

Arbeidsnotat

PID og Lead-Lag funksjonsblokk

Oppgavens tittel: PID & LL funksjonsblokker	Dato: 12.04.21
Gruppedeltakere: Håvard Bonde + 5 andre (sensurert i tilfelle de ikke vil bli delt på nett 😊)	Veileder:
Fagkode: IELET2104 Automatiseringsprosjekt	

INNHOOLD

Sammendrag	3
Diskretisering av kontinuerlige uttrykk	4
Z-transformasjon	4
Bakoverdifferanse (Eulers metode)	4
Bilineær transformasjon (Tustins metode)	4
Tidsforskyvning i Z-omenet	5
PID Funksjonsblokk	6
Generelt om PID	6
Sumform	6
Praktiske hensyn	7
Anti-windup	7
Derivasjonskick	7
Derivasjonsfilter (Lavpassfilter)	8
Saturation control	8
Valg av samplingstid	8
Blokkdiagram	9
Generell PID-blokk	9
PID-blokk med praktiske hensyn	9
Diskretisering av PID og utledning av differenslikninger	10
Blokkdiagram diskret tid	10
Utledning av differenslikning: Tustins metode	10
Implementering i GX Works	13
Lead Lag Funksjonsblokk	14
Generelt om Lead-Lag	14
Diskretisering av Lead-Lag element	14
Blokkdiagram i diskret tid	14
Utledning av differenslikning: Eulers metode	15
Utledning av differenslikning: Tustins metode	16
Implementering i GX Works	17
Referanser	18

Sammendrag

Dette arbeidsnotatet tar utgangspunkt i PID- og Lead/Lag-funksjonsblokkene i prosjektet. Dokumentet inneholder generell informasjon om diskretisering av kontinuerlige uttrykk, utledning av differenslikninger for hver funksjonsblokk og implementering i GX Works.

Fullstendig programkode og ytterligere informasjon finnes på Github via denne lenken: [GithubLink](#).

Diskretisering av kontinuerlige uttrykk

Z-transformasjon

Z-transformasjon kan benyttes for å enklere finne løsninger på differenslikninger, og dermed også enklere analysere systemene som benyttes i prosjektet. Den komplekse variabelen z er definert som følger (Anstenrud, 2021):

$$z = e^{sT}$$

Z-transformasjon kan forenkles og dermed benyttes med andre avbildninger enn den nøyaktige som vist over. I dette prosjektet er det benyttet avbildningene bakoverdifferanse og bilinear transformasjon.

Bakoverdifferanse (Eulers metode)

Med bakoverdifferanse kan avbildningen mellom s -planet og z -planet uttrykkes som:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1 - Ts}$$

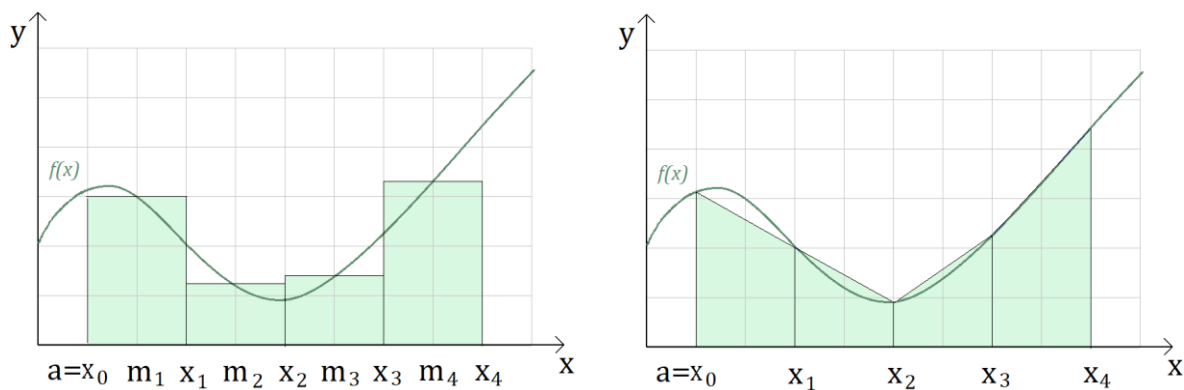
Der T er tastetiden.

