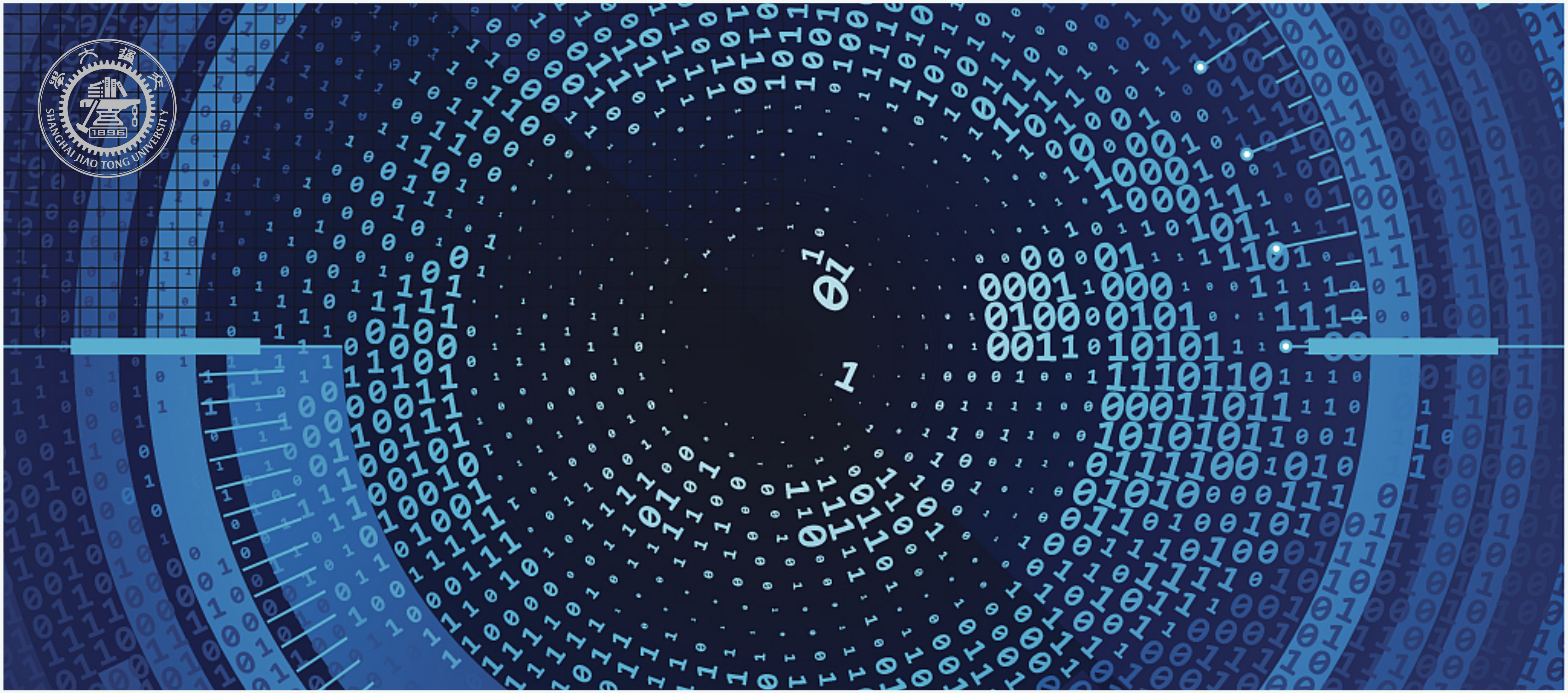


上海交通大学

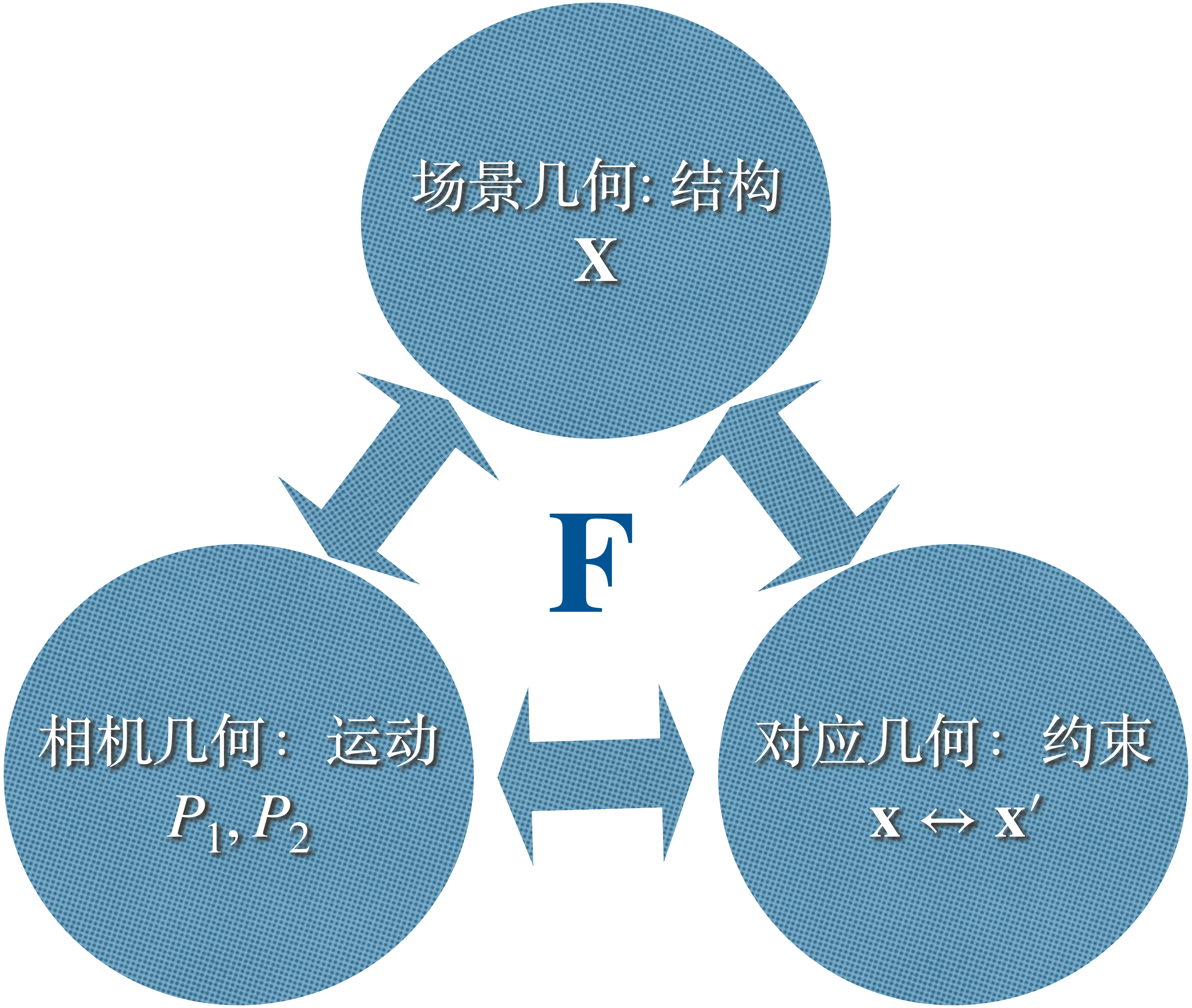
