Thiết Kế & Đánh Giá Thuật Toán
Chia Để Trị

TS. Lê Nguyên Khôi
Trường Đại Học Công Nghệ - ĐHQGHN

Nội Dung

- Sắp xếp gộp
- Tìm kiếm nhị phân
- Tính lũy thừa
- Tính số Fibonacci
- Tháp Hanoi
- Nhân ma trận
- Thuật toán Strassen

Kỹ Thuật Thiết Kế Chia Để Trị

- Chia bài toán lớn thành các bài toán nhỏ
  - Bài toán nhỏ đơn giản, giải trực tiếp
  - Nếu không tiếp tục chia nhỏ bài toán con
- Gộp lời giải của các bài toán con để xây dựng lời giải bài toán lớn ban đầu

Sắp Xếp Gộp (Merge Sort)

- Chia: chia đôi mảng
- Trị: Sử dụng đệ quy sắp xếp 2 mảng con
- Gộp: gộp 2 mảng với thời gian tuyến tính

MergeSort $(A, 1, n)$

    if $n = 1$ **return**

    MergeSort $(A, 1, \lceil n/2 \rceil)$

    MergeSort $(A, \lceil n/2 \rceil + 1, n)$

    Merge $(A, 1, \lceil n/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil + 1, n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

chia và gộp

\# bài toán con

độ lớn bài toán con

Định Lý Tổng Quát – (nhắc lại)

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

1. Nếu $f(n) \in \boldsymbol{O}(n^{\log_b a-\epsilon})$ với hằng số $\epsilon > 0$
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$
2. Nếu $f(n) \in \boldsymbol{\Theta}(n^{\log_b a})$
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$
3. Nếu $f(n) \in \boldsymbol{\Omega}(n^{\log_b a+\epsilon})$ với hằng số $\epsilon > 0$
   và $f(n)$ thỏa mãn $af(n/b) \leq cf(n)$ với $c < 1$
$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Sắp xếp gộp: $a = 2$, $b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

$\Rightarrow$ trường hợp 2 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$

Tìm Kiếm Nhị Phân

Tìm một phần tử trong dãy đã sắp xếp

- Chia: Kiểm tra phần tử chính giữa
- Trị: Sử dụng đệ quy tìm kiếm trên 1 mảng con tương ứng
- Gộp: hiển nhiên

Ví dụ: Tìm **9**

3 5 7 8 9 12 15

Tìm Kiếm Nhị Phân

BinarySearch$(A, start, end, X)$

  if $start > end$ **return false**

  $mid = (start + end)/2$

  if $A[mid] = X$ **return true**

  if $A[mid] > X$

    return BinarySearch$(A, start, mid - 1, X)$

  else

    return BinarySearch$(A, mid + 1, end, X)$

Tìm Kiếm Nhị Phân – Phân Tích

$$T(n) = 1T(n/2) + \Theta(1)$$

bài-toán-con

độ lớn bài toán con

chia và gộp

Áp dụng Định Lý Tổng Quát

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1$

$\Rightarrow$ trường hợp 2

$\Rightarrow$ $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right) = \Theta(\log n)$

Tính Lũy Thừa

Bài toán: tính a^n, với $n \in \mathbb{N}$

Thuật toán đơn giản: $\Theta(n)$ tuyến tính

Thuật toán áp dụng chia để trị:

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \times a^{n/2} & n \text{ chẵn} \\ a^{(n-1)/2} \times a^{(n-1)/2} \times a & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) \in \Theta(\log n)$$

Tính Lũy Thừa

Thuật toán áp dụng chia để trị:

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \times a^{n/2} & n \text{ chẵn} \\ a^{(n-1)/2} \times a^{(n-1)/2} \times a & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

PowerN(a, n)

if $n = 0$ **return 1**

if $n \,\%\, 2 = 0$

  return PowerN$\left(a, \frac{n}{2}\right) \times$ **PowerN**$\left(a, \frac{n}{2}\right)$

else

  return PowerN$\left(a, \frac{n-1}{2}\right) \times$ **PowerN**$\left(a, \frac{n-1}{2}\right) \times a$

$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n) \Rightarrow$ **SAI !!!!**

Tính Lũy Thừa

```
PowerN(a, n)
    if n = 0 return 1
    if n % 2 = 0
        p ← PowerN(a, n/2)
        return p × p
    else
        p ← PowerN(a, (n−1)/2)
        return p × p × a
```

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) \in \Theta(\log n)$$

Tính Số Fibonacci

$$F_n = \begin{cases} n & n = 0{,}1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

0 1 1 2 3 5 8 13 21 …

```
Fibonacci(n)
    if n ≤ 0 return 0
    if n = 1 return 1
    return Fibonacci(n − 1)
          + Fibonacci(n − 2)
```

Thuật toán đệ quy: $\Omega(\phi^n)$ (thời gian hàm mũ),
với $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – *golden ratio*

Tính Số Fibonacci

Thiết kế Bottom-up:

- Tính lần lượt F_0, F_1, F_2, ..., F_n theo thứ tự, số sau bằng tổng hai số trước
  - Thời gian chạy: $\Theta(n)$

