Proposition de correction du TD sur les plans fractionnaires

Module de plan d'expériences - F. Husson - Agrocampus

Exercice 1 : Confusions dans un plan d'expériences 2^{3-1}

1. La matrice des essais est fournie dans l'énoncé. On remplacera, par convention, les 2 par des -1 :

A	B	C
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

2. La matrice des effets s'écrit :

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

On remarque que certaines colonnes sont identiques ce qui signifie que certains effets sont totalement confondus. Ainsi, on peut lire que $I = ABC$, $A = BC$, $B = AC$, $C = AB$.

La résolution du plan correspond à l'ordre de l'interaction la plus petite confondue avec la constante I. Ici, une seule interaction est confondue avec la constante : ABC. Cette interaction est d'ordre 3 donc le plan est de résolution III.

3. Le plan étant de résolution III, on ne peut pas étudier le modèle avec interactions mais seulement le modèle avec les effets principaux. Pour construire ce modèle, on doit faire l'hypothèse que les interactions d'ordre 2 et l'interaction d'ordre 3 sont négligeables.

Exercice 2 : Plan 2^{6-2}

1. Pour étudier un plan complet à 6 facteurs à 2 niveaux, il faut $2^6 = 64$ essais.
2. Le plan de base est un plan complet en 16 essais, c'est donc le plan 2^4.
3. Pour étudier 6 facteurs en 16 essais, on adopte la démarche suivante : choix du plan de base, choix des interactions avec lesquelles on confond les nouveaux facteurs, listage de toutes les confusions que cela engendre.

La matrice des effets correspondant au plan de base 2^4 présente les colonnes suivantes :

I 1 2 3 4 12 13 14 23 24 34 123 124 134 234 1234

Deux méthodes sont possibles :

1re : On propose de confondre 5 avec l'interaction (d'ordre le plus élevé) 1234 donc le générateur d'alias est : $I = 12345$. On propose de confondre 6 avec 123 et donc 45 ; ce qui conduit aux générateurs d'alias : $I = 1236$ et $I = 456$.

Les confusions résultantes sont les suivantes (seules les interactions d'ordre inférieur ou égal à 3 sont notées) :

I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	
					345	245	235	145	135	125	45	35	23	15	5
	236	136	126		36	26		16			6	346	246	146	46
456				56			156		256	356					

2e : On propose cette fois de confondre 5 avec 123 puis 6 avec 124 et donc également 345 ; ceci engendre les générateurs d'alias : $I = 1235 = 1246 = 3456$.

Les confusions résultantes sont les suivantes (seules les interactions d'ordre inférieur ou égal à 3 sont notées) :

I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	
	235	135	125		35	25		15			5	345	245	145	45
	246	146		126	46		26		16		346	6	236	136	36
			456	356						56			156	256	

Remarque concernant les deux plans :

— dans le premier plan : un facteur principal est confondu avec une interaction d'ordre 2 ($4 = 56$, par exemple), ce qui est peu souhaitable ;
— dans le deuxième plan : les facteurs principaux sont confondus avec des interactions d'ordre 3 ou plus.

Les deux stratégies conduisent respectivement à des plans de résolution III et IV.

4. Avec un plan de résolution IV, on peut estimer les effets principaux sans ambiguïté, dès lors que l'on considère les interactions d'ordre 3 ou plus négligeables. En revanche, certaines interactions d'ordre 2 seront confondues et donc ne pourront pas être estimées.
5. 32 essais suffisent pour étudier 6 facteurs en résolution V. En résolution V, les facteurs principaux sont confondus avec des interactions d'ordre 4 ou plus et les interactions (d'ordre 2) sont confondues avec des interactions d'ordre 3 ou plus. Les effets principaux et les interactions sont donc estimables dès lors que l'on suppose que les interactions d'ordre 3 ou plus sont négligeables.

