1 Theorie

Ein lineares Optimierungsproblem oder lineares Programmierungsproblem (LP) ist ein Optimierugsproblem, eine lineare Funktion (die Zielfunktion) zu optimieren (maximieren/minimieren) unter Beachtung von linearen Restriktionen.

Das Grundmodell der linearen Optimierung ist

$$\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{unter} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{aligned}$$

Dabei sind

c_j Zielfunktionskoeffizienten (bekannt),

x_j Strukturvariablen,

a_{ij} technische Koeffizienten (bekannt),

b_i Kapazitäten/Restriktionswerte (bekannt),

$x_j \geq 0$ Nichtnegativitätsbedingungen.

Die bekannten Werte c_j, a_{ij}, b_i bilden zusammen eine Instanz/Eingabe des LP-Modells/Problems.

In Vektor-Matrix-Notation geschrieben:

$$\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
\text{unter} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Das Grundmodell stellt keine willkürlichen Einschränkungen dar.

- Minimierungsproblem:

  $$\min z = -\max(-z)$$

- Untere Abschätzung:

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

  ist äquivalent zu

  $$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

- Gleichung:

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n &\leq -b_i \end{aligned}$$

2 Übungen

2.1 Übung 1

Aufgabe 1 Lösen Sie das folgende LP mit dem Simplex-Algorithmus:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{unter} \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Zuerst führen wir die Schlupfvariablen für die übrigbleibenden Kapazitäten der einzelnen Nebenbedingungen ein:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_4 & = & 10 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & 10 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 10 & - & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Die Variable mit dem höchsten Koeffizienten in der Zielfunktion ist x_2, also ist x_2 die Pivotspalte. Für die Pivotzeile müssen wir $\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid i \in B, \bar{a}_{ik} > 0\right\}$ finden. Berechnen wir diese:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_4 & = & 10 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & 2/10 = 5 \\ x_5 & = & 10 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & -2/10 < 0 \\ x_6 & = & 10 & - & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & -3/10 < 0 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \end{array}$$

Damit ist x_4 unsere Pivotzeile. Jetzt wird x_2 eine neue Basisvariable, also müssen wir die erste Zeile nach x_2 auflösen und in den restlichen Zeilen x_2 ersetzen. Erstmal auflösen:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & = & 5 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & 10 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ x_6 & = & 10 & - & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \\ \hline z & = & & & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Dann x_2 in den restlichen Zeilen einsetzen:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 5 & - & x_1 & + & & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 10 & - & 3x_1 & + & 2(5 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & - & x_3 \\
x_6 & = & 10 & - & x_1 & + & 3(5 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & - & x_3 \\
\hline
z & = & & & x_1 & + & 3(5 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & - & x_3
\end{array}
$$

Und vereinfachen:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 5 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 20 & - & 5x_1 & & & - & x_4 \\
x_6 & = & 25 & - & 4x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 \\
\hline
z & = & 15 & - & 2x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4
\end{array}
$$

In der Zielfunktion hat x_3 den höchsten Anstieg, also ist es die Pivotspalte. Wir suchen die Pivotzeile:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_2 & = & 5 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & \quad 5/(-1/2) < 0 \\
x_5 & = & 20 & - & 5x_1 & & & - & x_4 & \\
x_6 & = & 25 & - & 4x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & \quad 25/(-1/2) < 0 \\
\hline
z & = & 15 & - & 2x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 &
\end{array}
$$

Da alle $\bar{a}_{i3} > 0$ sind, ist das LOP unbeschränkt und damit nicht lösbar.

Aufgabe 2 Wenn Sie ein LP mit dem Simplex-Algorithmus lösen: woran erkennen Sie, ob das LP unendlich viele optimale Lösungen hat?

Ermitteln Sie *alle* optimalen Lösungen des folgenden LP mit dem Simplex-Algorithmus:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
\text{unter} & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Schauen wir mal, wie weit wir kommen. Schlupfvariablen:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 6 & - & 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 \\
x_5 & = & 2 & + & x_1 & - & 2x_2 & & \\
\hline
z & = & & & 6x_1 & + & 12x_2 & + & 4x_3
\end{array}
$$

Damit ist x_2 die Pivotspalte. Für die Pivotzeile berechnen wir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_4 & = & 6 & - & 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & 6/6 = 1 \\ x_5 & = & 2 & + & x_1 & - & 2x_2 & & & 2/2 = 1 \\ \hline z & = & & & 6x_1 & + & 12x_2 & + & 4x_3 & \end{array}$$

Damit können wir sowohl x_4 und x_5 als Pivotzeile wählen. Machen wir eine Fallunterscheidung:

x_4: Erstmal die Pivotzeile umstellen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 & = & 2 & + & x_1 & - & 2x_2 & & \\ \hline z & = & & & 6x_1 & + & 12x_2 & + & 4x_3 \end{array}$$

Dann x_2 ersetzen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 & = & & & 2x_1 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}x_4 \\ \hline z & = & 12 & & & & & - & 2x_4 \end{array}$$

Damit haben wir die erste Lösung schon gefunden: $x_2 = 1$ und $x_5 = 0$. Alle anderen sind gleich 0. Genauer gesagt ist unsere erste Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 0, 0)$.

x_5: Wieder die Pivotzeile (jetzt x_5 nach x_2) umstellen und einsetzen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_4 & = & & - & 6x_1 & - & 2x_3 & + & 3x_5 \\ x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_1 & & & - & \frac{1}{2}x_5 \\ \hline z & = & 12 & + & 12x_1 & + & 4x_3 & - & 6x_5 \end{array}$$

Die neue Pivotspalte ist jetzt x_1. Wenn wir die Pivotzeile wählen wollen, dann erhalten wir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrr} x_4 & = & & - & 6x_1 & - & 2x_3 & + & 3x_5 & 0/6 = 0 \\ x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_1 & & & - & \frac{1}{2}x_5 & 1/(-1/2) < 0 \\ \hline z & = & 12 & + & 12x_1 & + & 4x_3 & - & 6x_5 & \end{array}$$

Hier ist keine weitere Verbesserung möglich und wir bekommen die Lösung, die wir auch schon vorher hatten: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 0, 0)$.

Die einzige Möglichkeit für weitere Lösungen wäre, wenn wir weiter Basisvariablen tauschen, auch wenn sich dadurch am Maximalwert der Zielfunktion nichts mehr ändert. Schauen wir mal was passiert, wenn wir die

Darstellung von x_5 weiterrechnen.

$$\begin{array}{rcrrrrrrl} x_4 & = & & - & 6x_1 & - & 2x_3 & + & 3x_5 \qquad 0/6 = 0 \\ x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_1 & & & - & \frac{1}{2}x_5 \qquad 1/(-1/2) < 0 \\ \hline z & = & 12 & + & 12x_1 & + & 4x_3 & - & 6x_5 \end{array}$$

Tauschen wir x_4 gegen x_1. Umstellen und einsetzen liefert:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_1 & = & & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{6}x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 & = & 1 & - & \frac{1}{6}x_3 & - & \frac{1}{12}x_4 & - & \frac{1}{4}x_5 \\ \hline z & = & 12 & & & - & 2x_4 & & \end{array}$$

Na das hat nix gebracht. Tolle Wurst. Kann ja auch nix bringen.

