第四周作业参考答案

1. 对于一维自由粒子，设$\psi(x,0)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\exp(ip_0x/\hbar)$，求$\psi(x,t)$。

解　自由粒子的能量本征函数为平面波，满足

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi_k}{\mathrm{d}x^2}=E_k\psi_k,\qquad \psi_k=e^{ikx},\qquad E_k=\frac{\hbar^2k^2}{2m}.$$

粒子波函数可以用若干能量本征态的叠加表示

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}\mathrm{d}k\,,$$
$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx-i\hbar k^2t/2m}\,\mathrm{d}k.$$

粒子具有确定的动量p_0，波函数为能量本征态，则

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip_0x/\hbar-ip_0^2t/2m\hbar}.$$

2. 对于一维自由粒子，设$\psi(x,0)=\delta(x)$，求$|\psi(x,t)|^2$。

提示：利用 Fresnel 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\pi}\exp(i\pi/4).$$

解　粒子波函数可以用若干能量本征态（平面波）的叠加表示，

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}\mathrm{d}k\,,$$
$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx-i\hbar k^2t/2m}\,\mathrm{d}k.$$

利用傅里叶展开，可以得到粒子初态的能量本征态展开系数

$$\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

则

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\mathrm{d}k.$$

由$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$，$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$，

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\left(\sqrt{\frac{\hbar t}{2m}}k-\sqrt{\frac{m}{2\hbar t}}x\right)^2+i\frac{m}{2\hbar t}x^2}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2m}{\hbar t}}e^{i\frac{m}{2\hbar t}x^2}\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}}e^{i\frac{mx^2}{2\hbar t}-i\frac{\pi}{4}},$$

$$|\psi(x,t)|^2=\frac{m}{2\pi\hbar t}.$$

3. 考虑高斯波包$\phi(k)=Ae^{-(k-k_0)^2d^2}$所描述的一维自由粒子，求（要求写出具体求解步骤）：

(1) 归一化后的$\psi(x,t)$与波包的概率分布；

(2) 任取必要的常数，作图画出 3 个不同时间点的波包概率分布；

(3) 波包坐标的平均值表达式，并结合(2)中的图进行分析；

(4) 位置坐标方差表达式，并结合(2)中的图进行分析。

解(1)

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i(k-k_0)(x-vt)-i\frac{\beta}{2}(k-k_0)^2t}\mathrm{d}k\,,$$

$$\omega(k)=\omega(k_0)+v(k-k_0)+\frac{1}{2}\beta(k-k_0)^2,$$

$$v=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}=\frac{\hbar k_0}{m},\qquad \beta=\left(\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right)_{k_0}=\frac{\hbar}{m},$$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{i(k-k_0)(x-vt)-(k-k_0)^2\left(\frac{i}{2}\beta t+d^2\right)}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\left(k-k_0-i\frac{x-vt}{i\beta t+2d^2}\right)^2\left(\frac{i\beta t}{2}+d^2\right)-\frac{(x-vt)^2}{2(i\beta t+2d^2)}}\mathrm{d}k$$

$$=\frac{A}{\sqrt{\pi(2d^2+i\beta t)}}e^{ik_0x-i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t-\frac{(x-vt)^2}{2(2d^2+i\beta t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2d^2+i\beta t}}e^{ik_0x-i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t-\frac{(x-vt)^2}{2(2d^2+i\beta t)}},$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2d^2(1+i\Delta)}} e^{ik_0x - i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t - \frac{(x-vt)^2}{4d^2(1+i\Delta)}}, \qquad \Delta = \frac{\hbar}{2md^2}t.$$

其中$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}$。再利用归一化条件,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \frac{A^2}{2d^2\sqrt{1+\Delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x = \frac{A^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2d^2}} = 1,$$

$$A = \left(\frac{2d^2}{\pi}\right)^{1/4},$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi d^2)^{1/4}\sqrt{1+i\Delta}} e^{ik_0x - i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t - \frac{(x-vt)^2}{4d^2(1+i\Delta)}}.$$

波包的概率分布为

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}}.$$

(2) 略

(3) 波包坐标平均值为

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 x \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - vt}{d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x + vt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}}}{d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{2d^2(1+\Delta^2)}}}{2d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}\xi + \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{\xi}{2d^2(1+\Delta^2)}}}{2d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}\xi + vt \\
&= vt.
\end{aligned}$$

(4) 位置坐标方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-vt)^2}{d\sqrt{2\pi(1+\Delta^2)}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{d\sqrt{1+\Delta^2}(x-vt)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sqrt{1+\Delta^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta^2)}} \mathrm{d}x \\
&= d^2(1+\Delta^2).
\end{aligned}$$