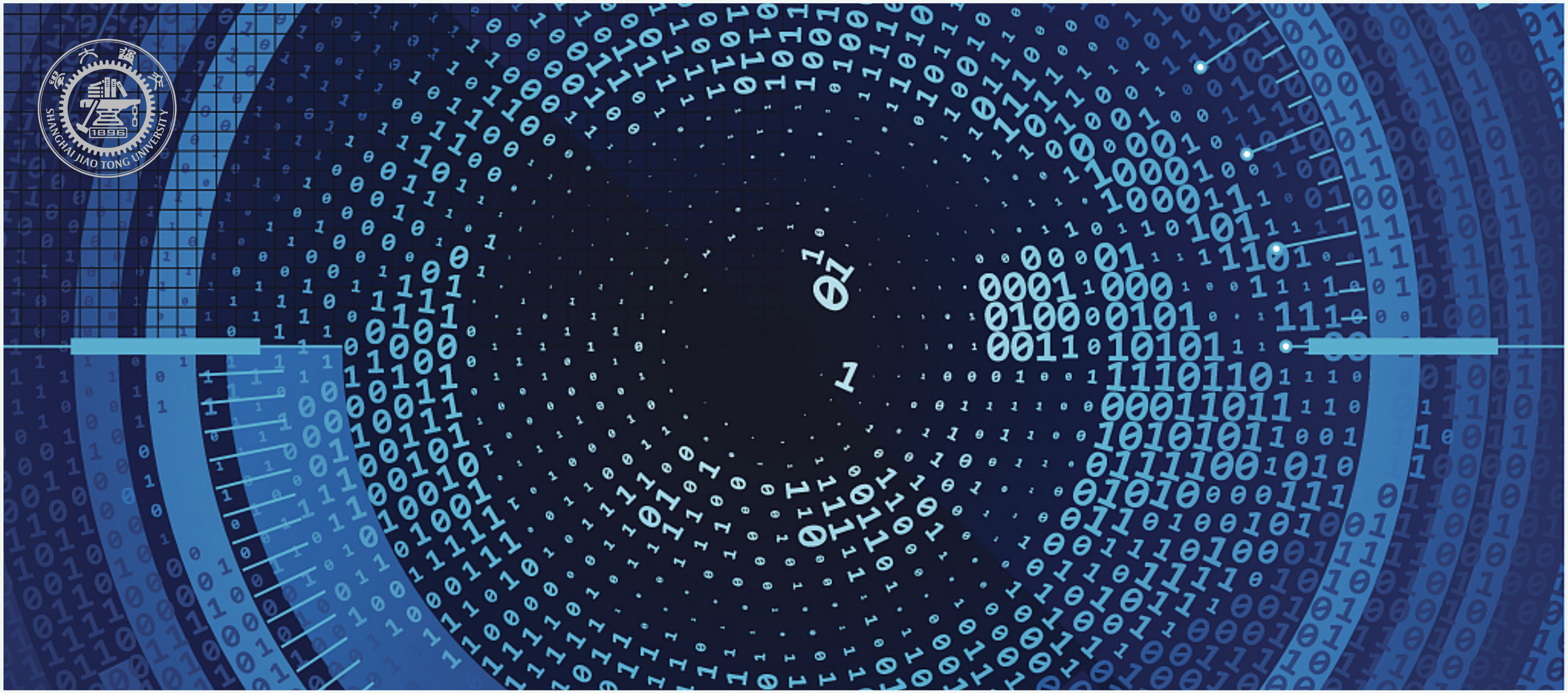


上海交通大学

计算机视觉

教师：赵旭
班级：AI4701

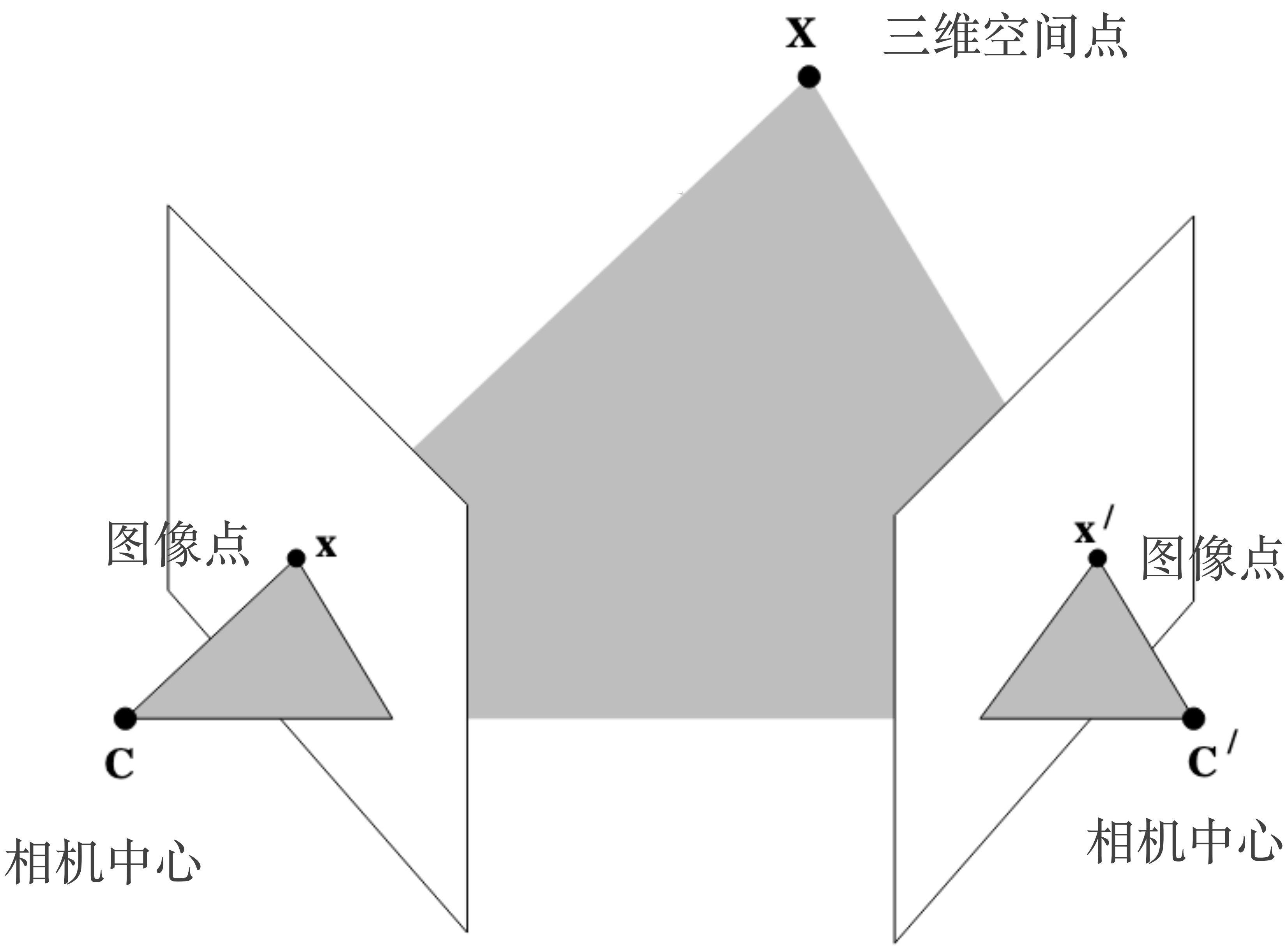
2024 春

6. 对极几何与基本矩阵

主要内容

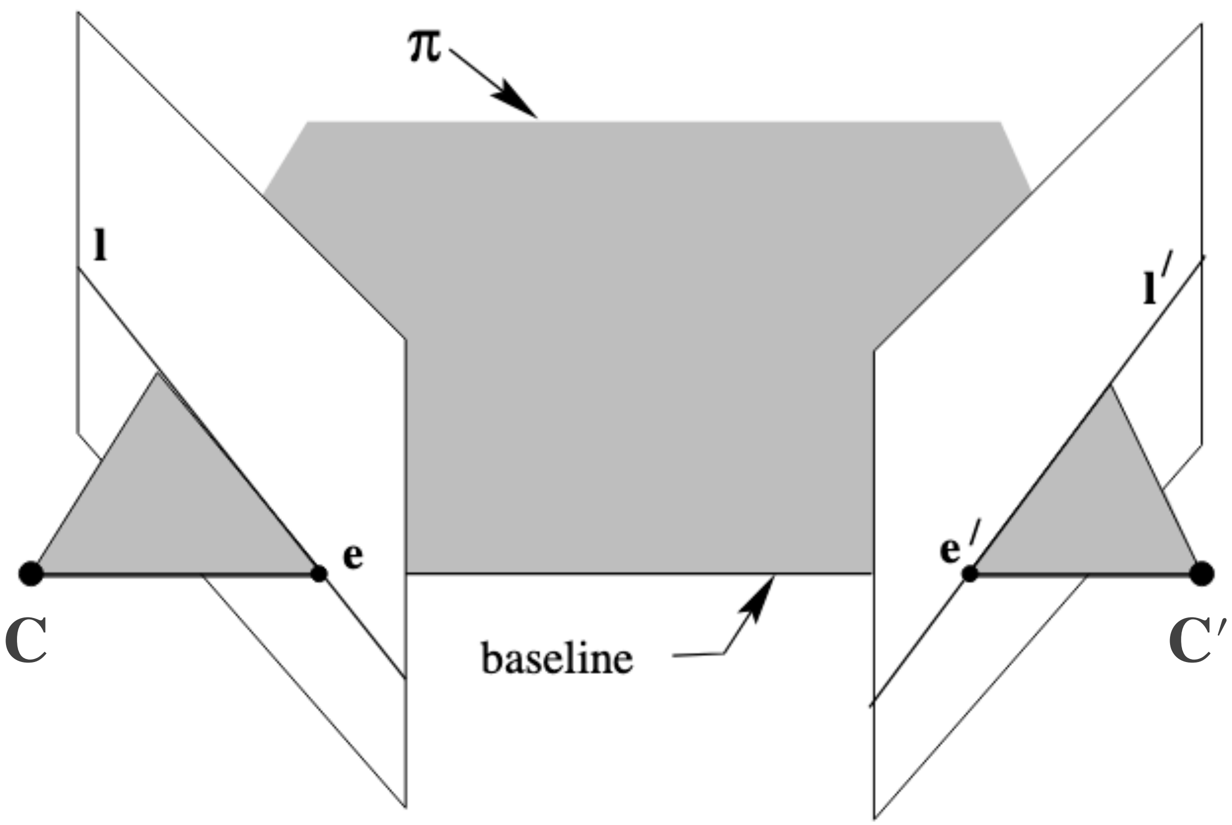
- 双目（两视图）问题定义
- 对极几何
- 基本矩阵及其计算