Nehmen wir mal den letzten Stand vom Fall x_4 her:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_2 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 & = & & & 2x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_4 \\ \hline z & = & 12 & & & & & - & 2x_4 \end{array}$$

Und tauschen hier x_2 durch x_1. Umstellen und einsetzen liefert:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & \frac{2}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 & = & 4 & - & \frac{10}{3}x_2 & - & \frac{4}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 \\ \hline z & = & 12 & & & & & - & 2x_4 \end{array}$$

Damit hätten wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 0, 0, 4)$.

Für die nächste Lösung tauschen wir x_5 gegen x_3 und erhalten:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_1 & = & & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{1}{6}x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 & = & 3 & - & \frac{5}{2}x_2 & - & \frac{1}{4}x_4 & - & \frac{3}{4}x_5 \\ \hline z & = & 12 & & & & & - & 2x_4 \end{array}$$

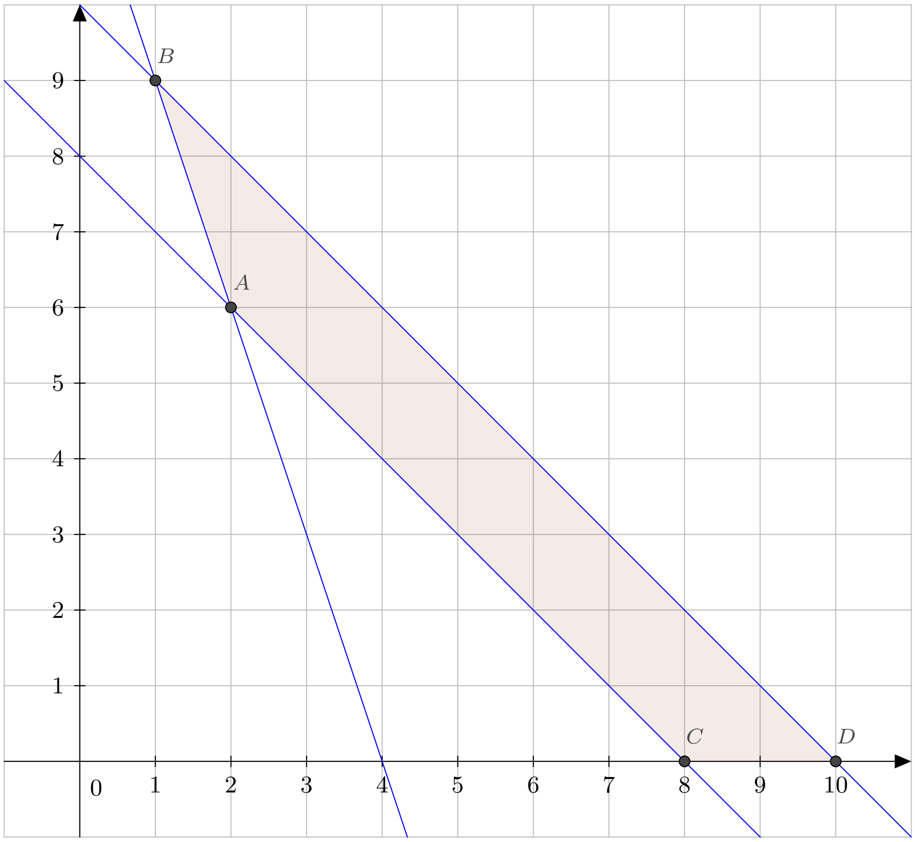
Das liefert uns die Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 3, 0, 0)$.

Und das soll auch erstmal reichen. Es gibt also unendlich viele Lösungen, die folgende Form haben:

$$\left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \right\}$$

Aufgabe 3 Lösen Sie folgende LPs mit der 2-Phasen-Methode. Deuten Sie graphisch den fortschreitenden Lösungsgang an:

$$
\begin{aligned}
& \max \quad 2x_1 + x_2 \\
& \text{unter} \quad x_1 + x_2 \geq 8 \\
(1) \qquad & 3x_1 + x_2 \geq 12 \\
& x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Wir bringen das Problem erstmal in Normalform:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{unter} \quad & -x_1 - x_2 \leq -8 \\
& -3x_1 - x_2 \leq -12 \\
& x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Weil einige der $b_i < 0$ sind, können wir nicht einfach $(0, 0)$ als erste Basislösung nehmen. Wir müssen zunächst die erste Basislösung finden. Das ist die erste Phase der 2-Phasen-Methode. Dafür führen wir die

Hilfsvariable x_0 wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \max \quad & z' = -x_0 \\ \text{unter} \quad & -x_1 - x_2 - x_0 \leq -8 \\ & -3x_1 - x_2 - x_0 \leq -12 \\ & x_1 + x_2 - x_0 \leq 10 \\ & x_0, x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Das ist das Hilfsproblem, das wir lösen müssen, um die erste Basislösung zu finden. Legen wir los mit den Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & -8 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_4 & = & -12 & + & 3x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_5 & = & 10 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\ \hline z' & = & & & & & & - & x_0 \end{array}$$

Die Pivotspalte ist x_0. Für die Pivotzeile suchen wir die „unzulässigste“ Zeile. Das ist die Zeile, bei der b_i am kleinsten ist. Dies ist bei x_4 der Fall:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrc} x_3 & = & -8 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 & \\ x_4 & = & -12 & + & 3x_1 & + & x_2 & + & x_0 & \leftarrow \\ x_5 & = & 10 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_0 & \\ \hline z' & = & & & & & & - & x_0 & \end{array}$$

Jetzt tauschen wir x_4 gegen x_0:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & 4 & - & 2x_1 & & & + & x_4 \\ x_0 & = & 12 & - & 3x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ x_5 & = & 10 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\ \hline z' & = & & & & & & - & x_0 \end{array}$$

Und ersetzen x_0 in den anderen Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & 4 & - & 2x_1 & & & + & x_4 \\ x_0 & = & 12 & - & 3x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ x_5 & = & 22 & - & 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 \\ \hline z' & = & -12 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & x_4 \end{array}$$

Ab jetzt wieder Pivotspalte und -zeile bestimmen. Größter Anstieg ist bei x_1, größte Einschränkung in den

Zeilen ist bei:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_3 & = & 4 & - & 2x_1 & & & + & x_4 & 4/2 = 2 \quad \leftarrow \\
x_0 & = & 12 & - & 3x_1 & - & x_2 & + & x_4 & 12/3 = 4 \\
x_5 & = & 22 & - & 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 & 22/4 = 5{,}5 \\
\hline
z' & = & -12 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & x_4 &
\end{array}$$