Bilineær transformasjon (Tustins metode)

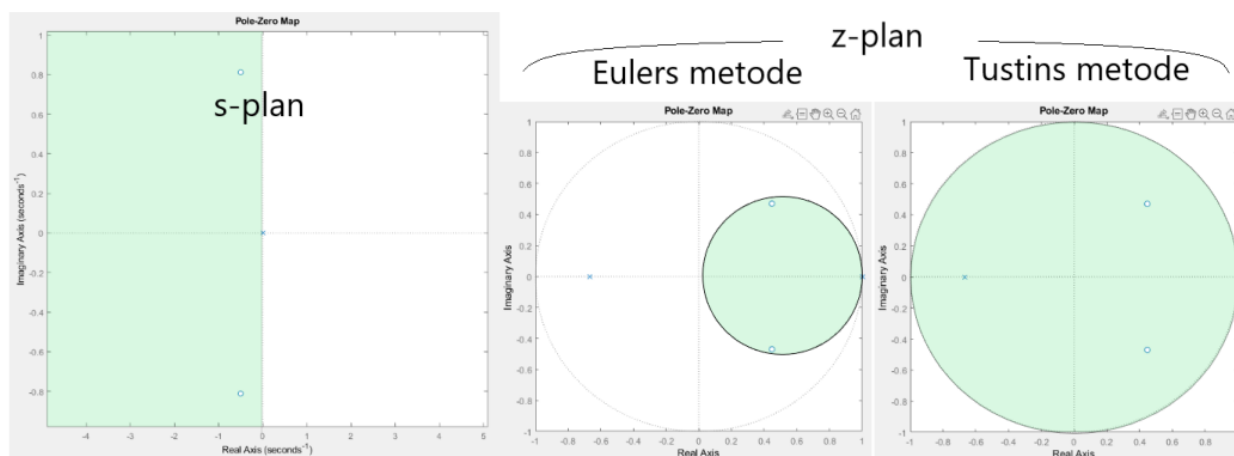
Tustins metode, også kalt bilinear transformasjon, gir det beste forholdet i frekvensdomenet mellom kontinuerlig-tid og diskrete systemer. Dette uttrykkes ved:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

Bilinear transformasjon baserer seg på numerisk integrasjon ved hjelp av trapesmetoden istedenfor rektangelmetoden da førstnevnte er mer nøyaktig. Dette ser vi av figur 1.



Figur 1: Rektangelmetoden og Trapesmetoden. Bildene er tegnet i Paint.



Figur 2: Visualisering av pol plassering i s- og z-plan. Bilder generert på Matlab.

Poler plassert utenfor grønt området gir ustabil system. Vi ser i figur 2 at ved bruk av Tustins metode garanterer man at alle poler i z-plan også er stabile i s-plan. Og vice-versa. Dette kan man ikke garantere ved bruk av Eulers metode.

Tidsforskyvning i Z-domenet

Tidsforskyvning i Z-domenet kan enkelt konverteres til tidsforskyvning i en tallsekvens med sammenhengen

$$Z\{f(k - n)\} = z^{-n} \cdot F(z)$$

Denne sammenhengen blir det bruk for da man må regne fra et z-transformert uttrykk til en differenslikning som kan benyttes i kode. (Anstenrud, 2021)

PID Funksjonsblokk

Generelt om PID

En PID-regulator består av tre deler: En proporsjonaldel, en integraldel og en derivatdel. Proporsjonaldelen virker kun som en forsterkning, mens I- og P-delen av regulatoren har egne egenskaper.

Integraldelen i en PID-regulator har som hovedoppgave å få prosessverdien til å følge settpunkt, og dermed fjerne stasjonært avvik på prosessverdien.

Derivatdelen i en PID-regulator har som hovedoppgave å redusere det dynamiske avviket på prosessverdien, og å stabilisere prosessverdien fortest mulig ved å oscillasjoner (Bjørvik & Hveem, 2014).

