

## Realizzazione del controllo di un sistema non lineare

8 novembre 2013

Scope	Realizzazione del controllo di un sistema non lineare
Tasks	<ul style="list-style-type: none"><li>- Modellizzazione del processo</li><li>- Linearizzazione del processo intorno al punto di equilibrio</li><li>- Design del controllo e dell'osservatore di stato</li><li>- Simulazione</li><li>- Implementazione su micro del sistema di controllo</li><li>- Identificazione dei parametri fisici</li><li>- Test</li></ul>
Contact	Roberto Bucher (roberto.bucher@supsi.ch) Marco Caminiti (marco.caminiti@supsi.ch) Gianluca Montù (gianluca.montu@supsi.ch)



# Indice

<b>Introcuzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Specifiche</b>	<b>9</b>
<b>2 Modello</b>	<b>11</b>
<b>3 Realizzazione del controllo</b>	<b>15</b>
1 Rappresentazione in forma di stato . . . . .	15
2 Linearizzazione del sistema . . . . .	16
3 Valutazione controllabilità e osservabilità del sistema linearizzato . . . . .	16
4 Controllo di stato . . . . .	17
5 Osservatore di stato . . . . .	17
<b>4 Sviluppi</b>	<b>19</b>
<b>Appendici</b>	<b>21</b>
<b>A Risoluzione sistema con Maple</b>	<b>23</b>



# Elenco delle figure

1	Schematizzazione del sistema reale . . . . .	7
1.1	Modellizzazione del sistema . . . . .	9
2.1	Rappresentazione nelle coordinate cartesiane del sistema . . . . .	11
2.2	Rappresentazione del sistema con le nuove coordinate cartesiane . . . . .	12



# Introduzione

Con questa esperienza di laboratorio si vuole realizzare il controllo di un sistema non lineare.

A tal scopo si é scelto il sistema composto da una ruota e da una pallina. L'obiettivo è quello di far stare in equilibrio la palla sulla ruota fruttando la misura della distanza della pallina dal sensore e attuando le dovute correzioni generate dal controllo tramite un motore DC (vedi figura 1).

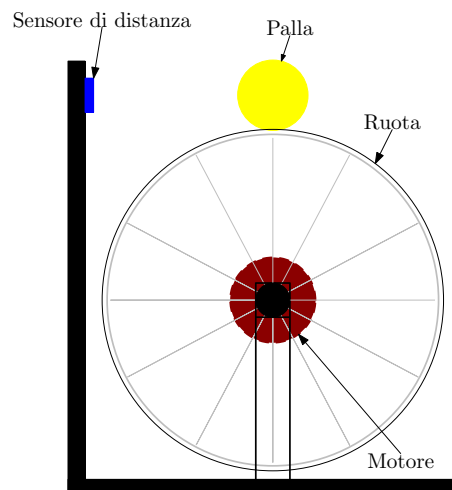


Figura 1: Schematizzazione del sistema reale

Per il corretto svolgimento dell'esperienza sono necessarie le conoscenze nell'ambito della modellizzazione di sistemi fisici, le varie tipologie di controllo per sistemi lineari e non lineari, le tecniche di identificazione dei parametri del sistema e la conoscenza dei principi di funzionamento dei motori.





# Capitolo 1

## Specifiche

In questa sezione sono riportate le specifiche del sistema.

Per il sistema fisico nella tabella 1.1 sono forniti i valori delle grandezze fisiche in gioco.

Specifica	Motore
(R) Raggio ruota (in)	10
(M) Massa ruota (g)	800
(r) Raggio palla (cm)	4
(m) Massa palla (g)	100

Tabella 1.1: Parametri del sistema fisico

La figura 1.1 rappresenta il modello semplificato del sistema Palla-ruota.