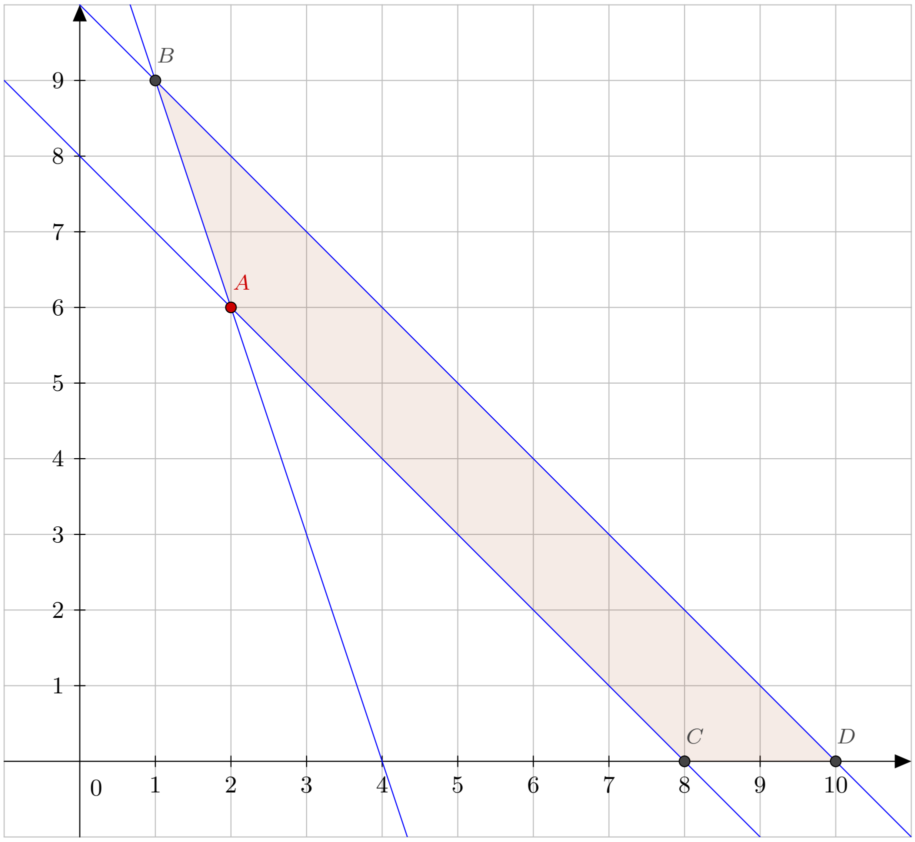
Also tauschen wir x_1 gegen x_3:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 2 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_0 & = & 6 & - & x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 14 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 \\
\hline
z' & = & -6 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4
\end{array}$$

Und nochmal: Pivotspalte ist x_2, Pivotzeile ist x_0. Umtauschen ergibt

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
x_1 & = & 2 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 & = & 6 & - & x_0 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 2 & + & 2x_0 & - & x_3 & & \\
\hline
z' & = & & - & x_0 & & & &
\end{array}$$

Jetzt haben wir das Hilfs-LP gelöst (Lemma 1.2). Nach diesem hat das Ausgangs-LP genau dann eine zulässige Lösung, wenn das Hilfs-LP eine optimale Lösung mit $x_0 = 0$ hat. Wir hätten auch keine weitere Iteration des Simplex-Algorithmus' mehr machen können, weil sich die Zielfunktion nicht weiter verbessern lässt. Die erste Basislösung ist jetzt $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 6, 0, 0, 2)$. Oder graphisch betrachtet bei Punkt A:



Um das Ausgangs-LP zu lösen, müssen wir jetzt nur x_0 aus dem Hilfs-LP streichen (schließlich ist $x_0 = 0$) und können ganz normal mit dem Simplex-Algorithmus weitermachen. Unsere ursprüngliche Zielfunktion war $z = 2x_1 + x_2$. Dort müssen wir x_1 und x_2 ersetzen und erhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 & = & 6 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 2 & - & x_3 & & \\
\hline
z & = & 10 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4
\end{array}$$

Wenn man das weiterrechnet, dann erhält man die optimale Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10, 0, 0, 18, 2)$.

(2)
$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{unter} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1 - 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Ein Landwirt beabsichtigt seinen $10\,000\,\mathrm{m}^2$ großen Acker teils mit Blumen und teils mit Gemüse zu bestellen. Er erwartet pro Quadratmeter Blumen einen Deckungsbeitrag von 2,5 GE zu erzielen, pro Quadratmeter Gemüse 1 GE. Mit 0,1 GE Pflegekosten pro Quadratmeter Brache muss er rechnen. Die Beschaffung des Saatguts erfordert Mittel in Höhe von 1 GE pro zu bepflanzendem Quadratmeter Blumen und 0,5 GE pro Quadratmeter Gemüse, wofür insgesamt maximal 8000 GE verwendet werden sollen (inklusive

Pflegekosten für evtl. Brachfläche).

Wie viel Acker soll mit Blumen und wie viel mit Gemüse bepflanzt werden, und wie viel soll brach liegen, um ein optimales Ergebnis zu erreichen?

Ist es besser für den Landwirt, wenn er die Gesamtfläche bestellt?

Sie können eine frei erhältliche Software zur Lösung linearer Programme benutzen. Beispielsweise `lpsolve`.

Aufgabe 11 Leiten Sie das duale LP zu dem LP des klassischen Transportproblems her:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{unter} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \dots, n) \\
& x_{ij} \geq 0 & (i \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)
\end{array}$$

Aufgabe 12 Die vier Fertigungsbetriebe A_1, A_2, A_3, A_4 eines Unternehmens produzieren an verschiedenen Orten die gleiche Ware. In jedem Monat werden (in Mengeneinheiten, ME):

6 ME im Betrieb A_1, 7 ME in A_2, 8 ME in A_3, 6 ME in A_4

Die Gesamtproduktion soll zu drei verschiedenen Lagerhäusern B_1, B_2, B_3 transportiert werden, so dass dort der jeweilige vorhandene Bedarf gedeckt werden kann:

B_1 fragt 10 ME nach, B_2 8 ME, B_3 9 ME.

Die Transportkosten c_{ij} pro Mengeneinheit der Ware von A_i nach B_j sind in der unten stehenden Matrix angegeben.

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie einen zulässigen Transportplan mit der Nordwesteckenregel. Geben Sie die Transportkosten an.

(b) Bestimmen Sie einen zulässigen, möglichst nicht entarteten, Transportplan mit der Minimale-Kosten-Regel. Geben Sie die Transportkosten an.

1. $c_{23} = 2$

	B_1	B_2	B_3	
A_1				6
A_2			7	0
A_3				8
A_4				6
	10	8	2	

2. $c_{42} = 3$

	B_1	B_2	B_3	
A_1				6
A_2			7	0
A_3				8
A_4		6		0
	10	2	2	

3. $c_{32} = 3$

	B_1	B_2	B_3	
A_1				6
A_2			7	0
A_3		2		6
A_4		6		0
	10	0	2	

4. $c_{31} = 4$

	B_1	B_2	B_3	
A_1				6
A_2			7	0
A_3	6	2		0
A_4		6		0
	4	0	2	

5. $c_{11} = 5$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	4			2
A_2			7	0
A_3	6	2		0
A_4		6		0
	0	0	2	

6. $c_{13} = 6$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	4		2	0
A_2			7	0
A_3	6	2		0
A_4		6		0
	0	0	0	

Kosten: 94.

(c) Bestimmen Sie einen kostenminimalen Transportplan mit der u-v-Methode sowie die zugehörigen Kosten. Verwenden Sie dabei die in (a) oder (b) gefundene Ausgangslösung.

Die Basislösung der Nordwesteckenregel lautet

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4	3	
A_3		5	3
A_4			6

Das hat die folgenden Basisvariablen:

$$B = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3)\}$$

Diese führen zu folgenden Gleichungen ($u_i + v_j = c_{ij}$):

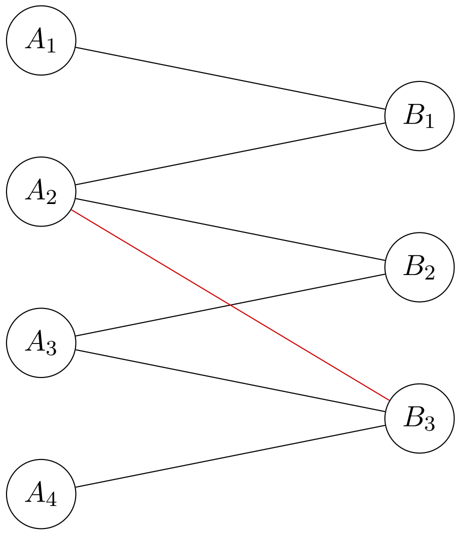
$$u_1 + v_1 = 5 \qquad u_3 + v_2 = 3$$
$$u_2 + v_1 = 3 \qquad u_3 + v_3 = 5$$
$$u_2 + v_2 = 4 \qquad u_4 + v_3 = 4$$

Wir können eine Variable frei wählen, also setzen wir $u_2 = 0$, woraus folgt: $v_1 = 3, v_2 = 4, u_1 = 2, u_3 = -1, v_3 = 6, u_4 = -2$.

