

Introduction à la planification expérimentale

Les plans fractionnaires



Sir R. A. Fisher
(1890 – 1962)

François Husson

Département de statistique et informatique – Institut Agro

Exemple d'utilisation des plans d'expériences

Exemple : Poids au sevrage des porcelets

Objectif : Comprendre les variables qui jouent sur le poids au sevrage

Plusieurs variables interviennent dans le process :

- Génétique de la truie (race A, race B)
- Parité (primipare, multipare)
- Supplément calcium (oui, non)
- Espace par truie ($6m^2$, $7m^2$)
- Accès au colostrum (oui, non)
- Stress bruit (oui, non)
- Lampes chauffantes maternité (oui, non)

7 variables
à 2 modalités

Exemple d'utilisation des plans d'expériences

- Quelles expériences réaliser pour déterminer les facteurs influents ?
 - 1^{ère} solution : tester toutes les combinaisons possibles
 $2^7 = 128$ expériences
 - ➡ Impossible de faire autant d'expériences !!!
- On s'autorise 16 expériences, quel choix faire ?
 - 2^{ème} idée : faire varier 1 facteur à la fois
 - ➡ Pb : impossible d'estimer les interactions
 - 3^{ème} idée : faire varier tous les facteurs à la fois
 - ➡ Difficulté : ne pas confondre les effets des facteurs

Peut-on construire des plans ayant de bonnes propriétés avec peu d'expériences ?

Les plans complets : matrice des essais

p facteurs à 2 niveaux : toutes les combinaisons sont testées : plan 2^p

Pour 2 facteurs à 2 niveaux : plan 2^2

	A	B
	+1	+1
Matrice des essais :	+1	-1
	-1	+1
	-1	-1

- le modèle additif :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

I	A	B
1	+1	+1
1	+1	-1
1	-1	+1
1	-1	-1

- le modèle avec interaction :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

**X = matrice
des effets**

I	A	B	AB
1	+1	+1	+1
1	+1	-1	-1
1	-1	+1	-1
1	-1	-1	+1

Exercice : plan à 4 facteurs en 8 essais

Construire un plan à 4 facteurs à 2 niveaux en 8 essais

Les 4 facteurs à 2 modalités sont :

- Parité (primipare, multipare)
- Supplément calcium (oui, non)
- Accès au colostrum (oui, non)
- Lampes chauffantes maternité (oui, non)

La variable à expliquer est le poids au sevrage

Télécharger le fichier suivant, puis jouer sur les essais pour retrouver la précision maximum sur l'estimation des paramètres du modèle

https://husson.github.io/img/plan_4facteurs_SAED.xlsx

Construction d'un plan 2^{3-1}

**3 facteurs à 2 modalités
en $2^{3-1} = 4$ essais**

	A	B	C
→	1	1	1
→	1	1	-1
→	1	-1	1
→	1	-1	-1
→	-1	1	1
→	-1	1	-1
→	-1	-1	1
→	-1	-1	-1

Choix de 4 essais

1ère idée : pour chaque facteur, tester les niveaux 1 et -1 un même nb de fois

2ème idée : pour chaque couple de 2 facteurs, prendre autant de combinaisons (1,1), (-1,1), (1,-1) et (-1,-1)

etc.

Beaucoup trop compliqué de construire un plan de cette façon dans le cas général
→besoin d'un principe de construction simple

Principe de construction des plans fractionnaires 2^{p-k}

1. A partir du nombre d'essais voulus 2^{p-k} , choisir un plan de base
2. Construire la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base
3. Choisir des confusions : affecter des effets principaux
4. Déterminer les confusions résultantes

Construction d'un plan fractionnaire 2^{3-1}

1. On veut un plan en 4 essais, construire le plan 2^2
2. Construire la matrice \mathbf{X} du modèle avec toutes les interactions
3. Confondre le facteur C avec l'interaction AB
4. Déterminer les autres confusions

C

I	A	B	AB
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$C = AB \implies CC = ABC \implies I = ABC$$

lire « est confondu avec »

I	A	B	AB
ABC	BC	AC	C
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

$$\begin{array}{cccc}
 C & \times & C & I \\
 1 & \times & 1 & = 1 \\
 (-1) & \times & (-1) & = 1 \\
 (-1) & \times & (-1) & = 1 \\
 1 & \times & 1 & = 1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 I = ABC &\implies A(I) = A(ABC) \implies A = BC \\
 &\implies B(I) = B(ABC) \implies B = AC
 \end{aligned}$$