计算机视觉

教师：赵旭
班级：AI4701

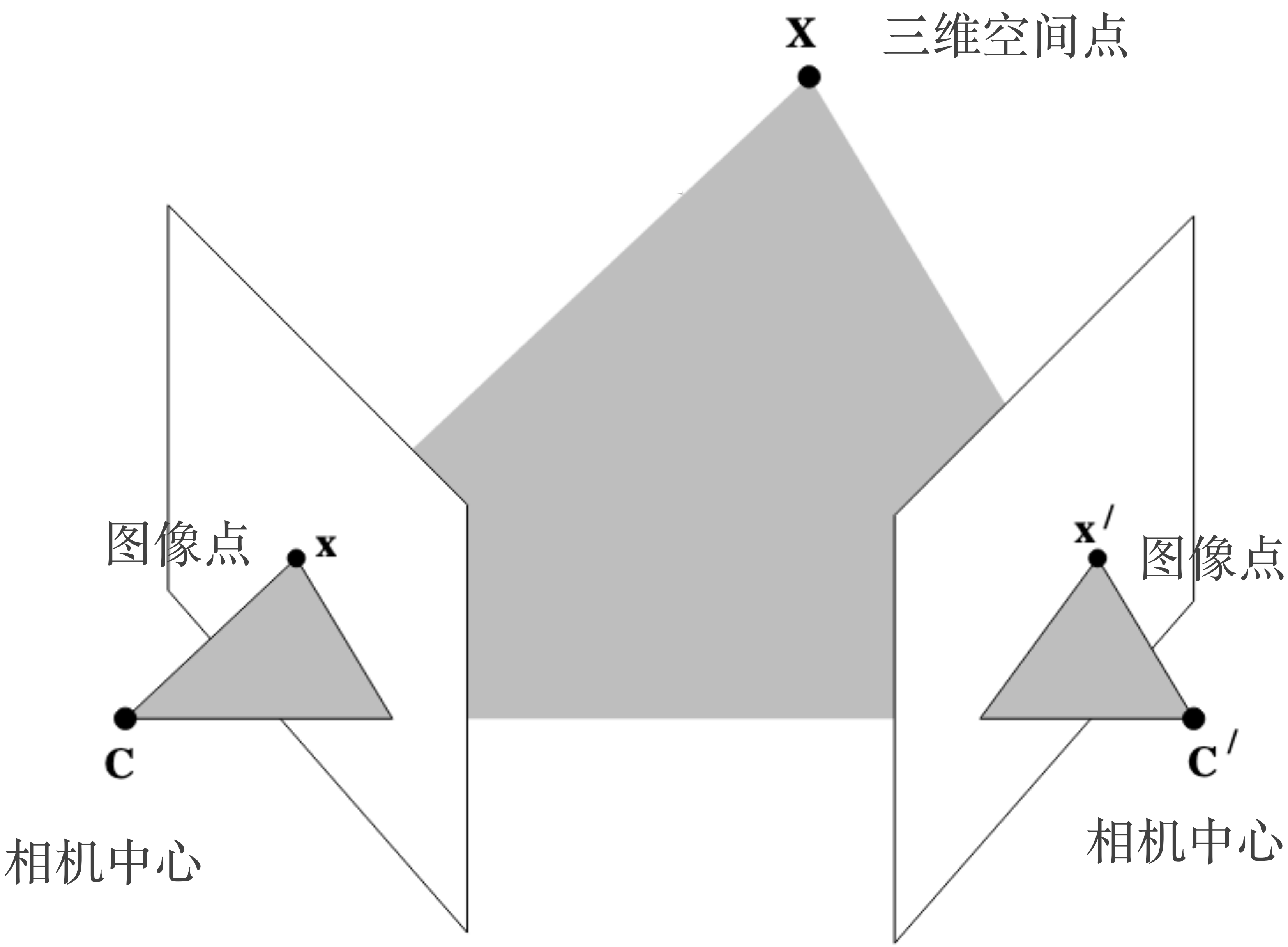
2024 春

8. 双目几何总结