Jetzt prüfen wir die duale Zulässigkeit $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$:

$$\overline{c_{12}} = 4 - 2 - 4 = -2 \quad ✗$$
$$\overline{c_{13}} = 6 - 2 - 6 = -2 \quad ✗$$
$$\overline{c_{23}} = 2 - 0 - 6 = -4 \quad ✗$$
$$\overline{c_{31}} = 4 - (-1) - 3 = 2 \quad ✓$$
$$\overline{c_{41}} = 4 - (-2) - 3 = 3 \quad ✓$$
$$\overline{c_{42}} = 3 - (-2) - 4 = 1 \quad ✓$$

Das Minimum dieser $\overline{c_{ij}}$ ist $\overline{c_{23}}$, also wird $(2,3)$ in die Basis aufgenommen. Aber welche Position verlässt die Basis? Schauen wir uns den Graph an:



Die rote Linie von A_2 nach B_3 zeigt die neue Basisvariable. Mit dieser neuen Kante finden wir den Kreis: $A_2 - B_2 - A_3 - B_3 - A_2$.

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4	$^{-}3$	$^{+}$
A_3		$^{+}5$	3^{-}
A_4			6

Von den mit (−) markierten Einträgen nehmen wir jetzt das Minimum (in diesem Fall: 3) und ziehen es von den (−) markierten Einträgen ab und addieren es auf die mit (+) markierten Einträge auf.

Das führt zu folgendem Transportplan:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4	0	3
A_3		8	0
A_4			6

Von den beiden Nullen darf aber nur eine bleiben, da eine der Basisvariablen entfernt werden und eine andere behalten werden muss. Welche bleibt und welche entfernt wird, ist egal. Wir wählen x_{22} als bleibende, also wird x_{33} entfernt und wir erhalten folgenden Transportplan:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4	0	3
A_3		8	
A_4			6

Hier wird wieder optimiert. Wir nehmen die Basisvariablen her:

$$B = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,3)\}$$

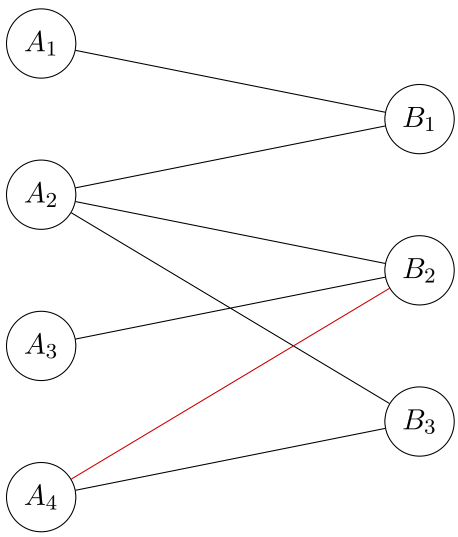
Diese führen zu den u, v-Gleichungen:

$$u_1 + v_1 = 5 \qquad u_2 + v_3 = 2$$
$$u_2 + v_1 = 3 \qquad u_3 + v_2 = 3$$
$$u_2 + v_2 = 4 \qquad u_4 + v_3 = 4$$

Wir wählen $u_2 = 0$ und erhalten: $v_1 = 3, v_2 = 4, v_3 = 2, u_1 = 2, u_3 = -1, u_4 = 2$. Dann prüfen wir wieder die duale Zulässigkeit:

$$\overline{c_{12}} = 4 - 2 - 4 = -2 \quad ✗$$
$$\overline{c_{13}} = 6 - 2 - 2 = 2 \quad ✓$$
$$\overline{c_{31}} = 4 - (-1) - 3 = 2 \quad ✓$$
$$\overline{c_{33}} = 5 - (-1) - 2 = 4 \quad ✓$$
$$\overline{c_{41}} = 4 - 2 - 3 = -1 \quad ✗$$
$$\overline{c_{42}} = 3 - 2 - 4 = -3 \quad ✗$$

Das Minimum ist hier $\overline{c_{42}} = -3$, also wird $(4,2)$ in die Basis aufgenommen. Wir suchen wieder einen Kreis im Transportplan:



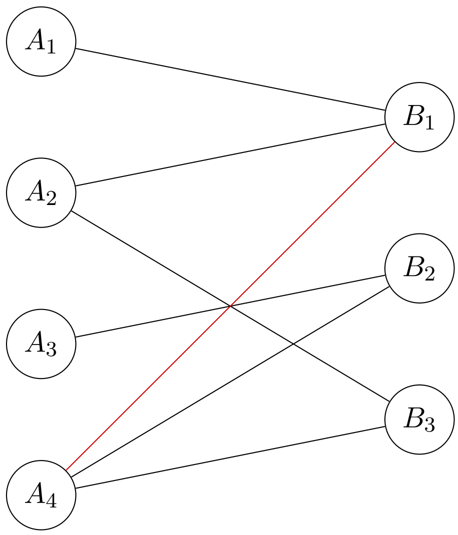
Wir finden den Kreis $A_2 - B_2 - A_4 - B_3 - A_2$ und stellen diesen im Transportplan dar:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4	$^{-}0$	3^{+}
A_3		8	
A_4		$+$	6^{-}

Das Minimum der mit $(-)$ markierten Zellen ist 0. Was ändert sich also? Eigentlich nichts, nur dass die Basisvariablen wechseln: $(2, 2)$ geht raus, $(4, 2)$ geht rein. Wir erhalten folgenden Transportplan:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	4		3
A_3		8	
A_4		0	6

Jetzt wieder die Gleichungen aufstellen und die duale Zulässigkeit prüfen (spare ich mir hier). Das Minimum der Unzulässigkeiten findet sich bei $\overline{c_{41}}$, was zu folgendem Graphen führt:



Im Transportplan finden wir folgenden Kreis:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2	$^{-}4$		3^{+}
A_3		8	
A_4	$+$	0	6^{-}

Jetzt ändert sich auch was am Transportplan! $\delta = 4$ wird von den mit $(-)$ markierten Zellen subtrahiert und auf die mit $(+)$ markierten Zellen addiert. Das ergibt:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2			7
A_3		8	
A_4	4	0	2

Stellt man wieder die u, v-Gleichungen auf und überprüft die duale Zulässigkeit, dann stellt man fest, dass dieser Plan mit den Kosten 92 optimal ist:

$$B = \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

Diese führen zu den u, v-Gleichungen:

$$u_1 + v_1 = 5 \qquad u_4 + v_1 = 4$$
$$u_2 + v_3 = 2 \qquad u_4 + v_2 = 3$$
$$u_3 + v_2 = 3 \qquad u_4 + v_3 = 4$$

Wir wählen $u_1 = 0$ und erhalten: $u_2 = -3, u_3 = -1, u_4 = -1, v_1 = 5, v_2 = 4, v_3 = 5$.

