Zur Konstruktion zweidimensionaler Pflasterungen in allen drei Geometrien

Diplomarbeit vorgelegt von Klaus Westphal

Ich versichere, daß ich diese Arbeit allein und ohne fremde Hilfe angefertigt habe.

Bielefeld im Sommersemester 1991

Klaus Westphal

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung **5**

1. Drei Geometrien **6**

1.1 Die Kugelmodelle 6

1.1.1 Das elliptische oder sphärische Modell 6

1.1.2 Das parabolische oder euklidische Modell 6

1.1.3 Das hyperbolische Modell 6

1.2 Stereographische Projektion 6

1.2.1 Winkelerhaltungssatz 7

1.2.2 Kreiserhaltungssatz 7

1.3 Die Kreismodelle der drei Geometrien 7

1.3.1 Das elliptische oder sphärische Modell 7

1.3.2 Das parabolische oder euklidische Modell 7

1.3.3 Das hyperbolische Modell 7

2. Pflasterungen und Delaney–Symbole **9**

2.1 Reguläre Pflasterungen 9

2.2 Symmetriegruppen 9

2.3 Fundamentalbereich 10

2.4 Baryzentrische Unterteilung 11

2.5 Delaney–Symbol 12

2.6 Graph des Delaney–Symbols 12

2.7 Orbitlängen in der baryzentrischen Unterteilung 13

2.8 Notation 14

2.9 Orbitlänge im Graphen 15

2.10 Verzweigungszahl 15

2.11 Orbittyp 15

2.12 Splits 16

2.13 Winkelanteil 16

2.14 Innenwinkel 17

3. Topologische Konstruktion **18**

4. Geometrische Konstruktion **21**

4.1 Fundamentalbereichspolygon 21

4.2 Ungespaltene Orbits 21

4.3 Gespaltene Orbits 21

4.4 Längenbedingung 21

4.5 Inkreis und Gleichverteilung der Winkel 21
4.6 Existenz und Eindeutigkeit 21
4.7 Berechnung des Inkreisradius 23
4.8 Hilfssätze zur Berechnung des Inkreisradius 23
4.8.1 Inkreise von Kugelzweiecken 23
4.8.2 Kreise in sphärischen Polygonen 24
4.9 Relaxationverfahren 24
4.10 Normalform einer Pflasterung 24

5. Bedienung des Programms **26**
5.1 Voraussetzungen an Hardware und Betriebssystem 26
5.2 Kommandosyntax 26
5.3 Symboldatei 27
5.4 Tabellendatei 27
5.5 Protokolldatei 27
5.6 Konfigurationsdatei 28
5.7 Fehlermeldungen 28

6. Disketten **30**
6.1 Text der Diplomarbeit 30
6.2 Quellcode des Programms 30
6.3 Lauffähiges Programm 30
6.4 Beispieldaten 30

Abbildungsverzeichnis

1 Netz und Symmetriegruppe einer regulären Pflasterung 9
2 Symbole für Symmetrien 10
3 Fundamentalbereich 11
4 Baryzentrische Unterteilung 12
5 Fundamentalbereich 13
6 Delaney–Symbol 14
7 Delaney–Symbol in alternativer Darstellung 15
8 Tangentenpolygon 22
9 Abhängigkeit der Winkelsumme vom Radius 23

0. Einleitung

Diese Arbeit steht im Zusammenhang mit zwei anderen Diplomarbeiten; der von Daniel Huson [3] und der von Olaf Delgado Friedrichs [4].

In der zuerst genannten Arbeit wird das Problem der Aufzählung regulärer Pflasterungen zunächst auf rein kombinatorische Weise gelöst. D.h. es existieren Computerprogramme, die — nach vorgegebenen Kriterien — gewünschte Klassen regulärer Pflasterungen in kodierter Form auflisten. Dies gilt zum einen für die euklidische, zum anderen aber auch für die hyperbolische und die sphärische Geometrie.

Die zweite Arbeit behandelt die konkrete geometrische Konstruktion einer solcherart vorgegebenen Pflasterung mittels eines Computerprogramms. Die kodierte Information wird also in ein Bild umgesetzt. Um den Rahmen einer Diplomarbeit nicht zu sprengen, wurden dort allerdings der hyperbolische und der sphärische Fall ausgespart. Durch diese Einschränkung war die Verwendung einiger Sätze von Heinrich Heesch zur Klassifizierung von Flächenaufteilungen der euklidischen Ebene möglich.

Die vorliegende Diplomarbeit beschreibt nun einen Algorithmus, der geeignet ist, in jeder der drei Geometrien ein Bild zu einer kodierten Pflasterung zu liefern. Gezeichnet wird jedoch nicht die Pflasterung, sondern lediglich der Fundamentalbereich. Der Hauptunterschied zum von Olaf Delgado Friedrichs entwickelten Verfahren besteht in der Nichtverwendung der Heesch–Klassifizierung und der Ausnutzung eines Satzes von Zoran Lučič und Emil Molnár. Dieser besagt, daß sich jedes (konvexe) Polygon mit beliebig vorgegebenen Innenwinkeln $\alpha < \pi$ in genau einer der drei Geometrien realisieren läßt — und zwar derart, daß die Seiten des Polygons auf Tangenten an einen Kreis liegen. (D.h. das Polygon besitzt einen Inkreis.) Ein weiterer Unterschied besteht im Teilalgorithmus für die topologische Bestimmung des Fundamentalbereichs. Dieser arbeitet nicht nach dem DFS–Verfahren (Tiefensuche), sondern ist im wesentlichen ein modifizierter BFS–Algorithmus (Breitensuche). (DFS erzeugt Bäume mit *wenigen langen* Wegen, BFS dagegen Bäume mit *vielen kurzen* Wegen.) Und schließlich bleibt die Auswahl, welche Kante als nächste dem Baum hinzuzufügen ist, nicht dem Zufall überlassen, sondern wird durch gewisse Regeln bestimmt. Dadurch wird ein nachträgliches *Umbauen* des erzeugten Baumes vermieden.

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich durch Gesprächsbereitschaft, Anregungen und Korrekturen beim Schreiben dieser Arbeit unterstützt haben. Namentlich nennen will ich an dieser Stelle zunächst einmal Andreas Dress, des weiteren Daniel Huson, Olaf Delgado Friedrichs und Angela Neumann.

1. Drei Geometrien

Physikalisch ist bisher nicht erwiesen, welche Geometrie das Weltall in seiner Gesamtheit besitzt. Klar ist jedoch, daß der Raum durch das Vorhandensein von Massen gekrümmt wird. Das Parallelenaxiom von Euklid gilt also nur annähernd und bei *kurzen* Entfernungen. In der modernen Astronomie wird die Krümmung von Lichtstrahlen in der Nähe von Sternen bereits zur Massen- bzw. Entfernungsmessung genutzt.

Dieser Abschnitt soll einige für uns wichtige Eigenschaften auf dem Gebiet der unterschiedlichen Geometrietypen kurz anreißen, ohne jedoch sehr tief in die Materie einzudringen. Ausführlichere Darstellungen finden sich bei Lenz [8], Nöbeling [9], Klein [10], Coxeter [11], Fenchel [12], Jackson [13], Bachmann [14] und Gans [15].

1.1 Die Kugelmodelle

Im folgenden werden drei Modelle zweidimensionaler Geometrien vorgestellt, in denen — bis auf das Parallelenaxiom — alle Geometrieaxiome widerspruchsfrei erfüllt sind.

Die betrachtete Punktmenge bildet dabei eine Kugel- bzw. Halbkugel-Oberfläche im dreidimensionalen Raum; die Punkte einer Geraden liegen dabei jeweils auf speziellen Kreisen. Allen drei Modellen gemeinsam ist die Art der Winkelmessung. Sie wird definiert als Winkel zwischen den zugehörigen Tangenten.

1.1.1 Das elliptische oder sphärische Modell

Dieses Modell ist die gewöhnliche Geometrie auf der Kugeloberfläche. Geraden sind hier alle Großkreise, d.h. alle Kreise, deren Mittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt. Die Längen von Strecken werden durch die zugehörigen Mittelpunktswinkel ausgedrückt; damit erhält man eine Metrik.

1.1.2 Das parabolische oder euklidische Modell

Alle Kreise durch einen Punkt (z.B. den Nordpol) kann man als Geraden eines Kugelmodells der euklidischen Geometrie ansehen.

1.1.3 Das hyperbolische Modell

Als Geraden fungieren hier diejenigen Halbkreise auf einer (südlichen) Halbkugel, die auf dem Äquator senkrecht stehen. D.h. jeder dieser Kreise ist in einer Ebene enthalten, die zur Äquatorebene orthogonal liegt.

1.2 Stereographische Projektion

Definition
Als Stereographische Projektion bezeichnet man eine Zentralprojektion der Kugeloberfläche auf die Äquatorebene, wobei der Nordpol als Projektionszentrum dient. Damit erhält man eine Bijektion zwischen der Kugeloberfläche (mit Ausnahme des Nordpols) und der euklidischen Ebene.

1.2.1 Winkelerhaltungssatz

Definition
Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kreisen, bzw. eines Kreises mit einer Geraden soll derjenige sein, den man erhält, wenn man statt eines Kreises die jeweilige Tangente durch den Schnittpunkt betrachtet.

Satz
Die stereographische Projektion ist winkeltreu.[1]

1.2.2 Kreiserhaltungssatz

Satz
Die stereographische Projektion überführt Kreise auf der Kugeloberfläche in Kreise oder Geraden der euklidischen Ebene.

1.3 Die Kreismodelle der drei Geometrien

Ausgehend von den in 1.1 beschriebenen Kugelmodellen erhält man durch stereographische Projektion Modelle, die in die euklidische Ebene eingebettet sind.

Alle drei Modelle sind winkeltreu, da die Projektion die Winkel erhält. Der im folgenden genannte Begrenzungs– oder Bezugskreis ist das Abbild des Äquators und mit ihm identisch.

