Toán Giải tích

Giáo trình/bài giảng:

[1]. Toán cao cấp, Nguyễn Đình Trí (chủ biên).

[2] James Stewart (2008). Caculus (six edition), Thomson Brooks Cole Publishing Company.

[3]. Lê Đức Vĩnh, Nguyễn Thị Minh Tâm (2014). Giáo trình Toán cao cấp. Nhà xuất bản Đại học Nông nghiệp Hà Nội.

[4]. Lê Văn Tiến (1998). Giáo trình Toán cao cấp. Nhà xuất bản Nông nghiệp Hà Nội.

Yêu cầu với Sinh viên

1. Có giáo trình [1] và làm bài tập theo yêu cầu của giảng viên.
2. Dự lớp tối thiểu 80% (không nghỉ quá 5 buổi)
3. Trong lớp trật tự, không nói chuyện, không dùng điện thoại, điện thoại im lặng.
4. Lớp trưởng học phần phụ trách mượn mic, điều khiển, dây điện…

Nội dung

- **Chương 1. Hàm số một biến số**
  - Định nghĩa hàm một biến số thực
  - Giới hạn của hàm số, hàm số liên tục
  - Đạo hàm và vi phân của hàm số một biến số
  - Công thức Taylor
- **Chương 2. Phép tính tích phân hàm một biến**
  - Tích phân bất định
  - Tích phân xác định
  - Tích phân suy rộng loại 1
  - Ứng dụng của tích phân xác định

Nội dung

- **Chương 3. Chuỗi số và chuỗi hàm**

  - Chuỗi số

  - Chuỗi hàm và chuỗi lũy thừa

- **Chương 4. Hàm nhiều biến**

  - Định nghĩa hàm nhiều biến

  - Đạo hàm và vi phân của hàm nhiều biến

  - Cực trị của hàm nhiều biến.

Nội dung

- **Chương 5. Tích phân bội hai**

  - Tích phân kép

  - Ứng dụng của tích phân kép

- **Chương 6. Phương trình vi phân**

  - Phương trình vi phân cấp 1

  - Phương trình vi phân cấp 2

Chương 1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Ví dụ 1. Diện tích S của đường tròn bán kính r?

$$S = \pi r^2$$

Chú ý: Mỗi giá trị của r chỉ xác định duy nhất 1 giá trị S.

Ta nói S là hàm của r

Ví dụ 2. Dân số thế giới P phụ thuộc vào thời điểm t.

năm	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Dân số (triệu người)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

Mỗi t cố định thì P nhận giá trị cố định.

Ta nói P là hàm theo t

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Ví dụ 3. Chi phí vận chuyển bưu phẩm C thì phụ thuộc vào cân nặng w của bưu phẩm.

Ta có C là một hàm theo w.

Ví dụ 4. Nhiệt độ T (theo °F) được ghi lại theo thời gian 2h một lần từ nửa đêm đến 14h chiều ở Atlanta vào ngày 4 tháng 6 năm 2013 cho bởi bảng sau (t tính theo h)

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	74	69	68	66	70	78	82	86

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.1. Định nghĩa hàm số một biến số thực

Định nghĩa ánh xạ:

1) Cho hai tập hợp X, Y. Một tương ứng $f: X \to Y$ được gọi là một *ánh xạ* nếu nó thỏa mãn mỗi phần tử $x \in X$ cho tương ứng với một và chỉ một phần tử $f(x) \in Y$.

Hay, một tương ứng $f: X \to Y$ là một ánh xạ nếu thỏa mãn hai điều kiện:

i) $\forall x \in X$ thì $f(x) \in Y$

ii) $x_1 = x_2$ thì $f(x_1) = f(x_2)$

2) Ánh xạ *f* được gọi là *đơn ánh* nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì kéo theo $x_1 = x_2$

3) Ánh xạ *f* được gọi là *toàn ánh* nếu $\mathrm{Y} = f(X)$

(*tức là* $\forall y \in Y$ *thì* $\exists x \in X: f(x) = y$)

4) Ánh xạ *f* được gọi là *song ánh* nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Nhận xét: Nếu f là song ánh thì $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ luôn có nghiệm duy nhất.

5) Nếu f là song ánh thì tồn tại một ánh xạ $f^{-1}: Y \to X$ xác định như sau:

$$f^{-1}(y) = x \text{ sao cho } f(x) = y$$

Khi đó f^{-1} được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f.

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Định nghĩa hàm số:

Cho *X, Y* là các tập con khác rỗng của tập số thực R ($\emptyset \neq D, E \subseteq R$). Một hàm số *f* từ *X* vào *Y* là một quy tắc cho tương ứng với mỗi số thực cho trước x thuộc tập *X* ($x \in X$) với duy nhất một số thực, kí hiệu $f(x)$, trong tập *Y*.

\+ *X* được gọi là tập xác định của hàm *f*

\+ *x* là biến của hàm số *f*.

\+ *f(x)* là giá trị của hàm *f* tại điểm *x*.

\+ tập giá trị của hàm *f* trên miền *X* là tập hợp tất cả các giá trị của *f(x)* khi $x \in X$.