$$\overline{c_{12}} = 4 - 0 - 4 = 0 \quad \checkmark$$
$$\overline{c_{13}} = 6 - 0 - 5 = 1 \quad \checkmark$$
$$\overline{c_{21}} = 3 - (-3) - 5 = 1 \quad \checkmark$$
$$\overline{c_{22}} = 4 - (-3) - 4 = 3 \quad \checkmark$$
$$\overline{c_{31}} = 4 - (-1) - 5 = 0 \quad \checkmark$$
$$\overline{c_{33}} = 5 - (-1) - 5 = 1 \quad \checkmark$$

Wenn man die Basislösung der MK-Methode nimmt, dann kommt man auf folgende Menge von Basisvariablen:

$$B = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (4,2)\}$$

Aus diesen ergeben sich die folgenden u, v-Gleichungen:

$$u_1 + v_1 = 5 \qquad u_3 + v_1 = 4$$
$$u_1 + v_3 = 6 \qquad u_3 + v_2 = 3$$
$$u_2 + v_3 = 2 \qquad u_4 + v_2 = 3$$

Aus $u_1 = 0$ folgt: $v_1 = 5, v_3 = 6, u_2 = -4, u_3 = -1, v_2 = 4, u_4 = -1$. Duale Zulässigkeit prüfen:

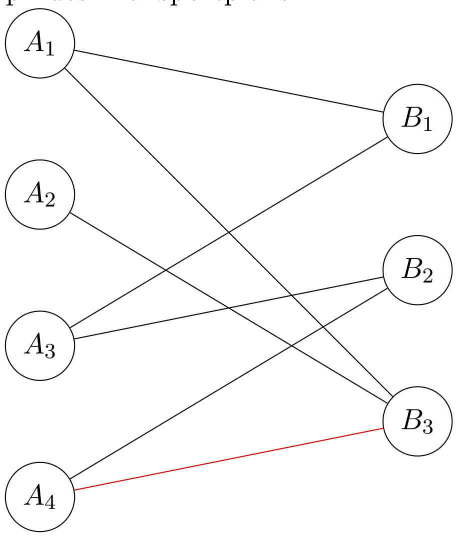
$$\overline{c_{12}} = 4 - 0 - 4 = 0 \quad ✓$$
$$\overline{c_{21}} = 3 - (-4) - 5 = 2 \quad ✓$$
$$\overline{c_{22}} = 4 - (-4) - 4 = 4 \quad ✓$$
$$\overline{c_{33}} = 5 - (-1) - 6 = 0 \quad ✓$$
$$\overline{c_{41}} = 4 - (-1) - 5 = 0 \quad ✓$$
$$\overline{c_{43}} = 4 - (-1) - 6 = -1 \quad ✗$$

vorher:

	B_1	B_2	B_3
A_1	4^+		2^-
A_2			7
A_3	6^-	2^+	
A_4		6^-	$+$

$\delta = 2$

Graph des Transportplans:



nachher:

	B_1	B_2	B_3
A_1	6		
A_2			7
A_3	4	4	
A_4		4	2

Kosten: 92. Nach weiterer Prüfung der dualen Zulässigkeit ergibt sich die Optimalität.

Aufgabe 13 Ein Unternehmen hat für die Besetzung von vier Stellen $A_1, \dots, A_4$ fünf Bewerber $B_1, \dots, B_5$ zur Verfügung, die für einzelne Stellen unterschiedlich geeignet sind. Die Eignungspunkte (von 1 = nicht sehr geeignet bis 10 = am besten geeignet) der Bewerber wurden wie folgt festgestellt:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	8	6	4
A_2	7	5	10	7	3
A_3	4	6	5	3	6
A_4	4	4	5	3	5

Welche Zuordnung hat maximal gesamte Eignungspunkte (und sollte vorgenommen werden)? Führen Sie notwendige Maßnahmen durch und lösen Sie das Problem mit der Ungarischen Methode.

Führen wir zuerst die notwendigen Maßnahmen durch. Bevor wir die Ungarische Methode anwenden können, müssen wir das Problem in die richtige Form bringen. Die richtige Form hat folgende Eigenschaften: es gibt n Arbeiter $A_1, \dots A_n$, n Tätigkeiten $B_1, \dots, B_n$ und es gibt Ausführungskosten c_{ij}, welche minimiert werden sollen.

In unserem Beispiel haben wir aber einerseits 4 Tätigkeiten (Stellen) und 5 Bewerber und andererseits sind Eignungspunkte gegeben, die maximiert werden sollen.

Um das Problem der unterschiedlichen Anzahl von Tätigkeiten und Bewerbern zu lösen, führen wir eine neue Tätigkeit A_5 ein und setzen die Eignungspunkte für alle Bewerber auf 0. Damit erhalten wir folgende Tabelle:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	8	6	4
A_2	7	5	10	7	3
A_3	4	6	5	3	6
A_4	4	4	5	3	5
A_5	0	0	0	0	0

Für die Problematik der Maximierung der Eignungspunkte/Minimierung der Ausführungskosten multiplizieren wir alle Einträge mit -1 und erhalten diese Tabelle:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-5	-6	-8	-6	-4
A_2	-7	-5	-10	-7	-3
A_3	-4	-6	-5	-3	-6
A_4	-4	-4	-5	-3	-5
A_5	0	0	0	0	0

Jetzt können wir mit der Ungarischen Methode loslegen. Wir beginnen mit Schritt

(1) Initialisierung: Bilde aus (c_{ij}) die reduzierte Kostenmatrix R wie folgt

- aus jeder Zeile wird von allen Elementen der Zeile das kleinste Element subtrahiert;
- aus jeder Spalte wird von allen Elementen der Spalte das kleinste Element subtrahiert.

(R hat in also in jeder Zeile und in jeder Spalte mindestens ein Null).

Wir bestimmen wir die Zeilenminima und subtrahieren sie von jedem Zeilenelement:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min_{\text{Zeile}}$
A_1	-5	-6	-8	-6	-4	-8
A_2	-7	-5	-10	-7	-3	-10
A_3	-4	-6	-5	-3	-6	-6
A_4	-4	-4	-5	-3	-5	-5
A_5	0	0	0	0	0	0

$\rightsquigarrow$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	2	0	2	4
A_2	3	5	0	3	7
A_3	2	0	1	3	0
A_4	1	1	0	2	0
A_5	0	0	0	0	0

Jetzt müssten wir die Spaltenminima bestimmen und von jedem Spaltenelement abziehen, aber da die Spaltenminima durch die letzte Zeile immer 0 sind, ändert das nichts. Das bringt uns zu Schritt

(2) Bestimme die minimale Zahl $d(R)$ der Zeilen und Spalten, die alle Nullen von R überdecken (sog. Decklinien).

Das bringt uns zu einem neuen Problem: die Anzahl der Decklinien finden. Fangen wir an mit Schritt

(D1) Wähle unabhängige Nullen aus (z. B. spaltenweise); diese sind Zuordnungen.

Wir könnten beispielsweise die folgenden Nullen auswählen:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4
A_2	3	5	0	3	7
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0

Weiter geht's mit Schritt

(D2) Markiere Zeilen ohne Zuordnungen (Zeilen ohne ausgewählte Nullen).

Das wäre die Zeile A_2:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4	
A_2	3	5	0	3	7	$\leftarrow$
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0	
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$	
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0	

Jetzt wird's langsam schwierig:

(D3) Markiere die noch nicht markierten Spalten, welche Nullen in den bereits markierten Zeilen haben.