1.3.1 Das elliptische oder sphärische Modell

In diesem Modell bilden alle Kreise und Geraden, die einen Bezugskreis in zwei diametral liegenden Punkten schneiden, die Geraden der Geometrie.

Im Kugelmodell haben wir es nur mit Großkreisen zu tun. Wir wissen aber, daß zwei Großkreise einer Kugel sich immer in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden. (Oder sie sind identisch, dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte.) Da nun der Äquator ebenfalls ein Großkreis ist, wird auch er immer in zwei diametralen Punkten geschnitten. Die stereographische Projektion schließlich macht den Äquator zum Bezugskreis, damit ist die anfangs genannte Bedingung hergeleitet.

1.3.2 Das parabolische oder euklidische Modell

Hier wird durch die stereographische Projektion einfach die bestens bekannte euklidische Geometrie der Ebene wiederhergestellt. Das parabolische Kugelmodell ist eigentlich gerade durch eine umgekehrte stereographische Projektion entstanden. Aus diesem Grund ist das Modell trivialerweise auch längentreu. Das Abbild des Äquators hat hier keine besondere Bedeutung.

1.3.3 Das hyperbolische Modell

Die Geraden dieses Modells werden durch Kreisbögen und Strecken im Innern eines Begrenzungskreises gebildet. Dabei müssen diese den letzteren senkrecht treffen.

[1] Die relativ einfachen Beweise für diesen und den folgenden Satz finden sich z.B. bei Fenchel [12].

Diese Bedingung ist die Übersetzung der Forderung, die Kreisbögen des Kugelmodells sollen den Äquator senkrecht treffen. Die stereographische Projektion erhält ja auch diesen speziellen Winkel.

2. Pflasterungen und Delaney–Symbole

Was ist nun eine Pflasterung? Beispiele dafür finden sich leicht in unserer alltäglichen Umwelt: Spinnen– oder Fischernetze, Küchensiebe, Parkettfußböden, gekachelte Wände, kariertes oder rautiertes Schreibpapier, das Brett eines Schachspiels, einige Stoff– oder Tapetenmuster und gewöhnlicher Maschendraht vermitteln eine recht gute Anschauung. Darüberhinaus tauchen sehr viele Pflasterungen in den Bildern des niederländischen Graphikers Maurits Cornelius Escher [16] auf.

Allen Pflasterungen gemeinsam ist, daß eine Fläche (oder die gesamte Ebene) von beschränkten Pflastersteinen lückenlos überdeckt wird, ohne daß sich diese gegenseitig überlappen.

2.1 Reguläre Pflasterungen

Bei genauerer Betrachtung der Beispiele fällt auf, daß in einigen eine gewisse Regelmäßigkeit auftritt, in anderen jedoch nicht. Im folgenden werden wir uns nur noch mit diesen *regulären Pflasterungen* beschäftigen.

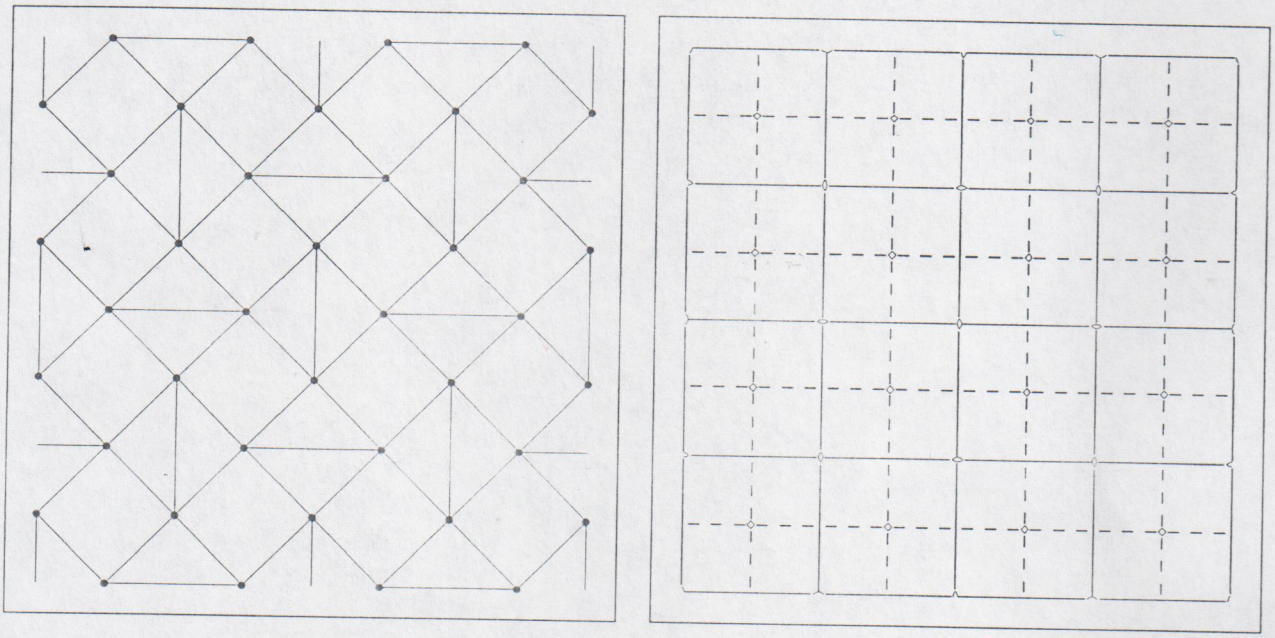

Abbildung 1: Netz und Symmetriegruppe einer regulären Pflasterung

2.2 Symmetriegruppen

Der Begriff *regulär* läßt sich genauer dadurch formulieren, daß die Pflasterung durch Anwendung von hinreichend vielen sogenannten Symmetrieoperationen mit sich selbst zu Deckung gebracht werden kann. Dabei gehört eine Symmetrieoperation zu einem der folgenden Typen:

- T Eine Verschiebung um einen festgelegten Betrag in einer bestimmten Richtung (Vektor) nennen wir *Translation*.
- M Die Spiegelung an einer Achse wird mit M für *mirror* bezeichnet.
- G Die Koppelung von Translation und Spiegelung heißt *Gleitspiegelung* oder *glide reflection*, falls die Spiegelachse parallel zum Translationsvektor liegt.

- C_n Wird das Bild durch Drehung um einen Punkt mit sich zur Deckung gebracht, so spricht man von einer *Rotation*. Der Rotationswinkel ist dabei ein ganzzahliger Teiler des Vollwinkels (360° bzw. 2π). C_3 bezeichnet also eine Dritteldrehung. Eine Halbdrehung wird oft auch einfach als C geschrieben.

- E Abschließend führen wir noch eine *Identitätssymmetrie* ein. Diese kommt z.B. als Verschiebung um einen Nullvektor oder eine Drehung um 360° (C_1) vor.

Im konkreten Fall sind nicht notwendigerweise alle diese Typen vertreten. Immer vorhanden sind jedoch Elemente des Typs E und — außer im sphärischen Fall — des Typs T. Da Symmetrieelemente bijektive Abbildungen sind, bilden sie — mit der gewohnten Verkettungsoperation — eine Gruppe.

In unserem Fall sind nur die *diskreten* Symmetriegruppen interessant, da die *kontinuierlichen* sich nicht zur Beschreibung von Pflasterungen eignen. Aus diesem Grund lassen wir nur Drehungen um *ganzzahlige* Teile des Vollwinkes zu. Zusätzlich sind weitere Winkel verboten: beispielsweise in der euklidischen Ebene Fünftel-, Siebtel- und alle höheren Drehungen. Auch Winkel zwischen Translationen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen und evtl. vorhandenen Spiegelungen oder Gleitspiegelungen müssen diese Bedingungen erfüllen. Sind nur Translationen vorhanden, so gibt es keine Beschänkung hinsichtlich der Winkel. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß Rotationszentren und die Achsen von Spiegelungen oder Gleitspiegelungen nicht *dicht* liegen dürfen, insbesondere dürfen sie keine zusammenhängenden Linien bzw. Flächen bilden.

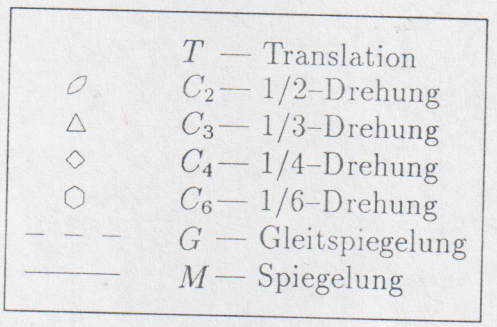

Abbildung 2: Symbole für Symmetrien

2.3 Fundamentalbereich

Zu jeder diskreten Symmetriegruppe läßt sich ein Flächenstück (zusammenhängend, ohne Risse, Löcher und Einschnürungen) auswählen, so daß dessen Bilder unter den Operationen der Gruppe überlappungsfrei und lückenlos die gesamte Ebene überdecken. Ein solches Flächenstück nennen wir *Fundamentalbereich*. In vielen Fällen (genauer: wenn es kein Erzeugendensystem der Gruppe gibt, das nur aus Spiegelungen besteht) kann man mehrere (inkongruente) Fundamentalbereiche finden. Dies geschieht durch Zerschneiden eines bereits gefundenen Fundamentalbereichs und anschließendes Zusammensetzen auf andere Weise.

Durch die Angabe der Symmetriegruppe eines Fundamentalbereichs, und der Restriktion der Pflasterung auf den Fundamentalbereich wird eine reguläre Pflasterung vollständig festgelegt. Falls dabei nur eine Sorte von Flächenstücken auftritt, nennt man die Pflasterung *isohedral*. Darüberhinaus betrachten wir aber auch *n-isohedrale* Pflasterungen (mit n Äquivalenzklassen

von Pflastersteinen). In jedem Fall schneidet das weiter unten vorgestellte Programm die Pflastersteine an geeigneten Stellen auseinander, setzt aus den Teilen einen Fundamentalbereich zusammen und zeichnet diesen. Es reicht somit die Kenntnis der isohedralen Pflasterungen, da man den Fundamentalbereich wie einen einzigen Pflasterstein behandeln kann.