Exercice 3 : Dépouillement d'un plan d'expériences pour 4 facteurs

1. On reconnaît le plan fractionnaire classique 2^{4-1}. Les trois premiers facteurs constituent un plan complet. Le quatrième facteur est confondu avec l'interaction (d'ordre 3) entre les 3 premiers. Le plan étant fractionnaire, tous les facteurs sont orthogonaux. Le plan est de résolution IV puisque le seul générateur d'alias est $I = 1234$.
2. Une analyse de variance à 4 facteurs permettra d'analyser les résultats.
3. Le modèle s'écrit :
$$\forall i,j,k,l \qquad Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \varepsilon_{ijkl}$$
avec $\mathcal{L}(\varepsilon_{ijkl}) = \mathcal{N}(0,\sigma)$ et $\mathrm{Cov}(\varepsilon_{ijkl}, \varepsilon_{i'j'k'l'}) = 0 \quad \forall (i',j',k',l') \neq (i,j,k,l)$.
4. Voici les lignes de code

```
library(FactoMineR)
F1 <- as.factor(c(1,1,1,1,2,2,2,2))
F2 <- as.factor(c(1,1,2,2,1,1,2,2))
F3 <- as.factor(c(1,2,1,2,1,2,1,2))
F4 <- as.factor(c(1,2,2,1,2,1,1,2))
Y <- c(29,1,-3,5,-9,3,-5,-21)
don <- cbind.data.frame(F1,F2,F3,F4,Y)
AovSum(Y~F1+F2+F3+F4,data=don)

Ftest       SS df  MS F value  Pr(>F)
F1         512  1 512    32.0 0.01094 *
F2         288  1 288    18.0 0.02398 *
F3          72  1  72     4.5 0.12403
F4         512  1 512    32.0 0.01094 *
Residuals   48  3  16

Ttest           Estimate  Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.4206e-16  1.4142e+00  0.0000  1.00000
F1 - 1       8.0000e+00  1.4142e+00  5.6569  0.01094 *
F1 - 2      -8.0000e+00  1.4142e+00 -5.6569  0.01094 *
F2 - 1       6.0000e+00  1.4142e+00  4.2426  0.02398 *
F2 - 2      -6.0000e+00  1.4142e+00 -4.2426  0.02398 *
F3 - 1       3.0000e+00  1.4142e+00  2.1213  0.12403
F3 - 2      -3.0000e+00  1.4142e+00 -2.1213  0.12403
F4 - 1       8.0000e+00  1.4142e+00  5.6569  0.01094 *
F4 - 2      -8.0000e+00  1.4142e+00 -5.6569  0.01094 *
```

Exercice 4 : Construction d'un plan 2^{8-4}

1. Le plan de base est le plan 2^4 dont les effets sont les suivants :
I 1 2 3 4 12 13 14 23 24 34 123 124 134 234 1234
Comme il faut introduire plus d'un facteur, on ne confond pas de facteur avec l'interaction d'ordre le plus élevé, mais avec les interactions d'ordre le plus élevé -1. On confond alors 5 avec 123, 6 avec 124, 7 avec 134 et 8 avec 234.

Cela engendre les générateurs d'alias suivants :

$$\begin{aligned} I &= 1235 = 1246 = 1347 = 2348 = 3456 = 2457 = 1458 = 2367 \\ &= 1368 = 1278 = 1567 = 2568 = 3578 = 4678 = 12345678. \end{aligned}$$

La constante est confondue avec des interactions d'ordre 4 ou plus donc le plan est de résolution IV.

