

Proposition de correction du TD sur les plans fractionnaires

Module de plan d'expériences - F. Husson - Agrocampus

Exercice 1 : CONFUSIONS DANS UN PLAN D'EXPÉRIENCES 2^{3-1}

1. La matrice des essais est fournie dans l'énoncé. On remplacera, par convention, les 2 par des -1 :

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 |
| -1 | -1 | 1 |

2. La matrice des effets s'écrit :

| I | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |

On remarque que certaines colonnes sont identiques ce qui signifie que certains effets sont totalement confondus. Ainsi, on peut lire que $I = ABC$, $A = BC$, $B = AC$, $C = AB$.

La résolution du plan correspond à l'ordre de l'interaction la plus petite confondue avec la constante I . Ici, une seule interaction est confondue avec la constante : ABC . Cette interaction est d'ordre 3 donc le plan est de résolution III.

3. Le plan étant de résolution III, on ne peut pas étudier le modèle avec interactions mais seulement le modèle avec les effets principaux. Pour construire ce modèle, on doit faire l'hypothèse que les interactions d'ordre 2 et l'interaction d'ordre 3 sont négligeables.

Exercice 2 : PLAN 2^{6-2}

1. Pour étudier un plan complet à 6 facteurs à 2 niveaux, il faut $2^6 = 64$ essais.
2. Le plan de base est un plan complet en 16 essais, c'est donc le plan 2^4 .
3. Pour étudier 6 facteurs en 16 essais, on adopte la démarche suivante : choix du plan de base, choix des interactions avec lesquelles on confond les nouveaux facteurs, listage de toutes les confusions que cela engendre.

La matrice des effets correspondant au plan de base 2^4 présente les colonnes suivantes :

| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 13 | 14 | 23 | 24 | 34 | 123 | 124 | 134 | 234 | 1234 |
|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|

Deux méthodes sont possibles :

1^{re} : On propose de confondre 5 avec l'interaction (d'ordre le plus élevé) 1234 donc le générateur d'alias est : $I = 12345$. On propose de confondre 6 avec 123 et donc 45 ; ce qui conduit aux générateurs d'alias : $I = 1236$ et $I = 456$.

Les confusions résultantes sont les suivantes (seules les interactions d'ordre inférieur ou égal à 3 sont notées) :

| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 13 | 14 | 23 | 24 | 34 | 123 | 124 | 134 | 234 | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| | | | | | 345 | 245 | 235 | 145 | 135 | 125 | 45 | 35 | 23 | 15 | 5 |
| | | 236 | 136 | 126 | | 36 | 26 | | 16 | | 6 | 346 | 246 | 146 | 46 |
| 456 | | | | 56 | | | 156 | | 256 | 356 | | | | | |

2^e : On propose cette fois de confondre 5 avec 123 puis 6 avec 124 et donc également 345 ; ceci engendre les générateurs d'alias : $I = 1235 = 1246 = 3456$.

Les confusions résultantes sont les suivantes (seules les interactions d'ordre inférieur ou égal à 3 sont notées) :

| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 12 | 13 | 14 | 23 | 24 | 34 | 123 | 124 | 134 | 234 | |
|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|
| | 235 | 135 | 125 | | 35 | 25 | | 15 | | | 5 | 345 | 245 | 145 | 45 |
| | 246 | 146 | | 126 | 46 | | 26 | | 16 | | 346 | 6 | 236 | 136 | 36 |
| | | | 456 | 356 | | | | | | 56 | | | 156 | 256 | |

Remarque concernant les deux plans :

- dans le premier plan : un facteur principal est confondu avec une interaction d'ordre 2 ($4 = 56$, par exemple), ce qui est peu souhaitable ;
- dans le deuxième plan : les facteurs principaux sont confondus avec des interactions d'ordre 3 ou plus.

Les deux stratégies conduisent respectivement à des plans de résolution III et IV.

