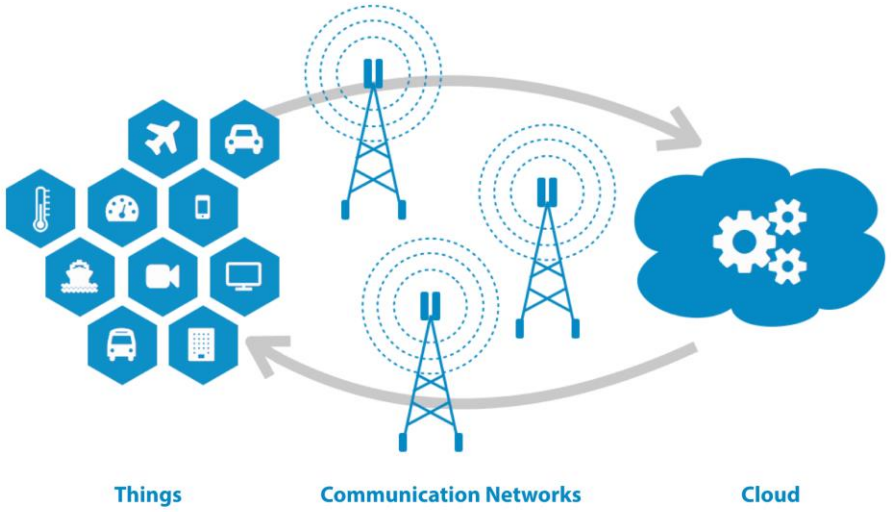
دانشگاه صنعتی همدان



شبکه‌های کامپیوتری - مخابراتی

دکتر رجبی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۹-۹۸

دانشگاه صنعتی همدان

گروه مهندسی برق و کامپیوتر

تصحیح خطا

سرفصل

- برخی از بیت‌ها ممکن است به دلیل نویز به صورت خطا دریافت شوند. چگونه آن‌ها را رفع کنیم؟
- و چرا باید از تشخیص استفاده کنیم وقتی می‌توانیم از تصحیح استفاده کنیم؟

کدهای تصحیح خطا

چرا تصحیح خطا سخت است؟

- اگر ما بیت‌های کنترلی (Check Bits) قابل اطمینانی داشتیم، می‌توانستیم از آن‌ها برای محدودکردن موقعیت خطا استفاده کنیم.
  - سپس تصحیح آسان خواهد بود.

- اما خطا می‌تواند در **بیت‌های کنترلی** یا **بیت‌های داده** وجود داشته باشد!
  - داده‌ها (بیت‌های پیام) حتی ممکن است درست باشد.

شهود برای کدهای تصحیح خطا

- فرض کنید ما یک کد با فاصله همینگ حداقل ۳ ساخته‌ایم.

– برای تبدیل یک کلمه کد اصلی به کلمه کد دیگر به سه بیت و یا بیش از سه بیت خطا نیاز است.