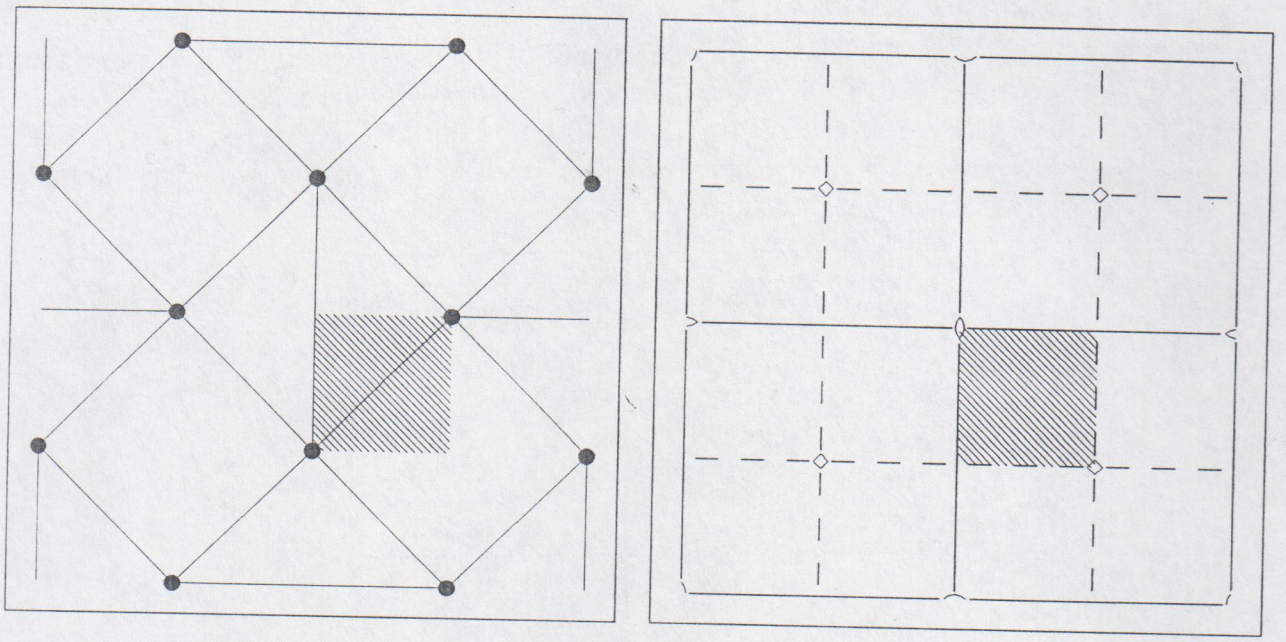

Abbildung 3: Fundamentalbereich

2.4 Baryzentrische Unterteilung

Zunächst wird auf folgende Weise eine (topologisch eindeutige) Triangulierung aller Flächenstücke vorgenommen: Im Innern und auf jeder Seite jedes Flächenstücks wird ein (Mittel–) Punkt ausgewählt. Zusammen mit den ursprünglichen Eckpunkten bilden sie die Ecken von Dreiecken. Diese Dreiecke nennen wir die *Zellen* oder *Kammern* der Pflasterung.

Die Seiten aller Dreiecke lassen sich in kanonischer Weise in drei Klassen einteilen:

- Die erste (bezeichnet mit 0, *rot* oder *gepunktet*) enthält die Dreiecksseiten, die von einem Seitenmittelpunkt zu einem Flächenmittelpunkt verlaufen.
- Die Verbindungen einer Ecke und einer Mitte eines Pflastersteins bilden die zweite Klasse (Typ 1 bzw. *grün* oder *gestrichelt*).
- Mit Typ 2, *blau* oder *durchgezogen* schließlich werden die Hälften der Seiten der ursprünglichen Pflastersteine bezeichnet; also die Verbindungen der ursprünglichen Ecken mit den Seitenmitten.

Durch das Überschreiten einer Seite kommt man von einem Dreieck ins benachbarte. Dabei ändert sich von den drei Kategorien *Ecke*, *Seite* und *Fläche* jeweils nur eine. Wenn man nur 0– und 2–Operationen ausführt, bleibt man an derselben Seite der Pflasterung. Die Nummer für den Typ einer Dreiecksseite ist damit einfach die Dimension der sich ändernden Kategorie. Die Farbkodierung dient der Übersichtlichkeit der Bilder und wird bei der Ausgabe auf Farbbildschirmen verwendet. Leider wurden in den bisherigen Arbeiten die Farben nicht auf einheitliche Weise verwendet; daher erscheint es angebracht, für die Zukunft eine Festlegung

zu treffen. Hier bietet es sich an, die Reihenfolge des natürlichen Farbspektrums (rot – grün – blau) zugrunde zu legen.

Wenn wir beim Wandern über Dreiecksseiten jeweils einen bestimmten Seitentyp nicht benutzen, bleiben wir in einem beschränkten Bereich. D.h. benutzen wir nur 1– und 2–Seiten, so erreichen wir damit alle Dreiecke, die einen Eckpunkt der Pflasterung gemeinsam haben und keinen weiteren Eckpunkt berühren. Entsprechendes gilt für Seiten und Flächen der Pflasterung bei Verwendung von 0– und 2– bzw. 0– und 1–Seiten. Die durch i– und j–Operationen zusammengehörigen Zellen bezeichnen wir als ij–Orbits der Pflasterung. Damit gibt es auf kanonische Weise eine Bijektion zwischen den Orbits der Baryzentrischen Unterteilung und den Ecken, Seiten und Flächen einer Pflasterung.

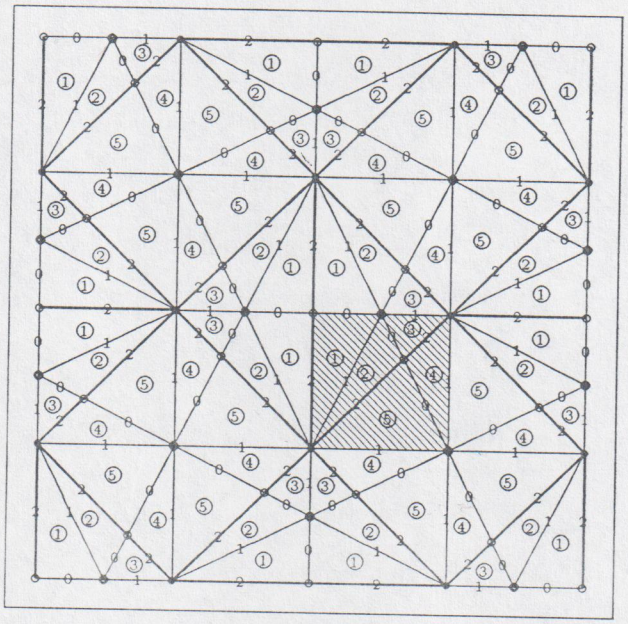

Abbildung 4: Baryzentrische Unterteilung

2.5 Delaney–Symbol

Die durch die baryzentrische Unterteilung gewonnene topologische Information über eine reguläre Pflasterung läßt sich vollständig in einem sogenannten Delaney–Symbol beschreiben.

Dazu müssen zunächst die Zellen der Pflasterung entsprechend den vorhandenen Symmetrien in Äquivalenzklassen eingeteilt werden. Dies geschieht, indem wir irgendeiner Zelle die Nummer 1 geben. Danach erhalten alle Zellen, die durch irgendeine Symmetrieoperation von 1 aus erreichbar sind, ebenfalls die Nummer 1. Dies wiederholen wir jeweils mit der nächsten Nummer angefangen mit irgendeiner der noch nicht numerierten Zellen, bis alle Zellen Nummern bekommen haben.

2.6 Graph des Delaney–Symbols

Die so erhaltenen Äquivalenzklassen werden als Knoten eines Graphen angesehen. In diesem Graphen werden zwei Knoten durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Dreiecke mit einer Seite aneinandergrenzen.[2]

[2] Um Verwirrungen der Bezeichnungen zu vermeiden, vereinbaren wir an dieser Stelle, bei Pflasterungen und den weiter oben definierten Fundamentalbereichen von Punkten (Ecken), Seiten und Flächen, bei Graphen bzw.

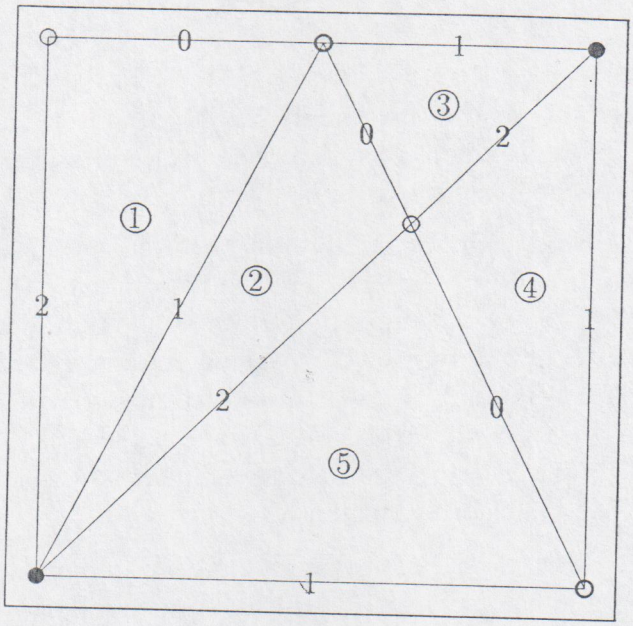

Abbildung 5: Fundamentalbereich

Wie man leicht sieht, besitzt jedes Dreieck genau eine Seite von jedem Typ; und damit auch jeder Knoten des Graphen jeweils eine Kante von jedem Typ. Entsprechend den Seitentypen gibt es somit auch drei verschiedene Typen von Kanten:

- bei Typ 0 (rot, gepunktet) liegen die zugehörigen Dreiecke an einer Seite in einer Fläche;
- liegen beide Dreiecke in einer Fläche und berühren sie dieselbe Ecke der Fläche, so sind sie vom Typ 1 (grün, gestrichelt)
- und schließlich gehören Kanten zum Typ 2 (blau, durchgezogen), wenn sie eine gemeinsame Ecke und eine gemeinsame Halbkante der beiden (unterschiedlichen) Flächen enthalten, in denen sie ihrerseits enthalten sind.

