

Analyse de variance avec interaction

F. Husson
husson@agrocampus-ouest.fr

Données - notations

Séance	Juge	Produit	Sucre	Acide	Amer	Cacao	Lait
S1	J1	P6	4	3	2	5,5	7,5
S1	J1	P4	1,2	4,4	6	7,6	5,5
S1	J1	P2	1,8	3	2,6	5	2,4
S1	J1	P5	1,5	3,5	7,1	7,5	7,3
S1	J1	P1	1	5,5	9,3	8,6	8,1
S1	J1	P3	9	1	0	0,5	3,7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S1	J2	P5	3,9	2	2,4	5,6	4,8
S1	J2	P6	2,4	4	4,9	5,3	5,8

Questions

Y a-t-il des différences d'amertume entre chocolats ?

Les juges utilisent-ils l'échelle de note de la même façon ?

L'amertume des chocolats est-elle évaluée de la même façon d'une séance à l'autre ?

Les juges évaluent-ils les chocolats de la même façon ?

Données - exemple

Exemple : 2 produits ; 3 juges; 2 répétitions

	Juge 1	Juge 2	Juge 3	Moy
Produit 1	1	1	2	2
	3	1	4	
Produit 2	2	4	4	4
	2	6	6	
Moy	2	3	4	3

Prod	Juge	Note
P1	J1	1
P1	J1	3
P1	J2	1
P1	J2	1
P1	J3	2
P1	J3	4
...
P2	J3	6

Données - notations

- Y variable quantitative
- F1, F2, ... variables qualitatives à I, J, ... modalités
- n_{ij} répétitions pour le couple (i,j)

obs	F1	F2	y
1	1	1	y_{111}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1	1	$y_{11n_{11}}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	j	y_{ijk}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	I	J	$y_{IJn_{IJ}}$

$$y_{ij\bullet} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$$

$$y_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j,k} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{n_j} \sum_{i,k} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k} y_{ijk}$$

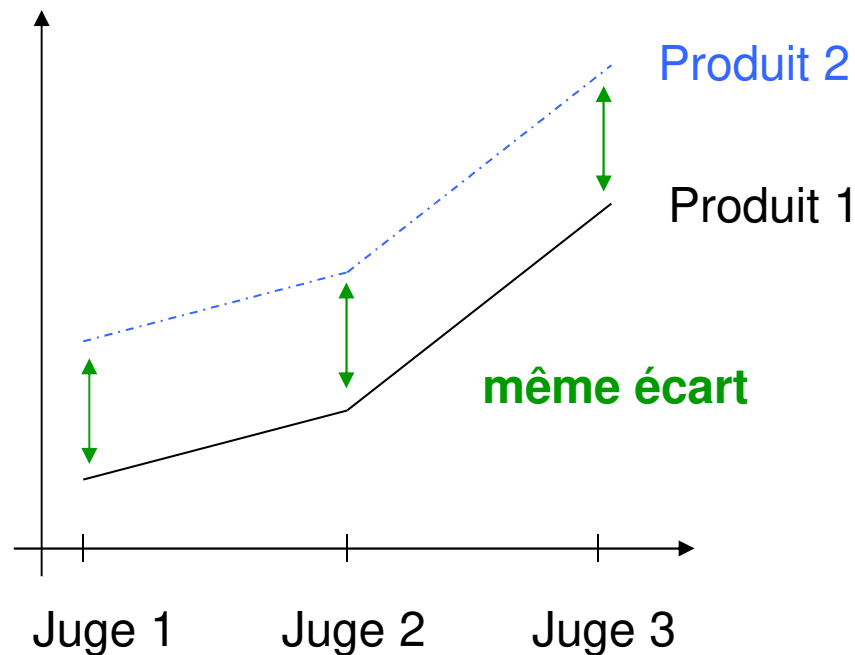
Questions

- Y a-t-il un effet « produit » sur la note ?
- Y a-t-il un effet « juge » sur la note ?
- Y a-t-il une interaction entre les deux facteurs ?

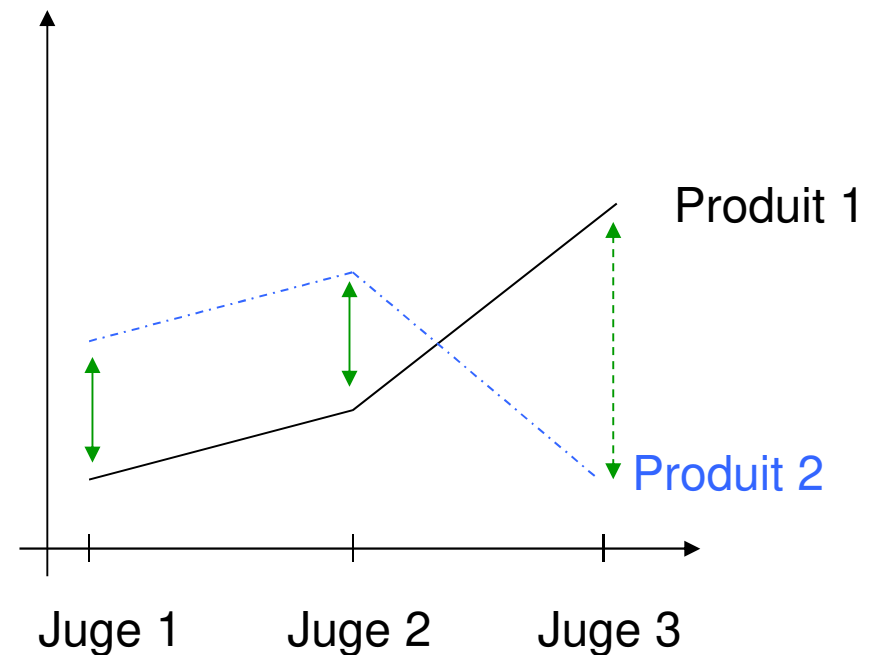
Tests

- Décision dans l'incertain : notion de test

Définition de l'interaction



Les effets produit et juge
s'additionnent



Les effets produit et juge ne
s'additionnent pas : interaction entre
ces 2 facteurs