主要内容

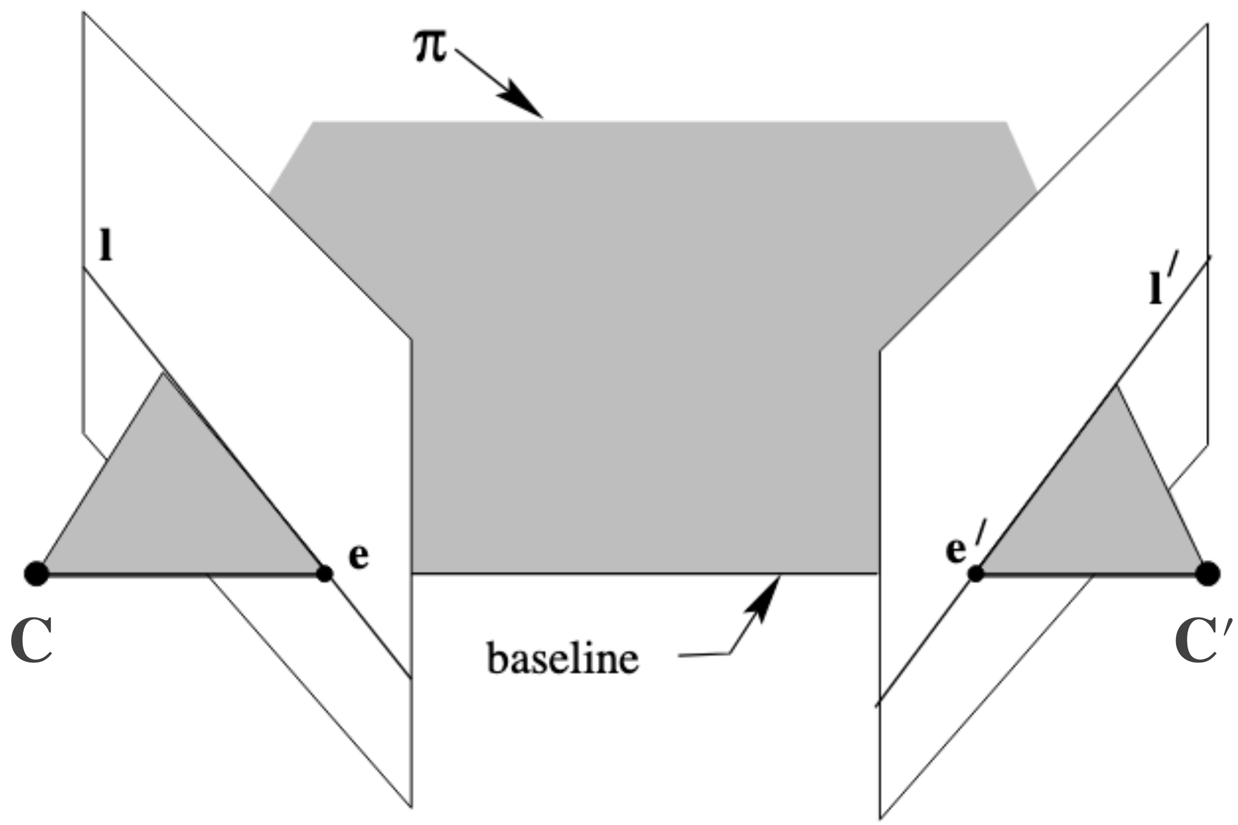

场景几何: 结构
$\mathbf{X}$
$\mathbf{F}$
相机几何： 运动
P_1, P_2
对应几何： 约束
$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$