2.7 Orbitlängen in der baryzentrischen Unterteilung

Wenn wir nun zu jedem (echten) Eckpunkt der Pflasterung die Anzahl der angrenzenden Flächen (oder Kanten) und zu jeder Fläche die Anzahl der Ecken (oder Kanten) festhalten, ist die Pflasterung topologisch vollständig charakterisiert. (Die Anzahl der an eine Kante stoßenden Flächen, bzw. der zu einer Kante gehörenden Ecken ist immer 2.) Dies ist die Anzahl der i–j–Doppelschritte, die man braucht, um einmal um einen Punkt der baryzentrischen Unterteilung herumzulaufen.

Definition
Als *Delaney–Symbol* $(\mathcal{N}, M)$ bezeichnen wir einen dreigefärbten Graphen $\mathcal{N}$ zusammen mit drei Abbildungen $m_{ij} \in M$, $m_{01} : \mathcal{N} \to \mathsf{N}$, $m_{02} : \mathcal{N} \to \mathsf{N}$ und $m_{12} : \mathcal{N} \to \mathsf{N}$ der Menge seiner Knoten $\mathcal{N}$ auf die natürlichen Zahlen N.[3]

Delaney-Symbolen jedoch von Orbits, Kanten und Knoten (Vertizes) zu reden.

[3]Dabei muß $m_{ij}(N_1) = m_{ij}(N_2)$ gelten, wenn N_1 und $N_2 \in \mathcal{N}$ durch eine i– oder eine j–Kante verbunden sind. Weiterhin gibt es zu jedem Knoten genau eine Kante von jedem der drei Typen (Farben). Und schließlich gilt $\forall N \in \mathcal{N} : m_{02}(N) = 2$, da ja immer genau zwei Flächen und zwei Ecken zu einer Seite gehören.

2.8 Notation

Um die weiter unten aufgeführten Formeln übersichtlich zu halten, führen wir nun einige abkürzende Begriffe und Schreibweisen ein. Das Computerprogramm bearbeitet die Daten ebenfalls auf der Grundlage entsprechender Strukturen.

Im folgenden Text bezeichnen wir die Menge der Kanten des Delaney–Symbols mit $\mathcal{E}$ (für *edges*). Des weiteren sei mit $\mathcal{O}$ die Menge der Orbits gemeint. Die Kanten $\mathcal{E}$ werden dabei als zweielementige Teilmengen von $\mathcal{N}$ und die Orbits O als Teilmengen von $\mathcal{N} \cup \mathcal{E}$ angesehen. Elemente der Mengen $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{O}$ werden mit N bzw. E oder O bezeichnet. Die Abbildungen m_{ij} werden, da sie ja auf den jeweiligen ij–Orbits konstant sein sollen, nicht nur für die Menge der Knoten $\mathcal{N}$, sondern auch für die Orbits des Delaney–Symbols definiert ($m : \mathcal{O} \to \mathbb{N}$). Der Einfachheit halber und da jeweils am Parameter erkennbar ist, welche gemeint ist, können wir diese Abbildungen mit den gleichen Symbolen bezeichnen.[4]

Doch zunächst einmal ein Bild des Delaney-Symbols des Fundamentalbereichs aus Abbildung 5. Die Gleichungen sind eine Kurzschreibweise für die in den folgenden Abschnitten erläuterten Begriffe und beziehen sich immer auf den Orbit, der die jeweilige Gleichung (teilweise) umrahmt. Anzumerken bleibt weiterhin, daß die geradlinig gezeichneten Kanten mit Dreieckseiten im Innern des Fundamentalbereichs korrespondieren und gebogene Kanten mit dessen Rand.

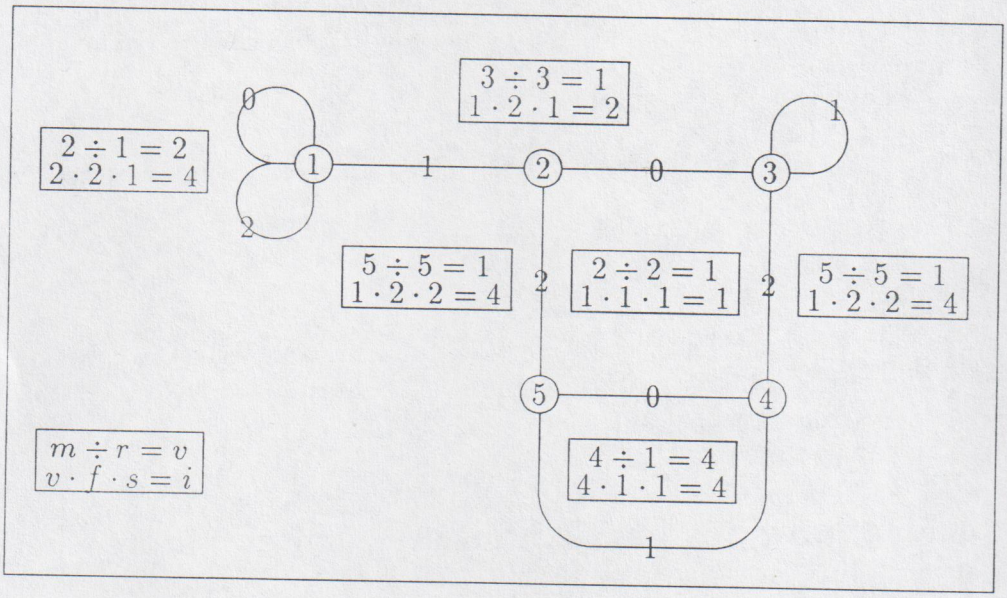

Abbildung 6: Delaney–Symbol

Bei genauerer Betrachtung der letzten beiden Abbildungen fällt auf, daß die Anordnung der Knoten, Kanten und Orbits des Graphen sich (abgesehen von Verformungen) direkt im Fundamentalbereich wiederfinden läßt. Nun enthält der Graph selbst aber keine Information über die Anordnung seiner Elemente. Es wäre z.B. denkbar, den Knoten 1 in der Mitte zwischen den übrigen vier Knoten darzustellen. Ein auf solche Weise gezeichneter Graph ist jedoch für unsere Zwecke unbrauchbar, da sich aus ihm nicht direkt ein Fundamentalbereich ablesen läßt. Gewisse Umgestaltungen sind jedoch zulässig und resultieren in anderen Fundamentalbereichen. Beispielsweise könnte man statt der 1-Kante zwischen den Knoten 4 und 5 die beiden 0-Kanten 4-5 und 2-3 auf den Rand legen. Siehe dazu Bild 7.

[4] Diese *Doppeldefinition* der Bezeichnungen ist auch für die im folgenden definierten Abbildungen r, v, f, s und i sinnvoll, auch wenn sie dort nicht explizit durchgeführt wird.

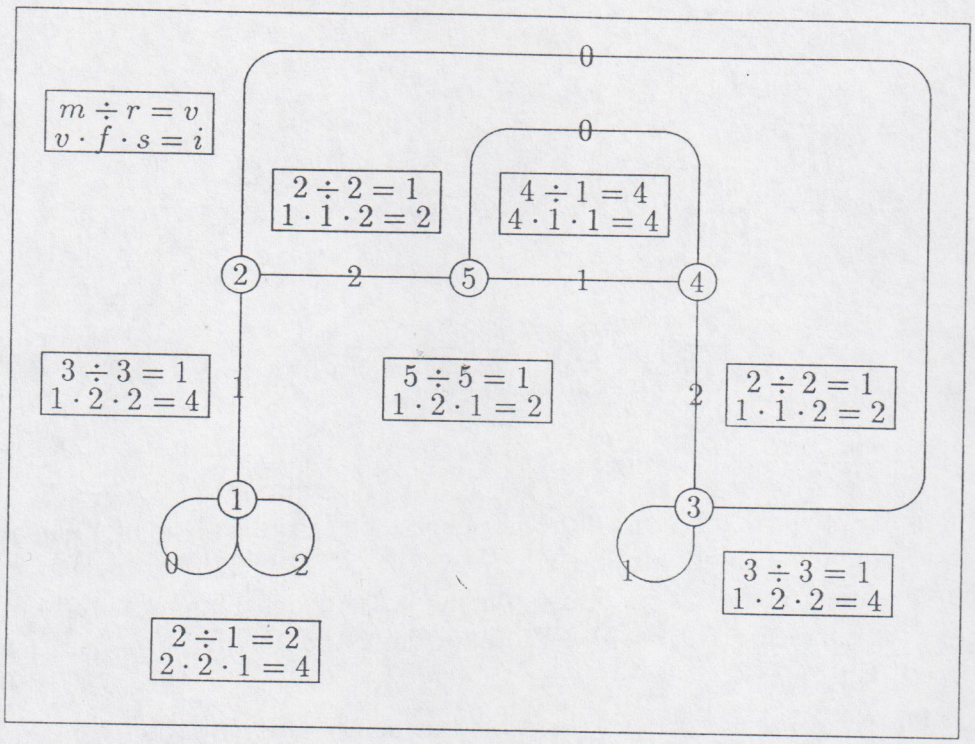

Abbildung 7: Delaney–Symbol in alternativer Darstellung

2.9 Orbitlänge im Graphen

Definition
Zählt man die i–j–Doppelschritte, die man braucht, um im *Graphen* des Delaney–Symbols einen Orbit vollständig zu durchlaufen und wieder beim Startknoten anzukommen, so erhält man die Werte der drei Abbildungen $r_{ij} : \mathcal{N} \to \mathsf{N}$. Da wir die Orbits als Teilmengen der Knotenmenge definiert haben, hat auch der Ausdruck $r(O)$ einen Sinn.