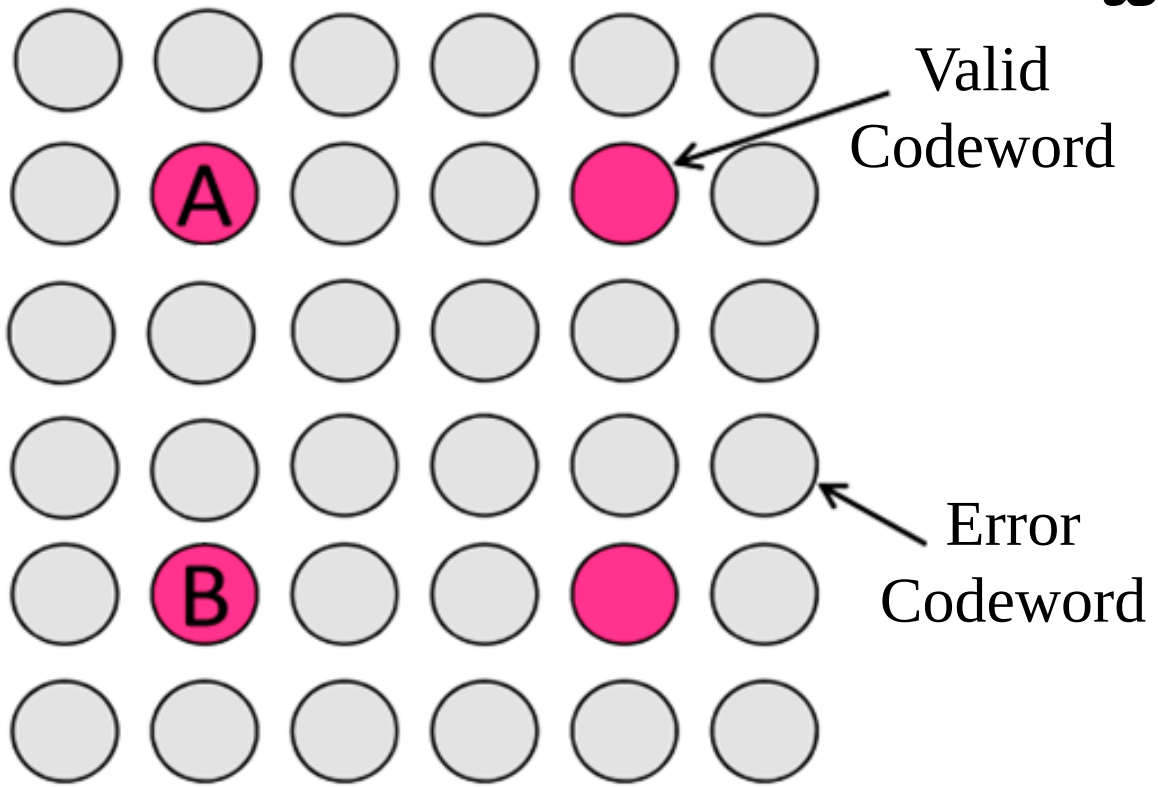
– **خطاهای تک بیتی نزدیک‌ترین مقدار به کلمه کد یکتای اصلی خواهند بود.**

- اگر ما فرض کنیم که خطا **تنها** در یک بیت اتفاق افتاده است، می‌توانیم آن را به وسیله نگاشت خطا روی نزدیک‌ترین کلمه کد صحیح (معتبر) تصحیح کنیم.

– اگر فاصله همینگ (HD) بزرگتر از $2d+1$ باشد، برای d خطا کار می‌کند.