2. Les effets principaux sont estimables dès lors que l'on considère que les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables. Les interactions d'ordre 2 ne sont pas estimables car confondues entre elles.
3. Neuf paramètres sont estimés à partir des données (1 paramètre pour la constante et 8 paramètres pour chacun des facteurs). Comme 16 essais sont proposés, 7 degrés de liberté restent disponibles. On peut donc estimer sans ambiguïté 7 « paquets d'effets », à l'intérieur desquels des interactions d'ordre 2 seront présentes. Si, dans un paquet, une seule interaction est non négligeable (toutes les autres étant supposées a priori négligeables), alors on peut l'estimer. Par exemple, l'interaction 12 peut être estimée si on suppose que les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables et si l'on suppose de plus que les interactions 35, 46 et 78 sont également négligeables.
4.
```
library(FrF2)
plan <- FrF2(nruns=16, nfactors=8)
summary(plan)
options(contrasts=c("contr.sum","contr.sum"))
X <- model.matrix(~.,data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C,data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H,data=plan)
t(X)%*%X
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H+B:C+B:D,data=plan)
t(X)%*%X

library(FrF2)
plan = FrF2(nruns=16,nfactors=8)
summary(plan)

Call:
FrF2(nruns = 16, nfactors = 8)

Experimental design of type  FrF2
16  runs

Factor settings (scale ends):
   A  B  C  D  E  F  G  H
1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
2  1  1  1  1  1  1  1  1

Design generating information:
$legend
[1] A=A B=B C=C D=D E=E F=F G=G H=H

$generators
[1] E=ABC F=ABD G=ACD H=BCD

Alias structure:
$fi2
[1] AB=CE=DF=GH AC=BE=DG=FH AD=BF=CG=EH AE=BC=DH=FG AF=BD=CH=EG AG=BH=CD=EF AH=BG=CF=DE

The design itself:
    A  B  C  D  E  F  G  H
1   1 -1  1 -1 -1  1 -1  1
2  -1 -1 -1  1 -1  1  1  1
3  -1 -1  1 -1  1 -1  1  1
4  -1  1 -1 -1  1  1 -1  1
5   1  1  1 -1  1 -1 -1 -1
```

```
6   1 -1  1  1 -1 -1  1 -1
7  -1  1  1  1 -1 -1 -1  1
8   1  1  1  1  1  1  1  1
9   1  1 -1 -1 -1 -1  1  1
10  1 -1 -1 -1  1  1  1 -1
11 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1
12 -1  1 -1  1  1 -1  1 -1
13  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1
14 -1  1  1 -1 -1  1  1 -1
15  1  1 -1  1 -1  1 -1 -1
16 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
class=design, type= FrF2
```

```
options(contrasts=c("contr.sum","contr.sum"))
X <- model.matrix(~.,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
            (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1
(Intercept)          16  0  0  0  0  0  0  0  0
A1                    0 16  0  0  0  0  0  0  0
B1                    0  0 16  0  0  0  0  0  0
C1                    0  0  0 16  0  0  0  0  0
D1                    0  0  0  0 16  0  0  0  0
E1                    0  0  0  0  0 16  0  0  0
F1                    0  0  0  0  0  0 16  0  0
G1                    0  0  0  0  0  0  0 16  0
H1                    0  0  0  0  0  0  0  0 16
```

```
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
            (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1
(Intercept)          16  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0
A1                    0 16  0  0  0  0  0  0  0     0     0
B1                    0  0 16  0  0  0  0  0  0     0     0
C1                    0  0  0 16  0  0  0  0  0     0     0
D1                    0  0  0  0 16  0  0  0  0     0     0
E1                    0  0  0  0  0 16  0  0  0     0     0
F1                    0  0  0  0  0  0 16  0  0     0     0
G1                    0  0  0  0  0  0  0 16  0     0     0
H1                    0  0  0  0  0  0  0  0 16     0     0
A1:B1                 0  0  0  0  0  0  0  0  0    16     0
A1:C1                 0  0  0  0  0  0  0  0  0     0    16
```

```
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
          (Intercept) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1 A1:D1 A1:E1 A1:F1 A1:G1 A1:H1
(Intercept)        16  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
A1                  0 16  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
B1                  0  0 16  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
C1                  0  0  0 16  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
D1                  0  0  0  0 16  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
E1                  0  0  0  0  0 16  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0
F1                  0  0  0  0  0  0 16  0  0     0     0     0     0     0     0     0
G1                  0  0  0  0  0  0  0 16  0     0     0     0     0     0     0     0
H1                  0  0  0  0  0  0  0  0 16     0     0     0     0     0     0     0
A1:B1               0  0  0  0  0  0  0  0  0    16     0     0     0     0     0     0
A1:C1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0    16     0     0     0     0     0
A1:D1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0    16     0     0     0     0
A1:E1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0    16     0     0     0
A1:F1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0    16     0     0
A1:G1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0    16     0
A1:H1               0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0    16
```

```
X <- model.matrix(~A+B+C+D+E+F+G+H+A:B+A:C+A:D+A:E+A:F+A:G+A:H+B:C+B:D,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
    (Int) A1 B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 A1:B1 A1:C1 A1:D1 A1:E1 A1:F1 A1:G1 A1:H1 B1:C1 B1:D1
(Int)   16  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
A1       0 16  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
B1       0  0 16  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
C1       0  0  0 16  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
D1       0  0  0  0 16  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
E1       0  0  0  0  0 16  0  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
F1       0  0  0  0  0  0 16  0  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
G1       0  0  0  0  0  0  0 16  0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
H1       0  0  0  0  0  0  0  0 16     0     0     0     0     0     0     0     0     0
A1:B1    0  0  0  0  0  0  0  0  0    16     0     0     0     0     0     0     0     0
A1:C1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0    16     0     0     0     0     0     0     0
A1:D1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0    16     0     0     0     0     0     0
A1:E1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0    16     0     0     0    16     0
A1:F1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0    16     0     0     0    16
A1:G1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0    16     0     0     0
A1:H1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0     0     0    16     0     0
B1:C1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0    16     0     0     0    16     0
B1:D1    0  0  0  0  0  0  0  0  0     0     0     0     0    16     0     0     0    16
```