- Avec un plan de résolution IV, on peut estimer les effets principaux sans ambiguïté, dès lors que l'on considère les interactions d'ordre 3 ou plus négligeables. En revanche, certaines interactions d'ordre 2 seront confondues et donc ne pourront pas être estimées.
- 32 essais suffisent pour étudier 6 facteurs en résolution V. En résolution V, les facteurs principaux sont confondus avec des interactions d'ordre 4 ou plus et les interactions (d'ordre 2) sont confondues avec des interactions d'ordre 3 ou plus. Les effets principaux et les interactions sont donc estimables dès lors que l'on suppose que les interactions d'ordre 3 ou plus sont négligeables.

Exercice 3 : DÉPOUILLEMENT D'UN PLAN D'EXPÉRIENCES POUR 4 FACTEURS

- On reconnaît le plan fractionnaire classique 2^{4-1} . Les trois premiers facteurs constituent un plan complet. Le quatrième facteur est confondu avec l'interaction (d'ordre 3) entre les 3 premiers. Le plan étant fractionnaire, tous les facteurs sont orthogonaux. Le plan est de résolution IV puisque le seul générateur d'alias est $I = 1234$.
- Une analyse de variance à 4 facteurs permettra d'analyser les résultats.
- Le modèle s'écrit :

$$\forall i, j, k, l \quad Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijkl}$$

avec $\mathcal{L}(\varepsilon_{ijkl}) = \mathcal{N}(0, \sigma)$ et $\text{Cov}(\varepsilon_{ijkl}, \varepsilon_{i'j'k'l'}) = 0 \quad \forall (i', j', k', l') \neq (i, j, k, l)$.

- Voici les lignes de code

```
library(FactoMineR)
F1 <- as.factor(c(1,1,1,1,2,2,2,2))
F2 <- as.factor(c(1,1,2,2,1,1,2,2))
F3 <- as.factor(c(1,2,1,2,1,2,1,2))
F4 <- as.factor(c(1,2,2,1,2,1,1,2))
Y <- c(29,1,-3,5,-9,3,-5,-21)
don <- cbind.data.frame(F1,F2,F3,F4,Y)
AovSum(Y~F1+F2+F3+F4,data=don)
```

| Ftest | SS | df | MS | F value | Pr(>F) |
|-----------|-----|----|-----|---------|-----------|
| F1 | 512 | 1 | 512 | 32.0 | 0.01094 * |
| F2 | 288 | 1 | 288 | 18.0 | 0.02398 * |
| F3 | 72 | 1 | 72 | 4.5 | 0.12403 |
| F4 | 512 | 1 | 512 | 32.0 | 0.01094 * |
| Residuals | 48 | 3 | 16 | | |

| Ttest | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|-------------|-------------|------------|---------|-----------|
| (Intercept) | 9.4206e-16 | 1.4142e+00 | 0.0000 | 1.00000 |
| F1 - 1 | 8.0000e+00 | 1.4142e+00 | 5.6569 | 0.01094 * |
| F1 - 2 | -8.0000e+00 | 1.4142e+00 | -5.6569 | 0.01094 * |
| F2 - 1 | 6.0000e+00 | 1.4142e+00 | 4.2426 | 0.02398 * |
| F2 - 2 | -6.0000e+00 | 1.4142e+00 | -4.2426 | 0.02398 * |
| F3 - 1 | 3.0000e+00 | 1.4142e+00 | 2.1213 | 0.12403 |
| F3 - 2 | -3.0000e+00 | 1.4142e+00 | -2.1213 | 0.12403 |
| F4 - 1 | 8.0000e+00 | 1.4142e+00 | 5.6569 | 0.01094 * |
| F4 - 2 | -8.0000e+00 | 1.4142e+00 | -5.6569 | 0.01094 * |

Exercice 4 : CONSTRUCTION D'UN PLAN 2^{8-4}

- Le plan de base est le plan 2^4 dont les effets sont les suivants :

$I \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 23 \quad 24 \quad 34 \quad 123 \quad 124 \quad 134 \quad 234 \quad 1234$

Comme il faut introduire plus d'un facteur, on ne confond pas de facteur avec l'interaction d'ordre le plus élevé, mais avec les interactions d'ordre le plus élevé -1 . On confond alors 5 avec 123, 6 avec 124, 7 avec 134 et 8 avec 234.