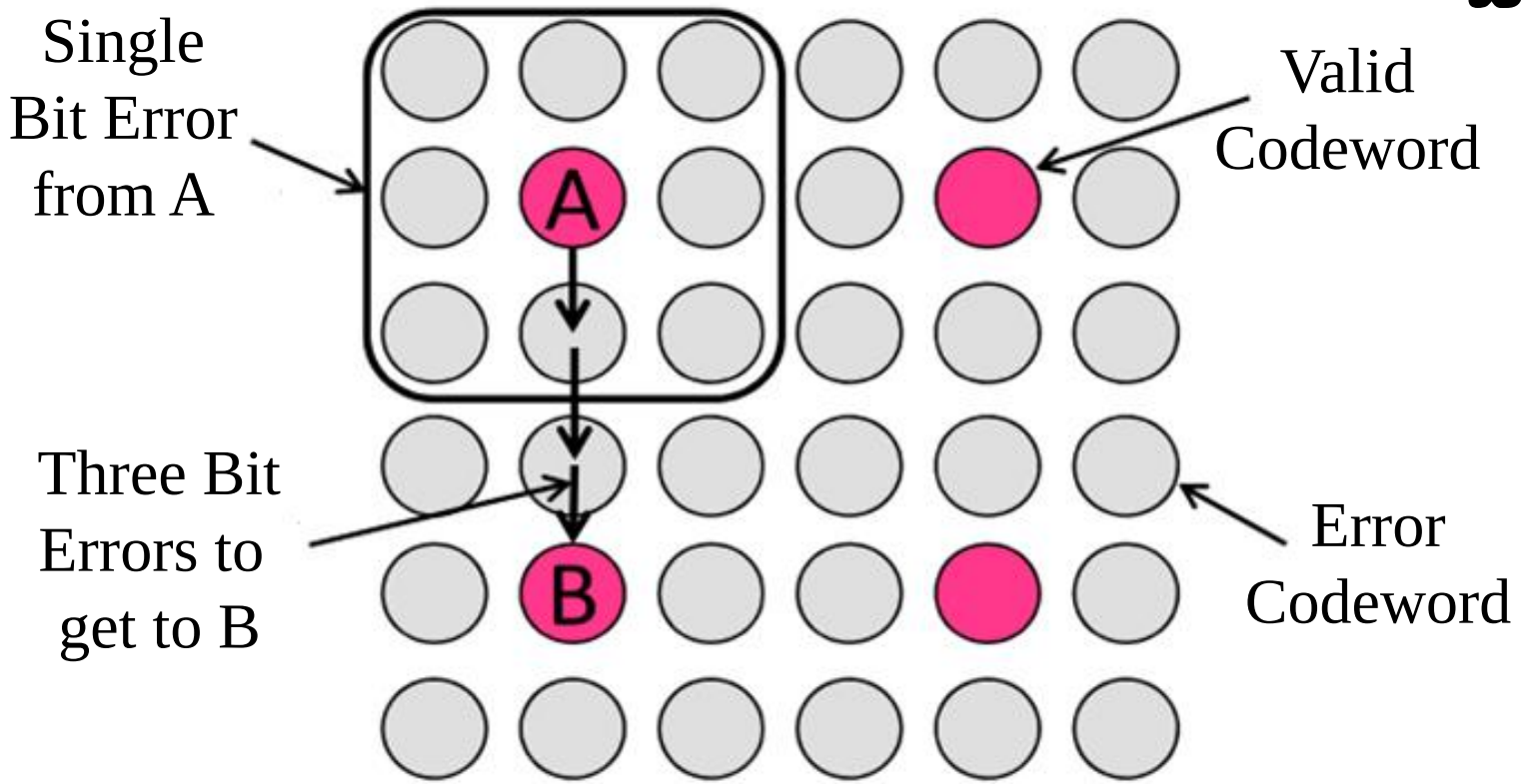
شهود برای کدهای تصحیح خطا (۲)