Sumform

PID-regulatorer kommer i mange former. Vi har valgt å ta utgangspunkt i regulatorlikningen i boken «Reguleringsteknikk» av K. Bjørvik og P. Hveem. Vi velger sumform fremfor produktform da vi anser denne som mer intuitiv og enklere å programmere. En PID-regulator på sumform kan uttrykkes som følger:

$$h_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{n} s} \right)$$

Merk at lavpassfilter allerede er inkludert i denne likningen. Dette ser man hvis man tar utgangspunkt i følgende:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \text{derivative}$$

$$\frac{N}{s + N} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Low pass filter with cut off at } N \text{ rad/s}$$

Med litt algebraisk manipulasjon av D-leddet i PID-likningen kommer filteret mer tydelig frem og vi får:

$$T_d \cdot s \cdot \frac{n}{s + \frac{n}{T_d}}$$

Praktiske hensyn

Anti-windup

«For a control system with a wide range of operating conditions, it may happen that the control variable reaches the actuators limits. When this happens the feedback loop is broken and the system runs as an open loop because the actuator will remain at its limit independantly of the process output.» (Åström & Hägglund, 2006)

Det Åström og Hägglund beskriver over kalles «windup», ettersom I-leddet potensielt kan bli uendelig stort. Anti-windup har som hensikt å unngå dette.

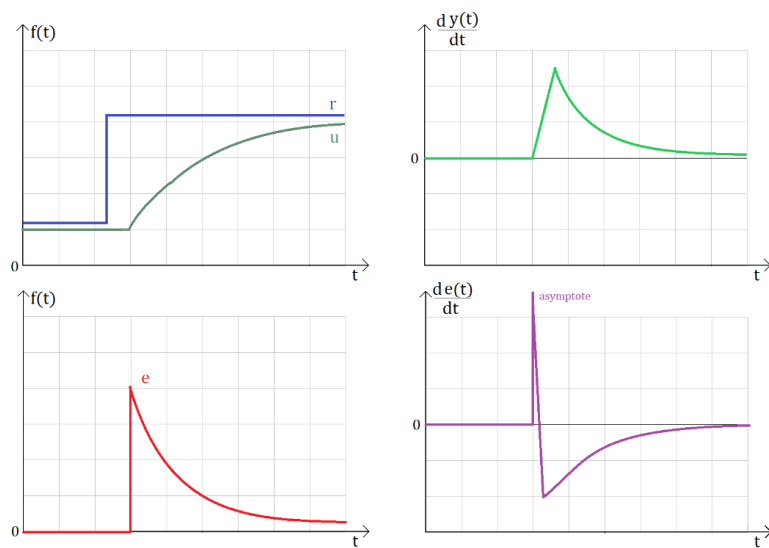
Det finnes flere måter å unngå windup på. Vi har valgt å bruke metoden «Clamping». Clamping kan også kalles betinget integrasjon, og denne metoden unngår at pådraget fra integralleddet akkumulerer i feil retning når regulatoren er i metning. (Taylor, 2017)

Derivasjonskick

Anta at derivasjons-leddet ser på en endring i avviket og at det er et rent derivasjonsledd, samt en samplingstid på 10 ms. Hvis man endrer verdien på settpunktet fra 30 % til 50 % blir pådraget fra D-leddet:

$$\frac{50 - 30}{0.01} = 2000$$

Vi ser at vi får et ekstremt høyt pådrag og at pådraget i teorien kan gå mot uendelig. Dette er ikke ønskelig, og vi kan løse dette ved å se på prosessverdien istedenfor avviket.



Figur 3: Grafer for sprangrespons, avvik, endring i avvik og endring i prosessverdi. Bildet er tegnet i Paint.

Derivasjonsfilter (Lavpassfilter)

Det er ikke ønskelig at derivasjonsleddet skal forsterke støy. For å unngå dette må et lavpassfilter implementeres i derivasjonsleddet, slik at denne støyen fjernes.

Saturation control

Utgangen på regulatoren skal ikke overstige 100% eller gå under 0%. Vi har derfor implementert en metningskontroll ved hjelp av if-statements, slik at pådraget fra regulatoren har en minimum- og maksimum-verdi.