Tính lũy thừa đệ quy

$F_n = \phi^n/\sqrt{5}$ làm tròn tới số nguyên gần nhất

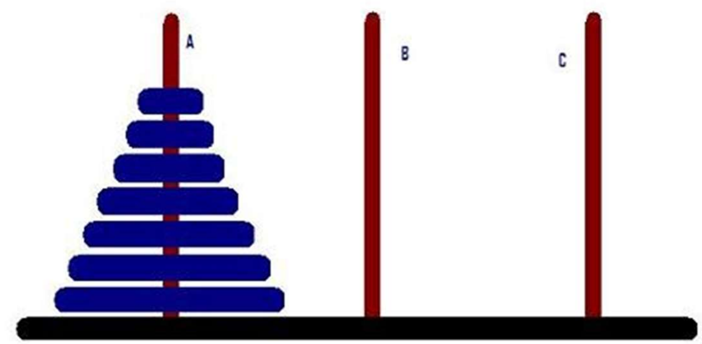
- Tính lũy thừa: $\Theta(\log n)$
  - Tuy nhiên cách này không đáng tin cậy, do dễ có lỗi làm tròn khi tính toán với số thực.

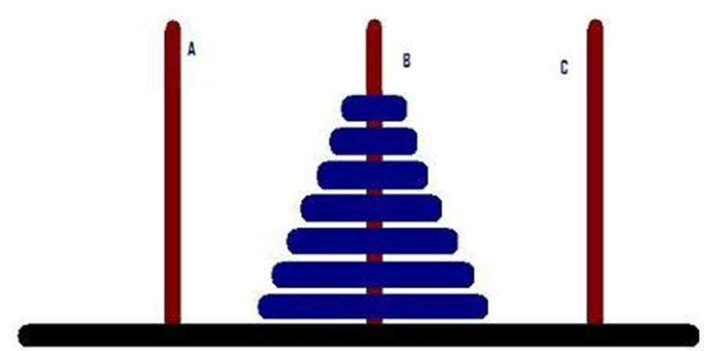
Tháp Hanoi

- Chuyển chồng đĩa từ A sang B sử dụng trung gian C. Đĩa to luôn ở dưới đĩa nhỏ, một đĩa một

```
move(n, A, B, C)
    if n = 1
        chuyển đĩa A sang B
    else
        move(n − 1, A, C, B)
        chuyển đĩa A sang B
        move(n − 1, C, B, A)
```

$$T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$$





Nhân Ma Trận

- Input: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$
- Output: $C = [c_{ij}] = A \cdot B$

  với $i, j = 1, 2, \dots, n$ và

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Nhân Ma Trận – Mã Giả

```
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
        c_ij ← 0
        for k ← 1 to n do
            c_ij ← c_ij + a_ik · b_kj
```

Thời gian chạy $\Theta(n^3)$

Nhân Ma Trận – Chia-Để-Trị

Ý tưởng:

$n \times n$ MT $= 2 \times 2$ MT của $(n/2) \times (n/2)$ MT-con

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B$$

$$\left.\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{8 nhân } \left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right) \text{ MT-con} \\ \text{4 cộng } \left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right) \text{ MT-con} \end{array}$$

Nhân Ma Trận – Phân Tích

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$$

\# bài-toán-con

độ lớn bài toán con

chia và gộp

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$

$\Rightarrow$ trường hợp 1

$\Rightarrow$ $T(n) \in \Theta(n^3)$

Không tốt hơn !!!

Nhân Ma Trận – Thuật Toán Strassen

- Nhân 2×2 ma trận với 7 phép nhân ma trận con

$$P_1 = a \cdot (f - h)$$
$$P_2 = (a + b) \cdot h$$
$$P_3 = (c + d) \cdot e$$
$$P_4 = d \cdot (g - e)$$
$$P_5 = (a + d) \cdot (e + h)$$
$$P_6 = (b - d) \cdot (g + h)$$
$$P_7 = (a - c) \cdot (e + f)$$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$
$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$u = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

7 nhân, 18 cộng/trừ.

Nhân Ma Trận – Thuật Toán Strassen

- Chia: Chia A và B thành $(n/2) \times (n/2)$ ma trận con.
- Trị: Thực hiên đệ quy 7 phép nhân $(n/2) \times (n/2)$ ma trận
- Gộp: Tạo ma trận C sử dụng + và – trên $(n/2) \times (n/2)$ ma trận con

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

Thuật Toán Strassen – Phân Tích

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} = n^{2.81} \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log 7})$$

$\log 7 = 2.81$ trông không nhỏ hơn 3 là mấy.
Tuy nhiên, nên nhớ sự khác biệt là số mũ.
Do đó thời gian chạy sẽ bị ảnh hưởng rất nhiều.
Trên thực thế, thuật toán Strassen's tốt hơn thuật toán thông thường với khoảng $n \geq 32$

Tổng Kết

- Chia để trị chỉ là một trong những phương pháp thiết kế thuật toán.
- Thuật toán chia để trị có thể được phân tích dựa trên quy nạp và phương pháp định lý tổng quát.
- Thông thường phương pháp chia để trị khá hiệu quả.