Interaction :

l'effet d'un facteur sur Y diffère selon les modalités de l'autre

Illustration de l'interaction

Y : Nombre de bulles

2 facteurs : Boisson (eau / coca), Mentos (présence / absence)

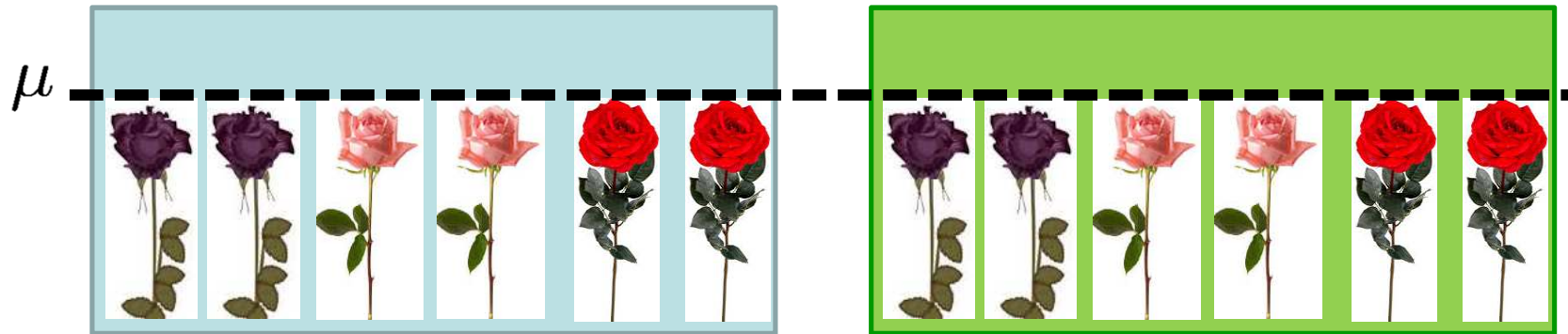
Interaction : effet du mentos sur le nombre de bulles dépend de la boisson



Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

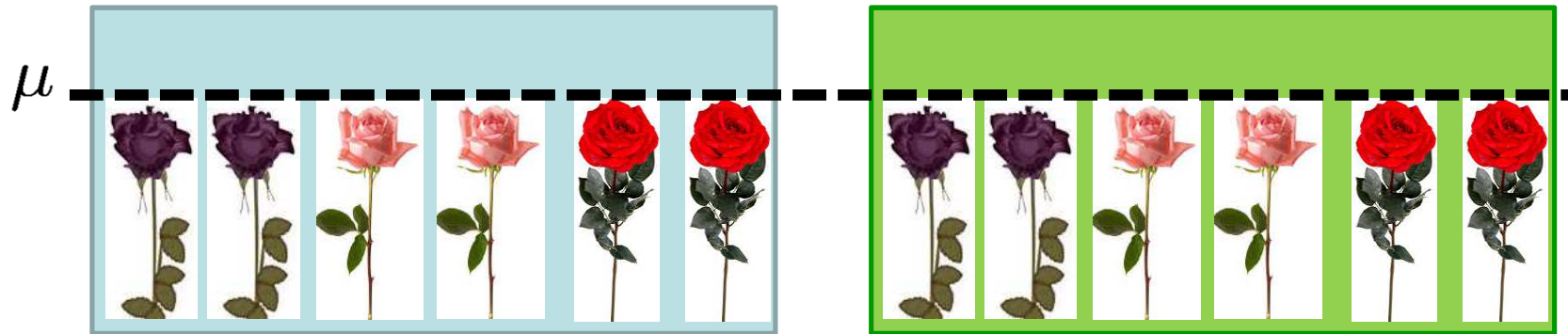
$i=1,..,2$ $j=1,..,3$ $k=1,2$

$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu$$



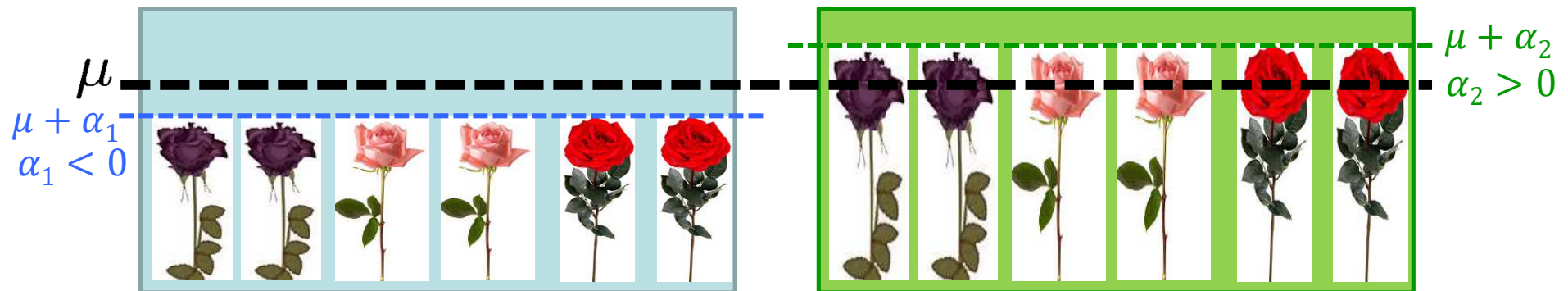
Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu$$