双目系统的几何结构：对极几何



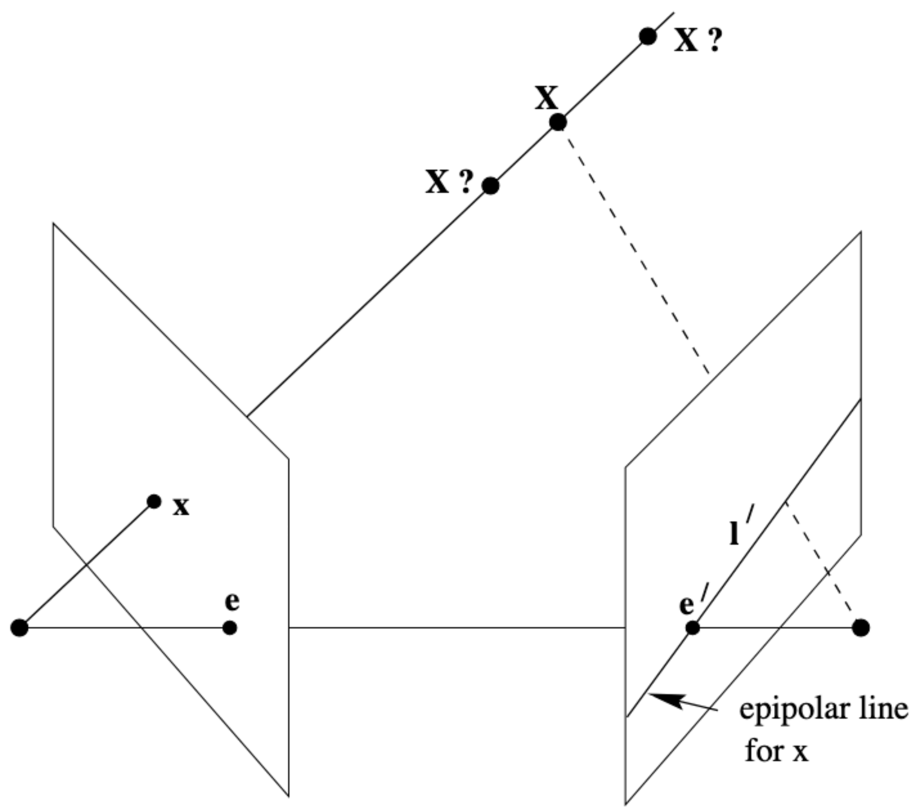
- $\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{x}'$
- $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$是$\mathbf{X}$在两幅视图上的图像点，如果给定其中一点，则另外一个点在哪里？（对极约束）