双目系统的几何结构

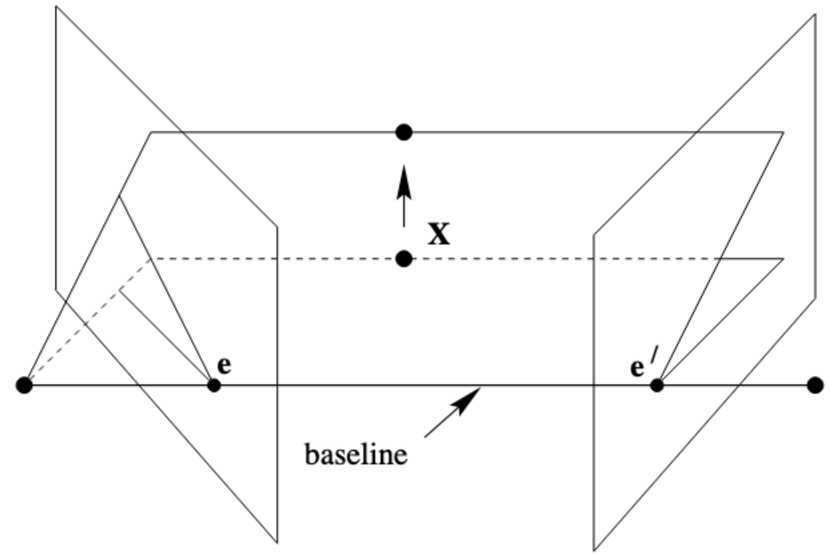


- $\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{x}'$
- $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$是$\mathbf{X}$在两幅视图上的图像点，如果给定其中一点，则另外一个点在哪里？（对极约束）