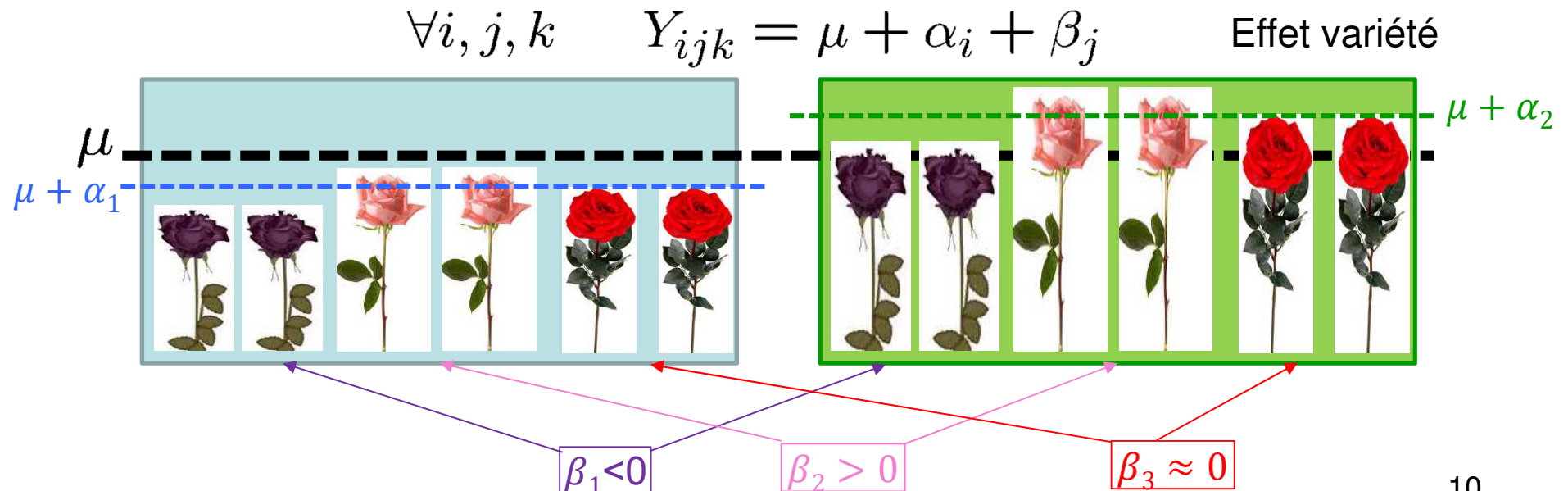
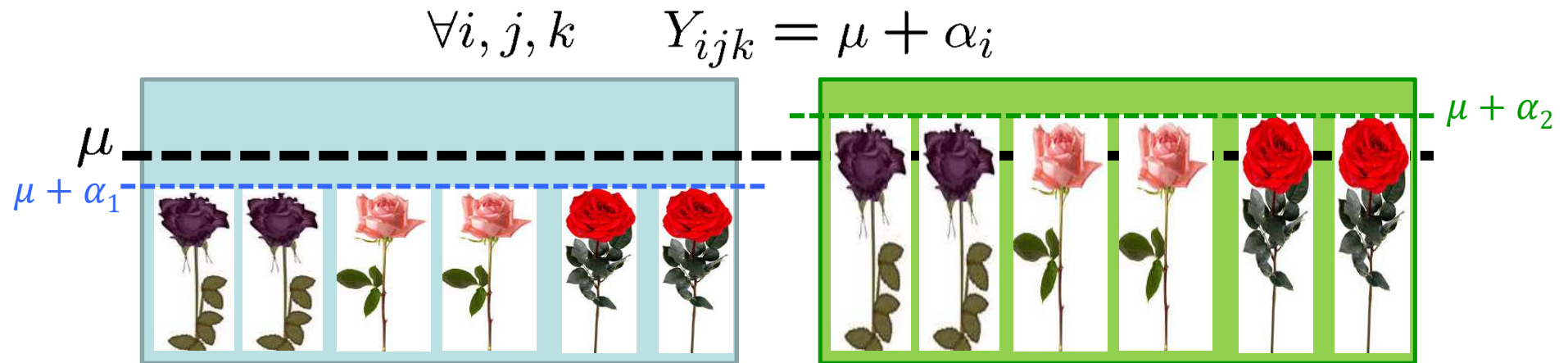