Cela engendre les générateurs d'alias suivants :

$$\begin{aligned} I &= 1235 = 1246 = 1347 = 2348 = 3456 = 2457 = 1458 = 2367 \\ &= 1368 = 1278 = 1567 = 2568 = 3578 = 4678 = 12345678. \end{aligned}$$

La constante est confondue avec des interactions d'ordre 4 ou plus donc le plan est de résolution IV.

2. Les effets principaux sont estimables dès lors que l'on considère que les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables. Les interactions d'ordre 2 ne sont pas estimables car confondues entre elles.
3. Neuf paramètres sont estimés à partir des données (1 paramètre pour la constante et 8 paramètres pour chacun des facteurs). Comme 16 essais sont proposés, 7 degrés de liberté restent disponibles. On peut donc estimer sans ambiguïté 7 « paquets d'effets », à l'intérieur desquels des interactions d'ordre 2 seront présentes. Si, dans un paquet, une seule interaction est non négligeable (toutes les autres étant supposées a priori négligeables), alors on peut l'estimer. Par exemple, l'interaction 12 peut être estimée si on suppose que les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables et si l'on suppose de plus que les interactions 35, 46 et 78 sont également négligeables.

```
4. library(FrF2)
plan <- FrF2(nruns=16, nfactors=8)
summary(plan)
options(contrasts=c("contr.sum", "contr.sum"))
X <- model.matrix(~., data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C, data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H, data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H+B:C+B:D, data=plan)
t(X)%*%X
```

```
library(FrF2)
plan = FrF2(nruns=16, nfactors=8)
summary(plan)
```

Call:

```
FrF2(nruns = 16, nfactors = 8)
```

Experimental design of type FrF2

16 runs

Factor settings (scale ends):

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Design generating information:

\$legend

```
[1] A=A B=B C=C D=D E=E F=F G=G H=H
```

\$generators

```
[1] E=ABC F=ABD G=ACD H=BCD
```

Alias structure:

\$fi2

```
[1] AB=CE=DF=GH AC=BE=DG=FH AD=BF=CG=EH AE=BC=DH=FG AF=BD=CH=EG AG=BH=CD=EF AH=BG=CF=DE
```

The design itself:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 2 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 4 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 |

```

6  1 -1  1  1 -1 -1  1 -1
7  -1  1  1  1 -1 -1 -1  1
8  1  1  1  1  1  1  1  1
9  1  1 -1 -1 -1 -1  1  1
10 1 -1 -1 -1  1  1  1 -1
11 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1
12 -1  1 -1  1  1 -1  1 -1
13  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1
14 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1
15  1  1 -1  1 -1  1 -1 -1
16 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
class=design, type= FrF2

```

```

options(contrasts=c("contr.sum","contr.sum"))
X <- model.matrix(~.,data=plan)
t(X)%*%X

```

```

              (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1
(Intercept)      16  0  0  0  0  0  0  0  0
A1                0 16  0  0  0  0  0  0  0
B1                0  0 16  0  0  0  0  0  0
C1                0  0  0 16  0  0  0  0  0
D1                0  0  0  0 16  0  0  0  0
E1                0  0  0  0  0 16  0  0  0
F1                0  0  0  0  0  0 16  0  0
G1                0  0  0  0  0  0  0 16  0
H1                0  0  0  0  0  0  0  0 16

```

```

X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C,data=plan)
t(X)%*%X

```

```

              (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1
(Intercept)      16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
A1                0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0
B1                0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0
C1                0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0
D1                0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0
E1                0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0
F1                0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0
G1                0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0
H1                0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0
A1:B1             0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0
A1:C1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16

```

```

X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H,data=plan)
t(X)%*%X

```

```

              (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1 A1:D1 A1:E1 A1:F1 A1:G1 A1:H1
(Intercept)      16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
A1                0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
B1                0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
C1                0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
D1                0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
E1                0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
F1                0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0  0
G1                0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0  0
H1                0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0  0
A1:B1             0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0  0
A1:C1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0  0
A1:D1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0  0
A1:E1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0  0
A1:F1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0  0
A1:G1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16  0
A1:H1             0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 16

```

```
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H+B:C+B:D,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
(Int) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1 A1:D1 A1:E1 A1:F1 A1:G1 A1:H1 B1:C1 B1:D1
(Int) 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
A1     0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
B1     0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
C1     0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
D1     0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
E1     0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
F1     0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
G1     0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
H1     0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0
A1:B1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0 0
A1:C1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0 0
A1:D1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0 0 0
A1:E1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 16 0
A1:F1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 16
A1:G1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0
A1:H1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0
B1:C1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0
B1:D1  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16
```

Exercice 5 : COMMENT PESER AVEC PRÉCISION ?