2.10 Verzweigungszahl

Definition
Wir definieren zu jedem Orbit O eine Verzweigungszahl v:

$$v(O) := \frac{m(O)}{r(O)}.$$

Dabei ist v immer eine natürliche Zahl > 0.

Für $v > 1$ entspricht der Orbit dem Zentrum einer Rotationssymmetrie C_v, also einer Drehung um $\frac{2\pi}{v}$.

2.11 Orbittyp

Orbits mit Spiegelkanten nehmen eine gewisse Sonderstellung ein. Dies findet seinen Ausdruck in der folgenden Definition:

Definition
Der Typ f eines Orbits O_{ij} wird gegeben durch eine Abbildung $f : \mathcal{O} \to \mathsf{N}$ mit

$$f(O_{ij}) := \begin{cases} 2, & \text{falls} \quad \exists N \in O : N\sigma_i = N \vee N\sigma_j = N; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abkürzend schreiben wir auch $f(O)$ statt $f(O_{ij})$, da i und j durch den Orbit bestimmt werden. Damit gilt:

$$f(O) = \frac{2 \cdot r(O)}{\#O \cap \mathcal{N}}.$$

2.12 Splits

Wenn der weiter unten in Abschnitt 3. beschriebene Algorithmus bei einem Orbittyp $f(O) = 1$ (Orbit ist spiegelungsfrei) mehr als eine Kante und bei $f(O) = 2$ (Orbit enthält eine Spiegelung oder Gleitspiegelung) mehr als zwei Kanten dem Rand des Fundamentalbereichs zuordnet, entspricht der Orbit mehreren (Rand-) Punkten des Fundamentalbereichs. Der Orbit zerfällt also in mehrere Teile.

In Abbildung 6 trifft dies zu für den 1–2–Orbit mit den Knoten 1–2–5|4–3; in Abbildung 7 sind dies der 0–1–Orbit 1–2|3 und der 0–2–Orbit 2–5|4–3.

Definition

Die Anzahl der Teile wollen wir *Splits* nennen. Formal ist dies natürlich eine Abbildung s der Menge der Orbits auf die natürlichen Zahlen.

$$s(O) := \begin{cases} \min(\#\text{Randkanten von } O, 1), & \text{für} f = 1; \\ \#\text{Randkanten von } O - 1, & \text{für} f = 2. \end{cases}$$

Im Fall $f = 2$ ist der Orbit kettenförmig; die beiden Enden liegen immer auf dem Rand. Es reicht eine weitere Randkante, um den Orbit zu teilen. Dagegen sind Orbits mit $f = 1$ ringförmig. Ist nun auch die Verzweigungszahl $v = 1$, so kann keine *einzelne* Randkante allein auftreten. Es sind entweder gar keine vorhanden (dann liegt er im Innern) oder mehr als eine, (dann ist er geteilt). Im anderen Fall $v > 1$ enthält der Orbit entweder genau eine Randkante (er liegt dann in einem Stück auf dem Rand) oder er hat mehrere (dann liegt er verteilt auf mehrere Ecken des Fundamentalbereichs).

2.13 Winkelanteil

Aus den oben definierten Abbildungen der Orbit–Kennzahlen läßt sich bereits eine geometrische Größe ableiten: Die Abbildung $i : \mathcal{O} \to \mathsf{N}$ gibt an, wieviele (gleiche oder unterschiedliche) Teilorbits zusammengesetzt in der Pflasterung einen Vollwinkel (360°, 2π) ergeben.

Definition

Die Werte von i lassen sich berechnen durch:

$$i(O) := v(O) \cdot f(O) \cdot s(O).$$

Die Bedeutung dieses etwas ungewohnten Begriffs wird vielleicht etwas klarer durch den folgenden Abschnitt. Eingeführt wurde die Abbildung i lediglich deswegen, weil sich ihre die Werte durch ganze Zahlen (d.h. auf dem Rechner ohne Rundungsfehler) ausdrücken lassen.

2.14 Innenwinkel

Definition
Der von einem Teilorbit eingenommene Winkel α ergibt sich damit als

$$\alpha(O) := \frac{2\pi}{i(O)}.$$

Oder:

$$\alpha(O) = \frac{2\pi}{v(O) \cdot f(O) \cdot s(O)}.$$

Für innere Orbits ist immer $i = 1$ (also $\alpha = 2\pi$); bei Randorbits mit $i = 2$ erhalten wir $\alpha = \pi$ (also keine echte Ecke); und für $i > 2$ gibt α die Innenwinkel der zum Orbit gehörenden (echten) Ecken des Fundamentalbereichspolygons an.

3. Topologische Konstruktion

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, das zu einem vorgegebenen Delaney–Symbol einen der möglichen Fundamentalbereiche (zunächst topologisch) auswählt. Der Algorithmus bestimmt, welche Kanten im Innern und welche auf dem Rand liegen sollen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Algorithmus hier nicht in allen Details wiedergegeben. Die genaue Formulierung findet sich in der Datei `del_glue.c` des Quellcodes.

Die Grundidee besteht darin, von einem Orbit auszugehen, dessen Kanten (und Knoten) zu numerieren oder zu sperren, und dann solange jeweils einen der *angrenzenden* Orbits zu bearbeiten, bis kein unbearbeiteter mehr übrig ist.

Das Numerieren einer Kante bedeutet dabei, daß die entsprechende Seite im Innern des Fundamentalbereichs liegt. Wird eine Kante allerdings gesperrt, so darf sie auch später nicht mehr numeriert werden, d.h. sie liegt mit Sicherheit auf dem Rand.

Die Bestimmung des nächsten zu bearbeitenden Orbit geht in zwei Stufen vor sich: zuerst werden die Orbits ermittelt, die überhaupt als nächste in Frage kommen; dann wird unter diesen einer ausgewählt.

Um zur Bearbeitung zugelassen zu werden, muß ein Orbit

- unnumeriert sein,
- ungesperrt sein oder noch unbearbeitete Kanten bzw. Knoten besitzen,
- mindestens eine numerierte Kante bzw. Knoten besitzen, es sei denn er ist der erste bearbeitete Orbit,
- ungespalten sein, d.h. alle numerierten Kanten und Knoten müssen zusammenhängen.

Durch diese Bedingungen wird sichergestellt, daß der Fundamentalbereich zusammenhängend ist und keine „Löcher“ aufweist. Ausgehend von einem Orbit wird ja immer nur „angebaut“.

Für die Auswahl gibt es folgende Kriterien (in der Reihenfolge ihrer Priorität):

- der Vollwinkelanteil $i := m \cdot f \cdot s$ ist minimal, (bzw. der Innenwinkel α maximal),[5]
- die Orbitlänge m in der baryzentrischen Unterteilung ist maximal und
- b ist minimal (wobei mit b die Anzahl bisher unbearbeiteter Kanten und Knoten des Orbits gemeint ist).

Diese Auswahlkriterien sorgen dafür, daß der bereits generierte Teil des Fundamentalbereichs konvex realisierbar bleibt; ein nachträgliches „Umbauen“ ist nicht mehr erforderlich.

Nun werden möglichst viele Kanten und Knoten des Orbits numeriert. Dabei werden Kanten ausgelassen, die

- gesperrt sind (d.h. die Kante wurde vom Nachbarorbit aus bearbeitet, jedoch nicht numeriert),

[5] Die Anzahl der Splits s ist eigentlich erst nach Beendigung des Algorithmus für alle Orbits bekannt. Daher wird s zu Anfang für alle Orbits mit dem Wert 1 initialisiert und während der Bearbeitung aktualisiert. Dadurch hat s immer zumindest für die momentan relevanten (angrenzenden) Orbits bereits den korrekten Wert.

- Spiegelkanten sind ($f > 1$ bzw. $\#E = 1$),
- bereits numeriert sind,

Falls der gerade bearbeitete Orbit

- einem Drehzentrum entspricht ($v > 1$) und
- keine Spiegelungen enthält ($f = 1$) oder
- bereits eine gesperrte Kante enthält (d.h. der Orbit muß in mehrere Teile aufgespalten werden),

dann wird eine Kante bei der Numerierung übergangen und statt dessen gesperrt. Für die Entscheidung, welche Kante dies ist, wird bestimmt, welcher über die jeweilige Kante erreichbare Nachbarorbit die Kriterien für eine nachfolgende Bearbeitung am schlechtesten erfüllt.

Dadurch bleibt der Fundementalbereich *einfach* zusammenhängend. Es kann z.B. nicht passieren, daß gegenüberliegende Seiten miteinander „verklebt" werden.

In einigen Fällen kann es vorkommen, daß die Suche nach dem nächsten zu bearbeitenden Orbit erfolglos bleibt, obwohl noch nicht alle bearbeitet wurden. In diesem Fall wird stattdessen eine einzelne Kante numeriert, die

- noch nicht numeriert ist,
- ungesperrt ist,
- keine Spiegelkante ist,
- einen numerierten Knoten mit einem unnumerierten verbindet.

Danach wird wieder versucht, einen geeigneten Orbit zu finden.

Da der Graph definitionsgemäß zusammenhängend ist, werden mit diesem Verfahren tatsächlich alle Knoten, Kanten und Orbits erreicht. Dies unterliegt jedoch einer Konsistenzprüfung: wenn die höchste vergebene Knoten- bzw. Orbitnummer mit der jeweiligen Gesamtanzahl nicht übereinstimmt, so war die eingelesene Symboldatei fehlerhaft. Es erscheint eine entsprechende Meldung und der Programmlauf wird abgebrochen.