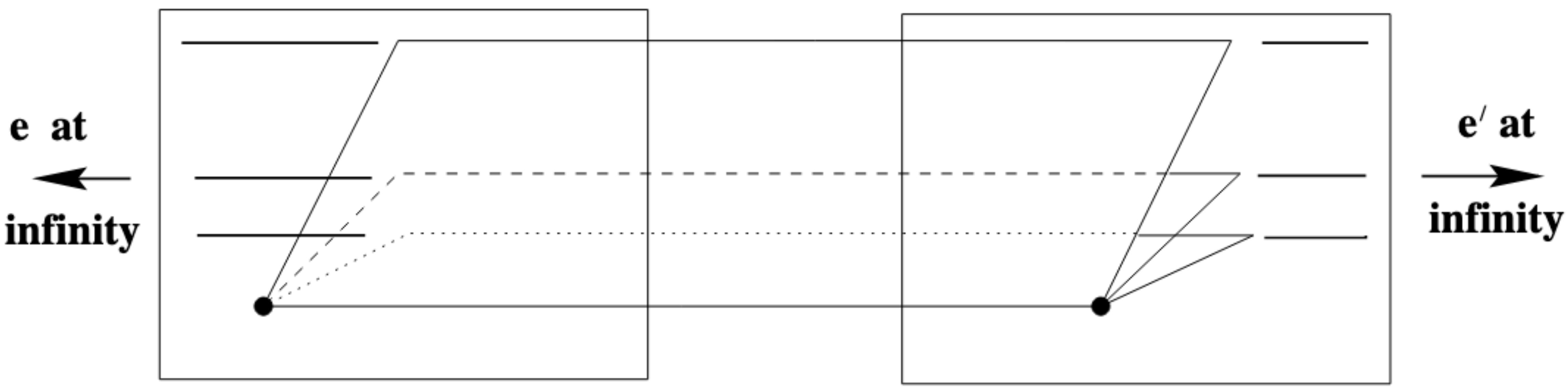
双目系统的几何结构



- **基线（Baseline）**：两个光学中心的连线
- **对极点（Epipole）**：基线与图像平面的交点
- **对极平面（Epipolar plane）**：包含基线的平面（族）
- **对极线（Epipolar line）**：对极平面与图像平面的交线
- 所有的对极线在对极点交汇
- 对极平面与左右图像交于左右对极线



