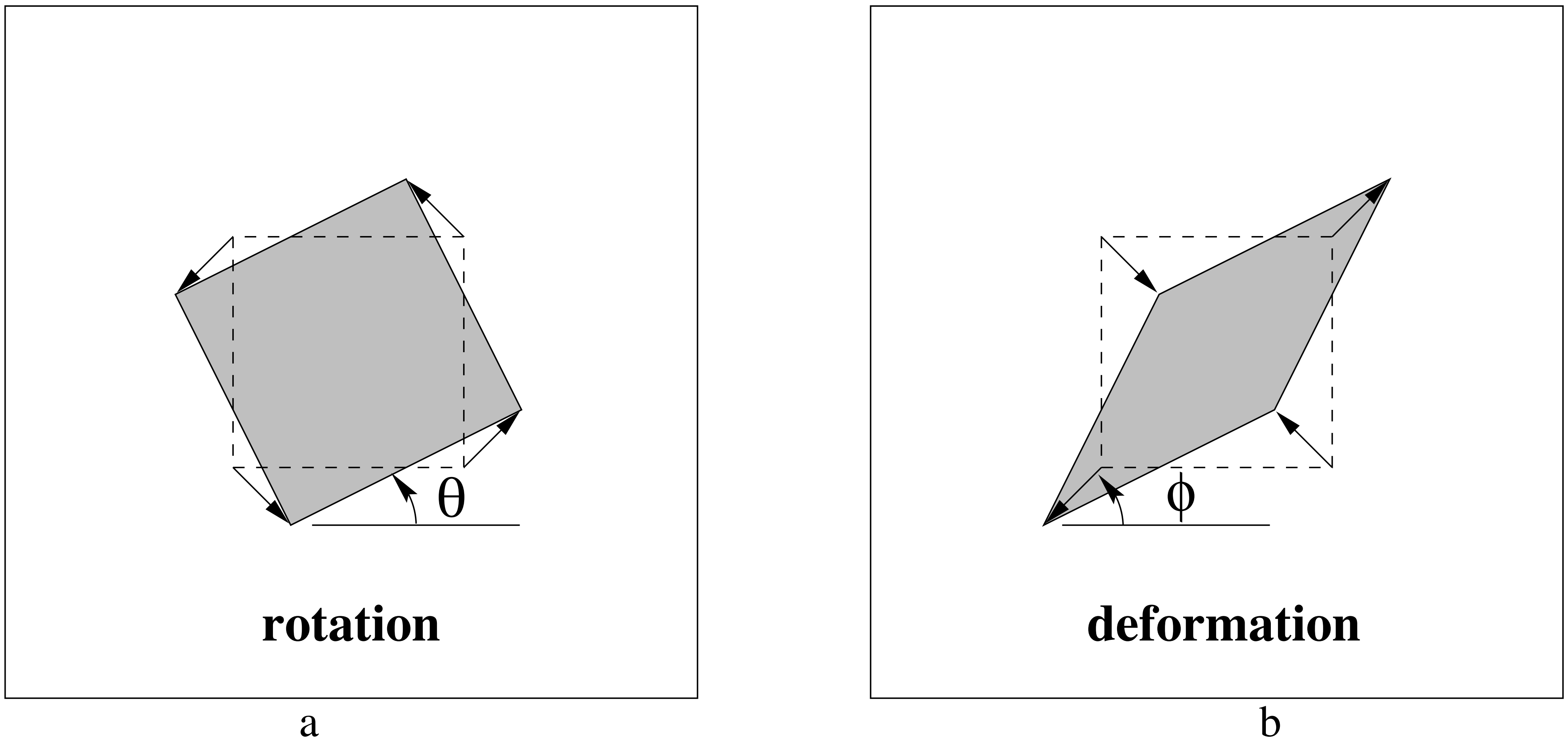



Fig. 2.7. **Distortions arising from a planar affine transformation.** *(a) Rotation by* $\mathtt{R}(\theta)$. *(b) A deformation* $\mathtt{R}(-\phi)\,\mathtt{D}\,\mathtt{R}(\phi)$. *Note, the scaling directions in the deformation are orthogonal.*