Abschließend werden noch einige Werte berechnet. Im einzelnen:

- Die Randkanten jedes Orbits werden gezählt.
- Die Anzahl der Teile, in die jeder Orbit zerfällt (s) wird korrigiert.
- Zu jedem Knoten wird ein Signum bestimmt. Dazu wird beim Knoten Nummer 1 mit dem Wert +1 begonnen; dann werden solange ohne Überschreitung von Randkanten bei alternierendem Vorzeichen die jeweils benachbarten Knoten gekennzeichnet, bis alle erreicht wurden. Wenn das Signum der beiden Knoten einer Randkante ungleich ist, so ist die zugehörige Symmetrieoperation orientierungserhaltend (also eine Translation oder Rotation), sonst orientierungsumkehrend (also eine Spiegelung oder Gleitspiegelung).

Um dieses Vorgehen etwas zu verdeutlichen, wollen wir nun die einzelnen Schritte am bereits zuvor gezeigten Beispiel nachvollziehen.

Beispiel

Als erstes wird der 0–2–Orbit 2–3–4–5 ausgewählt, da er zur Bearbeitung zugelassen und $i = 1$ minimal ist. Alle Kanten werden numeriert, da der Orbit unverzweigt ist ($v = 1$) und die bereits numerierten Kanten (weil nicht vorhanden) zusammenhängend sind.

Der 0–1–Orbit 1–2–3 ist der zweite bearbeitete, da er zugelassen (die numerierten Kanten hängen zusammen) und $i = 2$ minimal unter den verbleibenden zugelassenen Orbits ist. Die folgenden seiner Kanten werden *nicht* numeriert: die 0–Kante 1-1 und die 1–Kante 3–3, da sie Spiegelkanten sind, und die 0–Kante 2–3, da sie bereits numeriert ist.

Als dritter Orbit wird 4–5 bearbeitet. Allerdings werden hier keine neuen Kanten mehr numeriert. Die 0–Kante 4–5 ist bereits numeriert und die 1–Kante 4–5 würde den Orbit schließen, obwohl er verzweigt ($v = 4$) ist.

Auch beim vierten Orbit, der nur den Knoten 1 enthält, ist nichts mehr zu tun, weil er nur Spiegelkanten enthält.

Der noch verbleibende Orbit 1–2–5–4–3 wurde bereits im ersten Schritt geteilt und so von der Bearbeitung ausgeschlossen.

4. Geometrische Konstruktion

4.1 Fundamentalbereichspolygon

Die unmarkierten Kanten des Delaney–Symbols bilden die Seiten eines (nicht notwendigerweise regulären) Polygons; die verzweigten Orbits seine Ecken und die Knoten dreieckige Teilflächen. Dieses Polygon ist ein Fundamentalbereich der Pflasterung.

4.2 Ungespaltene Orbits

An allen Polygon–Ecken, deren zugehörige Orbits nur diese eine Ecke repräsentieren ($s = 1$), wird der Innenwinkel α durch die Verzweigungszahl v und den Orbittyp f erzwungen: $\alpha = \frac{2\pi}{v \cdot f}$.

4.3 Gespaltene Orbits

Die verbleibenden Ecken lassen sich durch ihre Orbitzugehörigkeit in Klassen einteilen. In diesem Fall wird lediglich die Summe der Innenwinkel einer Eckenklasse durch die in 4.2 genannte Formel gegeben.

4.4 Längenbedingung

Die Aufteilung der Summe auf die Summanden muß nun verträglich sein mit der Forderung, daß Seiten, die zur selben Kante gehören, gleiche Längen aufweisen sollen. Diese Bedingung führt auf ein trigonometrisches Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen.

4.5 Inkreis und Gleichverteilung der Winkel

Bemerkenswerterweise läßt sich eine Lösung dieses Gleichungssystems auf denkbar einfache Art finden: wenn wir fordern, daß das Polynom einen Inkreis besitzen soll, und wir die Winkelsumme jeder Eckenklasse zu gleichen Teilen auf die jeweiligen Ecken verteilen, ist die Längenbedingung erfüllt und die Seitenlängen lassen sich berechnen.

Wenn zwei Seiten durch eine Längenbedingung gekoppelt sind, dann gehört jeweils (mindestens) einer der beiden Endpunkte jeder Seite zu einem gemeinsamen Orbit. Wir teilen nun alle Seiten am Tangentialpunkt in zwei Teile. Da die zusammengehörenden Teile gekoppelter Seiten zur selben Orbitklasse gehören, sind die zugehörigen Innenwinkel gleich. Der Innenwinkel bestimmt nun aber den Abstand des Endpunktes vom Kreismittelpunkt und dieser den Abstand vom Teilpunkt. Damit ist gezeigt, daß die Längenbedingung erfüllt wird.

4.6 Existenz und Eindeutigkeit

Satz
Unter allen konvexen Polygonen in S^2, E^2 oder H^2 mit vorgegebenen Innenwinkeln α_1 bis α_m, $m \geq 3$ gibt es (bis auf Ähnlichkeit) genau eines, das einen Inkreis besitzt.[6]

[6] aus: Zoran Lučič und Emil Molnár, „Fundamental Domains for Planar Discontinuous Groups and uniform Tilings“, S. 8–9, Satz 3.2

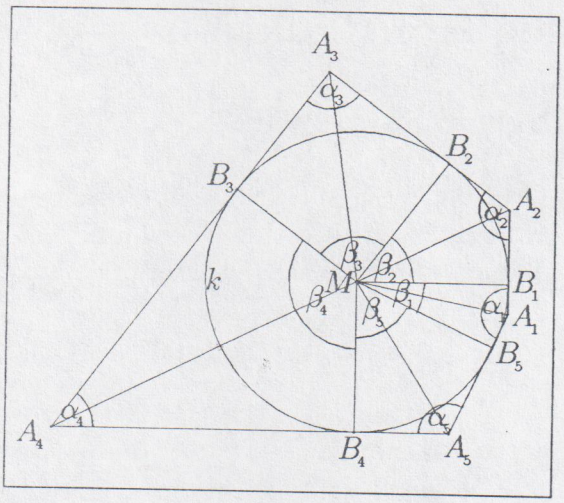

Abbildung 8: Tangentenpolygon

Beweis

Sei p ein Polygon mit den Innenwinkeln α_1 bis α_m an den Ecken A_1 bis A_m. Sei weiterhin angenommen, daß zu p ein Inkreis $k(M,r)$ existiert.

Die Berührungspunkte von p und k werden mit B_1 bis B_m bezeichnet und die Winkel $B_m M B_1$, $B_1 M B_2, \ldots, B_{m-1} M B_m$ nennen wir $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 2\pi.$$

Aus der Trigonometrie kennen wir für die rechtwinkligen zentralen Dreiecke $M A_i B_i$ die folgende Formel:

$$\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta_i}{2}\right) \cdot \mathrm{c}(r).$$

Dabei ist $\mathrm{c} : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ definiert durch:

$$\mathrm{c}(r) := \begin{cases} \cosh(r) & \text{in } H^2, \\ 1 & \text{in } E^2, \\ \cos(r) & \text{in } S^2. \end{cases}$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\beta_i = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}{\mathrm{c}(r)}\right)$$

Und schließlich:

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} \arcsin\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}{\mathrm{c}(r)}\right)$$

(a) Eindeutigkeit

Da diese Summe bei festgehaltenen Winkeln α_i und variablem Radius r in H^2 und S^2 streng monoton ist, wird der Wert π nur bei einem bestimmten Radius angenommen. In E^2 ist die Summe konstant π, deshalb ist hier jeder Radius möglich.

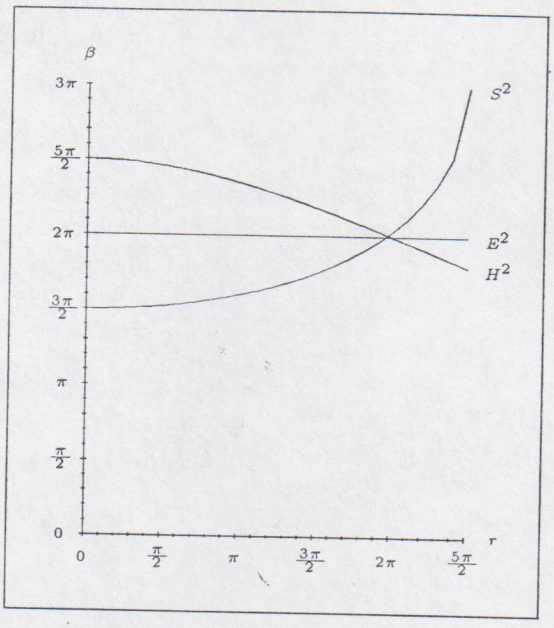

Abbildung 9: Abhängigkeit der Winkelsumme vom Radius

(b) Existenz

Um nun p zu konstruieren, zeichnen wir zunächst einen Kreis k um einen beliebigen Punkt M.

Den Radius r des Kreises bestimmen wir in S^2 und H^2 durch die gegebenen trigonometrischen Formeln unter Verwendung eines iterativen Näherungsverfahrens. Die Existenz der Lösung wird durch den Zwischenwertsatz garantiert. In E^2 können wir r beliebig (aber positiv) wählen.

Nun zeichnen wir von M ausgehend die Halbgeraden b_1 bis b_m mit den (aus den α_i berechneten) Winkeln β_1 bis β_m zwischen je zwei aufeinanderfolgenden.

Die Tangenten an k durch die Punkte $b_i \cap k$ bestimmen die Seiten des Polygons p.

4.7 Berechnung des Inkreisradius

Da die Lösung dieses Gleichungssystems sich einer direkten Berechnung entzieht, bietet sich die Verwendung eines Näherungsverfahrens an.

Die gegebenen Formeln liefern bei festgehaltenen Innenwinkeln und vorgegebenem Radius die Mittelpunktswinkel. Diese müssen sich zu 2π summieren. Wir variieren nun den Radius und bewerten die einzelnen Näherungsschritte durch die Differenz der Winkelsumme zu 2π.

Als Näherungsverfahren verwendet das Programm eine Kombination aus Intervallhalbierung und Regula Falsi.