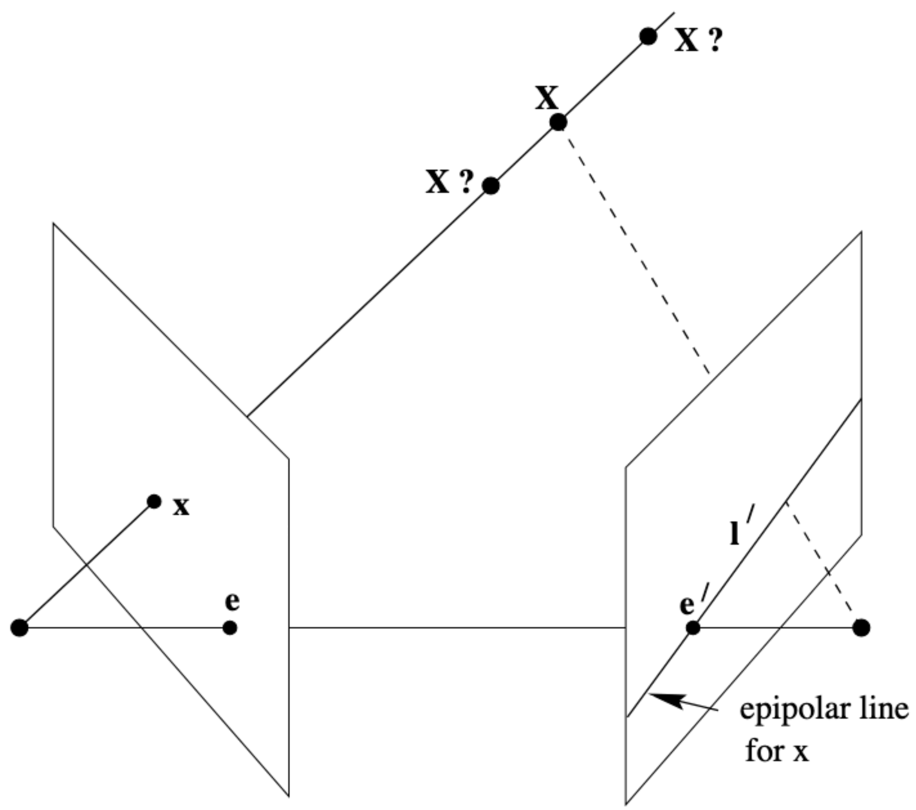
一个自由度的对极面运动

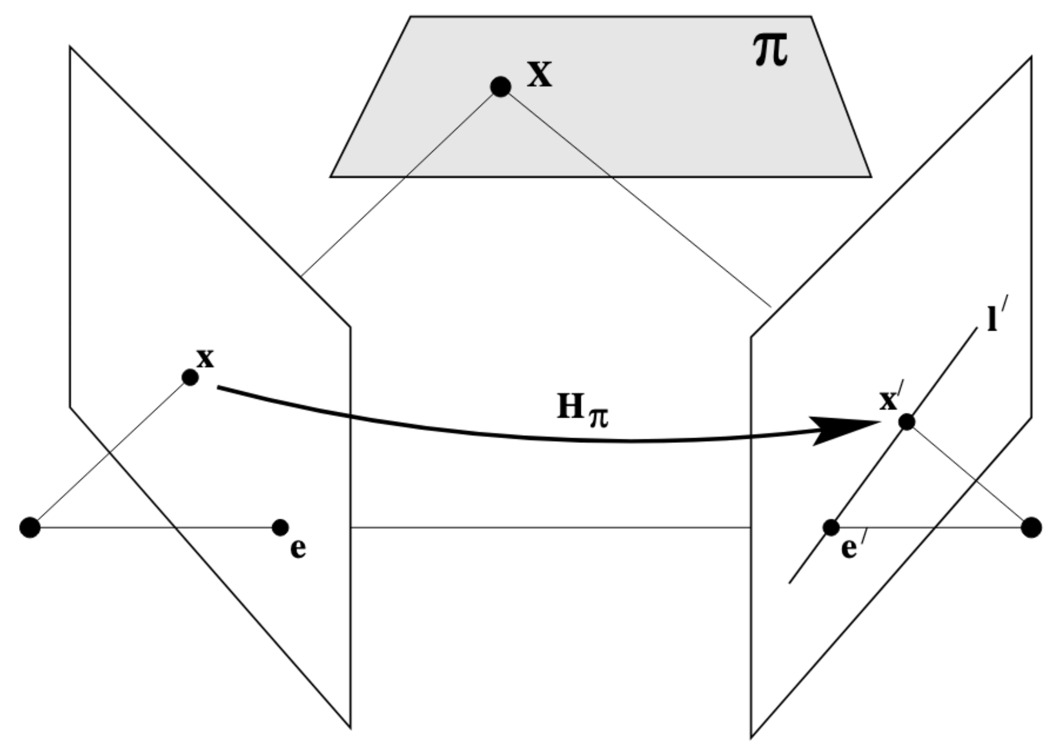


基线与图像平面平行，两摄像机的光轴平行

对极线平行，交于无穷远处（对极点）

基本矩阵：双目系统几何结构的代数表示





从点到线的射影映射

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{l}'$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{H}_\pi \mathbf{x}$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_\times \mathtt{H}_\pi \mathbf{x} = \mathtt{F}\mathbf{x}$$

基本矩阵

$$\mathtt{F} = [\mathbf{e}']_\times \mathtt{H}_\pi$$

基本矩阵：双目系统几何结构的代数表示

$\mathbf{l}' = \mathtt{F}\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'$在$\mathbf{l}'$上

$0 = \mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{l}' = \mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathtt{F}\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathtt{F}\mathbf{x} = 0$$