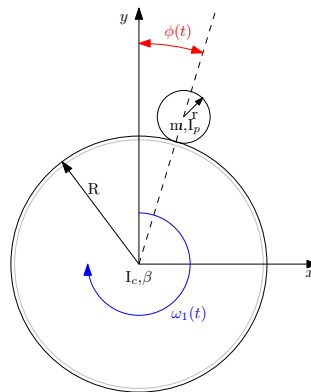


Figura 1.1: Modellizzazione del sistema

dove:

- $I_p$  rappresenta il momento di inerzia della palla
- $I_c$  rappresenta il momento di inerzia della ruota
- $\beta$  rappresenta l'attrito viscoso tra la ruota e l'albero del motore

In tabella 1.2 sono riportate le principali specifiche tecniche del sensore di distanza. <sup>1</sup>

<b>Specifica</b>	<b>Motore</b>
<b>Range di misura (mm)</b>	80...500
<b>Resolution (mm)</b>	+/-2
<b>speed binary output (imp./s)</b>	30
<b>speed analogue output (ms/100 mm)</b>	8
<b>carrier frequency (kHz)</b>	180
<b>voltage output (V)</b>	0...5
<b>binary output</b>	pnp NO

Tabella 1.2: Specifiche tecniche del sensore ad ultrasuoni UP 500 PVPS 24 IS della **SNT Sensortechnik AG**

<sup>1</sup>Per maggiori informazioni consultare il datasheet al seguente indirizzo:  
<http://www.sntag.ch/data/UP%20english.pdf>

## Capitolo 2

# Modello

La modellizzazione del sistema viene effettuata sfruttando i principi energetici.

Le equazioni dinamiche del sistema vengono ricavate utilizzando il metodo delle equazioni differenziali di Lagrange.

La descrizione del sistema tramite il formalismo lagrangiano necessita della definizione di un sistema di riferimento assoluto  $(X,Y)$  e di un sistema di coordinate generalizzate  $q_i(t)$ .

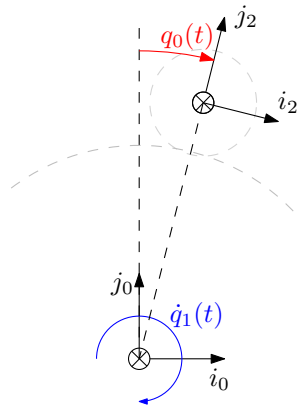


Figura 2.1: Rappresentazione nelle coordinate cartesiane del sistema

In figura 2.1 sono state scelte come coordinate generalizzate:

la velocità angolare della ruota  $\dot{q}_1(t)$ ;

la posizione angolare  $q_0(t)$  del centro di massa della palla.

Per semplificare la notazione e rendere più leggibile la trattazione successiva, verrà omessa la dipendenza dal tempo delle variabili (es.  $q(t) = q$ ) che dovrà comunque essere tenuta in considerazione durante lo svolgimento della modellizzazione.

La rappresentazione in coordinate cartesiane scelta in figura 2.1 rende complicata l'introduzione del vincolo di contatto fra la palla e la ruota nelle equazioni di Lagrange.

Scegliendo opportunamente le coordinate cartesiane come in figura 2.2, il vincolo può essere descritto tramite la seguente relazione:

$$\mathbf{q}_0 \cdot (R + r) = \mathbf{q}_1 \cdot R - \mathbf{q}_2 \cdot r \quad (2.1)$$

Dall'equazione (2.1) si trova  $q_0$  :

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1 \cdot \frac{R}{R+r} - \mathbf{q}_2 \cdot \frac{r}{R+r} \quad (2.2)$$

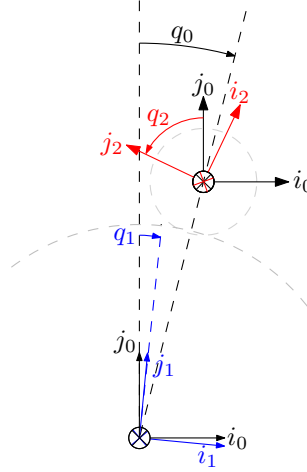


Figura 2.2: Rappresentazione del sistema con le nuove coordinate cartesiane

Nel nuovo sistema le coordinate cartesiane rappresentano:

- $q_1$  lo spostamento angolare della ruota rispetto all'asse delle ordinate del sistema di riferimento fisso  $(i_0, j_0)$
- $q_2$  lo spostamento angolare della palla rispetto all'asse delle ordinate del sistema di riferimento fisso  $(i_0, j_0)$

Diseguito viene riportata la procedura che porta alla definizione delle equazioni differenziali di Lagrange.