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Biểu diễn hàm số: có nhiều cách như

+ Biểu diễn bằng công thức (biểu thức)

+ Biểu diễn bằng bảng số liệu

+ Biểu diễn bằng đồ thị

Chú ý về tập xác định của hàm số:

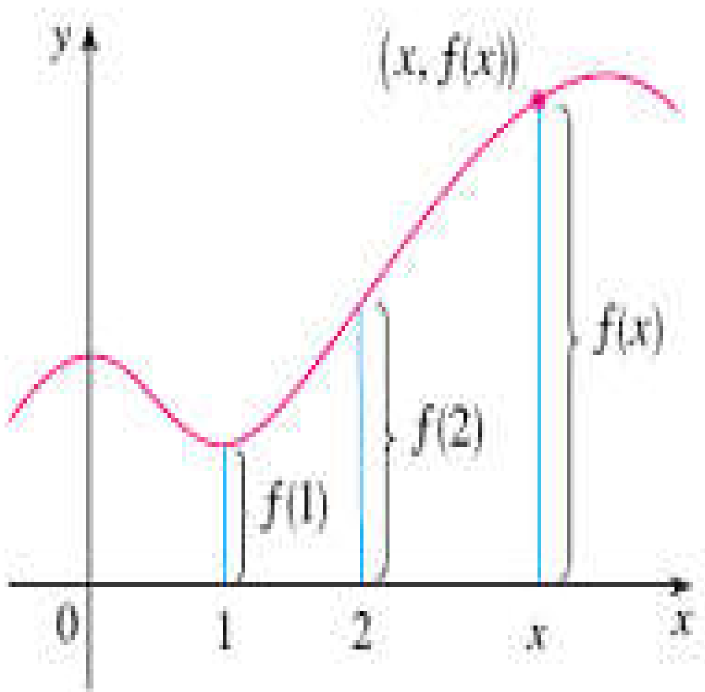
-Khi viết hàm cho bởi công thức, không nói gì thêm thì ta hiểu tập xác định của hàm số là tập hợp nhưng biến để công thức xác định hàm số có nghĩa.

-Khi viết rõ miền giá trị của biến x, thì tập xác định là miền được chỉ rõ.

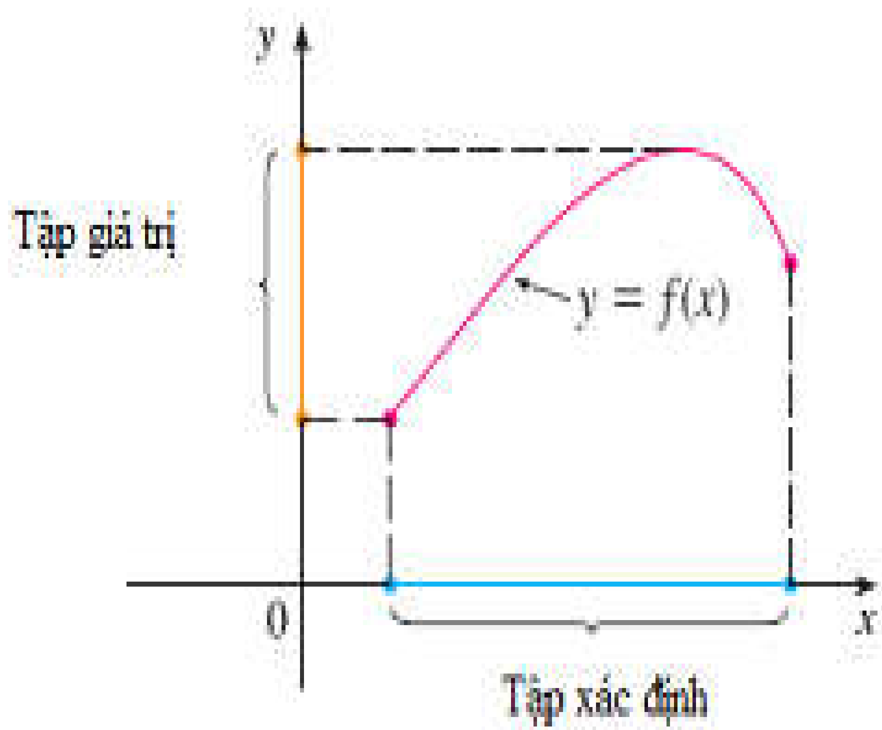
Chẳng hạn $y = \sin x\,, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì tập xác định là $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

- Đồ thị của hàm một biến: Đồ thị của hàm số f xác định trên miền D là $G_f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$



Hình 4



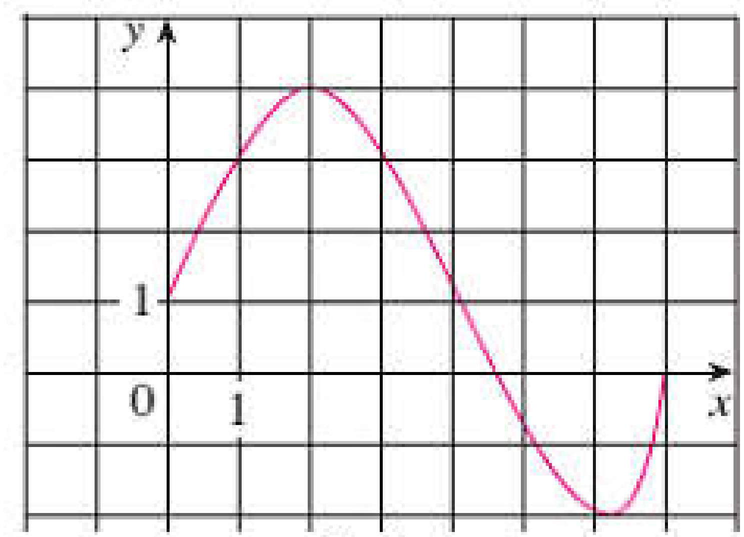
Hình 5

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Ví dụ 1. Cho đồ thị hàm số

a) Tìm giá trị của f(1), f(5)

b) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số



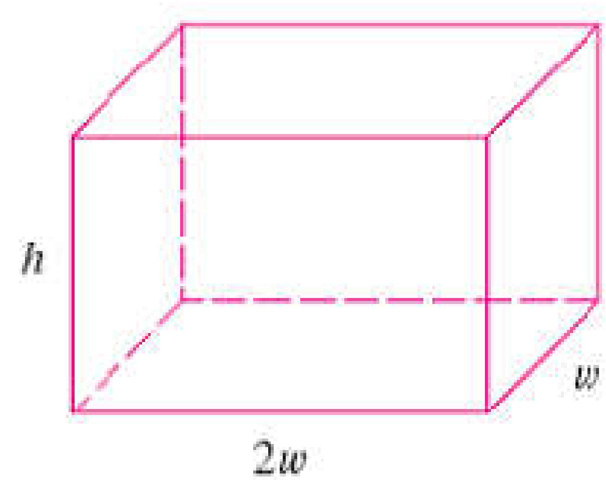
Hình 6

§1. HÀM MỘT BIẾN SỐ THỰC

Ví dụ 2. Một container hình Hộp chữ nhật không có nắp phía trên, với thể tích là $10m^3$. Chiều dài đáy bằng 2 lần chiều rộng. Nguyên liệu làm đáy là 10$ một m^2, làm mặt bên là 6$ một m^2. Giá nguyên liệu làm chiếc container này là một hàm theo chiều rộng mặt đáy, hãy

a) biểu diễn hàm trên.

b) Mặt đáy có chiều rộng 3 m thì chi phí làm chiếc container này là bao nhiêu?



1.2. Một số hàm số một biến số

1.2.1. Hàm tuyến tính: $y = ax + b$ với a, b là hằng số

Ví dụ: Bạn Nam tham gia đi bộ Walkathon quyên góp tiền từ thiện. Bạn Nam được thưởng trước 5.000 (VNĐ) và mỗi vòng đi bộ được thưởng thêm 10.000 (VNĐ). Để kiếm được số tiền 55000 VNĐ, 75000 VNĐ thì bạn Nam cần đi bao nhiêu vòng?

Lập hàm số về mối quan hệ giữa số tiền và số vòng đi bộ của bạn Nam?

ĐS: Để kiếm được 55000 VNĐ, bạn Nam cần đi 5 vòng

Để kiếm được 75000 VNĐ, bạn Nam cần đi 7 vòng

Hàm số: $f(x) = 10000x + 5000$

1.2. Một số hàm số một biến số

1.2.2. Hàm đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Với $a_i (i = 0,1, \ldots, n)$ là các hằng số, x là biến

Vật lí: quãng đường đi được của vật rơi tự do theo thời gian t là $h = \frac{gt^2}{2}$.

Ví dụ: Một giọt mưa rơi được 100m trong giây cuối cùng trước khi chạm đất. Nếu xem giọt mưa là rơi tự do thì nó bắt đầu rơi ở độ cao bao nhiêu?

Lấy g =9.8($\frac{m}{s^2}$)

1.2. Một số hàm một biến số

Giải: Độ cao ban đầu của giọt mưa $h = \frac{gt^2}{2}$

Quãng đường giọt mưa rơi được trước khi chạm đất 1 s là $h_1 = \frac{g(t-1)^2}{2}$

Quãng đường giọt mưa rơi trong giây cuối cùng là

$$\Delta h = h - h_1 = \frac{g(2t-1)}{2} = 100m$$

Vậy t = 10.7 (s)

Vậy giọt mưa rơi từ độ cao $h = \frac{gt^2}{2} = 561.4\ (m)$

1.2. Một số hàm một biến số

1.2.3. Hàm lũy thừa: $f(x) = x^a$ với *a* là một hằng số

Ví dụ: Bài toán lãi ngân hàng

Một người đầu tư 100 triệu vào một ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất 13% /1 năm. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi (giả sử lãi suất hàng năm *r* không đổi).

-Giả sử số tiền ban đầu là P_0

-Sau n năm ta có số tiền: $P_n = P_0(1+r)^n$

1.3. Một số hàm một biến số

- 1.3.4. Hàm phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- 1.3.5. Hàm mũ $f(x) = a^x$
- 1.3.6. Hàm Logarit $f(x) = \log_a x$

Các bài toán ứng dụng của hàm logarit bài toán trong các bài toán về âm thanh, động đất, ...

1.4. Hàm ngược

Quan sát thị trường vàng ở một quận tại Hà Nội vào một thời điểm nào đó, người ta ghi nhận được thông tin sau:

Giá 1chỉ (triệu đồng)=: P	Lượng cầu(kg)=: Q_d
1,5	5
1,4	10
1,3	20
1,0	30
0,9	50
0,8	60

Lượng cầu là hàm của Giá cả

1.4. Hàm ngược

Đặt Q_d là *lượng cầu*(Quantity Demanded) và P(Price) là *giá một chỉ vàng* vào thời điểm đang xét, ta thấy bảng trên cho ta thấy Q_d là một hàm của P: $Q_d = f(P)$ và lượng cầu tăng khi giá giảm.

Nhà kinh doanh có thể quan tâm đến việc P phụ thuộc vào Q_d như thế nào, nói cách khác người này có thể xem P là hàm của Q_d, hàm này được gọi là *hàm ngược* của hàm f, được ký hiệu bởi f^{-1} đọc là f nghịch đảo. Như vậy $P = f^{-1}(Q_d)$ là mức giá tại lượng cầu Q_d. Giá trị của f^{-1} có thể được tìm từ bảng trên bằng cách đặt tương ứng từ phải sang trái, để cho tiện ta có thể xây dựng bảng như dưới đây bằng cách đảo hai cột trong bảng ở trên. Chẳng hạn $f^{-1}(20) = 1{,}3$ bởi vì $f(1{,}3) = 20$.

Lượng cầu(kg)	Giá 1chỉ (triệu đồng)
5	1,5
10	1,4
20	1,3
30	1,0
50	0,9
60	0,8

Giá cả là hàm của Lượng cầu

1.4. Hàm ngược

Định nghĩa: Giả sử $f: X \to Y$ là song ánh. Khi đó tồn tại một hàm ngược $f^{-1}: Y \to X$ xác định như sau

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Với mọi $y \in Y$.

Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm

$a)\ f(x) = x^3 + 2.$

$b)\ f(x) = \sin x\ \ với\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$c)\ f(x) = cos\,x\ \ với\ x \in [0, \pi\ ]$

$d)\ f(x) = tan\,x\ \ với\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

*) Hàm sơ cấp

- Những hàm số mũ, lũy thừa, lượng giác và các hàm ngược của nó được gọi là các hàm sơ cấp.

1.5. Giới hạn của hàm một biến

Một số khái niệm:

1) Điểm tụ: Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của X nếu $\forall x > 0, \exists x \in X$ mà $x \in U_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}$

2) Giới hạn tại một điểm:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0 \text{ mà } x_n \to x_0 \text{ thì } f(x_n) \to a\}$$

3) Giới hạn phải, giới hạn trái tại một điểm:

*) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X, x_n > x_0 \text{ mà } x_n \to x_0 \text{ thì } f(x_n) \to a\}$

*) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X, x_n < x_0 \text{ mà } x_n \to x_0 \text{ thì } f(x_n) \to a\}$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

Một số khái niệm:

4) Giới hạn tại điểm vô cực:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X \text{ mà } x_n \to \infty \text{ thì } f(x_n) \to a\}$

5) Giới hạn vô cực:

*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0 \text{ mà } x_n \to x_0 \text{ thì } f(x_n) \to \pm\infty\}$

*) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \{\forall\{x_n\} \subset X \text{ mà } x_n \to \infty \text{ thì } f(x_n) \to \pm\infty\}$

Chú ý: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

****) Một số tính chất của giới hạn:***

TC1. Cho $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = a$; $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = b$. Khi đó

1/. $\lim_{x\to x_0} C.f_1(x) = C.\lim_{x\to x_0} f_1(x) = C.a$ với C là hằng số

2/. $\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = a + b$

3/. $\lim_{x\to x_0} (f_1(x).f_2(x)) = a.b$

4/. $\lim_{x\to x_0} (f_1(x): f_2(x)) = a: b$ với điều kiện $b \neq 0$

Nhận xét:

+) Nếu $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ thì

$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P_n(x_0)$

+) Nếu $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ thì $\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{P_n(x_0)}{Q_n(x_0)}$ với điều kiện $Q_n(x_0) \neq 0$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

****) Một số tính chất của giới hạn:***

+) Một số dạng vô định thường gặp: $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $0.\infty$; 1^{∞}; 0^{0}

Một số cách thường dùng để khử dạng vô đinh: đặt nhân tử chung rồi rút gọn; nhân liên hợp; chia cả tử và mẫu cho ẩn có số mũ cao nhất; đổi biến; …

1.5. Giới hạn của hàm một biến

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

TC2. Giả sử ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ với } \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}.$$

Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a$ thì $\lim_{x \to x_0} g(x) = a$

Hệ quả:

Nếu $|f(x)| \le g(x), \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}$ và $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ thì $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

*) Một số giới hạn thường gặp:

1/. $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

2/. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3/. $\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$

(Chú ý: Hai giới hạn 2 và 3 thường dùng để khử dạng vô định 1^∞)

1.5. Giới hạn của hàm một biến

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau (*áp dụng* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{sinbx}$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau (*áp dụng 2/. và 3/.*)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + sinx)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{t}$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

***) Giới hạn một phía**

Xét $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với x thỏa mãn $x < x_0$ hoặc $x > x_0$

Nếu tồn tại giới hạn trên thì ta gọi đó làm các giới hạn một phía.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ (gọi là giới hạn phải nếu } x > x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ (gọi là giới hạn trái nếu } x < x_0)$$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

***) Vô cùng bé và vô cùng lớn**

Định nghĩa 1. Hàm số *f(x)* gọi là một vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Định nghĩa 2. Hàm số *g(x)* gọi là một vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

Nhận xét: Nếu f(x) là VCB khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$

Nếu g(x) là VCL khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{g(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

***) So sánh các vô cùng bé**

Giả sử *f(x)* và *g(x)* là các VCB khi $x \to x_0$. Khi đó

+) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì *f* là VCB bâc cao hơn *g*.

+) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ thì *f* và *g* là hai VCB cùng cấp.

+) Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì *f* và *g* là hai VCB tương đương.

Kí hiệu $f \sim g, x \to x_0$.

Tính chất 1. Nếu $f_1(x) \sim f_2(x); f_2(x) \sim f_3(x), x \to x_0$ thì

$$f_1(x) \sim f_3(x), x \to x_0.$$

Tính chất 2. Nếu $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ và $f_1(x) \sim f_2(x); g_1(x) \sim g_2(x)$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Chú ý: Ta có thể sử dụng TC2 để khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

1.5. Giới hạn của hàm một biến

***) So sánh các vô cùng lớn**

Nếu *f(x)* và *g(x)* là các VCL và tỷ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng là VCL thì *f(x)* là VCL bậc cao hơn *g(x)*.

Chú ý: Khi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ thì ta chỉ cần giữ lại ở tử số và mẫu số các VCL có cấp cao nhất và bỏ đi các VCL có bậc nhỏ hơn.

Ví dụ.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2-3x}{4x^3-7x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}$$

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

1.6.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 nếu thỏa mãn hai điều kiện:

i) Hàm số đó xác định tại x_0 (tức là $x_0 \in Miền\ xác\ định$ và $\exists f(x_0)$)

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm ấy.

$$x_0 \text{ là điểm gián đoạn} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \notin MXĐ\ của\ hàm\ số\ f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \\ Không\ tồn\ tại\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{array}\right.$$

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

1.6.2. Một số tính chất

Cho hai hàm số $f(x)$ & $g(x)$ liên tục trên (a; b). Khi đó:

+) $f(x) + g(x)$ liên tục trên (a; b).

+) $f(x).g(x)$ liên tục trên (a; b).

+) $C.f(x)$ liên tục trên (a; b) với C là hằng số.