- **基本矩阵**的性质

$\mathtt{F}\mathbf{e} = \mathbf{0}.$

$\mathtt{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}' = \mathbf{0}$

$\mathbf{l}' = \mathtt{F}\mathbf{x}$

$\mathbf{l} = \mathtt{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}'$

F的秩为2

7个自由度

$\mathtt{F} = [\mathbf{e}']_{\times}\mathtt{P}'\mathtt{P}^{+}$,

$\mathbf{e}' = \mathtt{P}'\mathbf{C}$,

$\mathtt{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$

本质矩阵

$$P = K[R \mid t]$$

$$P = [I \mid 0]$$

$$P' = [R \mid t]$$

$$x = PX$$

$$E = [t]_\times R = R[R^T t]_\times$$

若K已知

3×3矩阵,秩2，5个自由度

$$\hat{x} = K^{-1}x$$

$$\hat{x}'^T E \hat{x} = 0$$

$$\hat{x} = [R \mid t]X$$

$$K^{-1}P = [R \mid t]$$

$$E = K'^T F K.$$

归一化坐标系下的表示

归一化相机矩阵

双目系统的几何结构

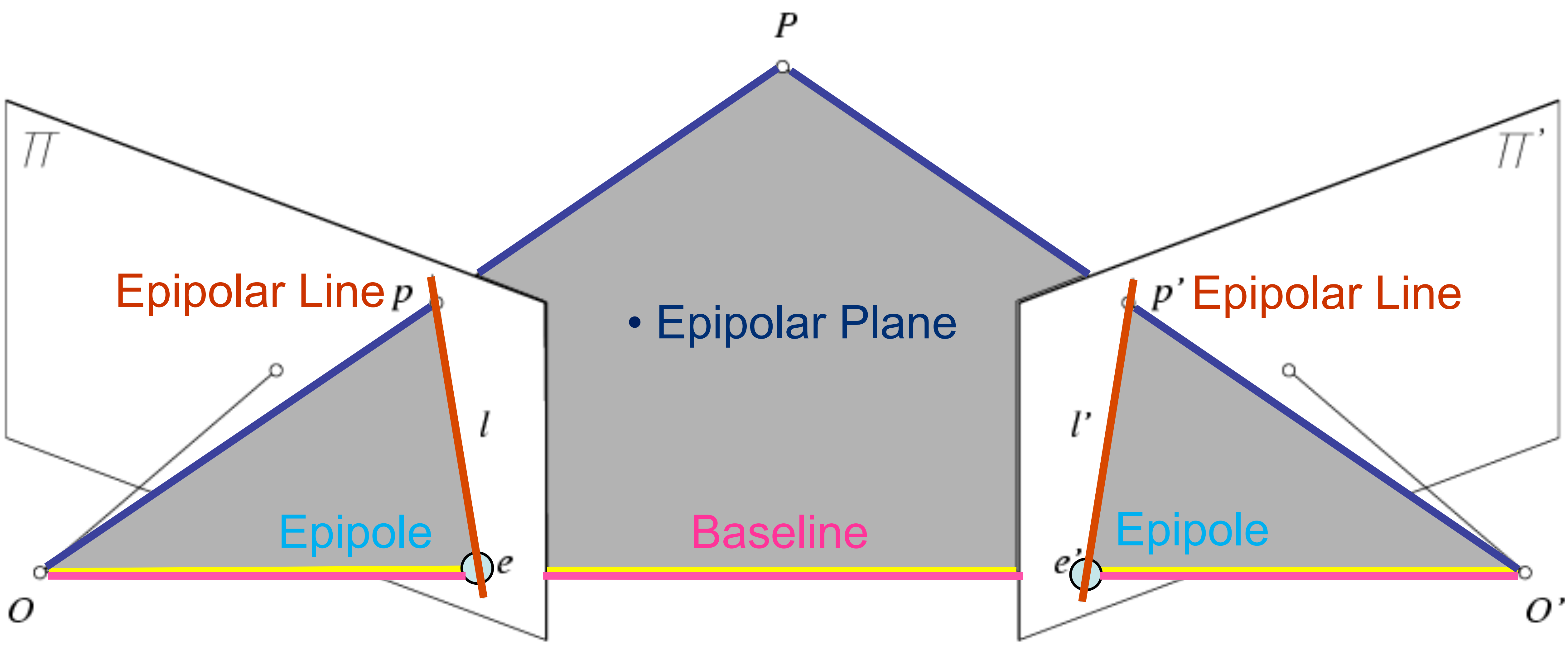
- 两个摄像机：与两个摄像机矩阵 P, P' 关联
  - $\mathbf{x} = P\mathbf{X}, \mathbf{x}' = P'\mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$: 3-D, $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$: 图像点)
- 问题:

I. **几何对应：** 给定一幅图像中的点 $\mathbf{x}$, 会如何约束该点在另外一副图像中的位置$\mathbf{x}'$？

II. **相机参数：** 给定一组图像对应点 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, 如何得到 P, P'

III. **场景集合：** 给定一组图像对应点 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, 以及投影矩阵 P, P', 如何得到三维场景点 $\mathbf{X}$?

第1个问题: 对极几何


P
Π
Π'
Epipolar Line
p
p'
Epipolar Line
• Epipolar Plane
l
l'
Epipole
Baseline
Epipole
e
e'
O
O'

基础矩阵

- 摄像机内参数矩阵 K 和 K′未知

$$\hat{x}^T E \hat{x}' = 0$$

$$\hat{x} = K^{-1} x$$

$$\hat{x}' = K'^{-1} x'$$

$$x^T F x' = 0 \quad \text{with} \quad F = K^{-T} E K'^{-1}$$

Fundamental Matrix
(Faugeras and Luong, 1992)

基于运动的三维结构重建

- 给定一组图像对应点 $\mathbf{x_i} \leftrightarrow \mathbf{x_i}'$,
  - P, P' ($\mathbf{x_i} = P\mathbf{X_i}, \mathbf{x_i}' = P'\mathbf{X_i}$) ? 3-D 点 $\mathbf{X}_i$?
  - **未标定相机:** K, R, t 未知
- 步骤:
  I. 从点对应计算基础矩阵
  II. 从基础矩阵中计算摄像机矩阵
  III. 对于每一个图像点对应 $\mathbf{x_i} \leftrightarrow \mathbf{x_i}'$, 计算对应的 3-D 点