1. Le plan d'expériences utilisé est proposé au tableau 1.

| Essai | A | B | C | D |
|---------|---|----|----|----|
| pesée 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| pesée 2 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| pesée 3 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| pesée 4 | 1 | -1 | -1 | 1 |

TABLE 1 – Présentation du plan

On reconnaît ici le plan 2^{3-1} avec A confondu avec la constante et D confondu avec l'interaction.

2. Pour estimer les poids des objets, on estime les paramètres du modèle d'analyse de la variance à 2 facteurs et l'interaction : $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$; μ correspond au poid de A, α_1 au poids de B, β_1 au poids de C et $\alpha\beta_{11}$ au poids de D.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = 1/4 X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A=60g, B=40g, C=20g, D=30g.

3. On peut calculer la variance des estimateurs :

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2 = 1/4 \sigma^2$$

Ainsi, la précision de la balance sera de $1/2\sigma$. On améliore donc la précision de l'estimation des poids par rapport à la pesée classique (en faisant toujours le même nombre de pesées).

Exercice 6 : ANALYSE CONJOINTE (OU TRADE OFF) EN MARKETING

1. Le plan à construire est un plan 2^{7-4} .
2. Pour construire le plan 2^{7-4} nous utiliserons le plan de base 2^3 puisque c'est le plan en 8 essais. Le plan 2^3 permet d'estimer les effets suivants :

I 1 2 3 12 13 23 123

On doit ajouter 4 facteurs au plan de base pour avoir les 7 effets, par conséquent on confondra un facteur avec chaque interaction d'ordre 2 et un facteur avec l'interaction d'ordre 3. Puisqu'on s'intéresse à 7

facteurs, cela nécessite l'estimation de 8 paramètres (1 paramètre pour la constante et 1 paramètre pour chacun des 7 facteurs). Le plan sera alors complètement saturé puisque nous avons 8 essais. On peut par exemple confondre le facteur 4 avec l'interaction 12, 5 avec 13, 6 avec 23 et 7 avec 123.

On a alors les 4 générateurs d'alias initiaux suivants :

$I_a = 124$; $I_b = 135$; $I_c = 236$; $I_d = 1237$.

On en déduit les autres générateurs en faisant les produits de ces générateurs initiaux 2 à 2 puis 3 à 3 et le produit des 4 :

$I_{ab} = 2345$; $I_{ac} = 1346$; $I_{ad} = 347$; $I_{bc} = 1256$; $I_{bd} = 257$; $I_{cd} = 167$; $I_{abc} = 456$; $I_{abd} = 1457$; $I_{acd} = 2467$; $I_{bcd} = 3567$; $I_{abcd} = 1234567$.

On retrouve bien les $2^4 - 1 = 15$ générateurs attendus.

Le plan ainsi construit est de résolution 3 puisque la plus petite interaction avec laquelle la constante est confondue est d'ordre 3. Pour pouvoir estimer les effets principaux, nous devons donc faire l'hypothèse que les interactions d'ordre 2 (et plus) sont négligeables.

```
library(FrF2)
plan <- FrF2(nruns=8,nfactors=7,factor.names=list(parfum=c("oui","non"),
  DLC=c("couvercle","côté"),magnésium=c("oui","non"),
  français=c("oui","non"), couleur=c("caramel","plusieurs"),
  police=c("petite","grande"), fond=c("photo","pas photo")))
summary(plan)
```

Call:

```
FrF2(nruns = 8, nfactors = 7, factor.names = list(parfum = c("oui",
  "non"), DLC = c("couvercle", "côté"), magnésium = c("oui",
  "non"), français = c("oui", "non"), couleur = c("caramel",
  "plusieurs"), police = c("petite", "grande"), fond = c("photo",
  "pas photo")))
```