$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i$$

Effet parcelle

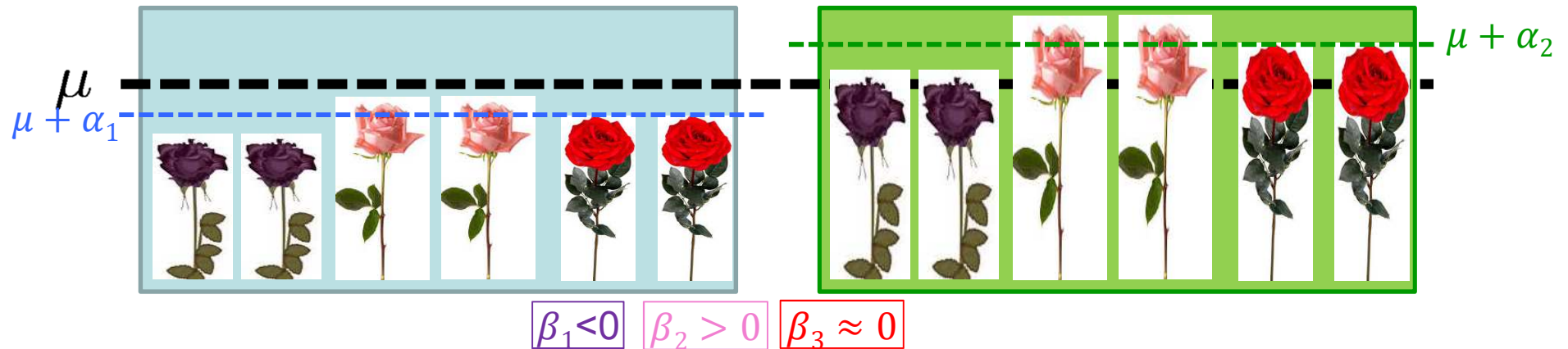


Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

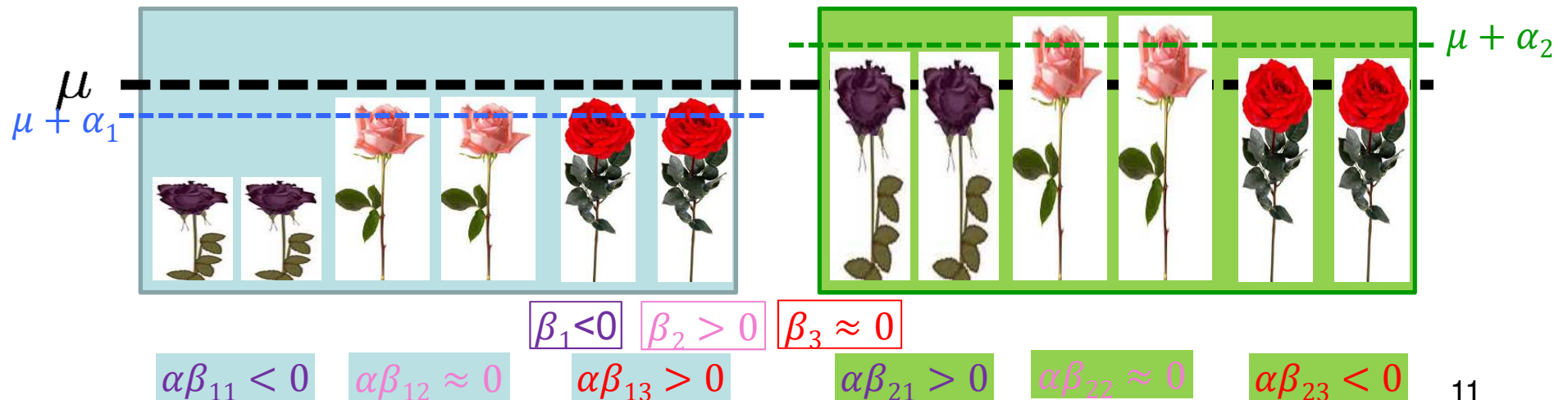


Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

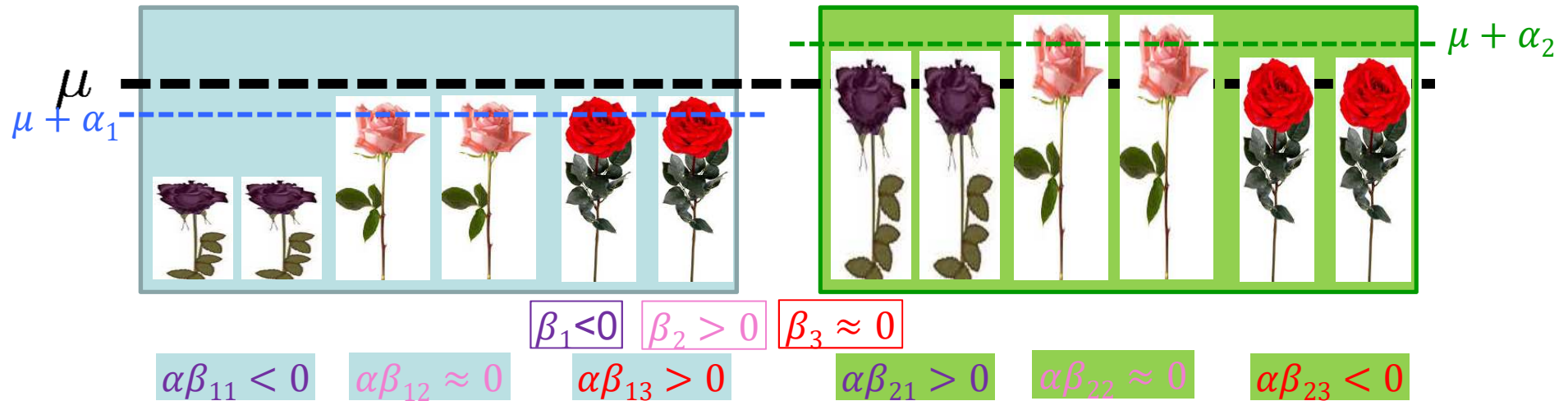


$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} \quad \text{Interaction}$$