Partendo dal definire la posizione del centro di massa della palla rispetto al sistema di riferimento scelto nella figura 2.2:

$$\mathbf{p}_{CM} = \begin{bmatrix} (R+r) \sin(q_0) \\ (R+r) \cos(q_0) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Si sostituisce l'eq.2.2 nell'eq.2.4 ottenendo la posizione del centro di massa in funzione delle nuove coordinate scelte.

$$\mathbf{p}_{CM} = \begin{bmatrix} (R+r) \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) \\ (R+r) \cos \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Derivando l'equazione (2.4) si ottiene la velocità lineare del centro di massa.

$$\mathbf{v}_{CM} = \begin{bmatrix} (R+r) \cos \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) \left( \frac{R}{R+r} \dot{q}_1 - \frac{r}{R+r} \dot{q}_2 \right) \\ -(R+r) \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) \left( \frac{R}{R+r} \dot{q}_1 - \frac{r}{R+r} \dot{q}_2 \right) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

L'energia cinetica  $\mathcal{C}$  di ciascun elemento del sistema è costituita da due elementi :

energia cinetica di traslazione, dipendente dal quadrato della velocità lineare del centro di massa  $c_i$  della palla  $\mathcal{C}_{iT} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{c_i}^T m_i \mathbf{v}_{c_i}$  ;

energia cinetica di rotazione, dipendente dal quadrato della velocità angolare della palla e della ruota  $\mathcal{C}_{iR} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{c_i}^T m_i \mathbf{v}_{c_i}$  ;

Per quanto riguarda la ruota l'energia cinetica è data dalla sola componente rotazionale non essendo in grado di traslare il centro di massa in quanto vincolato.

$$\mathcal{C}_{cR} = \frac{1}{2} I_c \dot{q}_1^2 \quad (2.6)$$

Mentre per la palla sono presenti entrambe le componenti. Per il calcolo dell'energia cinetica di traslazione bisogna prima ricavare il quadrato della velocità lineare del centro di massa che corrisponde in questo caso al quadrato della norma vettoriale  $\|\cdot\|^2$ .

$$\|\mathbf{v}_{CM}\|^2 = (R\dot{q}_1 - r\dot{q}_2)^2 \quad (2.7)$$

Ottenendo

$$\mathcal{C}_{pT} = \frac{1}{2} m (R\dot{q}_1 - r\dot{q}_2)^2 \quad (2.8)$$

e

$$\mathcal{C}_{pR} = \frac{1}{2} I_p \dot{q}_2^2 \quad (2.9)$$

L'energia cinetica complessiva è:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} m (R\dot{q}_1 - r\dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{q}_1^2 \quad (2.10)$$

L'energia potenziale è costituita dal solo contributo della palla, pertanto:

$$\mathcal{P} = mG(R+r) \cos\left(\frac{R}{R+r}q_1 - \frac{r}{R+r}q_2\right) \quad (2.11)$$

L'energia dissipativa è costituita dagli effetti degli attriti. Nel caso specifico si considera solo la componente di attrito viscoso che agisce sulla ruota.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \beta (\dot{q}_1)^2 \quad (2.12)$$

Avendo a disposizione l'energia cinetica e l'energia potenziale si definisce la Lagrangiana come  $\mathcal{L} = \mathcal{C} - \mathcal{P}$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (R\dot{q}_1 - r\dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{q}_1^2 - mG(R+r) \cos\left(\frac{R}{R+r}q_1 - \frac{r}{R+r}q_2\right) \quad (2.13)$$

Prima di passare al calcolo delle equazioni differenziali di Lagrange bisogna ancora definire le forze generalizzate che nel nostro caso sono costituite dalle forze esterne che agiscono sul sistema. Nel caso particolare l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la coppia esercitata dal motore sulla ruota ovvero sulla coordinata  $q_1$ .

$$\mathcal{F}_1 = \tau \quad (2.14)$$

Le equazioni differenziali di Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_i$  risultanti sono:

- per  $(q_1, \dot{q}_1)$ :

$$\ddot{q}_1 (mR^2 + I_c) + \beta \dot{q}_1 + \ddot{q}_2 (-mrR) - mGR \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) = \tau \quad (2.15)$$

- per  $(q_2, \dot{q}_2)$ :

$$\ddot{q}_1 (-mrR) + \ddot{q}_2 (mr^2 + I_p) + mGr \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) = 0 \quad (2.16)$$