Exercice 5 : Comment peser avec précision ?

1. Le plan d'expériences utilisé est proposé au tableau 1.

Essai	A	B	C	D
pesée 1	1	1	1	1
pesée 2	1	1	-1	-1
pesée 3	1	-1	1	-1
pesée 4	1	-1	-1	1

Table 1 – Présentation du plan

   On reconnaît ici le plan 2^{3-1} avec A confondu avec la constante et D confondu avec l'interaction.

2. Pour estimer le poids des objets, on estime les paramètres du modèle d'analyse de la variance à 2 facteurs et l'interaction : $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$; μ correspond au poid de A, α_1 au poids de B, β_1 au poids de C et $\alpha\beta_{11}$ au poids de D.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = 1/4\ X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, A=60g, B=40g, C=20g, D=30g.

3. On peut calculer la variance des estimateurs :

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2 = 1/4\ \sigma^2$$

   Ainsi, la précision de la balance sera de $1/2\sigma$. On améliore donc la précision de l'estimation des poids par rapport à la pesée classique (en faisant toujours le même nombre de pesées).

Exercice 6 : Analyse conjointe (ou Trade off) en marketing

1. Le plan à construire est un plan 2^{7-4}.
2. Pour construire le plan 2^{7-4} nous utiliserons le plan de base 2^3 puisque c'est le plan en 8 essais. Le plan 2^3 permet d'estimer les effets suivants :
   I   1   2   3   12   13   23   123
   On doit ajouter 4 facteurs au plan de base pour avoir les 7 effets, par conséquent on confondra un facteur avec chaque interaction d'ordre 2 et un facteur avec l'interaction d'ordre 3. Puisqu'on s'intéresse à 7

facteurs, cela nécessite l'estimation de 8 paramètres (1 paramètre pour la constante et 1 paramètre pour chacun des 7 facteurs). Le plan sera alors complètement saturé puisque nous avons 8 essais. On peut par exemple confondre le facteur 4 avec l'interaction 12, 5 avec 13, 6 avec 23 et 7 avec 123.

On a alors les 4 générateurs d'aliases initiaux suivants :
$I_a = 124$; $I_b = 135$; $I_c = 236$; $I_d = 1237$.
On en déduit les autres générateurs en faisant les produits de ces générateurs initiaux 2 à 2 puis 3 à 3 et le produit des 4 :
$I_{ab} = 2345$; $I_{ac} = 1346$; $I_{ad} = 347$; $I_{bc} = 1256$; $I_{bd} = 257$; $I_{cd} = 167$; $I_{abc} = 456$; $I_{abd} = 1457$; $I_{acd} = 2467$; $I_{bcd} = 3567$; $I_{abcd} = 1234567$.
On retrouve bien les $2^4 - 1 = 15$ générateurs attendus.