Da die Formel im sphärischen Fall nicht für beliebig große Radien definiert ist, wird zunächst unter Verwendung der folgenden Hilfssätze eine obere Schranke berechnet.

4.8 Hilfssätze zur Berechnung des Inkreisradius

4.8.1 Inkreise von Kugelzweiecken

Satz
Folgende Aussagen sind gültig:

- Ein Kugelzweieck mit Innenwinkeln $\alpha < \pi$ besitzt unendlich viele Inkreise.
- Alle diese Inkreise haben maximal einen Radius gleich der Hälfte der (gleichen) Innenwinkel.
- Genau ein Inkreis hat maximalen Radius.
- Dieser ist gleichzeitig der größte Kreis, der vollständig im Innern des Zweiecks liegt.

Beweis
folgt unmittelbar aus der Definition der Winkelmessung als Winkel zwischen (euklidischen) Tangenten an die Sphäre, die zudem mit dem jeweils zugehörigen Kreis in einer Ebene liegen sollen. (D.h.: Eine Tangente wird gegeben durch den Schnitt der Kreisebene mit der Tangentialebene.)

4.8.2 Kreise in sphärischen Polygonen

Satz
Für sphärische n–Ecke läßt sich eine obere Schranke für den Radius aller Kreise angeben, die vollständig im Innern liegen. Diese Schranke ist die Hälfte des kleinsten Innenwinkels.
Beweis
Wir betrachten zwei sich an einer Ecke schneidende Seiten. Die beiden durch sie festgelegten sphärischen (Halb–) Geraden schneiden sich ein weiteres Mal in einem Punkt genau gegenüber dem ersten Schnittpunkt und bilden so ein Kugelzweieck. Für Kugelzweiecke haben wir bereits den Radius des größten im Innern liegenden Kreises berechnet. Da diese Überlegung für alle Ecken gelten muß, können wir eine obere Schranke als das Minimum der halben Innenwinkel angeben.

4.9 Relaxationverfahren

Die Eckpunkte des Fundamentalbereichs sind auf diese Weise festgelegt, und Punkte auf dem Rand können durch gleichmäßige Aufteilung der Seiten vergeben werden.

Für die Punkte im Inneren des Fundamentalbereichs bestehen keine Bedingungen hinsichtlich der Koordinatenvergabe. Erwünscht ist jedoch, daß sich keine Kreuzungen ergeben.

Stellt man sich die Linien des Kammernsystems des Fundamentalbereichs als Netz aus Gummibändern vor, so kommt man dadurch zu einem Verfahren zur Bestimmung geeigneter Koordinaten für die inneren Punkte. Reihum werden Punkte, Linien– und Flächenmittelpunkte auf den Schwerpunkt der benachbarten Punkte gesetzt, bis sich keine weitere Änderung mehr ergibt. Da der Rand festgehalten wird und die Rechengenauigkeit begrenzt ist, terminiert das Verfahren nach endlich vielen Schritten.

4.10 Normalform einer Pflasterung

Als Ausblick sei hier noch ein modifiziertes Verfahren vorgestellt, das sich vermutlich sogar zum Zeichnen von dreidimensionalen Pflasterungen eignet. Statt den Rand festzuhalten, werden seine Punkte in jedem Durchgang durch Relaxation unter Zuhilfenahme der Punkte der ersten Umgebung berechnet. Beim in 4.9 vorgestellten Verfahren wurde durch den festgehaltenen Rand sichergestellt, daß der Fundamentalbereich nicht zu einem Punkt zusammenschrumpft.

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren hält lediglich Eckpunkte mit Rotationssymmetrie fest. (Sie liegen ja immer im Schwerpunkt ihrer Nachbarn, da die Positionen ihrer Nachbarn jedesmal durch Drehung um sie selbst bestimmt werden.) Der ursprünglich berechnete Inkreis wird also nicht beibehalten, jedoch entstehen Kreise um die einzelnen Punkte (soweit es die Symmetrien zulassen). Das Ganze nähert sich einer echten baryzentrischen Unterteilung an, und hängt auch nicht mehr von der anfänglichen (topologischen) Wahl des Fundamentalbereichs ab. Man könnte dies auch die Normalform einer Pflasterung nennen. In der Regel enthält diese Normalform mehr Symmetrie als durch das Delaney–Symbol vorgegeben wird. Oder besser: sie enthält soviel Symmetrie wie im Rahmen der Vorgaben überhaupt möglich ist. Aus diesem Grunde sehen natürlich die Normalformen vieler nichtäquivalenter Pflasterungen gleich aus; es ist also nötig, die unterschiedlichen Symmetriegruppen deutlich zu machen. Als beste Lösung bietet sich hier wohl das Zeichnen der Symmetrieelemente an. So läßt sich auch gleich die zugehörige Gruppe ablesen. Eine Reduzierung der Symmetrie durch Symmetriebruch (d.h. durch Verwendung geknickter Kanten) eignet sich natürlich auch, hat aber den Nachteil, daß es einige Übung erfordert, eine unechte Ecke (mit Grad 2) beim Zählen der Ecken eines Flächenstückes zu übergehen. Falls man diese Darstellung jedoch vorzieht, schafft hier das Kenntlichmachung echter Ecken als fettgezeichnete Punkte Abhilfe.

5. Bedienung des Programms

5.1 Voraussetzungen an Hardware und Betriebssystem

Der Rechner muß IBM–kompatibel sein. Zulässige Prozessoren sind alle zur Zeit in diesen Rechnern gängigen Typen.

Als Betriebssystem muß MS–DOS oder PC–DOS Version 3 oder höher verwendet werden.[7]

Eine Harddisk wird bei der Größe des Programms und der typischerweise zu bearbeitenden Datenmengen dringend empfohlen.

Alle üblichen Grafik–Karten und –Monitore werden unterstützt, jedoch wird von der Verwendung von Schwarz/Weiß–Geräten abgeraten, da die Nichtverwendung von Farben die Überschaubarkeit der Bilder sehr stark einschränkt.

Inwieweit das Programm auf Rechnern mit 512 kByte oder 640 kByte RAM lauffähig ist, ist mir nicht bekannt. Entwickelt wurde es mit 1 MByte Hauptspeicher. In jedem Fall können mit weniger Speicher nur kleinere Delaney–Symbole bearbeitet werden.

Ein arithmetischer Koprozessor (Intel 80x87, o.ä.) ist nicht unbedingt nötig. Er führt aber zu einer drastischen Beschleunigung des Programms und wird daher empfohlen.

Maus, Trackball, Grafiktablett oder Joystick werden nicht unterstützt. Da das Programm in der vorliegenden Form nicht interaktiv arbeitet, ignoriert es diese Eingabegeräte, falls sie vorhanden sind.

Ein Drucker kann benutzt werden, um Tabellen– oder Protokolldateien direkt auf Papier zu bringen. Eine Ausgabe der Zeichnungen ist derzeit noch nicht möglich.

5.2 Kommandosyntax

Der Aufruf des Programms erfolgt mit dem Kommando

```
FUNTILES [symbolfile [configfile [tablefile]]] [> protfile]
```

Dabei dürfen in eckige Klammern eingeschlossene Parameter weggelassen werden. (Die Klammern selbst werden immer weggelassen.) Parameter in Kleinbuchstaben sind durch geeignete Dateinamen zu ersetzen. Großbuchstaben dürfen (unter MS–DOS) auch als Kleinbuchstaben eingegeben werden, müssen aber ansonsten exakt so geschrieben werden, wie hier angegeben ist. Leerzeichen dürfen nicht fehlen, sie können aber mehrfach hintereinander erscheinen und die Verwendung von Tabulatoren statt ihrer ist erlaubt. Das Größer–Zeichen leitet die Ausgabe von der Konsole in eine Datei um. Erlaubt sind hier auch die Geräte `NUL:`, `CON:`, `PRN:`, `LPT1:` bis `LPT4:` und `COM1:` bis `COM4:`. Alle genannten Dateien werden zunächst im aktuellen Verzeichnis gesucht. Falls eine Datei dort nicht zu finden ist, wird die Environment–Variable `FUNTILES` gelesen und die Suche im dort genannten Verzeichnis fortgesetzt. Die Variable kann mit dem `SET`–Kommando in der Datei `AUTOEXEC.BAT` eingestellt werden.

Beispiel

```
SET FUNTILES=c:\delaney\symbols
```

[7] Inzwischen ist durch Daniel Huson auch eine Anpassung an UNIX erfolgt.

Bei Verwendung des Kommandos `FUNTILES` aus unterschiedlichen Verzeichnissen heraus empfiehlt es sich, das Verzeichnis, in dem sich die Programmdatei befindet, in den Kommandosuchpfad aufzunehmen; also etwa die folgende Zeile in `AUTOEXEC.BAT` zu schreiben:

Beispiel

```
PATH %PATH%;c:\delaney
```

`%PATH%` wird dabei durch den bereits eingestellten Suchpfad ersetzt.

5.3 Symboldatei

Es folgt ein Beispiel für den Inhalt einer Symboldatei:

Beispiel

```
D  :   7
0:(1)(2,3)(4,5)
1:(1,2)(3)(4,5)
2:(1)(2,5)(3,4)
M  :   7.1
01 | 3| 3| 3| 4| 4
12 | 5| 5| 5| 5| 5
```

Der erste Teil beschreibt den Graphen des Delaney–Symbols. Dabei ist eine Zahl vor einem Doppelpunkt der Kantentyp (0, 1 oder 2). Die in runden Klammern eingeschlossenen Zahlen sind Knotennummern. Jedes Klammernpaar steht für eine Kante zwischen den beiden angegebenen Knoten bzw. vom angegebenen Knoten zu sich selbst. Dadurch wird ein dreifarbiger Graph beschrieben. Im zweiten Teil folgen für jeden Knoten die Anzahlen der Seiten pro Fläche und der Seiten pro Ecke in der Pflasterung. Der Vorkomma–Anteil der Zahl hinter M: muß mit der Zahl hinter D: identisch sein. Alle Zahlen müssen echt positiv sein. Eine fortlaufende Numerierung ist nicht erforderlich. Mehrere Delaney–Symbole können hintereinander in einer Datei stehen, dabei braucht der erste Teil nur dann wiederholt zu werden, wenn ein anderer Graph verwendet wird. Die Angaben unterliegen einer Konsistenzprüfung (siehe auch 5.7 Fehlermeldungen).