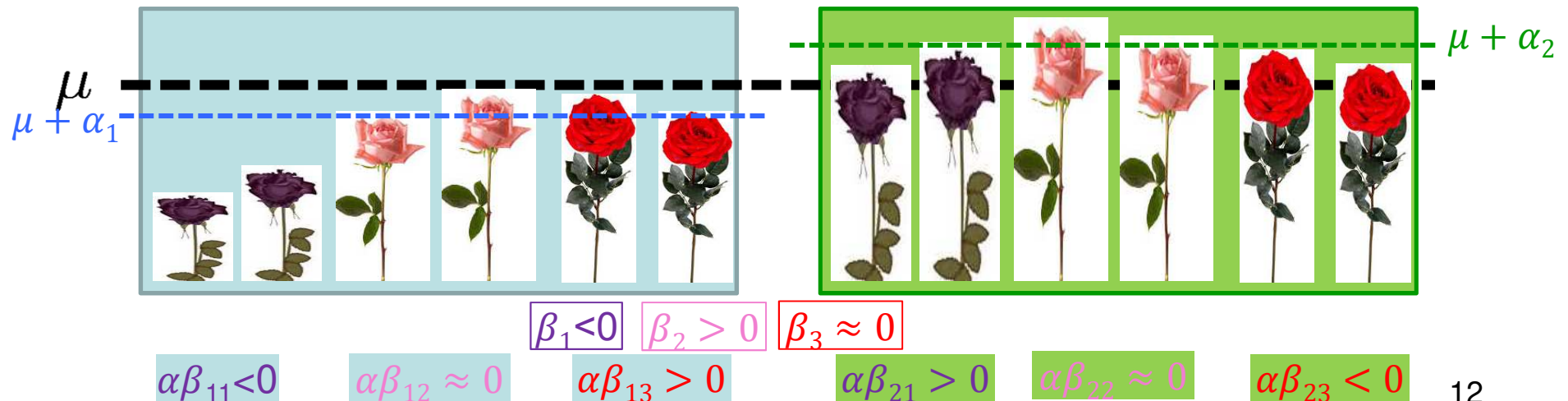


Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$



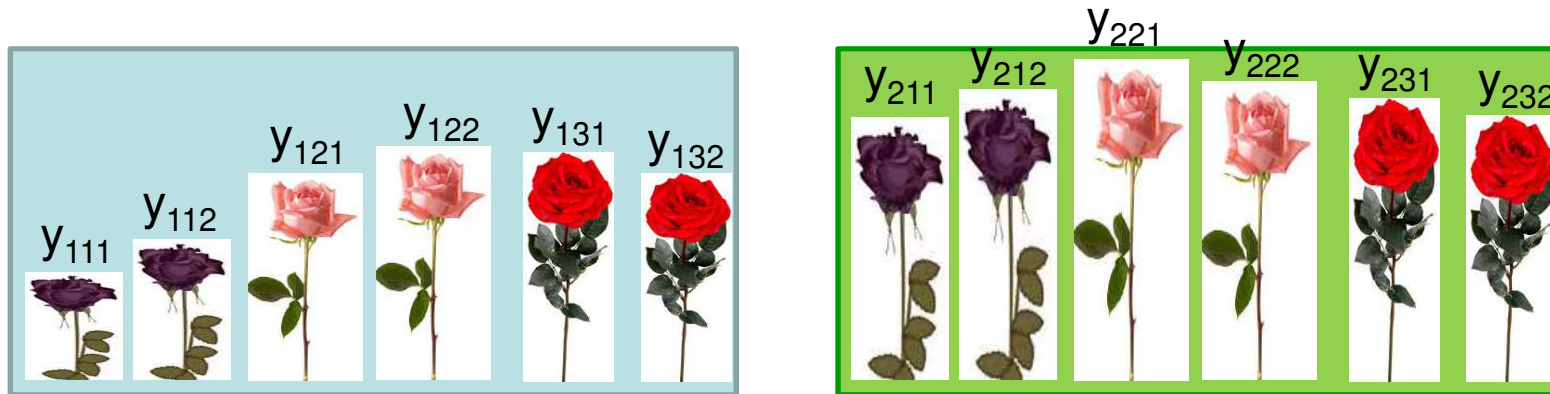
$$\forall i, j, k \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$



$$\varepsilon_{111} < 0$$

Exemple : 2 parcelles, 3 variétés de rose

On ne dispose que de l'info suivante : la taille de chaque fleur, sa variété et la parcelle dans laquelle elle est cultivée



Et on cherche à estimer :

μ : la taille moyenne des fleurs (quelle que soit la parcelle et la variété)

α_i : l'effet de la parcelle i

β_j : l'effet de la variété j

$\alpha\beta_{ij}$: l'effet de l'interaction variété - parcelle

Définition du modèle à 2 facteurs

$$\text{Écriture du modèle sous forme indicée} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall i, j, k & Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ \forall i, j, k & \mathcal{L}(\varepsilon_{ijk}) = \mathcal{N}(0, \sigma) \\ \forall (i', j', k') \neq (i, j, k) & \text{cov}(\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{i'j'k'}) = 0 \end{array} \right.$$

μ effet moyen

α_i effet principal du niveau i du facteur 1

β_j effet principal du niveau j du facteur 2

$\alpha\beta_{ij}$ effet de l'interaction des facteurs 1 et 2 pour les niveaux i et j

ε_{ijk} résiduelle

Écriture matricielle du modèle :

$$Y = X\beta + E \quad \text{avec } \mathbb{E}(E) = 0 \quad \text{et } \mathbb{V}(E) = \sigma^2 Id$$

$$\begin{aligned}
Y_{111} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{111} \\
Y_{112} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{112} \\
Y_{121} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{121} \\
Y_{122} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{122} \\
Y_{131} &= \mu + \alpha_1 + \beta_3 + \alpha\beta_{13} + \varepsilon_{131} \\
Y_{132} &= \mu + \alpha_1 + \beta_3 + \alpha\beta_{13} + \varepsilon_{132} \\
Y_{211} &= \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21} + \varepsilon_{211} \\
Y_{212} &= \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21} + \varepsilon_{212} \\
Y_{221} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22} + \varepsilon_{221} \\
Y_{222} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22} + \varepsilon_{222} \\
Y_{231} &= \mu + \alpha_2 + \beta_3 + \alpha\beta_{23} + \varepsilon_{231} \\
Y_{232} &= \mu + \alpha_2 + \beta_3 + \alpha\beta_{23} + \varepsilon_{232}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{13} \\ \alpha\beta_{21} \\ \alpha\beta_{22} \\ \alpha\beta_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix} \quad 15$$

Contraintes

1 + I + J + IJ paramètres mais IJ paramètres indépendants
modèle sur-paramétré \Longrightarrow besoin de contraintes

Contraintes :

$$\alpha_1 = 0$$

La modalité 1 du 1^{er} facteur sert de référence

$$\beta_1 = 0$$

La modalité 1 du 2^{ème} facteur sert de référence

$$\left[\begin{array}{l} \forall i, \alpha\beta_{i1} = 0 \\ \forall j, \alpha\beta_{1j} = 0 \end{array} \right.$$

Les interactions avec les modalités 1 du 1^{er} et du 2^{ème} facteur servent de référence



Il est extrêmement difficile d'interpréter les coefficients estimés avec ces contraintes pour des modèles avec interactions (l'interprétation d'un coefficient dépend du modèle)

ATTENTION : ces contraintes sont utilisées par défaut dans R
 \rightarrow ne pas utiliser les fonctions par défaut

Contraintes

1 + I + J + IJ paramètres mais IJ paramètres indépendants
modèle sur-paramétré \Rightarrow besoin de contraintes

Contraintes :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 0$$

$$\forall i, \sum_{j=1}^J \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\forall j, \sum_{i=1}^I \alpha\beta_{ij} = 0$$

Exemple :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$\alpha\beta_{11}$	+	$\alpha\beta_{12}$	+	$\alpha\beta_{13}$	= 0
+		+		+	
$\alpha\beta_{21}$	+	$\alpha\beta_{22}$	+	$\alpha\beta_{23}$	= 0
=		=		=	
0		0		0	