Da A_2 die einzige markierte Zeile ist und diese nur eine Null in Spalte B_3 hat, markieren wir B_3:

			$\downarrow$			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4	
A_2	3	5	0	3	7	$\leftarrow$
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0	
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$	
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0	

Nach der Spaltenmarkierung geht's weiter mit der Zeilenmarkierung:

(D4) Markiere die noch nicht markierten Zeilen, welche Zuordnungen in den markierten Spalten haben.

Unsere einzige markierte Spalte ist B_3. Dort gibt es eine Zuordnung in der ersten Zeile, also markieren wir die Zeile A_1:

	B_1	B_2	B_3 ↓	B_4	B_5	
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4	←
A_2	3	5	0	3	7	←
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0	
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$	
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0	

Die letzten zwei Schritte, also (D3) und (D4), wiederholen wir solange, bis keine Markierungen mehr auftreten. Glücklicherweise gibt es keine weiteren Nullen in den bereits markierten Zeilen, sodass wir keine weiteren Spalten markieren müssen.

Die Anzahl der Decklinien $d(R)$ ergibt sich jetzt aus der Summe der Anzahl der nichtmarkierten Zeilen und der markierten Spalten. In unserem Fall haben wir 3 nichtmarkierte Zeilen (A_3, A_4 und A_5) und eine markierte Spalte (B_3), sodass $d(R) = 3 + 1 = 4$ ist. Zeichnen wir diese Decklinien einmal ein:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4
A_2	3	5	0	3	7
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0

Von den nicht überdeckten Elementen ist 2 das Minimum.

Kommen wir zum nächsten Schritt der Ungarischen Methode:

(3) Falls $d(R) = n$: fertig, optimale Lösung ist ablesbar: Für n „unabhängige“ $r_{ij} = 0$ setze $x_{ij} = 1$, die übrigen $x_{ij} = 0$.

Leider ist unser $d(R) = 4 < 5$ und das heißt, dass wir noch nicht fertig sind. Daher gehen wir weiter zum nächsten Schritt:

(4) Falls $d(R) < n$: Aktualisiere R wie folgt

- bestimme $r^* = \min\{r_{ij} \mid r_{ij} \text{ ist nicht überdeckt}\}$;
- subtrahiere r^* von allen nicht überdeckten Elementen;
- addiere r^* zu allen doppelt überdeckten Elementen;
- die nur einmal überdeckten Elemente bleiben unverändert.

Wir erhalten $r^* = 2$. Dieses subtrahieren wir von allen nicht überdeckten Elementen. Wir erhalten:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	2	$\boxed{0}$	2	4
A_2	3	5	0	3	7
A_3	2	$\boxed{0}$	1	3	0
A_4	1	1	0	2	$\boxed{0}$
A_5	$\boxed{0}$	0	0	0	0

$(-r^*) \rightsquigarrow$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$\underline{1}$	$\underline{0}$	0	$\underline{0}$	$\underline{2}$
A_2	$\underline{1}$	$\underline{3}$	0	$\underline{1}$	$\underline{5}$
A_3	2	0	1	3	0
A_4	1	1	0	2	0
A_5	0	0	0	0	0

Zuletzt müssen wir r^* noch auf alle doppelt überdeckten Elemente addieren. Zur Hilfe gibt's links den aktuellen Stand mit Decklinien und rechts das Ergebnis ohne Decklinien aber mit unterstrichenen Zahlen, die sich verändert haben:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	0	0	0	2
A_2	1	3	0	1	5
A_3	2	0	1	3	0
A_4	1	1	0	2	0
A_5	0	0	0	0	0

$(+r^*) \rightsquigarrow$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	0	0	0	2
A_2	1	3	0	1	5
A_3	2	0	$\underline{3}$	3	0
A_4	1	1	$\underline{2}$	2	0
A_5	0	0	$\underline{2}$	0	0

Und jetzt geht der Spaß wieder von vorne los. Wir müssen $d(R)$ bestimmen und falls wir noch nicht genug Decklinien haben, aktualisieren wir und wiederholen weiter, bis wir irgendwann eine optimale Zuordnung gefunden haben.

Bestimmen wir erneut $d(R)$ von unserem aktuellen Stand:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	0	0	0	2
A_2	1	3	0	1	5
A_3	2	0	3	3	0
A_4	1	1	2	2	0
A_5	0	0	2	0	0

(D1) Wähle unabhängige Nullen aus (z. B. spaltenweise); diese sind Zuordnungen.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	0	0	$\boxed{0}$	2
A_2	1	3	$\boxed{0}$	1	5
A_3	2	$\boxed{0}$	3	3	0
A_4	1	1	2	2	$\boxed{0}$
A_5	$\boxed{0}$	0	2	0	0

(D2) Markiere Zeilen ohne Zuordnungen (Zeilen ohne ausgewählte Nullen).

Es gibt keine Zeilen ohne Zuordnungen, also müssen wir nichts markieren.

(D3) Markiere die noch nicht markierten Spalten, welche Nullen in den bereits markierten Zeilen haben.

Da keine Zeilen markiert sind, müssen wir auch keine Spalten markieren.

(D4) Markiere die noch nicht markierten Zeilen, welche Zuordnungen in den markierten Spalten haben.

Da wir keine markierten Spalten haben, ändert sich auch hier nichts. Damit sind wir auch schon am Ende von der Bestimmung von $d(R)$. Wir erhalten

$$d(R) = \text{nichtmarkierte Zeilen} + \text{markierte Spalten} = 5 + 0 = 5$$

Eingezeichnet sieht das wie folgt aus:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	0	0	$\boxed{0}$	2
A_2	1	3	$\boxed{0}$	1	5
A_3	2	$\boxed{0}$	3	3	0
A_4	1	1	2	2	$\boxed{0}$
A_5	$\boxed{0}$	0	2	0	0

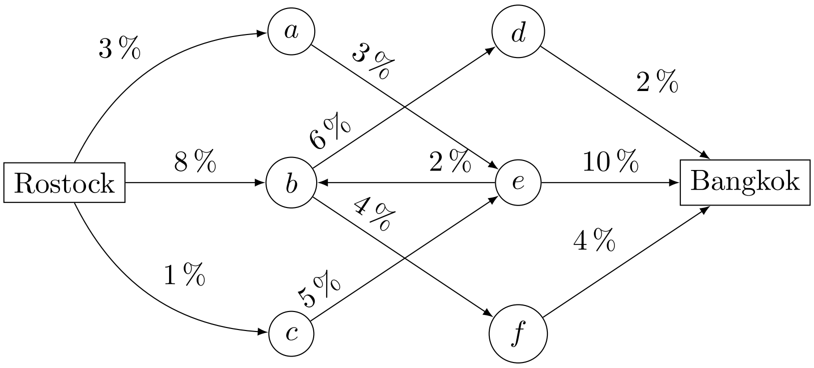
Da $d(R) = 5 = 5$ gilt, sind wir fertig. Die Zuordnung der Bewerber auf die Stellen lautet:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	0	0	1	0
A_2	0	0	1	0	0
A_3	0	1	0	0	0
A_4	0	0	0	0	1
A_5	1	0	0	0	0

Die Summe der Eignungspunkte ist damit $6 + 10 + 6 + 6 = 28$. Bewerber B_1 ging leer aus.

