1 Analysis 1

1.1 Prädikatenlogik

1.2 Mengenlehre

Definition 1.2.0.1 (Menge):
Nach Georg Cantor: „Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathbb{M}$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von $\mathbb{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen.“

Definition 1.2.0.2 („$\in$“ Notation):
Man schreibt $m \in \mathbb{M}$ falls m ein Element der Menge $\mathbb{M}$ ist und $m \notin \mathbb{M}$ falls m kein Element der Menge ist.

kartesischen Produkts

1.3 Induktion

Definition 1.3.0.3 ($\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$):
Es sei $\mathbb{N}$ die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ besteht also aus der 0 und ihren, durch Addition von 1, definierten Nachfolgern. Dazu gibt's die Nachfolgerfunktion:

$$\nu : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N},\ \nu(x) := x + 1$$

Definition 1.3.0.4 (Peano Axiome):

(**P.1**) Zwei verschiedene Elemente von $\mathbb{N}$ haben verschiedene Nachfolger: $x \neq y \Rightarrow \nu(x) \neq \nu(y)$

(**P.2**) Kein Element von $\mathbb{N}$ hat 0 als Nachfolger: $0 \notin \nu(\mathbb{N})$

(**P.3**) (Induktions-Axiom)
Sei $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
1. $0 \in \mathbb{M}$
2. $x \in \mathbb{M} \Rightarrow \nu(x) \in \mathbb{M}$

Dann gilt $\mathbb{M} = \mathbb{N}$.

Definition 1.3.0.5 (Induktionsprinzip):
Eine Aussage $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $A(1)$ gilt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt.

Anmerkung 1
$A(1)$ nennt man den Induktionsanfang und den Beweis von $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ den Induktionsschluss oder Induktionsschritt.

1.4 Abbildungen

Definition 1.4.0.6 (Abbildung):
Eine Abbildung f von einer Menge $\mathbb{X}$ in eine Menge $\mathbb{Y}$ (Notation: $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$) ist eine Zuordnung oder Vorschrift, die jedem Element $x \in \mathbb{X}$ ein eindeutiges Element $f(x) \in \mathbb{Y}$ zuordnet.

Definition 1.4.0.7 (Graph):
Der Graph einer Abbildung ist eine Teilmenge $\mathbb{G} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, die durch $\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \mid x \in \mathbb{X}\}$ beschrieben wird. Jedem $x \in \mathbb{X}$ wird genau ein $y \in \mathbb{X}$ zugeordnet (Notation: $y = f(x)$).

1.5 Körperaxiome

DEFINITION 1.5.0.8 (KÖRPER):
Ein Tripel ($\mathbb{K}$,+,$\cdot$) bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei binären Verknüpfungen

$$+ \quad : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot \quad : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

(normalerweise *Addition* und *Multiplikation*) heißt genau dann Körper, wenn für alle x,y,$z \in \mathbb{K}$ die folgenden Axiome gelten:

- Axiome der Addition
  1. Assoziativität: $x + (y + z) = (x + y) + z$
  2. Kommutativität: $x + y = y + x$
  3. Existenz des neutralen Elements: $\exists 0 \in \mathbb{K} : x + 0 = x$
  4. Existenz der inversen Elemente: *Zu jedem* $x \in \mathbb{K}$ *existiert genau ein Element* $-x \in \mathbb{K}$: $x + (-x) = 0$
- Axiome der Multiplikation
  1. Assoziativität: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  2. Kommutativität: $x \cdot y = y \cdot x$
  3. Existenz des neutralen Elements: $\exists 1 \in \mathbb{K}, 1 \neq 0 : x \cdot 1 = x$
  4. Existenz der inversen Elemente: *Zu jedem* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $x \neq 0$ *existiert genau ein Element* $x^{-1} \in \mathbb{K} : x \cdot x^{-1} = 1$
- Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Beispiel 1 Die Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bilden mit „+“ und „ $\cdot$ “ einen Körper. Neutrale Elemente sind 0 bzw. $(0, 0)$ für die Addition und 1 bzw. $(1, 0)$ für die Multiplikation.

1.5.1 Relation

DEFINITION 1.5.1.1 (BINÄRE RELATION):
Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf der Menge $\mathbb{M}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$, also $\mathcal{R} \subset \mathbb{M} \times \mathbb{M}$

DEFINITION 1.5.1.2 (RELATIONSEIGENSCHAFTEN):
Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf einer Menge $\mathbb{M}$ heißt

- **reflexiv**, falls $\forall m \in \mathbb{M} : (m, m) \in \mathcal{R}$
- **symmetrisch**, falls $\forall m, n \in \mathbb{M} : (m, n) \in \mathcal{R} \Rightarrow (n, m) \in \mathcal{R}$
- **transitiv**, falls $\forall k, m, n \in \mathbb{M} : (k, m) \in \mathcal{R} \wedge (m, n) \in \mathcal{R} \Rightarrow (k, n) \in \mathcal{R}$

DEFINITION 1.5.1.3 (ÄQUIVALENZRELATION):
$\mathcal{R}$ ist eine binäre Relation auf $\mathbb{M}$, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Notation: $x \sim y$.

DEFINITION 1.5.1.4 (ORDNUNGSRELATION):
$\mathcal{R}$ ist eine binäre Relation auf $\mathbb{M}$, welche reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Notation: $x \leqslant y$.

DEFINITION 1.5.1.5 (ANGEORDNETER KÖRPER):
Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ wird mit einer Ordnungsrelation $\leqslant$ zu einem angeordneten Körper. Elemente aus $\mathbb{K}$ werden damit vergleichbar und es gilt $\forall x, y \in \mathbb{K} : x \leqslant y \vee y \leqslant x$

1.5.2 Absolutbetrag

DEFINITION 1.5.2.1 (ABSOLUTBETRAG):

$$|x| := \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Satz 1 (Eigenschaften des Absolutbetrages)

(a) Positive Definitheit: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 0$ *und* $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(b) Multiplikativität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(c) Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leqslant |x| + |y|$

Anmerkung 2 Gelten in einem Körper die Eigenschaften *a,b,c* aus Satz **??**, dann nennt man ihn einen *bewerteten* Körper. Angeordnete Körper müssen nicht gleich bewertete Körper sein. Beispiel: $\mathbb{C}$

DEFINITION 1.5.2.2 (METRIK IM REELLEN):
Über die Betragsfunktion lässt sich eine Metrik (Abstandsfunktion) definieren: $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) := |x - y| = |y - x|$.

1.5.3 Archimedisches Axiom

DEFINITION 1.5.3.1 (ARCHIMEDISCHES AXIOM):
Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $n \cdot x > y$.

Korollar 1 (Gauß-Klammer)
abrunden: $\lfloor x \rfloor$ *ist jene Zahl* $n \in \mathbb{Z}$ *für die gilt:* $n \leqslant x < n + 1$.
aufrunden: $\lceil x \rceil$ *ist jene Zahl* $m \in \mathbb{Z}$ *für die gilt:* $m < x \leqslant m + 1$.

Satz 2 (Bernoullische Ungleichung)
Sei $x \geqslant -1$*, dann gilt* $\forall n \in \mathbb{N}$*:*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + n \cdot x$$

1.6 Folgen, Grenzwerte

DEFINITION 1.6.0.2 (FOLGE):
Unter einer *Folge* reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.
Notation: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$

DEFINITION 1.6.0.3 (KONVERGENZ):
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Notation: $\lim\limits_{n \to \infty}$