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta_{13} = -\alpha\beta_{11} - \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{21} = -\alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{22} = -\alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{23} = -\alpha\beta_{21} - \alpha\beta_{22} \\ \Rightarrow \alpha\beta_{23} = \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Y_{111} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{111} \\
Y_{112} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{112} \\
Y_{121} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{121} \\
Y_{122} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{122} \\
Y_{131} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha\beta_{11} - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{131} \\
Y_{132} &= \mu + \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha\beta_{11} - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{132} \\
Y_{211} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{211} \\
Y_{212} &= \mu - \alpha_1 + \beta_1 - \alpha\beta_{11} + \varepsilon_{212} \\
Y_{221} &= \mu - \alpha_1 + \beta_2 - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{221} \\
Y_{222} &= \mu - \alpha_1 + \beta_2 - \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{222} \\
Y_{231} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{231} \\
Y_{232} &= \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 + \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} + \varepsilon_{232}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 0 \Rightarrow \beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$$\forall i, \sum_{j=1}^J \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\forall j, \sum_{i=1}^I \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix}$$

Estimation des paramètres du modèle

par la méthode des moindres carrés

Minimiser $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}^2$ revient à minimiser $E^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$
 $E^2 = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$

Annulons la dérivée par rapport à β pour trouver le minimum

$$\frac{\partial(E^2)}{\partial\beta} = \frac{\partial(Y'Y)}{\partial\beta} - \frac{\partial(Y'X\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial(\beta'X'Y)}{\partial\beta} + \frac{\partial(\beta'X'X\beta)}{\partial\beta} = 0$$
$$0 - (X'Y) - (X'Y) + X'X\beta + X'X\beta = 0$$

⇒ $X'Y = X'X\beta$

Règles de calcul pour
dérivation matricielle

$$\frac{\partial(X'A)}{\partial A} = \frac{\partial(A'X)}{\partial A} = X$$

$$\frac{\partial(A'X')}{\partial A} = \frac{\partial(AX)}{\partial A} = X'$$

$X'X$ non inversible : sur-paramétrisation (besoin de contraintes)

$X'X$ inversible : l'estimateur de β est : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

Propriétés : $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$ $\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

$$\hat{\beta} - \beta \sim N(0, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

Estimation des paramètres du modèle

Prédiction et résidus

Valeurs prédites : $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \widehat{\alpha\beta}_{ij} = y_{ij\bullet}$$

Résidus : $E = Y - \hat{Y}$

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$$

Estimateur de la variabilité résiduelle

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i,j,k} e_{ijk}^2}{\dots\dots\dots}$$

Propriété : $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$

Estimation des paramètres du modèle

Cas particulier du plan équilibré (complet équilibré) :

$$\hat{\mu} = y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i\bullet\bullet} - y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\hat{\beta}_j = y_{\bullet j\bullet} - y_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\widehat{\alpha\beta}_{ij} = y_{ij\bullet} - y_{i\bullet\bullet} - y_{\bullet j\bullet} + y_{\bullet\bullet\bullet}$$

Décomposition de la variabilité

Cas complet et équiréparté : les SC s'additionnent

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j,k} (Y_{ijk} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2 &= \sum_{i,j,k} (Y_{i\bullet\bullet} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2 && I-1 \\
 &+ \sum_{i,j,k} (Y_{\bullet j\bullet} - Y_{\bullet\bullet\bullet})^2 && J-1 \\
 &+ \sum_{i,j,k} (Y_{ij\bullet} - Y_{i\bullet\bullet} - Y_{\bullet j\bullet} + Y_{\bullet\bullet\bullet})^2 && (I-1)(J-1) \\
 &+ \sum_{i,j,k} (Y_{ijk} - Y_{ij\bullet})^2 && ddl_R
 \end{aligned}$$

$$SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R$$

Test global d'un effet

Test du facteur A :

Hypothèses : $H_0 : \forall i, \alpha_i = 0$ $H_1 : \exists i / \alpha_i \neq 0$

$$\mathbb{E}(CM_A) = \sigma^2 + \frac{KJ}{I-1} \sum_i \alpha_i^2$$

$$\mathbb{E}(CM_B) = \sigma^2 + \frac{KI}{J-1} \sum_j \beta_j^2$$

$$\mathbb{E}(CM_{AB}) = \sigma^2 + \frac{K}{(I-1)(J-1)} \sum_{ij} \alpha\beta_{ij}^2$$

$$\mathbb{E}(CM_R) = \sigma^2$$

Idée :

Test global d'un effet

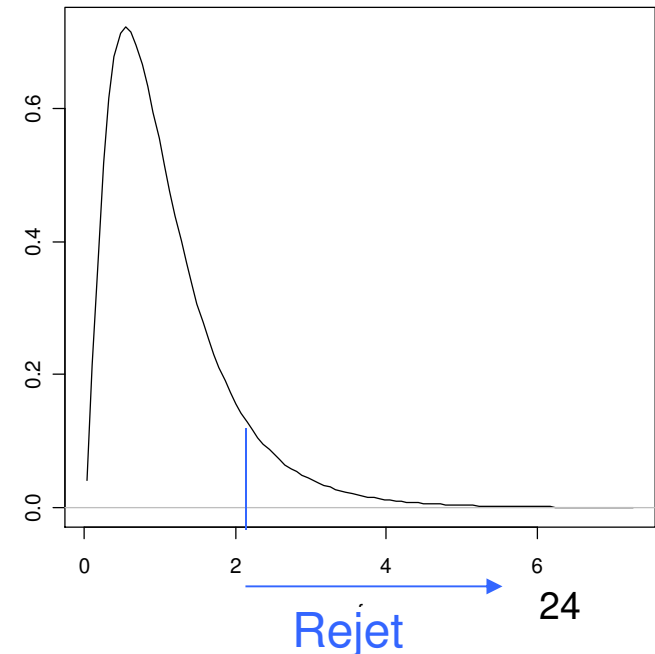
Test du facteur A :