Le plan ainsi construit est de résolution 3 puisque la plus petite interaction avec laquelle la constante est confondue est d'ordre 3. Pour pouvoir estimer les effets principaux, nous devrons donc faire l'hypothèse que les interactions d'ordre 2 (et plus) sont négligeables.

```
library(FrF2)
plan <- FrF2(nruns=8,nfactors=7,factor.names=list(parfum=c("oui","non"),
          DLC=c("couvercle","côté"),magnésium=c("oui","non"),
          français=c("oui","non"), couleur=c("caramel","plusieurs"),
          police=c("petite","grande"), fond=c("photo","pas photo")))
summary(plan)
```

```
Call:
FrF2(nruns = 8, nfactors = 7, factor.names = list(parfum = c("oui",
    "non"), DLC = c("couvercle", "côté"), magnésium = c("oui",
    "non"), français = c("oui", "non"), couleur = c("caramel",
    "plusieurs"), police = c("petite", "grande"), fond = c("photo",
    "pas photo")))

Experimental design of type  FrF2
8  runs

Factor settings (scale ends):
  parfum       DLC magnésium français   couleur police     fond
1    oui couvercle       oui      oui   caramel petite     photo
2    non      côté       non      non plusieurs grande pas photo

Design generating information:
$legend
[1] A=parfum    B=DLC       C=magnésium D=français  E=couleur   F=police    G=fond

$generators
[1] D=AB  E=AC  F=BC  G=ABC

Alias structure:
$main
[1] A=BD=CE=FG B=AD=CF=EG C=AE=BF=DG D=AB=CG=EF E=AC=BG=DF F=AG=BC=DE G=AF=BE=CD

The design itself:
  parfum       DLC magnésium français   couleur police      fond
1    non couvercle       oui      oui   caramel grande pas photo
2    oui couvercle       non      non   caramel petite pas photo
3    non couvercle       non      oui plusieurs petite     photo
4    oui      côté       non      oui   caramel grande     photo
5    oui      côté       oui      oui plusieurs petite pas photo
6    non      côté       oui      non   caramel petite     photo
7    non      côté       non      non plusieurs grande pas photo
8    oui couvercle       oui      non plusieurs grande     photo
class=design, type= FrF2
```

```
X <- model.matrix(~.,data=plan)
t(X)%*%X
```

```
            (Intercept) parfum1 DLC1 magnésium1 français1 couleur1 police1 fond1
(Intercept)           8       0    0          0         0        0       0     0
parfum1               0       8    0          0         0        0       0     0
DLC1                  0       0    8          0         0        0       0     0
magnésium1            0       0    0          8         0        0       0     0
français1             0       0    0          0         8        0       0     0
couleur1              0       0    0          0         0        8       0     0
police1               0       0    0          0         0        0       8     0
fond1                 0       0    0          0         0        0       0     8
```

3. Avec le plan construit, il n'est pas possible d'estimer d'autres effets que les effets des 7 facteurs et la constante puisque le plan est saturé (on estime autant d'effets qu'on a de données). Pour pouvoir estimer cette interaction, on doit construire un plan avec plus d'essais : 16 essais seront suffisants pour estimer une interaction supplémentaire (même si un plan en 16 essais ne permettra pas d'estimer toutes les interactions d'ordre 2).
4. Pour analyser les résultats de ce plan, nous devrons effectuer une analyse de variance à 8 facteurs (7 facteurs à 2 modalités, les 7 facteurs étudiés) ainsi qu'un facteur à 100 modalités (le facteur juge).
   Le modèle étudié s'écrira donc :
   $$\forall(i,j,k,l,m,n,o,p) \qquad Y_{ijklmnop} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \kappa_m + \nu_n + \zeta_o + \tau_p + \varepsilon_{ijklmnop}$$
   avec les hypothèses sur les résidus :
   $\forall(i,j,k,l,m,n,o,p) \qquad \mathcal{L}(\varepsilon_{ijklmnop}) = \mathcal{N}(0,\sigma)$
   $\forall(i,j,k,l,m,n,o,p) \neq (i',j',k',l',m',n',o',p') \qquad cov(\varepsilon_{ijklmnop}, \varepsilon_{i'j'k'l'm'n'o'p'}) = 0$

Exercice 7 : Plan $L_8 2^3 4$ et $L_8 2^4 4$

1. D'après l'énoncé, ajouter un facteur à 4 niveaux revient à ajouter 2 facteurs à 2 niveaux. On part donc du plan de base 2^3.