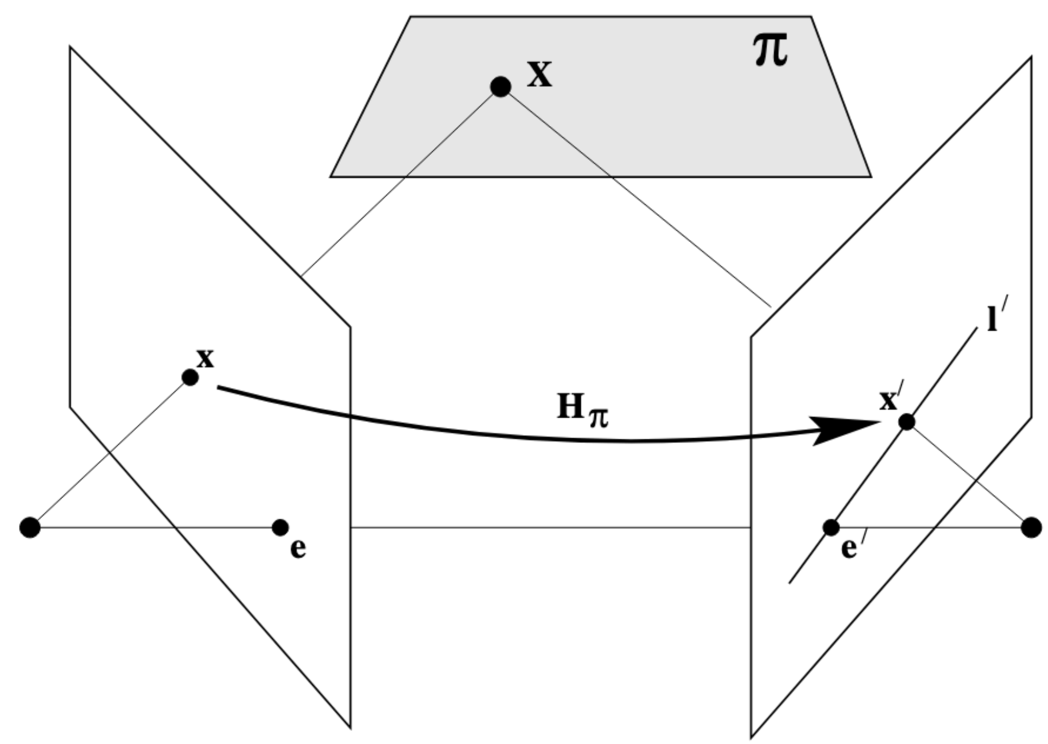
双目系统的几何结构



- **基线（Baseline）**：两个光学中心的连线
- **对极点（Epipole）**：基线与图像平面的交点
- **对极平面（Epipolar plane）**：包含基线的平面（族）
- **对极线（Epipolar line）**：对极平面与图像平面的交线
- 所有的对极线在对极点交汇
- 对极平面与左右图像交于左右对极线

基本矩阵：双目几何结构的代数表示





从点到线的射影映射

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{l}'$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_\pi \mathbf{x}$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_\times \mathtt{H}_\pi \mathbf{x} = \mathtt{F}\mathbf{x}$$

基本矩阵

$$\mathtt{F} = [\mathbf{e}']_\times \mathtt{H}_\pi$$

基本矩阵：双目系统几何结构的代数表示

$\mathbf{l}' = \mathrm{F}\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'$在$\mathbf{l}'$上

$0 = \mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{l}' = \mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathrm{F}\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathrm{F}\mathbf{x} = 0$$

- **基本矩阵**的性质

$\mathrm{F}\mathbf{e} = \mathbf{0}.$

$\mathrm{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}' = \mathbf{0}$

$\mathbf{l}' = \mathrm{F}\mathbf{x}$

$\mathbf{l} = \mathrm{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}'$

F的秩为2

7个自由度

$\mathrm{F} = [\mathbf{e}']_{\times}\mathrm{P}'\mathrm{P}^{+},$

$\mathbf{e}' = \mathrm{P}'\mathbf{C},$

$\mathrm{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$

本质矩阵

$$P = K[R \mid t]$$

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X}$$

若K已知

$$\hat{\mathbf{x}} = K^{-1}\mathbf{x}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [R \mid t]\mathbf{X}$$

归一化坐标系下的表示

$$K^{-1}P = [R \mid t]$$

归一化相机矩阵

$$P = [I \mid 0]$$

$$P' = [R \mid t]$$

$$E = [t]_{\times}R = R\left[R^{T}t\right]_{\times}$$

3×3矩阵,秩2，5个自由度

$$\hat{\mathbf{x}}'^{T}E\hat{\mathbf{x}} = 0$$

$$E = K'^{T}FK.$$

基本矩阵的求解

- 已知：

  1. 点对应 $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$

  2. $\mathbf{x}'^{T}\mathbf{F}\mathbf{x}$

- 求解： $\mathbf{F}$

- 齐次线性方程组：

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

基本矩阵的求解-8点法

- 已知：

  1. 点对应 $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_i'$

  2. $\mathbf{x}'^T\mathbf{F}\mathbf{x}$

- 求解： $\mathbf{F}$

- 齐次线性方程组：

$$\mathbf{Af} = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'y_1 & x_1' & y_1'x_1 & y_1'y_1 & y_1' & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_n'x_n & x_n'y_n & x_n' & y_n'x_n & y_n'y_n & y_n' & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}$ - $n \times 9$ 矩阵　　$\mathbf{f}$ - 9维向量