Aufgabe 14 Eine Firma in Rostock will einer Firma in Bangkok einen Geldbetrag überweisen. Für die Übermittlung des Geldes stehen verschiedene Wege zur Verfügung. Leider vermindert sich die Summe auf jedem Teilstück des Übertragungsweges um einen gewissen Prozentsatz (Bearbeitungsprovision) des jeweils verbliebenen Betrages.

Für die Abwicklung der Überweisung soll ein Weg gewählt werden, auf dem beim Empfänger ein möglichst hoher Anteil der ursprünglich angewiesenen Summe ankommt.



Formen Sie die Kantenbewertungen so um, dass durch die Aufgabenstellung ein Kürzeste-Wege-Problem gelöst wird und lösen Sie das Überweisungsproblem im obigen Bild mithilfe des Dijkstra-Algorithmus. Dabei sollen die auftretenden Zahlen auf 3 Nachkommastellen kaufmännisch gerundet werden.

Zunächst müssen wir die Kantengewichte umformen. Dabei müssen wir folgendes beachten: wenn wir den Betrag x von Rostock nach a überweisen und dabei 3 % Provision zahlen müssen, dann bleiben nach der Überweisung noch 97 % von x übrig, also $0{,}97x$. Wenn dieser Betrag nach e überwiesen wird, dann werden von $0{,}97x$ die 3 % Provision abgezogen, sodass bei e noch $0{,}97 \cdot 0{,}97x = 0{,}941x$ übrig bleiben (wie angegeben gerundet). Absolut gesehen werden von Rostock über a zu e $\quad 1 - 0{,}941 = 5{,}9\,\%$ abgezogen. Von a zu e werden dabei absolut $5{,}9\,\% - 3\,\% = 2{,}9\,\%$ abgezogen. Dabei bedeutet *absolut*: absolut vom Betrag x. Wenn wir die Kantengewichte so umrechnen, dann lassen sich die Prozente entlang eines Pfades addieren und wir können mit dem Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Pfad finden, auf dem die Summe der Kantengewichte minimal ist.

Allgemein betrachtet ergibt sich folgendes: jede Kante vom Startknoten (Rostock) ändert sich nicht. Entlang eines Pfades mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ergibt sich das Gewicht der letzten Kante aus $(1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdots (1 - p_{n-1}) - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$.

Überprüfen wir das kurz: für die Kanten von Rostock nach a, b und c ändert sich nichts. Für die Kante ae ergibt sich ein Gewicht von

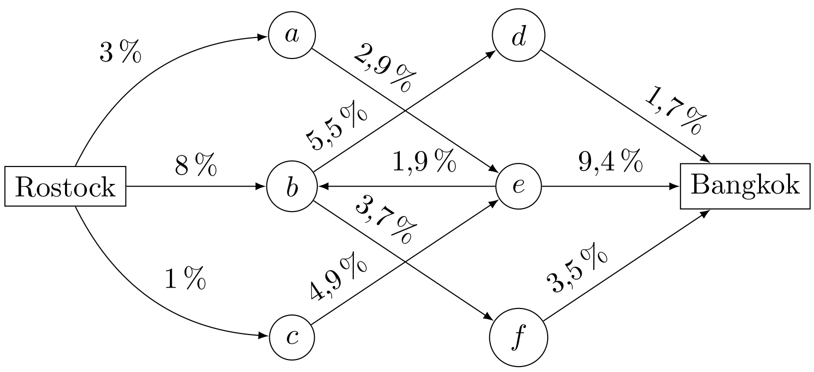
$$(1 - 0{,}03) - (1 - 0{,}03) \cdot (1 - 0{,}03) = 0{,}97 - 0{,}941 = 0{,}029$$

Soweit, so gut. Schauen wir uns ce an:

$$(1 - 0{,}01) - (1 - 0{,}01) \cdot (1 - 0{,}05) = 0{,}99 - 0{,}941 = 0{,}049$$

An dem Zwischenergebnis $0{,}99 - 0{,}941$ sehen wir, dass wir richtig liegen. Bei c waren noch 99 % übrig und bei e sind noch $99\,\% \cdot 95\,\% = 94{,}1\,\%$ übrig. Die Differenz gibt an, wie viel auf der Kante abgezogen wurde.

Daraus entsteht folgender Graph:



Darauf können wir jetzt den Dijkstra-Algorithmus anwenden. Wir initialisieren zunächst das Distanzarray d und das Vorgängerarray vor:

$v:$	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
$\mathrm{d}[v]:$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\mathrm{vor}[v]:$	nil							

Weiterhin ist $Q = V = \{\text{Rostock}, a, b, c, d, e, f, \text{Bangkok}\}$. Wir zählen die Iterationen der äußeren „while $Q \neq \emptyset$ do“ Schleife auf:

1. Der Knoten $u \in Q$ mit kleinstem $\mathrm{d}[u]$ ist Rostock (schließlich ist d für alle anderen ∞).

   Q wird zu $Q \setminus \{u\} = \{a, b, c, d, e, f, \text{Bangkok}\}$.

   Die Menge $N^+(u) \cup Q$ ist $\{a, b, c\}$. Wir iterieren über alle Elemente daraus:

   $v := a$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, a) &< d[a] \\ 0 + 3 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

   Also müssen wir d und vor aktualisieren:

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[a] &:= \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, a) = 0 + 3 = 3 \\ \mathrm{vor}[a] &:= \text{Rostock} \end{aligned}$$

   Der Überblick:

$v:$	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
$\mathrm{d}[v]:$	0	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\mathrm{vor}[v]:$	nil	Rostock						

   $v := b$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, b) &< d[b] \\ 0 + 8 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[b] &:= \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, b) = 0 + 8 = 8 \\ \mathrm{vor}[b] &:= \text{Rostock} \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
$\mathrm{d}[v]$:	0	3	8	∞	∞	∞	∞	∞
$\mathrm{vor}[v]$:	nil	Rostock	Rostock					

$v := c$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, c) &< d[c] \\ 0 + 1 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[c] &:= \mathrm{d}[\text{Rostock}] + \ell(\text{Rostock}, c) = 0 + 1 = 1 \\ \mathrm{vor}[c] &:= \text{Rostock} \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
$\mathrm{d}[v]$:	0	3	8	1	∞	∞	∞	∞
$\mathrm{vor}[v]$:	nil	Rostock	Rostock	Rostock				

2. Damit ist die erste Iteration durch und wir starten gleich in die nächste. Wir suchen wieder den Knoten $u \in Q$ mit dem kleinesten $\mathrm{d}[u]$. Das ist c mit $\mathrm{d}[c] = 1$. Wir entfernen c aus Q:

$$Q := Q \setminus \{c\} = \{a, b, d, e, f, \text{Bangkok}\}$$

Und iterieren über alle Nachbarn von c, die zudem noch in Q sind. Diese Menge $N^+(u) \cup Q$ ist nur $\{e\}$:

$v := e$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[c] + \ell(c, e) &< d[e] \\ 1 + 4{,}9 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[e] &:= \mathrm{d}[c] + \ell(c, e) = 1 + 4{,}9 = 5{,}9 \\ \mathrm{vor}[e] &:= c \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d$[v]$:	0	3	8	1	∞	5,9	∞	∞
vor$[v]$:	nil	Rostock	Rostock	Rostock		c		

3. Zweite Iteration durch, die dritte folgt. Das $u \in Q$ mit kleinstem d$[u]$ ist a. Q wird zu $\{b, d, e, f, \text{Bangkok}\}$. Wir iterieren wieder über $N^+(u) \cup Q = \{e\}$:

   $v := e$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[a] + \ell(a, e) &< d[e] \\ 3 + 4{,}9 &< 5{,}9 \quad ✗ \end{aligned}$$

   Also muss nichts aktualisiert werden.