Risolvendo il sistema di equazioni (2.15) e (2.16) rispetto alle derivate seconde delle coordinate generalizzate si ottengono le equazioni dinamiche del sistema.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= \frac{(mr^2 + I_p)\tau + mRI_p G \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) - (mr^2 + I_p)\beta \dot{q}_1}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c} \\ \ddot{q}_2 &= \frac{mr \left[ R\tau - I_c G \sin \left( \frac{R}{R+r} q_1 - \frac{r}{R+r} q_2 \right) - R\beta \dot{q}_1 \right]}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c} \end{cases} \quad (2.17)$$

## Capitolo 3

# Realizzazione del controllo

In questo capitolo viene discussa la realizzazione del controllo.

Si cercherà di realizzare un semplice controllo di stato in cui gli stati da controllare sono: l'angolo fra il centro di massa della palla e l'asse delle ordinate del sistema di riferimento  $q_0$  e l'angolo della ruota  $q_1$  funzione dell'angolo elettrico del motore.

Si rende opportuno quindi riportare le equazioni dinamiche del sistema in funzione delle sole coordinate  $q_0$  e  $q_1$  fruttando la relazione (2.1), dalla quale si ottiene che l'accelerazione angolare di  $q_0$ :

$$\ddot{q}_0(R+r) = R\ddot{q}_1 - r\ddot{q}_2 \quad (3.1)$$

sostituendo la (2.17) nella (3.1) si ottiene:

$$\ddot{q}_0 = \frac{(R^2 I_p + r^2 I_c) m G \sin(q_0) + R I_p \tau - R \beta I_p \dot{q}_1}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]} \quad (3.2)$$

Mentre l'accelerazione della ruota è quella riportata nella (2.17) sostituendole la (2.1).

### 1 Rappresentazione in forma di stato

Per analizzare il sistema e realizzare il controllo è necessario riportare la descrizione del sistema in forma di stato, ottenendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(u)\mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(R^2 I_p + r^2 I_c) m G \sin(x_1) - R \beta I_p x_4}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]} \\ x_4 \\ \frac{m R I_p G \sin(x_1) - (m r^2 + I_p) \beta x_4}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{g}(u) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{R I_p} \\ \frac{R I_p}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]} \\ x_4 \\ \frac{(m r^2 + I_p)}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

dove:

$$* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \\ \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \text{ sono gli stati del sistema;}$$

\*  $[u] = [\tau]$  è la coppia prodotta dal motore in ingresso al sistema

## 2 Linearizzazione del sistema

Come si evince dagli elementi della rappresentazione in forma di stato (eq.??), il sistema risulta essere non lineare.

Affinchè possa risultare controllabile è necessario linearizzarlo nell'intorno del punto di equilibrio tramite l'utilizzo delle matrici jacobiane.

Si ottiene:

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & 0 & 0 & \frac{\delta f_2}{\delta x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\delta f_4}{\delta x_1} & 0 & 0 & \frac{\delta f_4}{\delta x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta f_2}{\delta \tau} \\ 0 \\ \frac{\delta f_4}{\delta \tau} \end{bmatrix} \cdot [u] \quad (3.6)$$

dove:

$$* \frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{(R^2 I_p + r^2 I_c) m G \cos(x_1)}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]}$$

$$* \frac{\delta f_2}{\delta x_4} = \frac{-R \beta I_p x_4}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]}$$

$$* \frac{\delta f_4}{\delta x_1} = \frac{m R I_p G \cos(x_1)}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c}$$

$$* \frac{\delta f_4}{\delta x_4} = \frac{-(mr^2 + I_p) \beta x_4}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c}$$

$$* \frac{\delta f_2}{\delta \tau} = \frac{R I_p}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]}$$

$$* \frac{\delta f_4}{\delta \tau} = \frac{mr^2 + I_p}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c}$$

In base alle coordinate generalizzate scelte (vedi fig.2.2) il sistema è in equilibrio per  $q_1 = x_1 = 0$  e  $q_2 = x_3 = 0$  e sostituendoli nel sistema precedente si ottiene:

$$* \left. \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \right|_{x_1=0, x_3=0} = \frac{(R^2 I_p + r^2 I_c) m G}{(R+r)[m(R^2 I_p + r^2 I_c) + I_p I_c]}$$

$$* \left. \frac{\delta f_4}{\delta x_1} \right|_{x_1=0, x_3=0} = \frac{m R I_p G}{m(r^2 I_c + R^2 I_p) + I_p I_c}$$

## 3 Valutazione controllabilità e osservabilità del sistema linearizzato

Affinchè sia possibile realizzare un controllo di stato è necessario che il sistema risulti controllabile.

