

# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

François Husson

Unité pédagogique de mathématiques appliquées - l'institut Agro

husson@agrocampus-ouest.fr

# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

① Rappels matriciels

② SVD

③ ACP

④ AFC

⑤ ACM

## Rappels matriciels

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de taille  $p$ .

Le produit scalaire entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'écrit :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}'\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_pv_p$$

En introduisant une métrique  $M$ , on écrit :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_M = \vec{u}'M\vec{v} = m_1 \times u_1v_1 + m_2 \times u_2v_2 + \dots + m_p \times u_pv_p$$

## Rappels matriciels

Soit  $X$  une matrice centrée et  $n$  son nombre de lignes  
Vous utiliserez le jeu de données iris de R restreint aux 10 premières lignes et 4 premières colonnes

$X'X$  est la matrice ???

$Victoire'$  est la matrice ???

## Rappels matriciels

Soit  $X$  une matrice centrée et  $n$  son nombre de lignes  
Vous utiliserez le jeu de données iris de R restreint aux 10 premières lignes et 4 premières colonnes

$X'X$  est la matrice des covariances (au  $n$  près)

$Victoire'$  est la matrice des produits scalaires

# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

① Rappels matriciels

② SVD

③ ACP

④ AFC

⑤ ACM

## Décomposition en valeurs singulières

Soit  $X$  une matrice centrée et  $n$  le nombre de lignes

- Diagonaliser (à l'aide de la fonction `eigen`)  $COV = X'X$  et conserver valeurs propres et vecteurs propres
- Diagonaliser  $PS = Victoire'$  et conserver valeurs propres et vecteurs propres
- Comparer les valeurs propres de  $COV$  et de  $PS$
- Calculer la décomposition en valeurs singulières de  $X$ , i.e. les matrices  $U$ ,  $\Lambda$  et  $V$  telles que  $X = U\Lambda V'$  (fonction `svd`)
- Par rapport aux valeurs propres et vecteurs propres de  $COV$  et  $PS$ , retrouver  $U$ ,  $\Lambda$  et  $V$

## Formule de reconstitution

Calculer  $\hat{X}^{(j)}$  la reconstitution des données en prenant uniquement les  $j$  premières colonnes de  $U$  et  $V$  et les  $j$  premières valeurs de  $\Lambda$ .

Calculer la somme des carrés des écarts entre  $X$  et  $\hat{X}^{(2)}$ .

Faire de même en faisant varier le nombre de colonnes conservées dans  $U$  et  $V$ . Que pouvez-vous dire ?



# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

① Rappels matriciels

② SVD

③ ACP

④ AFC

⑤ ACM

## Lien avec l'ACP

Calculer  $XV$  et comparer avec les coordonnées des individus d'une ACP non normée (argument `scale.unit=FALSE` dans la fonction `PCA` de `FactoMineR`)

Calculer  $X'U$  et comparer avec les coordonnées des variables d'une ACP non normée (en ACP le poids des individus est de  $1/n$  avec  $n$  le nombre d'individus)

## Fiche récapitulative de l'ACP

- Quels tableaux de données ? Exemples de jeu de données ?
- Quels objectifs ?
- Comment interpréter ?
- Comment considérer des individus supplémentaires ?
- Comment prendre en compte des variables qualitatives ?
- Comment prendre en compte des variables quantitatives supplémentaires ?
- Quelle différence entre ACP normée et non normée ?
- Dans un tableau avec 1 variable qualitative, les axes de l'ACP obtenus sur le tableau individus  $\times$  variables quantitatives sont-ils identiques à ceux obtenus à partir des moyennes par modalité, moyennes pondérées par l'effectif de la modalité ? Donner un contre-exemple, expliciter les différences d'objectif  
**OU** démontrer l'égalité.

# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

① Rappels matriciels

② SVD

③ ACP

④ AFC

⑤ ACM

## Fiche récapitulative sur l'AFC

- Quels types de tableaux de données ? Exemple de jeu de données ?
- Quels objectifs ?
- Comment interpréter ?
- Considérer le **jeu de données Nobel** avec le code suivant :

```
fichier <- "https://husson.github.io/MOOC_AnaDo/AnaDo_JeuDonnees_Nobel_avecMaths.csv"
Nobel <- read.table(fichier, header=TRUE, sep=";", row.names=1, check.names=FALSE)
Nobel <- Nobel[1:8,]
```

Comparer les objectifs et les résultats de l'ACP et ceux de l'AFC sur ce jeu de données. Bien expliciter la différence.

## L'AFC comme une SVD

- ①  $P = N/n$ ,  $D_r$  et  $D_c$  les matrices diagonales des marges lignes et colonnes de  $P$
- ② Calcul la matrice des résidus standardisés :  

$$S = D_r^{-1/2}(P - rc')D_c^{-1/2}$$
- ③ Calcul la SVD :  $S = U\Lambda V'$
- ④ Coordonnées des lignes :  $F = D_r^{-1/2}U\Lambda$
- ⑤ Coordonnées des lignes :  $G = D_c^{-1/2}V\Lambda$

```
library(FactoMineR) ; data(children) ; X <- as.matrix(children[1:8,1:5])
ca <- CA(X, graph=FALSE)
```

```
P = X/sum(X)
r = apply(P,1,sum)
c = apply(P,2,sum)
invDr=diag(1/r)
invDc=diag(1/c)
```

```
S = invDr^0.5%*(P-r%*t(c))%*invDc^0.5
res <- svd(S)
F <- invDr^0.5%*res$u[,1:4]%*diag(res$d[1:4])
F/ca$row$coord
```

```
G <- invDc^0.5%*res$v[,1:4]%*diag(res$d[1:4])
G/ca$col$coord
```

# Analyse factorielle - Rappels et calculs matriciels

① Rappels matriciels

② SVD

③ ACP

④ AFC

⑤ ACM

## Fiche récapitulative sur l'ACM

- Quels types de tableaux de données ? Exemple de jeu de données ?
- Quels objectifs ?
- Comment interpréter ?
- Considérer le jeu de données `tea` du package `FactoMineR` et faire l'ACM avec sur le tableau avec uniquement les variables 14 et 18. Puis faire l'AFC sur le tableau de contingence croisant ces 2 variables.

```
library(FactoMineR)
data(tea)
don <- tea[, c(14,18)]
TabCont <- table(don)
```

Comparer les objectifs et les résultats de l'ACM et ceux de l'AFC sur ce jeu de données. Bien expliciter la différence.



## L'ACM comme une SVD

Soit  $Z$  le tableau disjonctif de  $X$ , centré par colonne.

En posant  $M = \text{diag}(\frac{n}{n_1}, \frac{n}{n_2}, \dots, \frac{n}{n_l})$  avec  $n_k$  le nombre d'occurrences de la modalité  $k$ , et  $N$  la matrice du poids de chaque ligne ( $1/n$ ), les valeurs propres et vecteurs propres de  $ZMZ'N$  et  $Z'MZN$  donne les valeurs propres et vecteurs propres de l'ACM qui permettent de calculer les coordonnées des individus et des modalités (à des constantes près) :

```
library(FactoMineR)
data(tea)
X <- tea[,10:18]
n <- nrow(X)
Z <- tab.disjonctif(X)
M <- diag(n/apply(Z,2,sum))
Z <- scale(Z, scale=FALSE)
N <- diag(rep(1/n,n))
U <- eigen(Z%*%M%*t(Z)%*%N)
V <- eigen(t(Z)%*%N%*%Z)%*%M)
mca <- MCA(X,graph=FALSE)

mca$eig[1:6,1] * ncol(X) / U$val[1:6]
U$vect[,1:4]%*%diag(sqrt(U$val[1:4]))/mca$ind$coord[,1:4]*sqrt(n/ncol(X)) # F = ZMV = U Lambda
M%*%V$vect[,1:4]%*%diag(sqrt(U$val[1:4]))/mca$var$coord[,1:4] #G = MV Lambda
```