5.4 Tabellendatei

Falls eine Tabellendatei angegeben wurde, werden die intern verwendeten Tabellen in sie hinein geschrieben. Die Tabellendatei kann mit einiger Übung verwendet werden, um besseren Einblick in die Struktur des Delaney–Symbols zu bekommen.

5.5 Protokolldatei

Die Protokolldatei wird mit Angaben über den Ablauf der Berechnungen gefüllt. Sie ist lediglich zum Aufspüren von Programmierfehlern gedacht, sollte also in der Regel durch `> NUL:` in den *Mülleimer* umgeleitet werden.

5.6 Konfigurationsdatei

Durch Angabe einer Konfigurationsdatei kann gesteuert werden, wie sich das Programm verhält. Fehlt dieser Parameter, so wird stattdessen die Datei `FUNTILES.CFG` benutzt. Falls diese Datei nicht gefunden wird, benutzt das Programm interne Voreinstellungen. Im folgenden nun der Aufbau von `FUNTILES.CFG` mit kurzen Erläuterungen:

`SYMBOL_PATH = c:\delaney\symbols;`
: überschreibt die Environment–Variable `FUNTILES` für die Dauer des Programmlaufs mit einem neuen Wert.

`BGI_PATH = c:\tc;`
: Verzeichnis für die Grafiktreiber von TURBO C 2.0.

`DELAY = 0;`
: Pause zwischen zwei Bildern in Millisekunden. Bei 0 wird auf eine Tastatureingabe gewartet.

`SYMMETRY_GROUP = TRUE;`
: Symmetrie–Elemente zeichnen an/aus.

`DELANEY_GRAPH = FALSE;`
: Delaney–Symbol zeichnen an/aus.

`FUNDAMENTAL_DOMAIN = TRUE;`
: Fundamentalbereich zeichnen an/aus.

`NODE_NUMBERS = TRUE;`
: Knotennummern zeichnen an/aus.

`EDGE_NUMBERS = TRUE;`
: Kantennummern zeichnen an/aus.

`ORBIT_NUMBERS = TRUE;`
: Orbitnummern zeichnen an/aus.

`CIRCLE = TRUE;`
: Inkreis zeichnen an/aus.

`IBM_FRAME_CHARS = TRUE;`
: Verwendung der IBM–Rahmenzeichen für die Tabellendatei an/aus.

5.7 Fehlermeldungen

Bei fehlerhafter Symboldatei, fehlenden Resourcen oder bei durch etwaige Programmierfehler inkonsistenten internen Daten wird eine Fehlermeldung ausgegeben und der Programmlauf abgebrochen. Im folgenden sind einige Meldungen mit Erläuterungen und Hinweisen zum weiteren Vorgehen aufgeführt.

`no split edge found`
: Dieser Fehler tritt leider z.Zt. noch bei sphärischen Delaney-Symbolen auf, wenn der Fundamentalbereich die halbe oder die ganze Kugel umfaßt. Hier gibt es keine Abhilfe; derartige Symbole sind momentan nicht zu bearbeiten.

`graph is not connected`

Der Graph des eingelesenen Delaney-Symbols ist nicht zusammenhängend und somit ungültig. Bitte die Symboldatei korrigieren.

`ep inconsistent`

Diese Fehlermeldung sollte eigentlich nie erscheinen. Falls sie es dennoch tut, so deutet sie auf einen Fehler im Algorithmus hin. In diesem Fall bitte ich um Benachrichtigung und um Zusendung der Symboldatei, die den Fehler provoziert hat.

6. Disketten

Um einen sehr umfangreichen Anhang zu sparen und den Lesern die Vorteile maschinenlesbarer Information zugänglich zu machen, liegen der Diplomarbeit einige Disketten á 1200 kByte bei. Die nichtkommerzielle Benutzung oder Weitergabe des Programms FUNTILES und das Kopieren der Disketten wird hiermit ausdrücklich von mir gestattet. Jedoch bitte ich, den Schreibschutz auf den Originaldisketten nicht zu entfernen und nur Kopien zum Arbeiten zu benutzen. Sollte dennoch eine Diskette fehlen oder Lesefehler aufweisen, kann bei mir Ersatz angefordert werden. Meine aktuelle Adresse kann an der Fakultät für Mathematik in der Uni Bielefeld bei Daniel Huson oder Andreas Dress erfragt werden. Es folgt eine kurze Aufzählung der Disketteninhalte.

6.1 Text der Diplomarbeit

Der gedruckt vorliegende Teil der Diplomarbeit ist noch einmal komplett in LaTeX–Form (FT_TEX.LZH und FT_DVI.LZH) und in einer für den Drucker HP LASERJET + aufbereiteten Form (FT_HPLJ.LZH) auf Diskette verfügbar. Die Rohdateien enthalten ca. 30 kByte in 800 Zeilen. Die Dateien liegen in komprimiertem Format vor und müssen zunächst mit LHARC x *.LZH ausgepackt werden.

6.2 Quellcode des Programms

Das Programm ist in der Sprache C geschrieben. Es besteht aus 19 Programmdateien (*.C), 20 Headerdateien (*.H), einer Konfigurationsdatei (TCCONFIG.TC) für TURBO C 2.0 und jeweils einer Makedatei für TURBO C 2.0 (MAKEFILE.TUR) und GNU C (MAKEFILE.GNU). Insgesamt umfaßt der Quellcode ca. 200 kByte in 7000 Zeilen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Syntax nicht dem KERNIGHAN / RITCHIE–, sondern eher dem moderneren ANSI–Standard entspricht. Diese Dateien sind als FT_SRC.LZH in komprimierter Form vorhanden.

6.3 Lauffähiges Programm

Das kompilierte Programm FUNTILES.EXE zusammen mit 5 Grafiktreibern (*.BGI), 4 Zeichensätzen (*.CHR) und 4 Batchdateien FT_*.BAT befindet sich in der Datei FT_EXE.LZH. Die Größe von FUNTILES.EXE beträgt ca. 200 kByte.

6.4 Beispieldaten

Die Datei FT_SYM.LZH enthält einige Symboldateien, die mit einem Programm von Daniel Huson (Universität Bielefeld) generiert wurden. Sie können zum Ausprobieren des Programms verwendet werden.

Literatur

[1] ANDREAS W. M. DRESS
Zum Problem der regelmäßigen Flächenaufteilung
Universität Bielefeld

[2] ANDREAS W. M. DRESS, RUDOLF SCHARLAU
Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen
Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Giessen — Heft 164

[3] DANIEL HUSON
Die Klassifikation 2-isohedraler Pflasterungen der euklidischen Ebene
Universität Bielefeld 1986

[4] OLAF DELGADO FRIEDRICHS
Die automatische Konstruktion periodischer Pflasterungen
Universität Bielefeld 1990

[5] HEINRICH HEESCH, OTTO KIENZLE
Flächenschluß
Springer–Verlag
Berlin 1963
Bibliothek UniBi 10 QA 560 H 459

[6] HEINRICH HEESCH
Reguläres Parkettierungsproblem
Westdeutscher Verlag
Köln 1968
Bibliothek UniBi 10 QA 410 H 459

[7] HAROLD SCOTT MACDONALD COXETER, W. O. J. MOSER
Generators and Relations for Discrete Groups
Springer–Verlag
Berlin 1972
Bibliothek UniBi 10 QA 310 C 879

[8] HANFRIED LENZ
Nichteuklidische Geometrie
Hochschultaschenbücher–Verlag
Mannheim 1967
Bibliothek UniBi 10 QA 545 L 575

[9] GEORG NÖBELING
Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene
Walter de Gruyter & Co. Verlag
Berlin 1975
Bibliothek UniBi 10 QA 525 N 763

[10] FELIX KLEIN
Vorlesungen über nicht–euklidische Geometrie
Verlag von Julius Springer
Berlin 1928
Bibliothek UniBi 10 QA 525 K 64

[11] HAROLD SCOTT MACDONALD COXETER
Introduction to Geometry
John Wiley & Sons, Inc.
New York 1961
Bibliothek UniBi 10 QA 510 C 879

[12] WERNER FENCHEL
Elementary Geometry in Hyperbolic Space
Walter de Gruyter & Co. Verlag
Berlin 1989

[13] J. E. JACKSON
Sphere, Spheroid and Projections for Surveyors
Granada Publishing Ltd. — Technical Books Division
London 1980
Bibliothek UniBi 10 QA 520 J 13

[14] FRIDRICH BACHMANN
Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff
Springer Verlag
Berlin 1973
Bibliothek UniBi 10 QA 525 B 124

[15] DAVID GANS
An Inroduction to Non-Euclidean Geometry
Academic Press, Inc.
New York 1973
Bibliothek UniBi 10 QA 525 G 199

[16] BRUNO ERNST
Der Zauberspiegel des M. C. Escher
TACO Verlagsgesellschaft und Agentur mbH
Berlin 1978, 1986

[17] *Turbo C 2.0*
Band 1 Benutzerhandbuch, Band 2 Referenzhandbuch
Heimsoeth software GmbH & Co Produktions- und Vertriebs-KG
München 1989

[18] HUBERT PARTL, ELISABETH SCHLEGL, IRENE HYNA
LaTeX— *Kurzbeschreibung*
EDV-Zentrum der TU Wien — Handbuch H30
Wien 1987

[19] HELMUT KOPKA
LaTeX— *Eine Einführung*, LaTeX— *Erweiterungsmöglichkeiten*
Addison-Wesley (Deutschland) GmbH
Bonn 1991