A tal scopo è sufficiente andare a verificare che la matrice di controllabilità abbia rango pieno ovvero il suo determinante sia non nullo (vedi allegato A).

Stesso discorso vale per verificare l'osservabilità del sistema.



## 4 Controllo di stato

Facendo riferimento al classico schema del controllo di stato riportato in letteratura si trovano i guadagni  $\mathbf{K}$  del controllore.

Considerando solo il sistema costituito dalla ruota e dalla palla nel continuo, si ottengono i seguenti guadagni:

$$\mathbf{K} = [277.240447.1325 - 32.7044 - 8.8509]^T \quad (3.7)$$

## 5 Osservatore di stato

Come spesso accade il processo non fornisce tutte le misure necessarie al controllo ed è quindi necessario introdurre un osservatore di stato per stimare gli stati non misurabili. Nel caso particolare si è realizzato un osservatore completo che riceve in ingresso la misura dell'angolo della ruota e la misura dell'angolo formato dal centro di massa rispetto all'asse delle ordinate del sistema di riferimento. L'osservatore fornisce in uscita la stima di tutti gli stati del sistema. Facendo riferimento alla struttura dell'osservatore riportata in letteratura si ottengono i seguenti valori di guadagno:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.1101 & -0.0328 \\ 28.3297 & 0.0474 \\ -0.0189 & -1.1737 \\ 4.7715 & 0.4320 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$