I	1	2	3	12	13	23	123
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

Comme on doit ajouter 2 facteurs (disons A et B) à 2 niveaux, on confond le facteur A avec l'interaction 12 et B avec l'interaction 13, et ensuite on construit le facteur 4 avec A et B.
La matrice des essais est alors :

	1	2	3	4
1^er essai	1	1	1	4
2^e essai	1	1	-1	3
3^e essai	1	-1	1	2
4^e essai	1	-1	-1	1
5^e essai	-1	1	1	1
6^e essai	-1	1	-1	2
7^e essai	-1	-1	1	3
8^e essai	-1	-1	-1	4

On calcule la matrice X pour pouvoir lister les confusions.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer $X'X$:

$$X'X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice $X'X$ montre que tous les facteurs sont orthogonaux avec le facteur 4.

2. Le facteur 4 est confondu avec 12 et 13 et donc on a $12 \times 13 = 23$ et par suite le facteur 4 est confondu avec l'interaction 23.
3. Le plan $L_8 2^4 4$ est le plan en 8 essais de 4 facteurs à 2 niveaux et un facteur à 4 niveaux. À partir du plan construit à la question précédente, il suffit d'ajouter un facteur à 2 niveaux et de le confondre avec l'interaction 123. Nous venons de voir que le facteur 4 est confondu avec l'interaction 23 donc il ne reste qu'une possibilité : confondre le facteur avec l'interaction 123.

Exercice 8 : Répartition des expériences sur 2 équipes de travail

La matrice des essais pour l'étude des trois facteurs (température, pression et vitesse) est par exemple :

Essai	Température	Pression	Vitesse
1	-	-	-
2	-	-	+
3	-	+	-
4	-	+	+
5	+	-	-
6	+	-	+
7	+	+	-
8	+	+	+

— Si l'on donne les 4 premiers essais à une équipe et les quatre suivants à l'autre, on est confronté au problème de la confusion entre deux effets : l'effet du facteur *température* et celui (éventuel) lié à l'équipe.
— Le facteur *équipe* doit être géré comme un nouveau facteur F_4 de ce plan. Il doit donc être aussi peu confondu que possible avec les autres effets.
— Une solution consiste à confondre le facteur *équipe* avec l'interaction d'ordre 3 $F_1F_2F_3$ (celle qui a les plus fortes chances d'être négligeable). La colonne de signes suivante est donc affectée au facteur équipe :

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8
Équipe $= F_1F_2F_3$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

L'équipe 1 réalisera donc les essais :

essai 1 :	$F_1 = 30°$	$F_2 = 2$ bars	$F_3 = 900$ tr/min
essai 4 :	$F_1 = 30°$	$F_2 = 4$ bars	$F_3 = 1200$ tr/min
essai 6 :	$F_1 = 45°$	$F_2 = 2$ bars	$F_3 = 1200$ tr/min
essai 7 :	$F_1 = 45°$	$F_2 = 4$ bars	$F_3 = 900$ tr/min

et l'équipe 2 réalisera les essais :

essai 2 :	$F_1 = 45°$	$F_2 = 2$ bars	$F_3 = 1200$ tr/min
essai 3 :	$F_1 = 45°$	$F_2 = 4$ bars	$F_3 = 900$ tr/min
essai 5 :	$F_1 = 30°$	$F_2 = 2$ bars	$F_3 = 900$ tr/min
essai 8 :	$F_1 = 30°$	$F_2 = 4$ bars	$F_3 = 1200$ tr/min

Le plan ainsi construit est de résolution IV, donc le facteur *équipe* n'est confondu avec aucun facteur principal et avec aucune interaction d'ordre 2. Comme les interactions d'ordre 3 et plus sont, en général, raisonnablement négligeables, cette répartition des essais est bonne.