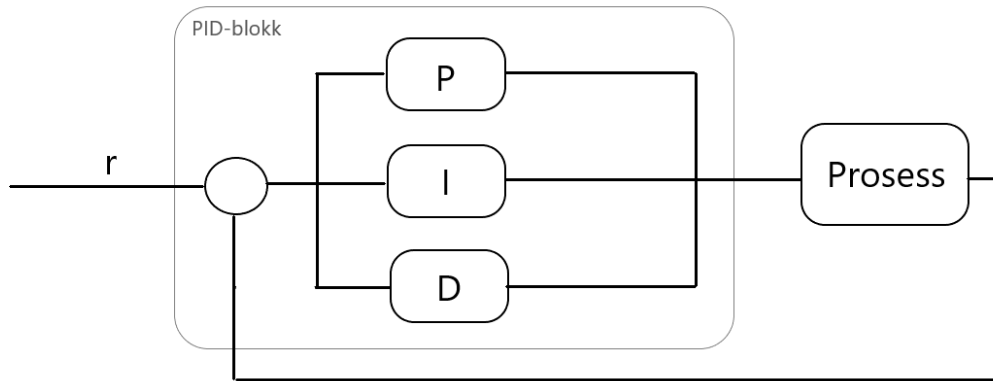
Valg av samplingstid

Det er ønskelig med høyest mulig oppløsning og dermed så lav samplingstid som mulig. Samtidig er det viktig at samplingstiden er forutsigbar. Dette kommer av at filtrenes egenskaper avhenger av samplingstida.

Hvor lav samplingstida kan låses fast til, avhenger av PLS'n og størrelsen på programmet. Derfor har vi laget en egen funksjonsblokk som overvåker samplingstida. Man kan bruke denne til å finne en passende samplingstid. Samtidig er blokken utstyrt med muligheten for alarm/advarsel hvis reell samplingstid går over et brukerdefinert nivå.

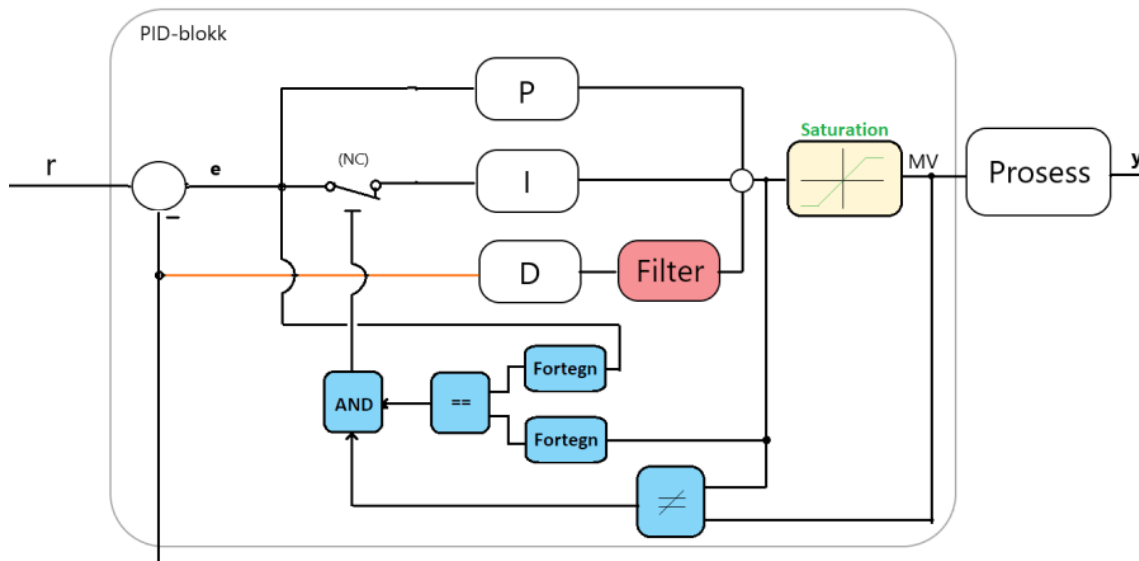
Blokkdiagram

Generell PID-blokk



Figur 4: Blokkdiagram for standard PID regulator.