Experimental design of type FrF2

8 runs

Factor settings (scale ends):

| | parfum | DLC | magnésium | français | couleur | police | fond |
|---|--------|-----------|-----------|----------|-----------|--------|-----------|
| 1 | oui | couvercle | oui | oui | caramel | petite | photo |
| 2 | non | côté | non | non | plusieurs | grande | pas photo |

Design generating information:

\$legend

[1] A=parfum B=DLC C=magnésium D=français E=couleur F=police G=fond

\$generators

[1] D=AB E=AC F=BC G=ABC

Alias structure:

\$main

[1] A=BD=CE=FG B=AD=CF=EG C=AE=BF=DG D=AB=CG=EF E=AC=BG=DF F=AG=BC=DE G=AF=BE=CD

The design itself:

| | parfum | DLC | magnésium | français | couleur | police | fond |
|---|--------|-----------|-----------|----------|-----------|--------|-----------|
| 1 | non | couvercle | oui | oui | caramel | grande | pas photo |
| 2 | oui | couvercle | non | non | caramel | petite | pas photo |
| 3 | non | couvercle | non | oui | plusieurs | petite | photo |
| 4 | oui | côté | non | oui | caramel | grande | photo |
| 5 | oui | côté | oui | oui | plusieurs | petite | pas photo |
| 6 | non | côté | oui | non | caramel | petite | photo |
| 7 | non | côté | non | non | plusieurs | grande | pas photo |
| 8 | oui | couvercle | oui | non | plusieurs | grande | photo |

class=design, type= FrF2

```
X <- model.matrix(~.,data=plan)
```

```
t(X)%*%X
```

| | (Intercept) | parfum1 | DLC1 | magnésium1 | français1 | couleur1 | police1 | fond1 |
|-------------|-------------|---------|------|------------|-----------|----------|---------|-------|
| (Intercept) | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| parfum1 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| DLC1 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| magnésium1 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| français1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 |
| couleur1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 |
| police1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 |
| fond1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |

3. Avec le plan construit, il n'est pas possible d'estimer d'autres effets que les effets des 7 facteurs et la constante puisque le plan est saturé (on estime autant d'effets qu'on a de données). Pour pouvoir estimer cette interaction, on doit construire un plan avec plus d'essais : 16 essais seront suffisants pour estimer une interaction supplémentaire (même si un plan en 16 essais ne permettra pas d'estimer toutes les interactions d'ordre 2).
4. Pour analyser les résultats de ce plan, nous devons effectuer une analyse de variance à 8 facteurs (7 facteurs à 2 modalités, les 7 facteurs étudiés) ainsi qu'un facteur à 100 modalités (le facteur juge).
Le modèle étudié s'écrira donc :

$$\forall(i, j, k, l, m, n, o, p) \quad Y_{ijklmnop} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \kappa_m + \nu_n + \zeta_o + \tau_p + \varepsilon_{ijklmnop}$$

avec les hypothèses sur les résidus :

$$\forall(i, j, k, l, m, n, o, p) \quad \mathcal{L}(\varepsilon_{ijklmnop}) = \mathcal{N}(0, \sigma)$$

$$\forall(i, j, k, l, m, n, o, p) \neq (i', j', k', l', m', n', o', p') \quad \text{cov}(\varepsilon_{ijklmnop}, \varepsilon_{i'j'k'l'm'n'o'p'}) = 0$$

Exercice 7 : PLAN $L_8 2^3 4$ ET $L_8 2^4 4$

1. D'après l'énoncé, ajouter un facteur à 4 niveaux revient à ajouter 2 facteurs à 2 niveaux. On part donc du plan de base 2^3 .

| I | 1 | 2 | 3 | 12 | 13 | 23 | 123 |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |

Comme on doit ajouter 2 facteurs (disons A et B) à 2 niveaux, on confond le facteur A avec l'interaction 12 et B avec l'interaction 13, et ensuite on construit le facteur 4 avec A et B.