# Appendices



# Appendice A

## Risoluzione sistema con Maple

```

> restart:
> with(linalg):
> with(DynamicSystems):
> indietro := {q[1] = q[1](t), q[2] = q[2](t), v[1] = diff(q[1](t), t), v[2] = diff(q[2](t), t), a[1] = diff(v[1](t), t), a[2] = diff(v[2](t), t)};

      indietro := { a1 =  $\frac{d}{dt} v_1(t)$ , a2 =  $\frac{d}{dt} v_2(t)$ , q1 = q1(t), q2 = q2(t), v1 =  $\frac{d}{dt} q_1(t)$ , v2 =  $\frac{d}{dt} q_2(t)$  }

> avanti := {diff(v[1](t), t) = a[1], diff(v[2](t), t) = a[2], diff(q[1](t), t) = v[1], diff(q[2](t), t) = v[2], q[1](t) = q[1], q[2](t) = q[2]};

      avanti := {  $\frac{d}{dt} q_1(t) = v_1$ ,  $\frac{d}{dt} q_2(t) = v_2$ ,  $\frac{d}{dt} v_1(t) = a_1$ ,  $\frac{d}{dt} v_2(t) = a_2$ , q1(t) = q1, q2(t) = q2 }

> with(diffforms):
> deform(m=const, M=const, r=const, R=const, G=const, Ip=cost, Ic=cost, Beta = cost, k1= cost, k2= cost, k3= cost, k4=cost);
> g := Vector(2, {(1) = 0, (2) = -G});

      g :=  $\begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix}$ 

> x1 := Vector(2, {(1) = (R+r)*sin(R/(R+r))*q[1](t)-(r/(R+r))*q[2](t)}, (2) = (R+r)*cos(R/(R+r))*q[1](t)-(r/(R+r))*q[2](t)});

      x1 :=  $\begin{bmatrix} (R+r) \sin\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right) \\ (R+r) \cos\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right) \end{bmatrix}$ 

> V1 := map(diff, x1, t);

      V1 :=  $\begin{bmatrix} (R+r) \cos\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right) \left(\frac{R \frac{d}{dt} q_1(t)}{R+r} - \frac{r \frac{d}{dt} q_2(t)}{R+r}\right) \\ -(R+r) \sin\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right) \left(\frac{R \frac{d}{dt} q_1(t)}{R+r} - \frac{r \frac{d}{dt} q_2(t)}{R+r}\right) \end{bmatrix}$ 

> Vin := combine(simplify(evalm('g*(V1~%T, V1)))));

      Vin :=  $\left(R \frac{d}{dt} q_1(t) - r \frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2$ 

> C := (1/2)*m*Vin+(1/2)*Ic*diff(q[1](t), t)^2+(1/2)*Ip*(diff(q[2](t), t))^2;

      C :=  $\frac{1}{2} m \left(R \frac{d}{dt} q_1(t) - r \frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 + \frac{1}{2} I_p \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2$ 

> Pg := evalm(-m*evalm('g*(g~%T, x1)));

      Pg :=  $mG(R+r) \cos\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right)$ 

> L := C-Pg;

      L :=  $\frac{1}{2} m \left(R \frac{d}{dt} q_1(t) - r \frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2 + \frac{1}{2} I_p \left(\frac{d}{dt} q_2(t)\right)^2 - mG(R+r) \cos\left(\frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r}\right)$ 

> Dc := 1/2*beta*(diff(q[1](t), t))^2;

      Dc :=  $\frac{1}{2} \beta \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right)^2$ 

> F1 := T(t); F2 := 0;

      F1 := T(t)
      F2 := 0

> subs(indietro, diff(subs(avanti, L), v[1])):
```

```

> eqx[1]:=diff(%,t)-subs(indietro,diff(subs(avanti,L),q[1]))= -subs(indietro,diff(subs(avanti,Dc),v[1]))+F1;

eqx_1 := m \left( R \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) - r \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) \right) R + Ic \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) - mG \sin \left( \frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r} \right) R = -\beta \frac{d}{dt} q_1(t) + T(t)

> eqx[1]:=collect(eqx[1],[diff(diff(q[1](t),t),t),diff(diff(q[2](t),t),t)]];

eqx_1 := (mR^2 + Ic) \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) - mr \left( \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) \right) R - mG \sin \left( \frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r} \right) R = -\beta \frac{d}{dt} q_1(t) + T(t)

> subs(indietro,diff(subs(avanti,L),v[2])):
> eqx[2]:=diff(%,t)-subs(indietro,diff(subs(avanti,L),q[2]))=-subs(indietro,diff(subs(avanti,Dc),v[2]))+F2;

eqx_2 := -m \left( R \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) - r \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) \right) r + Ip \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) + mG \sin \left( \frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r} \right) r = 0

> eqx[2]:=collect(eqx[2],[diff(diff(q[1](t),t),t),diff(diff(q[2](t),t),t)]];

eqx_2 := -mrR \frac{d^2}{dt^2} q_1(t) + (mr^2 + Ip) \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) + mG \sin \left( \frac{Rq_1(t)}{R+r} - \frac{rq_2(t)}{R+r} \right) r = 0

> sol:=solve({eqx[1],eqx[2]},{diff(diff(q[1](t),t),t),diff(diff(q[2](t),t),t)});
> s1:=collect(rhs(sol[1]),[sin,T,omega[1]]);

s1 := G \sin \left( \frac{Rq_1(t) - rq_2(t)}{R+r} \right) mRIp (mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip)^{-1} + \frac{(mr^2 + Ip) T(t)}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip} + \frac{-mr^2 \beta \frac{d}{dt} q_1(t) - Ip \beta \frac{d}{dt} q_1(t)}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip}

> s2:=collect(rhs(sol[2]),[sin,T,omega[1],m,G,Ic,R,r]);

s2 := -mrG Ic \sin \left( \frac{Rq_1(t) - rq_2(t)}{R+r} \right) ((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)^{-1} + \frac{mrRT(t)}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} - \frac{mr\beta \left( \frac{d}{dt} q_1(t) \right) R}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip}

> s1:=subs([q[1](t)=phi[1],q[2](t)=phi[2],diff(q[1](t),t)=omega[1],diff(q[2](t),t)=omega[2],T(t)=T],s1);

s1 := GmRIp \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) (mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip)^{-1} + \frac{(mr^2 + Ip) T}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip} + \frac{-mr^2 \beta \omega_1 - Ip \beta \omega_1}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip}

> s1:=collect(s1,[sin,T,omega[1]]);

s1 := GmRIp \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) (mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip)^{-1} + \frac{(mr^2 + Ip) T}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip} + \frac{(-mr^2 \beta - Ip \beta) \omega_1}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip}

> s2:=subs([q[1](t)=phi[1],q[2](t)=phi[2],diff(q[1](t),t)=omega[1],diff(q[2](t),t)=omega[2],T(t)=T],s2);

s2 := -mrG Ic \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) ((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)^{-1} + \frac{mrRT}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} - \frac{mr\beta \omega_1 R}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip}

> s2:=collect(simplify(s2),[sin,T,omega[1],m,G,Ic,R,r]);

s2 := -mrG Ic \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) ((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)^{-1} + \frac{mrRT}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} - \frac{mr\beta \omega_1 R}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip}

> s0:=simplify(R/(R+r)*s1 - r/(R+r)*s2);

s0 := (GmR^2 Ip \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) + RTIp - RIp \beta \omega_1 + mr^2 G Ic \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right)) (mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip)^{-1} (R+r)^{-1}

> s0:=collect(simplify(s0),[sin,T,omega[1],m,G,Ic,R,r]);

s0 := (R^2 Ip + Ic r^2) Gm \sin \left( \frac{R\phi_1 - r\phi_2}{R+r} \right) ((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)^{-1} (R+r)^{-1} + \frac{RTIp}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)} - \frac{RIp \beta \omega_1}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)}

> s1:=subs([(R*phi[1]-r*phi[2])/(R+r)=phi[0]],s1);

s1 := \frac{GmRIp \sin(\phi_0)}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip} + \frac{(mr^2 + Ip) T}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip} + \frac{(-mr^2 \beta - Ip \beta) \omega_1}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip}

> s0:=subs([(R*phi[1]-r*phi[2])/(R+r)=phi[0]],s0);

s0 := \frac{(R^2 Ip + Ic r^2) Gm \sin(\phi_0)}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)} + \frac{RTIp}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)} - \frac{RIp \beta \omega_1}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)}

> syseq:=simplify([omega[0],s0,omega[1],s1]);

syseq := [\omega_0, \frac{Gm \sin(\phi_0) R^2 Ip + Gm \sin(\phi_0) Ic r^2 + RTIp - RIp \beta \omega_1}{(mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip) (R+r)}, \omega_1, \frac{GmRIp \sin(\phi_0) + Tmr^2 + TIp - mr^2 \beta \omega_1 - Ip \beta \omega_1}{mR^2 Ip + Ic mr^2 + Ic Ip}]

> Fss:=collect(jacobian(syseq,[phi[0],omega[0],phi[1],omega[1]]),[cos,G,T,m,Ic,sin,beta]);

Fss := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(R^2 Ip + Ic r^2) Gm \cos(\phi_0)}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)} & 0 & 0 & -\frac{RIp \beta}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip) (R+r)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{GmRIp \cos(\phi_0)}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} & 0 & 0 & \frac{-mr^2 \beta - Ip \beta}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} \end{bmatrix}

> Ass:=eval(Fss,[phi[0]=0,phi[1]=0]);