+) $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên (a; b) trừ những điểm làm $g(x) = 0$.

Tóm lại: Hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của chúng.

1.6.3. Liên tục phải, liên tục trái

ĐN. Hàm số $f(x)$ là liên tục trái tại $x = x_0$ nếu nó xác định tại x_0 và $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $f(x)$ là liên tục phải tại $x = x_0$ nếu nó xác định tại x_0 và $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ nếu nó liên tục cả hai phía tại x_0

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

1.6.3. Liên tục phải, liên tục trái

ĐN. 1) Hàm số $f(x)$ là liên tục trái tại $x = x_0$ nếu nó xác định tại x_0 và $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

2) Hàm số $f(x)$ là liên tục phải tại $x = x_0$ nếu nó xác định tại x_0 và $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$ nếu nó liên tục cả hai phía tại x_0

4) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a; b) nếu *f(x)* liên tục tại $\forall x \in (a; b)$.

5) Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a; b] nếu *f(x)* liên tục tại $\forall x \in (a; b)$, liên tục trái tại *b* và liên tục phải tại *a*.

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

1.6.3. Liên tục phải, liên tục trái

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm x =2

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2}, nếu\ x \neq 2 \\ 4. nếu\ x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, nếu\ x < 2 \\ x + 2, nếu\ x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, nếu\ x < 2 \\ -2x, nếu\ x \geq 2 \end{cases}$

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1, nếu\ x \le 1 \\ 3 - ax^2, nếu\ x > 1 \end{cases}$

Tìm *a* để hàm số liên tục với mọi *x*. Với *a* vừa tìm được, hãy vẽ đồ thị của *f(x)*.

Ví dụ 3. Xét sự liên tục của hàm số

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, nếu\ x \ne 2 \\ A, nếu\ x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x, nếu\ x < 0 \\ a + x, nếu\ x \ge 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2a, nếu\ x > 2 \\ 4^x, nếu\ x \le 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x.sin\frac{1}{x}, nếu\ x > 0 \\ 4^x + a, nếu\ x \le 0 \end{cases}$

1.6. Tính liên tục của hàm một biến

Ví dụ 4. Tìm các số thực a, b sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, với\ x \le 1 \\ 3x, với\ 1 < x < 2 \\ bx^2, \quad với\ x \ge 2 \end{cases}$$

Liên tục tại điểm $x = 1$ và gián đoạn tại điểm $x = 2$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-2x}-1}{x}, với\ x \ne 0 \\ a, với\ x = 0 \end{cases}$