基础矩阵的计算

- 8 点法
  - 给定8个点对应，通过SVD分解得到最小二乘解
  - 令 det(F)=0 （对F使用SVD时）

8点法

1. 求解齐次线性方程组

（1）系统方程

$$\mathbf{x}^T F \mathbf{x}' \square 0$$

$$x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0.$$

$$(x'x, x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1)\,\mathbf{f} = 0.$$

$$\mathbf{Af} = \begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

8点法

1. 求解齐次线性方程组

（1）系统方程

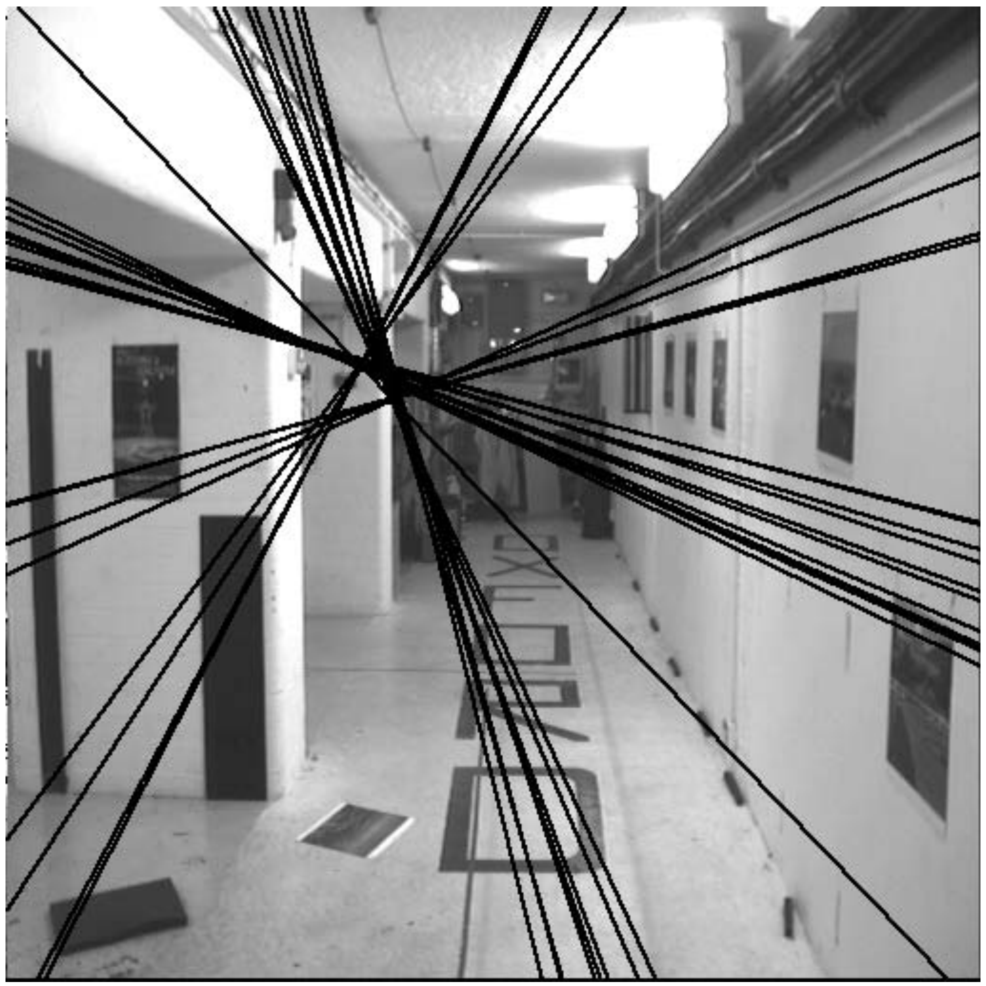
（2）通过SVD求解 **f**： A**f**=**0**

Matlab:

```
[U, S, V] = svd(A);
f = V(:, end);
F = reshape(f, [3 3])';
```

```
Python Numpy:
U, S, Vh = np.linalg.svd(A)
# V = Vh.T -> note = different from MATLAB
F = Vh[-1,:]
F = np.reshape(F, (3,3))
```

奇异性约束



非奇异基础矩阵

修正后的基础矩阵

8点法

1. 求解齐次线性方程组

   （1）系统方程

   （2）通过SVD求解 **f**： A**f**=**0**

2. 通过SVD加入约束 det(F) = 0

Matlab:

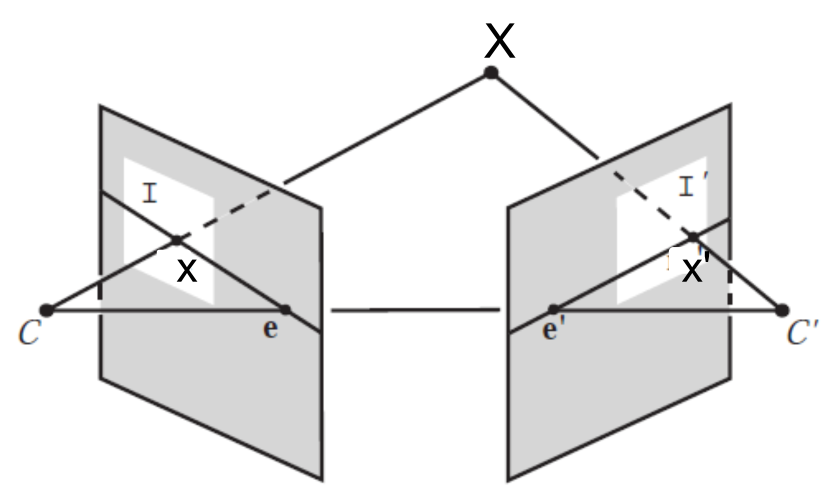
```
[U, S, V] = svd(F);
S(3,3) = 0;
F = U*S*V';
```