# 射影变换

- 直线仍是直线
- 4个共线点的交比不变
  - 共线线段长度“比值的比值”不变
- 8个自由度，可以通过4个点对应求解（不存在3个共线点）

$$\mathbf{x}' = \mathrm{H_P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^{\mathsf{T}} & v \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\mathsf{T}}$$

# 射影变换

- 射影变换可分解为相似、仿射和射影变换的合成：

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathrm{S}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} s\mathrm{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^{\mathsf{T}} & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^{\mathsf{T}} & v \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = s\mathrm{RK} + \mathbf{t}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$$

# 无穷远点的变换

无穷远点：$(x_1, x_2, 0)^T$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

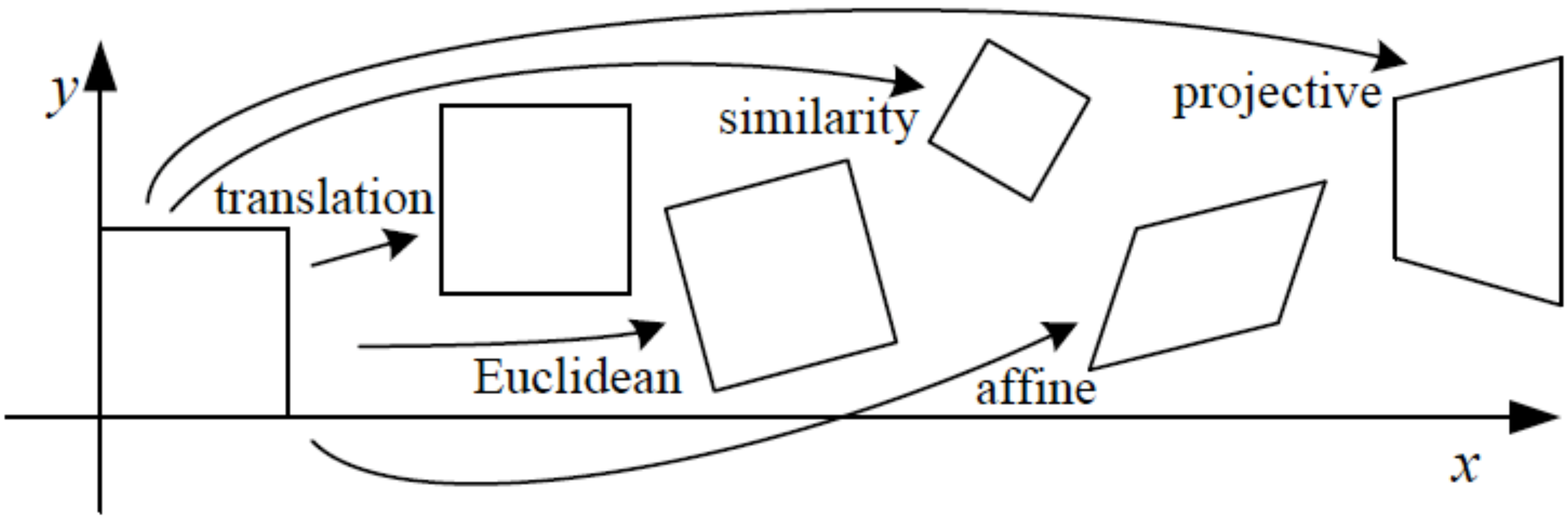
**Affine**

$$\begin{bmatrix} \mathtt{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\mathsf{T} & v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{pmatrix}$$

**Projective**

射影变换会把无穷远点拉回来。

# 2D变换的对比



# 2D变换的对比

| Transformation | Matrix | # DoF | Preserves | Icon |
|---|---|---|---|---|
| translation | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 2 | orientation |  |
| rigid (Euclidean) | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 3 | lengths |  |
| similarity | $\begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 4 | angles |  |
| affine | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ | 6 | parallelism |  |
| projective | $\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ | 8 | straight lines |  |

# 齐次坐标的意义

- 使非线性映射（如透视投影变换），可以用线性矩阵方程表示
- 很好地表示“无穷远”点和线