PID-blokk med praktiske hensyn



Figur 5: Blokkdiagram for PID-blokk med praktiske hensyn

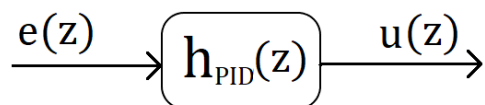
Anti-windup (I-leddet)
Derivasjonskick
Derivasjonsfilter (Lowpass filter)
Saturation control

Blå blokker
Oransje strek
Rød blokk
Gul blokk

Diskretisering av PID og utledning av differenslikninger

Blokkdiagram diskret tid

PID-regulatoren tar inn avviket mellom settpunkt og prosessverdi, og sender ut et pådrag basert på dette. I Z-rommet vil et blokkdiagram av dette kunne ses slik ut:



Figur 6: Utsnitt av blokkdiagram for PID-blokk i diskret tid, z-planet

Utledning av differenslikning: Tustins metode

Vi har fra tidligere bestemt følgende PID-likning i s-planet:

$$h_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{n} s} \right)$$

Diskret avbildninger med Tustins metode:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Substituerer for s vha Tustins metode:

$$h_{PID}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = K_p + K_p \frac{1}{T_i \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} + K_p \frac{T_d \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}{1 + \frac{T_d}{n} \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

Splitter opp u(z) for å lettere behandle likningen:

$$u(z) = h_{PID}(z)e(z) = p(z) + i(z) + d(z)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{p(z)}{e(z)} + \frac{i(z)}{e(z)} + \frac{d(z)}{e(z)}$$

Behandler ett og ett ledd:

P – leddet

$$p(z) = e(z) \cdot K_p$$

$$p[k] = K_p e[k]$$

I – leddet

$$\frac{i(z)}{e(z)} = K_p \frac{1}{T_i \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

$$\frac{i(z)}{e(z)} = \frac{K_p T}{T_i 2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$i(z)(1 - z^{-1}) = \frac{K_p T}{T_i 2} e(z)(1 + z^{-1})$$

Konverterer til differenslikning:

$$i[k] - i[k - 1] = \frac{K_p T}{T_i 2} (e[k] + e[k - 1])$$

$$i[k] = \frac{K_p T}{T_i 2} (e[k] + e[k - 1]) + i[k - 1]$$

D – leddet

$$\frac{d(z)}{e(z)} = K_p \frac{T_d \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}{1 + \frac{T_d}{n} \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

$$\frac{d(z)}{e(z)} = K_p T_d \cdot \frac{\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{\frac{T}{2} + \frac{T_d}{n} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$$

$$\frac{d(z)}{e(z)} = K_p T_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{\left(\frac{T}{2} (1 + z^{-1}) + \frac{T_d}{n} (1 - z^{-1}) \right)}$$

$$d(z) \left(\frac{T}{2} (1 + z^{-1}) + \frac{T_d}{n} (1 - z^{-1}) \right) = e(z) K_p T_d \cdot (1 - z^{-1})$$

Konverterer til differenslikning:

$$\left(\frac{T}{2} + \frac{T_d}{n} \right) d[k] + \left(\frac{T}{2} - \frac{T_d}{n} \right) d[k-1] = K_p T_d \cdot (e[k] - e[k-1])$$

$$d[k] = \frac{K_p T_d \cdot (e[k] - e[k-1])}{\left(\frac{T}{2} + \frac{T_d}{n} \right)} - \frac{\left(\frac{T}{2} - \frac{T_d}{n} \right) d[k-1]}{\left(\frac{T}{2} + \frac{T_d}{n} \right)}$$

$$d[k] = \frac{K_p T_d}{\left(0.5 T + \frac{T_d}{n} \right)} (e[k] - e[k-1]) - \frac{\left(0.5 T - \frac{T_d}{n} \right)}{\left(0.5 T + \frac{T_d}{n} \right)} d[k-1]$$

For å unngå derivasjonskick bruker vi $y[k]$ istedenfor $e[k]$

$$d[k] = \frac{2K_p T_d}{\left(2 \frac{T_d}{n} + T \right)} (y[k] - y[k-1]) + \frac{\left(2 \frac{T_d}{n} - T \right)}{\left(2 \frac{T_d}{n} + T \right)} d[k-1]$$

$$\frac{T_d}{n} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$$

$$d[k] = \frac{2K_p T_d}{(2\tau + T)} (y[k] - y[k-1]) + \frac{(2\tau - T)}{(2\tau + T)} d[k-1]$$