Hypothèses : $H_0 : \forall i, \alpha_i = 0$ $H_1 : \exists i / \alpha_i \neq 0$

$$\text{Statistique de test : } F_{obs} = \frac{SC_A / (I - 1)}{SC_R / ddl_R} = \frac{CM_A}{CM_R}$$

Si $\forall i \alpha_i = 0$ $F_{obs} \sim F_{ddl_R}^{I-1}$

$F_{obs} > F_{ddl_R}^{I-1}(0.95) \implies \text{rejet de } H_0$



Test global d'un effet

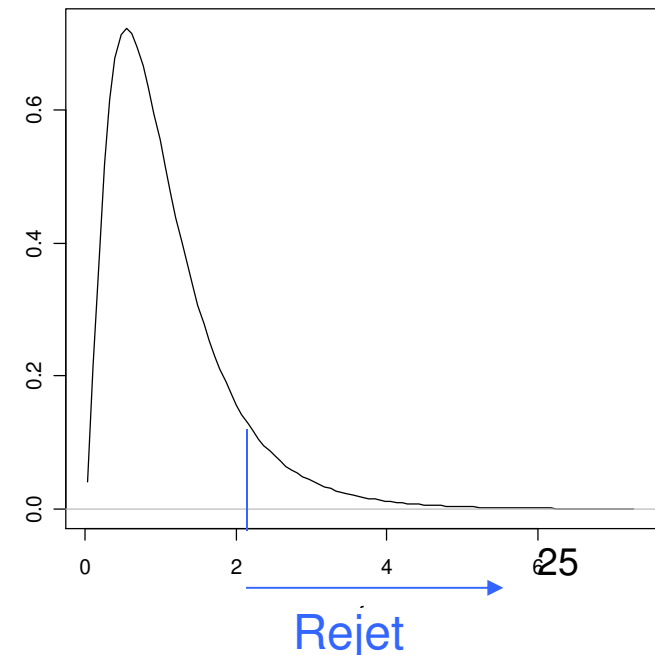
Test de l'interaction AB :

Hypothèses : $H_0 : \forall(i, j), \alpha\beta_{ij} = 0$ $H_1 : \exists(i, j) / \alpha\beta_{ij} \neq 0$

Statistique de test :
$$F_{obs} = \frac{\frac{SC_{AB}}{(I-1)(J-1)}}{\frac{SC_R}{ddl_R}} = \frac{CM_{AB}}{CM_R}$$

Si $\forall(i, j) \alpha\beta_{ij} = 0$ $F_{obs} \sim F_{ddl_R}^{(I-1)(J-1)}$

$F_{obs} > F_{ddl_R}^{(I-1)(J-1)}(0.95) \implies \text{rejet de } H_0$



Test de conformité d'un coefficient

Hypothèses : $H_0 : \alpha_i = 0$ $H_1 : \alpha_i \neq 0$

On sait que : $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_i) = \mathcal{N}(\alpha_i, \sigma_{\hat{\alpha}_i})$ avec $\sigma_{\hat{\alpha}_i}^2 = \sigma^2 [(X'X)^{-1}]_{ii}$

d'où : $\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i}} \sim \mathcal{T}_{\nu=ddl_R}$

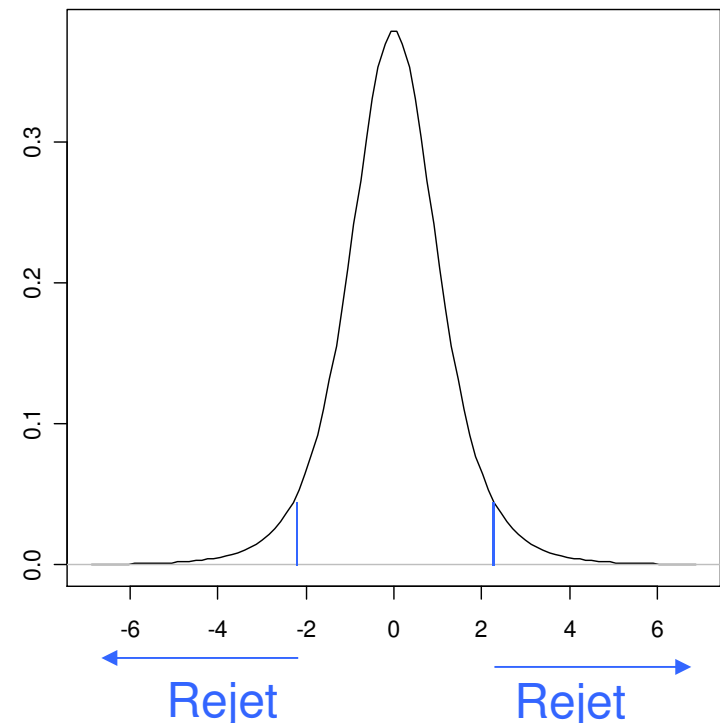
Statistique de test : $T_{obs} = \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i}}$

Si $\alpha_i = 0$, $T_{obs} \sim \mathcal{T}_{\nu=ddl_R}$

Décision : si $|T_{obs}| > t_{\nu=ddl_R}(0.975)$
rejet de H_0

Intervalle de confiance :

$$\alpha_i \in \left[\hat{\alpha}_i - \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i} t_{ddl_R}(0.975) ; \hat{\alpha}_i + \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i} t_{ddl_R}(0.975) \right]_{26}$$



Exemple

library(FactoMineR)

AovSum(Note~ Produit+Juge+Produit:Juge, data=donnees)