Python Numpy:

```
U, S, Vh = np.linalg.svd(F)
S[-1] = 0
F = U @ np.diagflat(S) @ Vh
```

“黄金标准” 法

- 用 8 点法得到F的初值
- 通过 F 得到相机矩阵
- 通过最小化重投影误差，联合求解三维点 **X** 和 **F**



See Algorithm 11.2 and Algorithm 11.3 in Hartley-Zisserman (pages 284-285) for details

三角定位

- x 和 x′存在测量误差
- 因此，反向射线不会交于三维点 X
  - 没有一个确切点X可以满足 x = PX, x′= P′X
  - 图像点不满足对极约束 $\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0.$
- 与图像点观测相比，P 和 P′ 精度相对更高

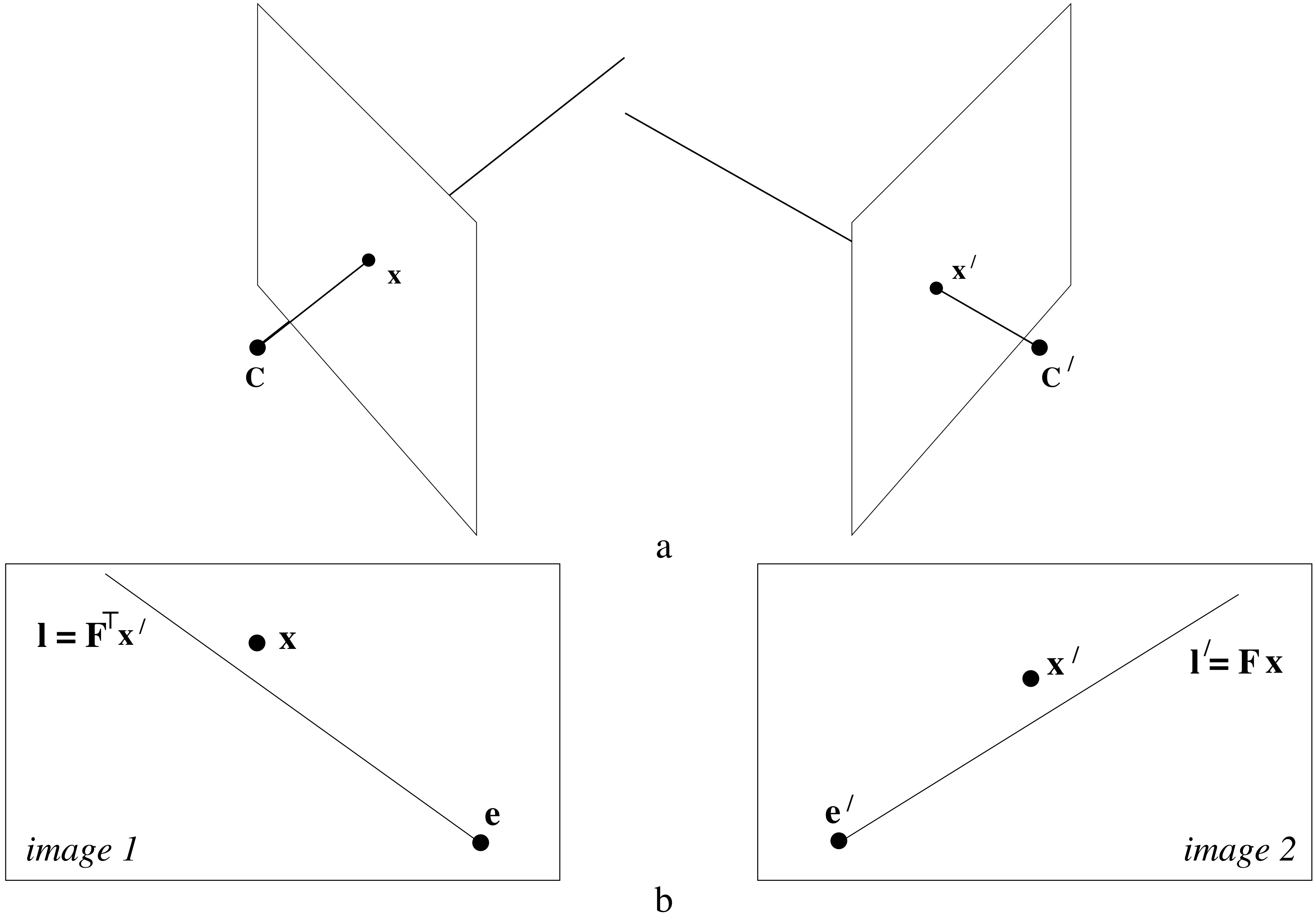


Fig. 12.1. *(a) Rays back-projected from imperfectly measured points* $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ *are skew in 3-space in general. (b) The epipolar geometry for* $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$*. The measured points do not satisfy the epipolar constraint. The epipolar line* $\mathbf{l}' = \mathtt{F}\mathbf{x}$ *is the image of the ray through* $\mathbf{x}$*, and* $\mathbf{l} = \mathtt{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}'$ *is the image of the ray through* $\mathbf{x}'$*. Since the rays do not intersect,* $\mathbf{x}'$ *does not lie on* $\mathbf{l}'$*, and* $\mathbf{x}$ *does not lie on* $\mathbf{l}$.