- تجسم‌کردن کد

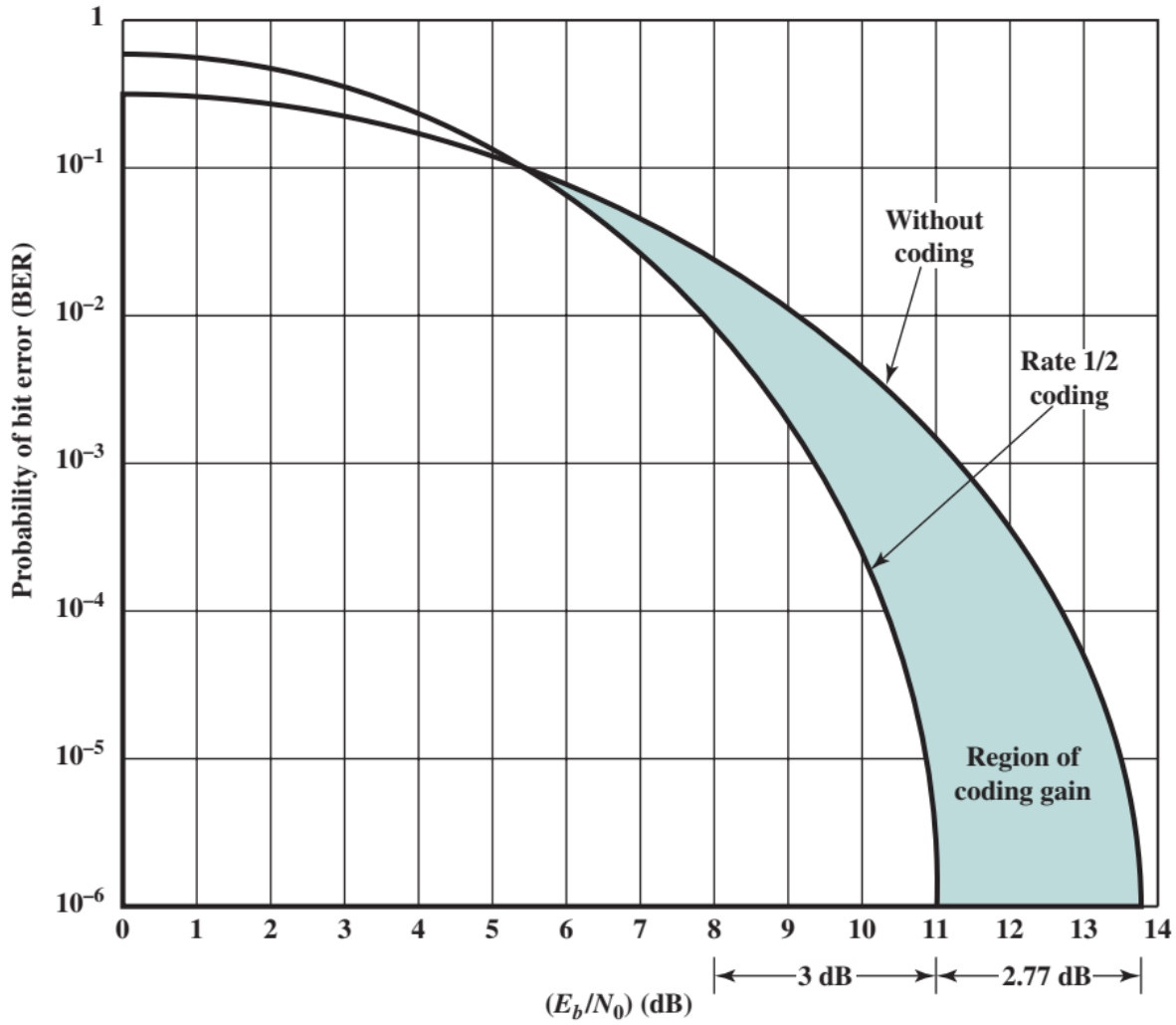


شهود برای کدهای تصحیح خطا (۳)

- تجسم‌کردن کد



کدگذاری چگونه عملکرد سیستم را بهبود می‌دهد؟



کد همینگ

کد همینگ (۲)

- در حالت کلی یک روش برای ساخت کد با فاصله همینگ d به ما می‌دهد.
  - از فرمول روبرو استفاده می‌شود؛ به عنوان مثال اگر تعداد بیت‌های کنترلی r = 3 باشد، آنگاه تعداد m = 4 بیت پیام را می‌توانیم ارسال کنیم.

$$m = 2^r - r - 1$$

  - بیت کنترلی را در موقعیت‌های p که توان ۲ باشند، قرار می‌دهیم؛ با شروع از موقعیت ۱
  - بیت کنترلی در موقعیت p برابر است با موقعیت‌هایی با معیار p که در مقادیر خود دارد.

- به علاوه یک راه آسان برای آشکارسازی! (به زودی خواهیم دید...)