Xác định tham số a để hàm số liên tục tại điểm $x = 0$

§2. Đạo hàm của hàm một biến

2.1. Định nghĩa đạo hàm

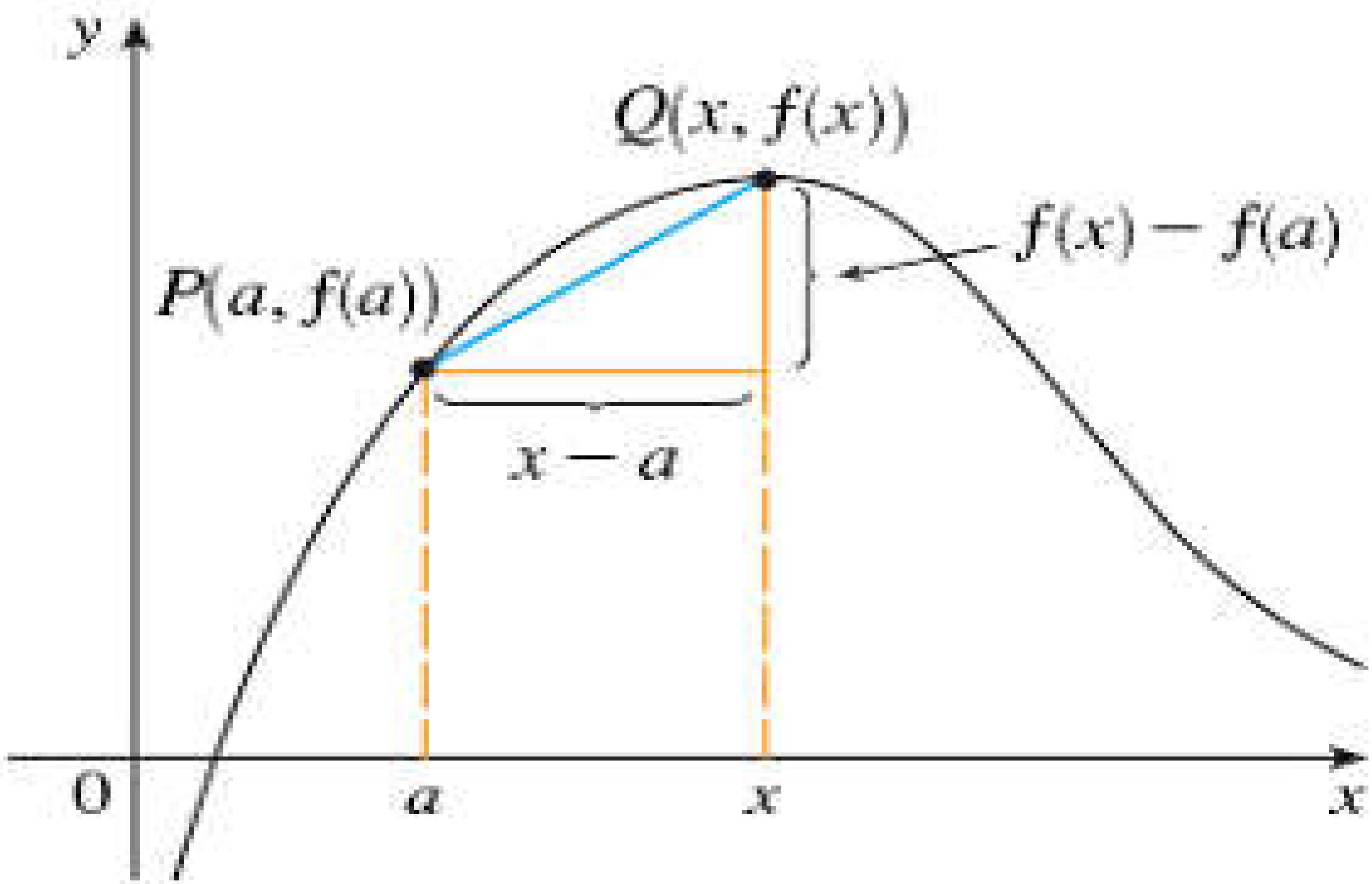
2.2. Đạo hàm một phía

2.3. Đạo hàm của một số hàm cơ bản

2.4. Đạo hàm cấp cao

2.1. Định nghĩa đạo hàm

- Xét bài toán tìm tiếp tuyến với đường cong



2.1. Định nghĩa đạo hàm

Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, ta muốn tìm tiếp tuyến với (C) tại $P(a, f(a))$, trước hết ta xét một điểm $Q(x, f(x))$ gần điểm P và đi tính hệ số góc của cát tuyến PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cho Q tiến đến P dọc theo đường cong bằng cách cho x tiến đến a. Nếu m_{PQ} tiến đến số m, thì ta xác định được tiếp tuyến là đường thẳng đi qua P với hệ số góc là m.

Như vậy, để xác định được tiếp tuyến ta phải đi tìm giới hạn:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

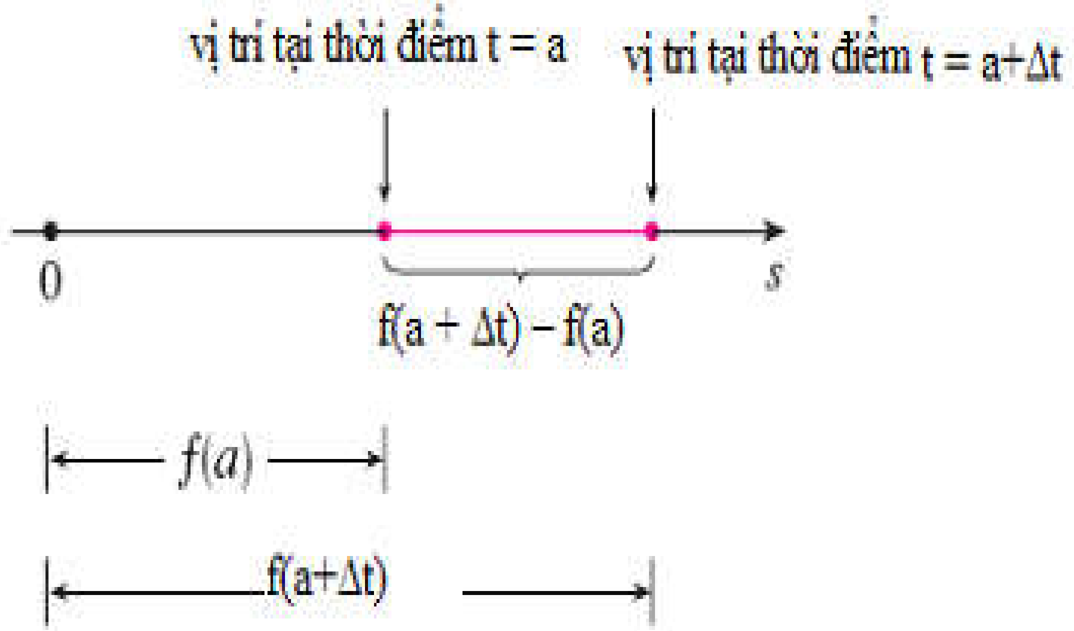
Đặt $\Delta x = x - a$, chính là lượng thay đổi của biến độc lập, và gọi là số gia biến độc lập thì ta có

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + a) - f(a)}{\Delta x}$$

2.1. Định nghĩa đạo hàm

- Vận tốc tức thời

Vận tốc tức thời: Một vật chuyển động trên một đường thẳng với phương trình chuyển động là $s = f(t)$, trong đó s là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian là t. Hàm f mô tả quãng đường của vật đi được sau khoảng thời gian là t và được gọi là **hàm định vị** của vật. Trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = a + \Delta t$ vật đi được một quãng đường là $f(a + \Delta t) - f(a)$.



Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian này là: $v_{tb} = \dfrac{\text{quãng đường đi được}}{\text{thời gian}} = \dfrac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t}$

2.1. Định nghĩa đạo hàm

Nếu ta tính vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $[a, a + \Delta t]$ ngày càng ngắn, nghĩa là Δt càng gần 0, thì ta càng thấy rõ được vận tốc của vật tại thời điểm gần thời điểm a. Ta gọi vật tốc tại thời điểm a, ký hiệu bởi $v(a)$, là giới hạn $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t}$, nếu tồn tại.

Đặt $t = a + \Delta t$, ta được:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}$$

2.1. Định nghĩa đạo hàm

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) xác định trên (a; b). Hàm số f(x) gọi là khả vi tại điểm $x_0 \in (a;b)$ nếu tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

Số A được gọi là đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0. Kí hiệu $f'(x_0)$.

Hàm số f(x) được gọi là khả vi trên (a; b) nếu f(x) khả vi tại $\forall x \in (a;b)$

Nhận xét:

1) Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$: số gia của đối số

và $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: số gia của hàm số

thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

2) Vì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$\to f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + o(\Delta x)$

với $o(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx, khi $\Delta x \to 0$.