Prod	Juge	Note	\$Ftest	Sum Sq	Df	CM	F value	Pr(>F)
P1	J1	1	Prod	12.0000	1	12.0000	9	0.02401 *
P1	J1	3	Juge	8.0000	2	4.0000	3	0.12500
P1	J2	1	Prod:Juge	8.0000	2	4.0000	3	0.12500
P1	J2	1	Residuals	8.0000	6	1.3333		
P1	J3	2	---					
P1	J3	4	\$Ttest			Estimate	Std.Error	t value
P2	J1	2	(Intercept)			3.0e+00	0.333	9.000e+00
P2	J1	2	Prod - P1			-1.0e+00	0.333	-3.000e+00
P2	J2	4	Prod - P2			1.0e+00	0.333	3.000e+00
P2	J2	6	Juge - J1			-1.0e+00	0.471	-2.121e+00
P2	J3	4	Juge - J2			-1.3e-16	0.471	-2.809e-16
P2	J3	6	Juge - J3			1.0e+00	0.471	2.121e+00
			Prod-P1 : Juge-J1			1.0e+00	0.471	2.121e+00
			Prod-P2 : Juge-J1			-1.0e+00	0.471	-2.121e+00
			Prod-P1 : Juge-J2			-1.0e+00	0.471	-2.121e+00
			Prod-P2 : Juge-J2			1.0e+00	0.471	2.121e+00
			Prod-P1 : Juge-J3			-2.2e-16	0.471	-4.710e-16
			Prod-P2 : Juge-J3			2.2e-16	0.471	4.710e-16

Extension de l'analyse de variance

Généralisation immédiate à un nombre quelconque de facteurs

Si les données sont déséquilibrées :

- les SC ne s'additionnent plus
- $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$
- $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_j$ dépendent du modèle

Modèle linéaire

Contextes d'application

Modèle de régression

- Sources de variabilité quantitatives

Modèle d'analyse de la variance

- Sources de variabilité qualitatives

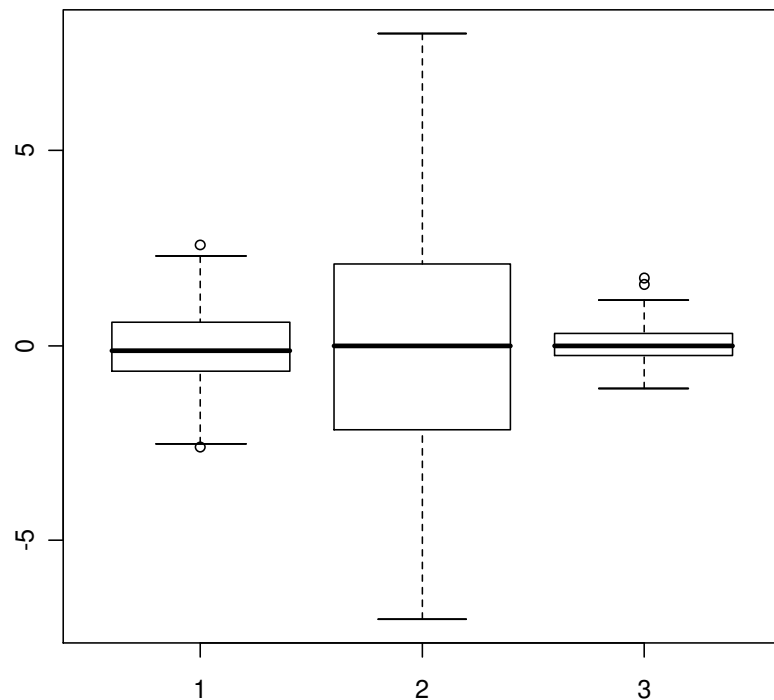
Modèle d'analyse de covariance

- Sources de variabilité de natures différentes

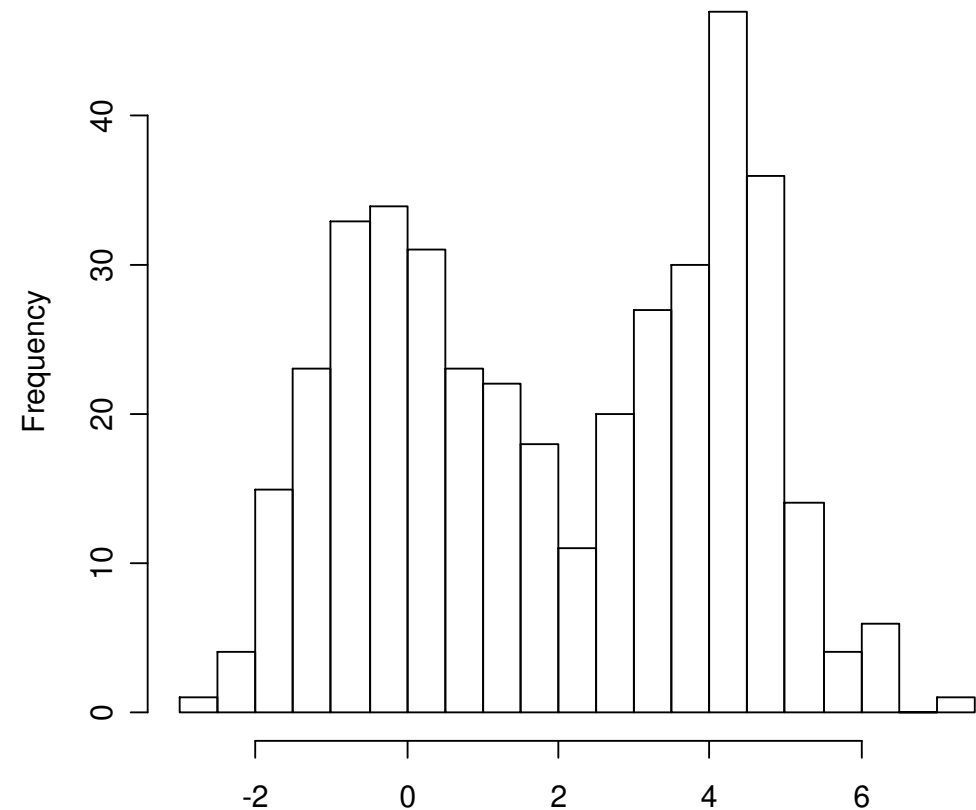
Tous ces modèles sont des modèles linéaires

Analyse des résidus

Homoscédasticité
des résidus ?



Normalité des résidus ?



Tests Shapiro-Wilks, Kolmogorov, χ^2
30