- $rank(A) = 8$, 存在唯一线性解

- $rank(A) = 9$，线性最小二乘解，通过SVD分解求解：

  $\min \| \mathbf{Af} \| \ s.t. \ \| f = 1 \|$

基本矩阵的求解-8点法

- 奇异性约束的处理： $rank(\mathbf{F}) = 2$ 或者 $\det \mathbf{F} = 0$
- 已知: $\mathbf{F}$, 找到： $\mathbf{F}'$, 使得
  - $\min \| \mathbf{F} - \mathbf{F}' \| \quad s.t. \det \mathbf{F}' = 0$
- SVD分解：
  - $\mathbf{F} = UDV^T, D = diag(r, s, t), r \geq s \geq t$
  - $\mathbf{F}' = Udiag(r, s, 0)V^T$
  - 用$\mathbf{F}'$取代$\mathbf{F}$

基本矩阵的求解-归一化8点法

- 目标：给定 $n \geq 8$ PCs, $\{\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_i'\}$, 求解基本矩阵$\mathbf{F}$
- 算法：

① 归一化：$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{T}\mathbf{x}_i$, $\hat{\mathbf{x}}_i' = \mathbf{T}\mathbf{x}_i'$, $\mathbf{T}$和$\mathbf{T}'$是归一化变换（平移+尺度缩放）

② 根据下列步骤，得到对应于$\{\hat{\mathbf{x}}_i \leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}_i'\}$的基本矩阵$\hat{\mathbf{F}}'$

a）首先得到线性解（SVD）

b）考虑秩的约束

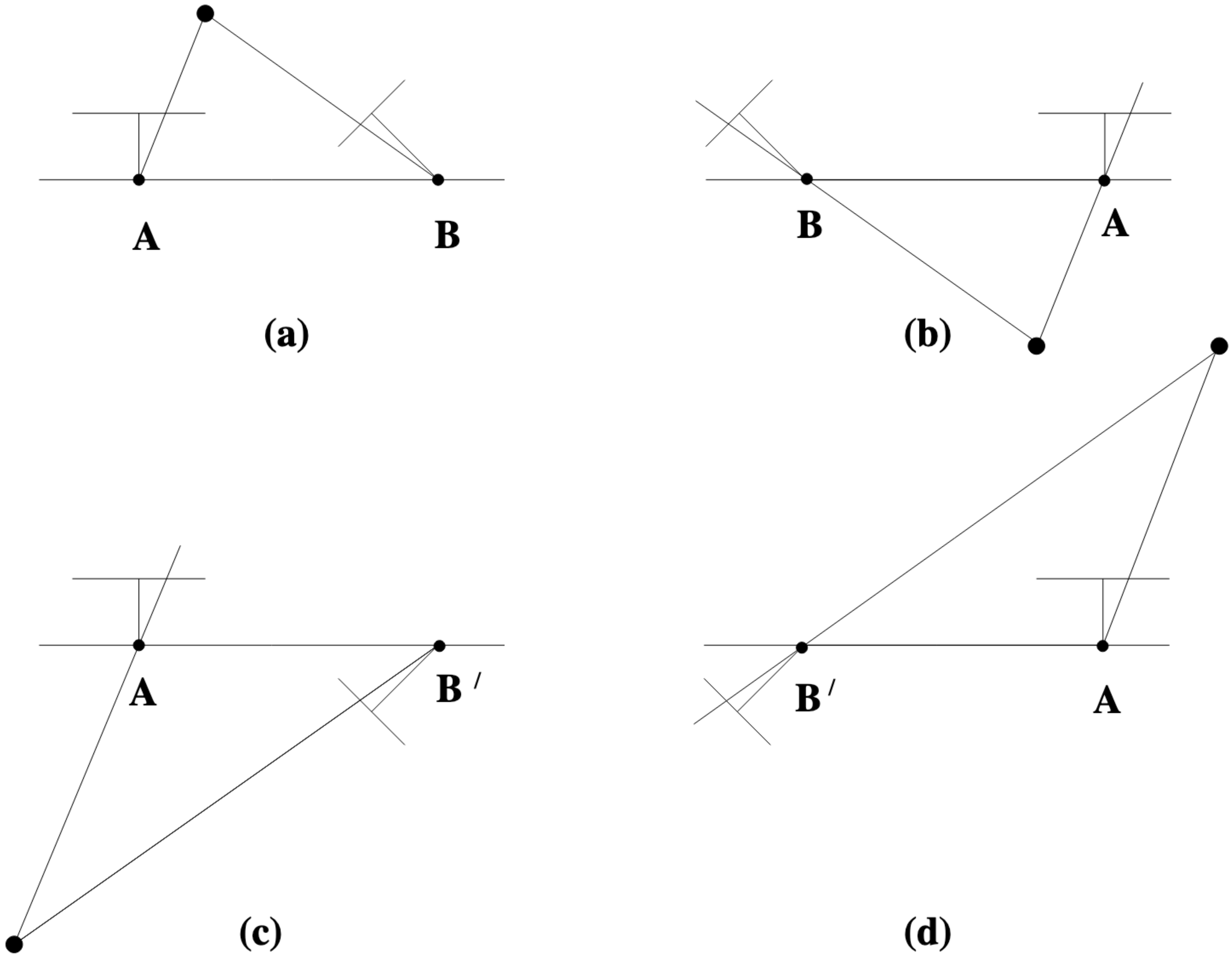
③ 去归一化：$\mathbf{F} = \mathbf{T}'^T \hat{\mathbf{F}}' \mathbf{T}$