2.1. Định nghĩa đạo hàm

Nhận xét:

3) Nếu *f(x)* khả vi tại x_0 thì *f(x)* liên tục tại x_0

4) $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ và phương trình tiếp tuyến tại M_0 là

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

2.1. Định nghĩa đạo hàm

Ví dụ: Cho hàm số $f = \sqrt[3]{x}$. Xét $x_0 = 1$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Vậy f có đạo hàm tại 1 và $f'(1) = \dfrac{1}{3}$.

2.2. Các quy tắc lấy đạo hàm

Tính chất 1. Cho hai hàm số *f(x)* và *g(x)* xác định trên *(a; b)*. Giả sử *f(x)* và *g(x)* khả vi trên *(a; b)*. Khi đó $f(x) + g(x); f(x).g(x)$ cũng khả vi trên *(a; b)* và:

+) $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$

+) $\big(f(x).g(x)\big)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

+) $\big(C.f(x)\big)' = C.f'(x)$, với *C* là hằng số.

Tính chất 2. (*Đạo hàm của hàm số hợp*) Cho hàm số hợp $y = f(u)$ với $u = u(x)$. Khi đó

$$y' = f'(u).u'(x)$$

2.2. Các quy tắc lấy đạo hàm

Tính chất 3. (*Đạo hàm của hàm số ngược*)

Giả sử hàm số $f: [a; b] \to [c; d]$ có hàm số ngược là

$$g = f^{-1}: [c; d] \to [a; b]$$

Nếu f(x) có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$ và $f'(x_0) \neq 0$ thì g(x) có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Tính chất 4. (*Đạo hàm theo tham số*) Cho hàm số $y = y(x)$ với

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \textit{các hàm số } f(t), g(t) \textit{khả vi } \forall t \in (\alpha; \beta)$$

$$\to y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \textit{với đk } f'(t) \neq 0$$

2.3. Đạo hàm một phía

* ***Đạo hàm bên phải của hàm số y = f(x) tại số a***, được ký hiệu là $f'(a^+)$, là

$$f'(a^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x + a) - f(a)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn tồn tại.

* ***Đạo hàm bên trái của hàm số y = f(x) tại số a***, được ký hiệu là $f'(a^-)$, là

$$f'(a^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x + a) - f(a)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn tồn tại.

Từ định nghĩa này ta hiểu **hàm số có đạo hàm trên khoảng (a; b)** nghĩa là có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a; b) và **hàm số có đạo hàm trên [a; b]** nghĩa là hàm số có đạo hàm trên (a; b), có đạo hàm trái tại b và đạo hàm phải tại a.

2.3. Đạo hàm một phía

Định lý 1. Hàm số có đạo hàm tại *a* khi và chỉ khi tồn tại đạo hàm trái, đạo hàm phải và hai đạo hàm bằng nhau.

Nếu biết hàm số liên tục tại *a* thì liệu hàm số có đạo hàm tại *a* hay không và ngược lại? Định lý sau trả lời câu hỏi đó.

Định lý 2. Nếu hàm số có đạo hàm tại a thì liên tục tại đó.

CHÚ Ý: Điều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại 0.

Tuy nhiên $f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, f'(0^-) = -1$, tức là hàm số không có đạo hàm tại 0.

2.4. Đạo hàm của một số hàm cơ bản

- $(C)' = 0$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(x \neq 0)$
- $(x)' = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ với $\alpha \neq 1$ và
  * $x \in \mathbb{R}$, nếu α là số nguyên ≥ 2;
  * $x \in \mathbb{R}^*$, nếu α là số nguyên âm;
  * $x \in (0; +\infty)$, nếu $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
- $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n-1]{x^{n-1}}}$ với
  \+ $x > 0$ nếu n chẵn;
  \+ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ nếu n lẻ.
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ \forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\ \forall x \neq k\pi$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1; 1)$
- $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1; 1)$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

2.4. Đạo hàm của một số hàm cơ bản

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$1/.\ y = \cos(x^3 + 5x)$

$2/.\ y = arcsin\sqrt{x^2 - 2x}$

$3/.\ y = \ln(tanx)$

$4/.\ y = \frac{3^x}{x^2}$

$5/.\ y = e^{2x-5}.x^2$

$6/.\ y = \sin(arcsinx)$

Ứng dụng đạo hàm vào tính giới hạn

Để tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$ ta sử dụng quy tắc Lopital:

Nếu: +) $f(x), g(x)$ xác định và khả vi trên một lân cận của điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0)

+) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0\ (hoặc = \infty)$

+) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, với\ k \in R$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

Ứng dụng đạo hàm vào tính giới hạn

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{x}}{sinx}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x}{2x^2}$

$b)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^{\alpha}}$, với $\alpha > 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{2020}}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(x^2.lnx)$

$b)\ A = \lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{1/x^2}$ (dạng 1^{∞})

$c)\ B = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{lnx}$

2.5. Vi phân

Định nghĩa. Theo ĐN đạo hàm, ta có hàm số f(x) khả vi tại x_0 thì

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + o(\Delta x)$$

với $o(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx, khi $\Delta x \to 0$.

Khi đó ta gọi $f'(x_0).\Delta x$ là vi phân của hàm số f tại x_0. Kí hiệu df.

Ta có df $= f'(x_0).\Delta x$

Chú ý: Nếu x là biến độc lập thì $dx = \Delta x$, do đó ta có công thức:

$$df = f'(x).dx$$

$$\to f'(x) = \frac{df}{dx}$$

2.5. Vi phân

Các tính chất cơ bản của vi phân:

1/. $d(C) = 0;\ d(k.u) = k.du$ với $C, k \in R$

2/. $d(u \pm v) = du \pm dv$

3/. $d(u.v) = udv + v.du$

4/. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$

5/. $df(u) = f'(u).du$ (*Công thức vi phân của hàm hợp*)

Ví dụ. Tính

a) Tính df với $f(x) = arctan\frac{2x+1}{3x-5}$

b) Tính $\mathrm{A} = \frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 5x^6 + 7x^9)$

2.5. Vi phân

***) Ứng dụng vi phân tính gần đúng:**

Từ

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + o(\Delta x)$$

với $o(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx, khi $\Delta x \to 0$.