Construction d'un plan fractionnaire 2^{4-1}

1. On veut un plan en 8 essais,
construire le 2^3
2. Construire la matrice \mathbf{X} du
modèle avec toutes les
interactions
3. Confondre le facteur D avec
l'interaction ABC
4. Déterminer les confusions
résultantes

D

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$D = ABC \implies DD = ABCD \implies I = ABCD$$

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	D I
ABCD	BCD	ACD	ABD	CD	BD	AD	D	
1	1	1	1	1	1	1	1	1 1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1 1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1 1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1 1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1 1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1 1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1 1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1 1

$$I = ABCD \implies A(I) = A(ABCD) \implies A = BCD$$

Construction d'un plan fractionnaire 2^{5-2}

1. On veut un plan en 8 essais,
construire le plan 2^3
2. Construire la matrice **X** du modèle
avec toutes les interactions
3. Confondre les facteurs D et E avec
des interactions
4. Déterminer les confusions
résultantes

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	D	E
1	1	1	1	1	1	1	1		
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1		
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1		
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1		
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1		
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1		
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1		
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1		

Ajout d'1 facteur → confusion avec interaction d'ordre le plus élevé

Ajout de 2 facteurs ou + → confusions avec interactions d'ordre le plus élevé -1

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$D = AB \implies I = ABD$$

$$E = AC \implies I = ACE$$

On a aussi $I = ABD = ACE \implies II = (ABD)(ACE)$
 $\implies I = BCDE$

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABD	BD	AD	ABCD	D	BCD	ACD	CD
ACE	CE	ABCE	AE	BCE	E	ABE	BE
BCDE	ABCDE	CDE	BDE	ACDE	ABDE	DE	ADE

Confusion d'effets : estimation de paquets d'effets ou interactions.

Paquet bleu estimable mais impossible de savoir ce qui est dû à C, à l'interaction ABCD, l'interaction AE, l'interaction BDE

Nombre de facteurs et nombre d'essais

Résolution = longueur du plus petit générateur d'alias

Exemple : plan 2^{4-1} : I = ABCD

Résolution IV

plan 2^{5-2} : I = ABD = BCE = BCDE

Résolution III

Nombre de générateurs : $2^{nb\ facteur\ ajoutés} - 1$

Résolution III : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 2 ou plus

Résolution IV : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 3 ou plus

Résolution V : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 4 ou plus
et interactions d'ordre 2 confondues avec interactions d'ordre 3 ou plus

s	3	4	5	6	7	8	9
Nb d'expériences : 2^s	8	16	32	64	128	256	512
Nb de facteurs en résolution 3 : $2^s - 1$	7	15	31	63	127	255	511
Nb de facteurs en résolution 4 : 2^{s-1}	4	8	16	32	64	128	256
Nb de facteurs en résolution 5	3	5	6	8	11	17	≥ 23

Construction de plans avec R (package FrF2)

```
library(FrF2)
plan1 <- FrF2(nrungs=8, nfactors=4)
plan2 <- FrF2(nfactors=5, resolution=3, factor.names=list(eau=c("min","max"), qté=c("55","65"),
                                                       bio=c("non","oui"), temp=c("180","220"), Pliage=c("chaud","froid")))
summary(plan2)
```

Call:

```
FrF2(nfactors = 5, resolution = 3, factor.names = list(eau = c("min", "max"), qté = c("55",
"65"), bio = c("non", "oui"), temp = c("180", "220"), Pliage = c("chaud", "froid")))
```

Experimental design of type FrF2
8 runs

Factor settings (scale ends):

eau	qté	bio	temp	Pliage
1 min	55	non	180	chaud
2 max	65	oui	220	froid

(suite des résultats)

Design generating information:

```
$legend
[1] A=eau      B=qté      C=bio      D=temp      E=Pliage
```

```
$generators
[1] D=AB E=AC
```

Alias structure:

```
$main
[1] A=BD=CE B=AD      C=AE      D=AB      E=AC
```

```
$fi2
[1] BC=DE BE=CD
```

The design itself:

	eau	qté	bio	temp	Pliage
1	max	55	non	180	chaud
2	min	55	oui	220	chaud
3	min	65	oui	180	chaud
4	max	65	non	220	chaud
5	min	65	non	180	froid
6	min	55	non	220	froid
7	max	65	oui	220	froid
8	max	55	oui	180	froid

class=design, type= FrF2

Démarche statistique

1. Définir la problématique
2. Choisir les expériences à réaliser (planification expérimentale)
3. Effectuer les expériences
4. Dépouiller les résultats (analyse de variance)

Cours complet sur Youtube : <https://youtu.be/OW4DvkEMFLM>