4. Das $u \in Q$ mit kleinstem d$[u]$ ist e. Q wird zu $\{b, d, f, \text{Bangkok}\}$. Wir iterieren über $N^+(u) \cup Q = \{b, \text{Bangkok}\}$:

   $v := b$**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[e] + \ell(e, b) &< d[b] \\ 5{,}9 + 1{,}9 &< 8 \quad ✓ \end{aligned}$$

   Also müssen wir d und vor aktualisieren:

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[b] &:= \mathrm{d}[e] + \ell(e, b) = 5{,}9 + 1{,}9 = 7{,}8 \\ \mathrm{vor}[b] &:= e \end{aligned}$$

   Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d$[v]$:	0	3	7,8	1	∞	5,9	∞	∞
vor$[v]$:	nil	Rostock	e	Rostock		c		

   $v :=$ Bangkok**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[e] + \ell(e, \text{Bangkok}) &< d[\text{Bangkok}] \\ 5{,}9 + 9{,}4 &< \infty \quad ✓ \end{aligned}$$

   Also müssen wir d und vor aktualisieren:

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}[\text{Bangkok}] &:= \mathrm{d}[e] + \ell(e, \text{Bangkok}) = 5{,}9 + 9{,}4 = 15{,}3 \\ \mathrm{vor}[\text{Bangkok}] &:= e \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d$[v]$:	0	3	7,8	1	∞	5,9	∞	15,3
vor$[v]$:	nil	Rostock	e	Rostock		c		e

5. Das $u \in Q$ mit kleinstem d$[u]$ ist b. Q wird zu $\{d, f, \text{Bangkok}\}$. Wir iterieren über $N^+(u) \cup Q = \{d, f\}$:

$v := d$**:** d$[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[b] + \ell(b, d) &< d[d] \\ 7{,}8 + 5{,}5 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[d] &:= \mathrm{d}[b] + \ell(b, d) = 7{,}8 + 5{,}5 = 13{,}3 \\ \mathrm{vor}[d] &:= b \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d$[v]$:	0	3	6,8	1	13,3	5,9	∞	14,3
vor$[v]$:	nil	Rostock	e	Rostock	b	c		e

$v := f$**:** d$[u] + \ell(u, v) < d[v]$?

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[b] + \ell(b, f) &< d[f] \\ 7{,}8 + 3{,}7 &< \infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[f] &:= \mathrm{d}[b] + \ell(b, f) = 7{,}8 + 3{,}7 = 11{,}5 \\ \mathrm{vor}[f] &:= b \end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d$[v]$:	0	3	7,8	1	13,3	5,9	11,5	15,3
vor$[v]$:	nil	Rostock	e	Rostock	b	c	b	e

6. Das $u \in Q$ mit kleinstem d$[u]$ ist f. Q wird zu $\{d, \text{Bangkok}\}$. Wir iterieren über $N^+(u) \cup Q = \{\text{Bangkok}\}$:

$v :=$ Bangkok**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u,v) < d[v]$?

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[f] + \ell(f, \text{Bangkok}) &< d[\text{Bangkok}] \\ 11{,}5 + 3{,}5 &< 15{,}3 \quad ✓\end{aligned}$$

Also müssen wir d und vor aktualisieren:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\text{Bangkok}] &:= \mathrm{d}[f] + \ell(f, \text{Bangkok}) = 11{,}5 + 3{,}5 = 15 \\ \mathrm{vor}[\text{Bangkok}] &:= f\end{aligned}$$

Der Überblick:

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d[v] :	0	3	7,8	1	13,3	5,9	11,5	15
vor[v] :	nil	Rostock	e	Rostock	b	c	b	f

7. Das $u \in Q$ mit kleinstem d[u] ist d. Q wird zu $\{\text{Bangkok}\}$. Wir iterieren über $N^+(u) \cup Q = \{\text{Bangkok}\}$:

   $v :=$ Bangkok**:** $\mathrm{d}[u] + \ell(u,v) < d[v]$?

   $$\begin{aligned}\mathrm{d}[d] + \ell(d, \text{Bangkok}) &< d[\text{Bangkok}] \\ 13{,}3 + 1{,}7 &< 15 \quad ✗\end{aligned}$$

   Also müssen wir nichts aktualisieren.
8. Bleibt zuletzt $u :=$ Bangkok. Q wird zu $\emptyset$. Die Menge $N^+(u) \cup Q$ ist leer, also brauchen wir nichts machen.

Ausgehend vom letzten Überblick

v :	Rostock	a	b	c	d	e	f	Bangkok
d[v] :	0	3	7,8	1	13,3	5,9	11,5	15
vor[v] :	nil	Rostock	e	Rostock	b	c	b	f

ist der kürzeste Weg von Rostock nach Bangkok:

$$\text{Rostock} \to c \to e \to b \to f \to \text{Bangkok}$$

Dieser Weg hat Kosten von 15, also muss man mindestens 15 % Bearbeitungsprovision bezahlen.

Aufgabe 15 Sie möchten 100 US Dollar für möglichst wenig Euro erwerben. Zum einen können Sie direkt den Preis für einen Dollar in Euro erfragen und dann den Betrag für 100 Dollar bezahlen. Oder Sie können beispielsweise zuerst Dollar für Währung x erstehen, anschließend x für y und dann erst y für Euro kaufen. Dabei werden die 100 US Dollar mit dem jeweiligen Wechselkurs multipliziert bis man am Ende Euros erhält. Natürlich soll ein möglichst günstiger Kaufweg gefunden werden.

Einige Devisenkurse vom 21. Juni 2018 (onvista.de):

	EUR	USD	RUB	JPY	GBP	CHF
EUR	—	1,1546	73,5960	127,6220	0,8734	1,1496
USD	0,8661	—	63,7773	110,5340	0,7565	0,9954
RUB	0,0135	0,0156	—	1,7334	0,0118	0,0156
JPY	0,0078	0,0090	0,5769	—	0,0068	0,0090
GBP	1,1448	1,3219	84,2200	146,1130	—	1,3162
CHF	0,8692	1,0042	63,9690	111,0060	0,7592	—

Begründen Sie, dass hier ein Kürzeste-Wege-Problem vorliegt und welches Lösungsverfahren Sie hierfür verwenden würden.

Beginnen wir mit einem Rechenbeispiel. Wenn man direkt 100 US Dollar für Euro haben möchte, dann gilt die Gleichung:

$$100\,\text{USD} = 86{,}61\,\text{EUR}$$

Schauen wir mal, was passiert, wenn wir einen Umweg gehen, so wie er in der Aufgabenstellung beschrieben ist (wir nehmen RUB für x und JPY für y).

$$100\,\text{USD} = 100 \cdot 63{,}7773\,\text{RUB} = 100 \cdot 63{,}7773 \cdot 1{,}7334\,\text{JPY} = 100 \cdot 63{,}7773 \cdot 1{,}7334 \cdot 0{,}0078\,\text{EUR} = 86{,}23\,\text{EUR}$$

Das wäre günstiger, als Euros direkt für US Dollar zu tauschen.

Entlang des Pfades USD → RUB → JPY → EUR werden die Umrechnungskurse multipliziert.

3 Mögliche Klausurfragen

1. Was ist die Dualität in der linearen Optimierung und wie erhält man zu einem LP das duale?