线性法

- x = PX, x′ = P′X
- x × (PX) = 0 ⟶

$$\begin{aligned} x(\mathbf{p}^{3\top}\mathbf{X}) - (\mathbf{p}^{1\top}\mathbf{X}) &= 0 \\ y(\mathbf{p}^{3\top}\mathbf{X}) - (\mathbf{p}^{2\top}\mathbf{X}) &= 0 \\ x(\mathbf{p}^{2\top}\mathbf{X}) - y(\mathbf{p}^{1\top}\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned}$$

- AX=0

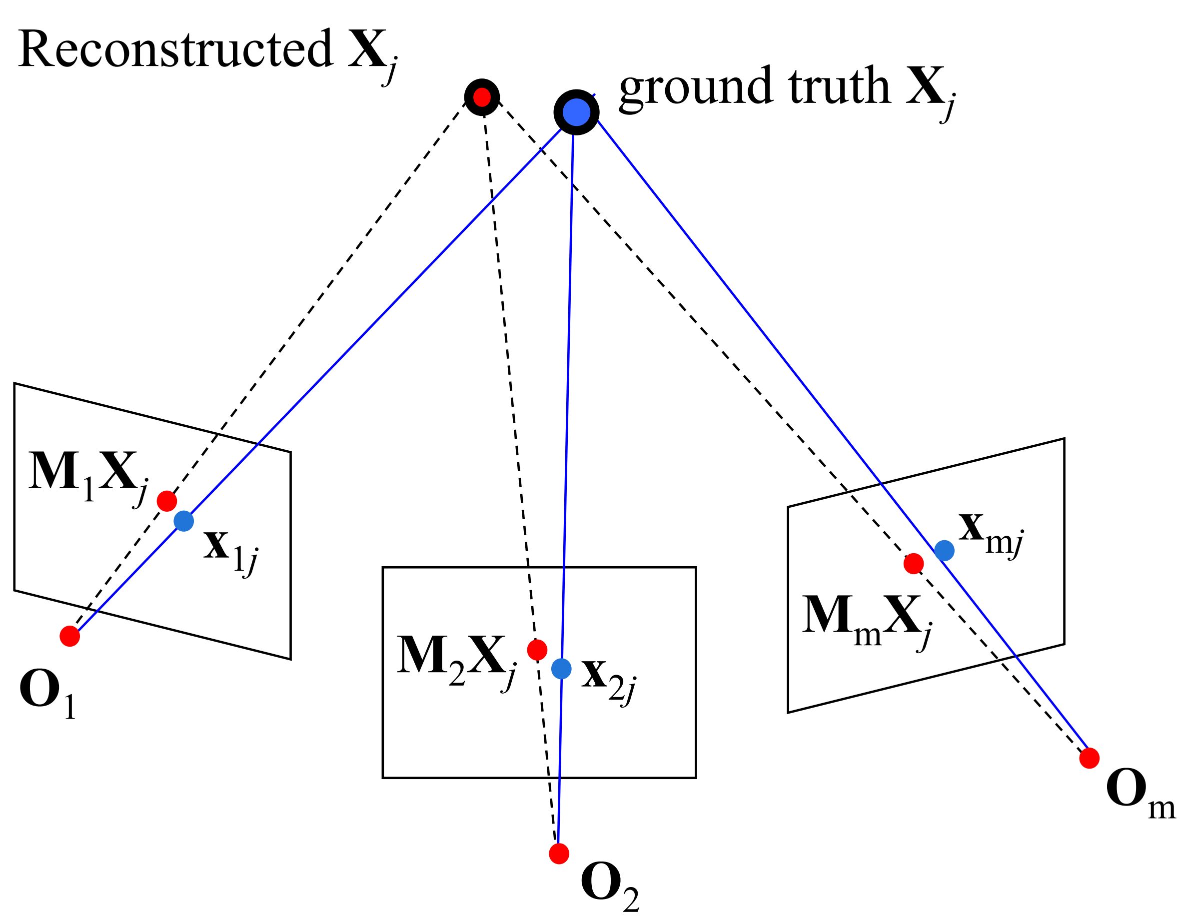
$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} x\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{1\top} \\ y\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{2\top} \\ x'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{1\top} \\ y'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{2\top} \end{bmatrix}$$

Find the solution using DLT via SVD

光束法（Bundle adjustment）

- 非线性方法：结构和运动的优化求解
- 最小化重投影误差

$$E(M,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} D\left(\mathbf{x}_{ij}, M_i\mathbf{X}_j\right)^2$$



光束法（Bundle adjustment）

$$E(M,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} D\left(\mathbf{x}_{ij}, M_i\mathbf{X}_j\right)^2$$

parameters

measurements

D is the nonlinear mapping

- Newton Method
- Levenberg-Marquardt Algorithm
  - Iterative, starts from initial solution
  - May be slow if initial solution far from real solution
  - Estimated solution may be function of the initial solution
  - Newton requires the computation of J, H
  - Levenberg-Marquardt doesn't require the computation of H