相机矩阵求解

- $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}, \mathbf{x}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}$, 已知基本矩阵$\mathbf{F}$，求解：$\mathbf{P}, \mathbf{P}'$
- 求解步骤:
    - 据：$\mathbf{E} = \mathbf{K}'^{T}\mathbf{F}\mathbf{K}$，得到本质矩阵$\mathbf{E}$（针对已标定相机，内参矩阵$\mathbf{K}, \mathbf{K}'$已知）
    - P = [I | 0]，计算$\mathbf{P}'$
    - SVD: $\mathbf{E} = \mathbf{U}diag(1,1,0)\mathbf{V}^{T}$

$$\mathtt{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $$\mathtt{P}' = [\mathtt{UWV}^\mathsf{T} \mid +\mathbf{u}_3] \text{ or } [\mathtt{UWV}^\mathsf{T} \mid -\mathbf{u}_3] \text{ or } [\mathtt{UW}^\mathsf{T}\mathtt{V}^\mathsf{T} \mid +\mathbf{u}_3] \text{ or } [\mathtt{UW}^\mathsf{T}\mathtt{V}^\mathsf{T} \mid -\mathbf{u}_3]$$


A
B
(a)
B
A
(b)
A
B′
(c)
B′
A
(d)

场景结构求解：线性法

- x = PX, x′ = P′X
- x × (PX) = 0 $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(\mathbf{p}^{3\top}\mathbf{X}) - (\mathbf{p}^{1\top}\mathbf{X}) &= 0 \\ y(\mathbf{p}^{3\top}\mathbf{X}) - (\mathbf{p}^{2\top}\mathbf{X}) &= 0 \\ x(\mathbf{p}^{2\top}\mathbf{X}) - y(\mathbf{p}^{1\top}\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned}$$

- AX=0

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} x\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{1\top} \\ y\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{2\top} \\ x'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{1\top} \\ y'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{2\top} \end{bmatrix}$$

Find the solution using DLT via SVD

场景结构求解：光束法（Bundle adjustment）

- 非线性方法：结构和运动的优化求解
- 最小化重投影误差

$$E(M, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} D\left(\mathbf{x}_{ij}, M_i \mathbf{X}_j\right)^2$$