La matrice des essais est alors :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------|----|----|----|---|
| 1 ^{er} essai | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 2 ^e essai | 1 | 1 | -1 | 3 |
| 3 ^e essai | 1 | -1 | 1 | 2 |
| 4 ^e essai | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 5 ^e essai | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 ^e essai | -1 | 1 | -1 | 2 |
| 7 ^e essai | -1 | -1 | 1 | 3 |
| 8 ^e essai | -1 | -1 | -1 | 4 |

On calcule la matrice X pour pouvoir lister les confusions.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer $X'X$:

$$X'X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice $X'X$ montre que tous les facteurs sont orthogonaux avec le facteur 4.

2. Le facteur 4 est confondu avec 12 et 13 et donc on a $12 \times 13 = 23$ et par suite le facteur 4 est confondu avec l'interaction 23. On peut le vérifier en calculant le tableau de contingence croisant les modalités du facteur 4 et les modalités de l'interaction 13 :

| | | Facteur 4 | | | |
|-------------------|----|-----------|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Interaction 13 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| | -1 | 0 | 2 | 2 | 0 |

3. Le plan $L_8 2^4 4$ est le plan en 8 essais de 4 facteurs à 2 niveaux et un facteur à 4 niveaux. À partir du plan construit à la question précédente, il suffit d'ajouter un facteur à 2 niveaux et de le confondre avec l'interaction 123. Nous venons de voir que le facteur 4 est confondu avec l'interaction 23 donc il ne reste qu'une possibilité : confondre le facteur avec l'interaction 123.

Exercice 8 : RÉPARTITION DES EXPÉRIENCES SUR 2 ÉQUIPES DE TRAVAIL

La matrice des essais pour l'étude des trois facteurs (température, pression et vitesse) est par exemple :

| Essai | Température | Pression | Vitesse |
|-------|-------------|----------|---------|
| 1 | - | - | - |
| 2 | - | - | + |
| 3 | - | + | - |
| 4 | - | + | + |
| 5 | + | - | - |
| 6 | + | - | + |
| 7 | + | + | - |
| 8 | + | + | + |

- Si l'on donne les 4 premiers essais à une équipe et les quatre suivants à l'autre, on est confronté au problème de la confusion entre deux effets : l'effet du facteur *température* et celui (éventuel) lié à l'équipe.
- Le facteur *équipe* doit être géré comme un nouveau facteur F_4 de ce plan. Il doit donc être aussi peu confondu que possible avec les autres effets.
- Une solution consiste à confondre le facteur *équipe* avec l'interaction d'ordre 3 $F_1 F_2 F_3$ (celle qui a les plus fortes chances d'être négligeable). La colonne de signes suivante est donc affectée au facteur équipe :

| Essai | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Équipe = $F_1 F_2 F_3$ | - | + | + | - | + | - | - | + |

L'équipe 1 réalisera donc les essais :

| | | | |
|-----------|------------------|----------------|---------------------|
| essai 1 : | $F_1 = 30^\circ$ | $F_2 = 2$ bars | $F_3 = 900$ tr/min |
| essai 4 : | $F_1 = 30^\circ$ | $F_2 = 4$ bars | $F_3 = 1200$ tr/min |
| essai 6 : | $F_1 = 45^\circ$ | $F_2 = 2$ bars | $F_3 = 1200$ tr/min |
| essai 7 : | $F_1 = 45^\circ$ | $F_2 = 4$ bars | $F_3 = 900$ tr/min |

et l'équipe 2 réalisera les essais :

| | | | |
|-----------|------------------|----------------|---------------------|
| essai 2 : | $F_1 = 45^\circ$ | $F_2 = 2$ bars | $F_3 = 1200$ tr/min |
| essai 3 : | $F_1 = 45^\circ$ | $F_2 = 4$ bars | $F_3 = 900$ tr/min |
| essai 5 : | $F_1 = 30^\circ$ | $F_2 = 2$ bars | $F_3 = 900$ tr/min |
| essai 8 : | $F_1 = 30^\circ$ | $F_2 = 4$ bars | $F_3 = 1200$ tr/min |

Le plan ainsi construit est de résolution IV, donc le facteur *équipe* n'est confondu avec aucun facteur principal et avec aucune interaction d'ordre 2. Comme les interactions d'ordre 3 et plus sont, en général, raisonnablement négligeables, cette répartition des essais est bonne.