Suy ra

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0).\Delta x$$

$$\to f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

Ví dụ. Áp dụng vi phân toàn phần, tính gần đúng $\sqrt[4]{17}$

Đạo hàm cấp cao và vi phân cấp cao

Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên (a, b). Nếu $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên (a, b), $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp 1 của $f(x)$ trên (a, b). Nếu $f'(x)$ lại có đạo hàm trên (a, b) thì đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ trên (a, b), ký hiêu $f''(x)$ hay $f^{(2)}(x)$. Một cách tổng quát, giả sử tồn tại đạo hàm cấp $n-1$ $(n > 1)$ của $f(x)$ trên (a, b): $f^{(n-1)}(x)$, nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm trên (a, b) thì ta nói thì đạo hàm của $f^{(n-1)}(x)$ là đạo hàm cấp n của $f(x)$ trên (a, b), ký hiệu $f^{(n)}(x)$.

Ví dụ: Xét hàm $f(x) = x^5$. Ta có

$$f'(x) = 5x^4, f''(x) = 20x^3, f^{(3)}(x) = 60x^2.$$

Đạo hàm cấp cao

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

- **Công thức tính đạo hàm bậc cao của tổng, của tích.**

1) $\left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

2) $\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).\, g^{(n-k)}(x)$, với $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Công thức: 2) gọi là công thức ***Leibnitz***)

- **Công thức đạo hàm bậc cao của một số hàm số**

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$.

2) $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$

3) $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$

4) $\left(x^m\right)^{(n)} = m.(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$

5) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

$a)\ y = e^x cos2x$ b) $y = x^2 sinx$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm cấp 20 của hàm số $y = x^2 e^{2x}$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp 8 của hàm số $y = \frac{x^2}{1-x}$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x(1-x)}$ b) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$ c) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

Khai triển Taylor

*) Khai triển Taylor của hàm số là việc khai triển hàm số thành một đa thức.

Giả sử hàm số f có đạo hàm đến cấp n trong một khoảng mở nào đó chứa điểm a, và đạo hàm này là một hàm liên tục tại điểm a. Khi đó

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \quad (2)$$

Ví dụ. Viết khai triển Taylor của hàm $y = \ln(3+x)$ tại điểm $x = -2$ đến đạo hàm cấp 4.

HD: $\ln(3+x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) +$
$\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f^{(3)}(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{f^{(4)}(-2)}{4!}(x+2)^4 + o((x+2)^4)$

Khai triển Maclaurin

*) Khai triển Maclaurin là khai triển Taylor của một hàm số *f(x)* tại điểm *a = 0*.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + o(x^n)$$

trong đó $o(x^n) \to 0\ khi\ x \to 0$

(*công thức này cho phép khai triển một hàm bất kỳ thành đa thức của x*)

Khai triển Maclaurin

Ví dụ 1: Khai triển Maclaurin các hàm số sau:

a) $y = e^x$ b) $y = sinx$

Giải:

- Hàm $y = e^x$, ta có $f^{(p)}(x) = e^x, \forall p$ và $f^{(p)}(0) = 1, \forall p$ nên

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

- Hàm $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Ví dụ khai triển Maclaurin

Ví dụ 2. Khai triển Maclaurin các hàm số sau

a) $f(x) = cosx$ b) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ c) $f(x) = \ln(1+x)$

- Hàm $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Công thức đúng với mọi x.

- Hàm $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Công thức đúng với mọi $x > -1$.

- Hàm $f(x) = \ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$

Công thức đúng với $x > -1$.

Bài tập chương 1

Bài 1. Tìm vi phân của hàm số

$a)\ y = ln\frac{1-x}{1+x}$ b) $y = arcsin\frac{x}{2}$

Bài 2. Tính gần đúng

a) $A = arcsin0,51$ b) $B = tan46^0$

Bài 3. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{1,02}$ b) $B = arctan0,95$

Bài tập chương 1

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp cao bằng cách sử dụng công thức Leibnitz

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . u^{(k)} . v^{(n-k)} ,$$

Bài 4. Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số sau

a) Tính $y^{(10)}$ với $y = x.\sin(3x-1)$

b) Tính $y^{(8)}$ với $y = x^2.e^{5-3x}$

c) Tính $y^{(n)}$ với $y = \frac{x^3}{2x-5}$

d) Tính $y^{(10)}$ với $y = x^3.\ln(5x)$

Bài tập chương 1

Dạng 2. Tìm công thức khai triển Taylor, Maclaurin của hàm *f(x)*.

*) Công thức khai triển Taylor bậc n của hàm f(x) tại điểm $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

*) Công thức khai triển Maclaurin bậc n của hàm f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Bài 5. Tìm đa thức Maclaurin bậc 5 của các hàm f(x) sau:

1) $f(x) = e^x$ 2) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

4) $f(x) = \ln(1+x)$ 5) $f(x) = sinx$

6) $f(x) = cosx$ 7) $f(x) = (1+x)^\alpha, (\alpha \in R)$

Bài tập chương 1

Dạng 2. Tìm công thức khai triển Taylor, Maclaurin của hàm *f(x)*.

*) Công thức khai triển Taylor bậc n của hàm f(x) tại điểm $x = a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

*) Công thức khai triển Maclaurin bậc n của hàm f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Bài 6. 1/. Tìm đa thức Taylor bậc 3 tại $x = 1$ của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

2/. Tìm khai triển Maclaurin bậc 4 của hàm số

$$g(x) = x^2.e^{3x}$$

3/. Tìm đa thức Taylor bậc 3 của hàm số sau tại $x = 0$

$$f(x) = x.cos3x$$