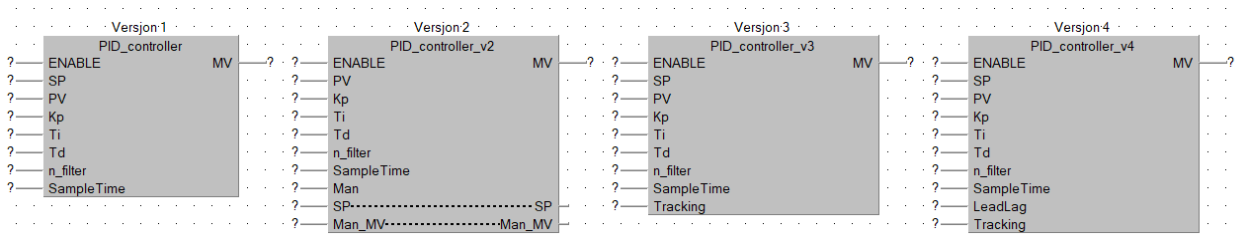
Slår sammen leddene

$$u(z) = p(z) + i(z) + d(z)$$

$$u[k] = K_p e[k] + \frac{K_p T}{T_i 2} (e[k] + e[k-1]) + i[k-1] + \frac{2K_p T_d}{(2\tau + T)} (y[k] - y[k-1]) + \frac{(2\tau - T)}{(2\tau + T)} d[k-1]$$

der $\tau = \frac{T_d}{n}$, $k = \text{aktuell programsyklus}$ & $k-1 = \text{forrige programsyklus}$

Implementering i GX Works



Figur 7: Funksjonsblokker for PID-kontroll i GX Works.

Det ble utviklet tre forskjellige versjoner PID i GX Works. Alle tre følger samme diskretisert likning og er programmert som beskrevet i [Praktiske hensyn](#). Men de har noen forskjeller:

Versjon 1: Helt grunnleggende PID regulator.

Versjon 2: Samme som versjon 1 men med mulighet for bytte mellom manuell og auto modus. Den er implementert slik at det ikke skjer sprang i MV ved bytte mellom manuell og auto. Dette innebærer at ved bytte fra:

Auto → *Man*: Man_MV settes til MV

Man → *Auto*: I-forsterkning settes til MV og settpunkt settes lik prosessverdi.

Versjon 3: Samme som versjon 1 men med Tracking input. Denne kan brukes hvis man har flere regulatorer parallelt. Hvis MV fra forrige syklus ikke er lik input Tracking vil I-forsterkningen justeres slik at MV blir lik Tracking.

Versjon 4: Samme som versjon 4 men har en input for LeadLag. Output fra LeadLag filteret skal gå inn på denne blokken. På denne måten kan saturation av output og tracking foregå på normal måte.

Programkoden og mer informasjon kan finnes her: [GithubLink](#).

Lead Lag Funksjonsblokk

Generelt om Lead-Lag

Et Lead-Lag-element er en type foroverkobling. Elementet har i oppgave å sende ut et pådrag, beregnet ifra enten settpunkt eller en forstyrrelse, for å motvirke endringer i prosessen.

Et Lead-Lag element uttrykkes slik i s-domenet:

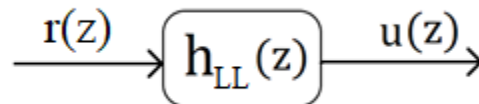
$$h_{LL}(s) = K_{LL} \frac{1 + T_t s}{1 + T_n s}$$

Her er K_{LL} forsterkning, T_t tidskonstant i teller og T_n tidskonstant i nevner. Lead-elementet defineres av telleren, og skal representere framsynhet og rask reaksjonsevne. Lag-elementet defineres av nevneren, og skal representere treghet (Dessen, 2021).