اثبات رابطه $m = 2^r - r - 1$

- فرض کنید تعداد بیت‌های پیام m باشد و تعداد بیت‌های کنترلی r باشد که به ما اجازه تصحیح ۱ بیت خطا را می‌دهد. هر کدام از 2^m پیام مجاز، دارای $n = m + r$ تعداد کلمه کد غیرمجاز با فاصله همینگ ۱ از آن است. این کلمه کدهای غیرمجاز با تغییر یک بیت از کلمه کدهای n تایی حاصل می‌شوند.
- بنابراین هر کدام از 2^m پیام مجاز نیاز به n+1 الگوی بیت مجزا و مختص خود دارد. از آنجایی که تعداد کل الگوی بیت برابر 2^n است، بنابراین باید داشته باشیم: $(n+1)2^m \le 2^n$
- با استفاده از رابطه $n = m + r$ ، رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$m \le 2^r - r - 1$$

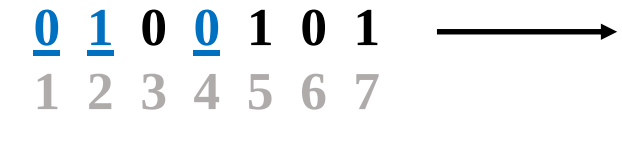
- با داشتن m، حد پایین تعداد بیت کنترلی لازم به دست می‌آید.

کد همینگ (۳)

- به عنوان مثال:

اگر data = 0101 و k = 3 باشد، یعنی سه بیت کنترلی داشته باشیم، آنگاه:

- در یک کد هفت بیتی، بیت‌های کنترلی دارای موقعیت‌های ۱, ۲, ۴ خواهند بود.
- بیت کنترلی ۱ به وسیله موقعیت‌های ۱،۳،۵،۷ به وجود می‌آید. (001-011-101-111)
- بیت کنترلی ۲ به وسیله موقعیت‌های ۲،۳،۶،۷ به وجود می‌آید. (010-011-110-111)
- بیت کنترلی ۴ به وسیله موقعیت‌های ۴،۵،۶،۷ به وجود می‌آید. (100-101-110-111)



$$p_1 = 0+1+1 = 0, \qquad p_2 = 0+0+1 = 1, \qquad p_4 = 1+0+1 = 0$$

کد همینگ (۴)

- برای کدبرداری:
  - محاسبه مجدد بیت‌های کنترلی (به وسیله جمعی که شامل خود چک‌بیت‌ها هم می‌شود)
  - مرتب‌کردن به عنوان یک عدد باینری
  - مقدار سندروم را به دست می‌آوریم، که موقعیت خطای رخ داده را به ما می‌دهد.
  - مقدار سندروم صفر به این معنی است که خطایی رخ نداده‌است.
  - در غیر این‌صورت، با تغییر بیت (flip)، خطا اصلاح می‌شود.

کد همینگ (۵)

- ادامه مثال قبل:

0	1	0	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7

$$p_1 = \mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad p_2 = \mathbf{1}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad p_4 = \mathbf{0}+\mathbf{1}+\mathbf{0}+\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

$$\text{Syndrome} = \mathbf{000},\ \text{no error}$$

$$\text{Data} = \mathbf{0101}$$

کد همینگ (۶)

- ادامه مثال قبل:

0	1	0	0	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7

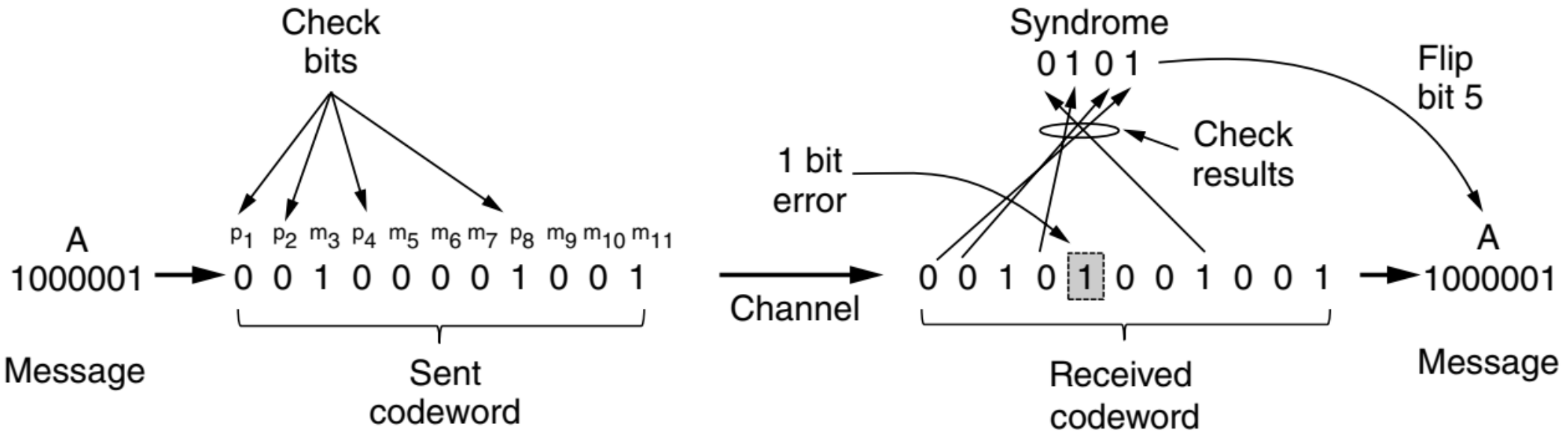
$$p_1 = 0+0+1+1 = 0, \quad p_2 = 1+0+1+1 = 1, \quad p_4 = 0+1+1+1 = 1$$

$$\text{Syndrome} = 110, \ \text{flip position } 6$$

$$\text{Data} = 0101 (\text{correct after flip!})$$

کد همینگ (۷)

- مثال دیگر:

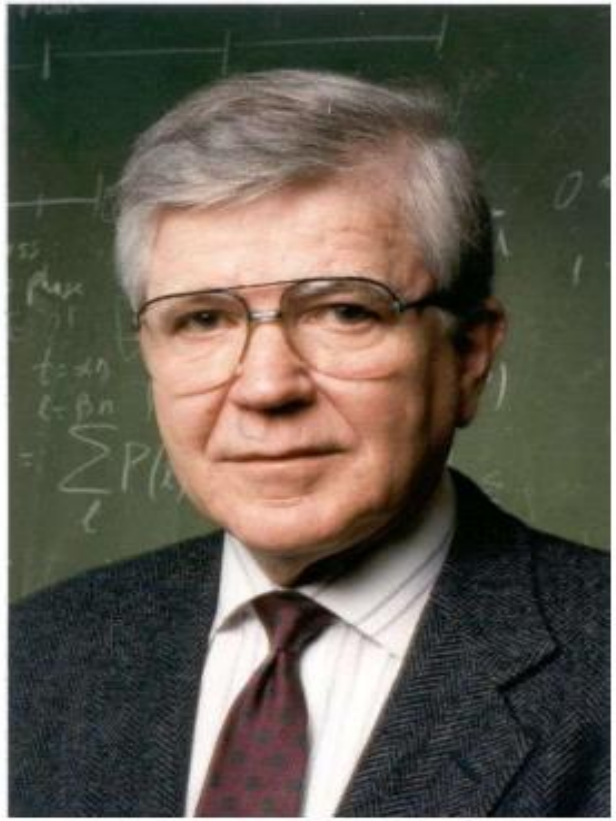


دیگر کدهای تصحیح خطا- کدهای کانولوشنی

- کدهایی که در عمل استفاده می‌شوند بیشتر بر اساس **همینگ** طراحی می‌شوند.