```

```

> Bss:=jacobian(syseq,[T]);


$$Ass := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(R^2 Ip + Ic r^2) G m}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)(R+r)} & 0 & 0 & -\frac{R Ip \beta}{((R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip)(R+r)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{G m R Ip}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} & 0 & 0 & \frac{-m r^2 \beta - Ip \beta}{(R^2 Ip + Ic r^2) m + Ic Ip} \end{bmatrix}$$


> Bss:=jacobian(syseq,[T]);


$$Bss := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R Ip}{(m R^2 Ip + Ic m r^2 + Ic Ip)(R+r)} \\ 0 \\ \frac{m r^2 + Ip}{m R^2 Ip + Ic m r^2 + Ic Ip} \end{bmatrix}$$


> Css := <<1,0|0,0|0,1|0,0>>; Css_obs:=<<1|0|0|0>>;


$$Css := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$Css\_obs := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


> Rank_ctr :=rank((<Bss|evalm(Ass&*Bss)|evalm(Ass&*Ass&*Bss)|evalm(Ass&*Ass&*Ass&*Bss)>));


$$Rank\_ctr := 4$$


> Rank_obs := rank(<evalm(Css),evalm(Css&*Ass),evalm(Css&*Ass&*Ass),evalm(Css&*Ass&*Ass&*Ass)>);


$$Rank\_obs := 4$$


```