- **کدهای کانولوشنی:**
  - جریانی از داده‌ها را می‌گیرد و **ترکیبی از بیت‌های دریافتی اخیر** را در خروجی می‌دهد.
  - باعث می‌شود شکنندگی خروجی کمتر شود.
  - برای کدبرداری از الگوریتم ویتربی (Viterbi) استفاده می‌شود. (که می‌تواند از مقدار بیت اطمینان استفاده کند)

LDPC – دیگر کد های تصحیح خطا



Source: IEEE GHN, © 2009 IEEE

- Low density parity check
  - LDPC بر اساس ماتریس های تُنُک
  - کدبرداری با روش تکراری و با استفاده از الگوریتم Belief Propagation Algorithm
  - یک روش به روز و کارآمد

- اختراع شده توسط Robert Gallager در سال ۱۹۶۳ به عنوان بخشی از پایان‌نامه دکتری خود
  - به سرعت تا سال ۱۹۹۶ فراموش شده بود...

تشخیص در برابر تصحیح

- این که کدام یک بهتر است به **الگوی خطا** بستگی دارد. به عنوان مثال:
  - ۱۰۰۰ بیت پیام با نرخ خطای بیت (BER) ۱ در ۱۰۰۰۰

- کدام overhead کمتری دارد؟
  - این هم هنوز بستگی به الگوی خطا دارد و نیاز است که اطلاعات بیشتری درباره خطاها داشته باشیم ...

تشخیص در برابر تصحیح (۲)

۱. **فرض کنید خطاهای بیت به صورت تصادفی هستند.**

- پیام ها دارای ۰ و یا ۱ خطا هستند.

- **تصحیح خطا:**
  - به تقریباً ۱۰ بیت کنترلی در هر پیام نیاز است. $n = 2^k - k - 1$
  - Overhead: ۱۰

- **تشخیص خطا:**
  - به تقریباً ۱ بیت کنترلی در هر پیام به علاوه ۱۰۰۰ بیتی که برای مثال در یک دهم از زمان دوباره منتقل شده است، نیاز است.
  - Overhead: $1 + \frac{1000}{10} = 101$

تشخیص در برابر تصحیح (۳)

۲. فرض کنید خطاها در انفجار ۱۰۰ تایی به وجود آمده‌است:

- تنها ۱ یا ۲ پیام در بین ۱۰۰۰ پیام دارای خطا هستند.

- **تصحیح خطا:**
  - خیلی بیشتر از ۱۰۰ بیت کنترلی در هر پیام نیاز است.
  - Overhead بزرگتر از ۱۰۰؟
- **تشخیص خطا:**
  - به ۳۲ بیت کنترلی در هر پیام به علاوه ۱۰۰۰ بیتی که در دو هزارم زمان دوباره فرستاده شده است نیاز است.
  - Overhead: $32 + \frac{1000}{1000} \times 2 = 34$

تشخیص در برابر تصحیح (۴)

- **تصحیح خطا:**
  - زمانی که احتمال وقوع خطا **زیاد** است، مورد نیاز است.
  - یا هنگامی که زمانی برای ارسال مجدد وجود ندارد، مورد نیاز است.

- **تشخیص خطا:**
  - زمانی که احتمال وقوع خطا **کم** است، کارآمدتر است.
  - و زمانی که خطاها در هنگام وقوع، **بزرگ** هستند.

تصحیح خطا در عمل

- اکثراً در لایه فیزیکی استفاده می‌شوند.
  - LDPC در آینده بیشتر مورد استفاده قرار خواهد گرفت، برای لینک‌های درخواست مانند 802.11, DVB, WiMAX, LTE, و خطوط قدرت و ... استفاده می‌شوند.
  - کدهای کانولوشنی به طور گسترده‌ای در عمل استفاده می‌شود.
- تشخیص خطا (به همراه ارسال مجدد) در لایه لینک و لایه‌های بالاتر برای خطاهای باقی مانده استفاده می‌شود.
- تصحیح خطا همچنین در لایه کاربرد استفاده می‌شود.
  - مانند تصحیح خطای رو به جلو Forward Error Correction (FEC)
  - معمولاً با مدل خطای erasure
  - برای مثال Reed-Solomon (CDs, DVDs, etc.)