Diskretisering av Lead-Lag element

Blokkdiagram i diskret tid

Lead-Lag-elementet tar inn settpunktet og sender ut et pådrag basert på dette. I Z-domenet vil et blokkdiagram av dette kunne ses slik ut:



Figur 8: Utsnitt av blokkdiagram for Lead-Lag-blokk i diskret tid, z-planet.

Utleddning av differenslikning: Eulers metode

Det ble benyttet bakoverdifferanse-avbildning i første test. S-leddet byttes ut i uttrykket med tilsvarende uttrykk med z for Eulers metode:

$$h_{LL}(s) = K_{LL} \frac{1 + T_t s}{1 + T_n s} \Rightarrow h_{LL}(z) = K_{LL} \cdot \frac{1 + \frac{T_t \cdot (1 - z^{-1})}{T}}{1 + \frac{T_n \cdot (1 - z^{-1})}{T}} = K_{LL} \frac{(T + T_t) - T_t \cdot z^{-1}}{(T + T_n) - T_n \cdot z^{-1}}$$

Vi vet at:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = h_{LL}(z) = K_{LL} \frac{(T + T_t) - T_t \cdot z^{-1}}{(T + T_n) - T_n \cdot z^{-1}}$$

Ganger med R(z) på begge sider slik at:

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{R}(z) \cdot K_{LL} \frac{z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t)}{z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)}$$

Fjerner brøken ved å gange med nevneren på begge sider:

$$\mathbf{U}(z) * (z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)) = \mathbf{R}(z) \cdot K_{LL} * (z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t))$$

Benytter teoremet om tidsforskyvning i Z-domenet og ender opp med at:

$$u[k-1] * (T - 2T_n) + u[k] * (T + 2T_n) = r[k-1] * K_{LL} * (T - 2T_t) + r[k] * K_{LL} * (T + 2T_t)$$

Flytter over og får u[k] alene på venstre side, og finner dermed differenslikningen:

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{r}[k-1] * K_{LL} \frac{(T - 2T_t)}{(T + 2T_n)} + \mathbf{r}[k] * K_{LL} \frac{(T + 2T_t)}{(T + 2T_n)} - \mathbf{u}[k-1] \frac{(T - 2T_n)}{(T + 2T_n)}$$

u[k]: Pådrag fra LL-elementet

r[k]: Nåværende settpunkt

r[k-1]: Forrige settpunkt

u[k-1]: Forrige pådrag

Utleddning av differenslikning: Tustins metode

For å sørge for stabilitet «begge veier», ble det endret avbildning til bilineær transformasjon. S-leddet byttes ut i uttrykket med tilsvarende uttrykk med z for Tustins metode:

$$h_{LL}(s) = K_{LL} \frac{1 + T_t s}{1 + T_n s} \Rightarrow h_{LL}(z) = K_{LL} \cdot \frac{1 + T_t \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}{1 + T_n \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} = K_{LL} \frac{z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t)}{z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)}$$

Vi vet at:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = h_{LL}(z) = K_{LL} \frac{z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t)}{z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)}$$

Ganger med $R(z)$ på begge sider slik at:

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{R}(z) \cdot K_{LL} \frac{z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t)}{z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)}$$

Fjerner brøken med å gange med nevneren på begge sider:

$$\mathbf{U}(z) * (z^{-1}(T - 2T_n) + (T + 2T_n)) = \mathbf{R}(z) \cdot K_{LL} * (z^{-1}(T - 2T_t) + (T + 2T_t))$$

Benytter teoremet om tidsforskyvning i Z -domenet og ender opp med at:

$$u[k - 1] * (T - 2T_n) + u[k] * (T + 2T_n) = r[k - 1] * K_{LL} * (T - 2T_t) + r[k] * K_{LL} * (T + 2T_t)$$

Flytter over og får $u[k]$ alene på venstre side, og finner dermed differenslikningen:

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{r}[\mathbf{k} - 1] * K_{LL} \frac{(T - 2T_t)}{(T + 2T_n)} + \mathbf{r}[\mathbf{k}] * K_{LL} \frac{(T + 2T_t)}{(T + 2T_n)} - \mathbf{u}[\mathbf{k} - 1] \frac{(T - 2T_n)}{(T + 2T_n)}$$

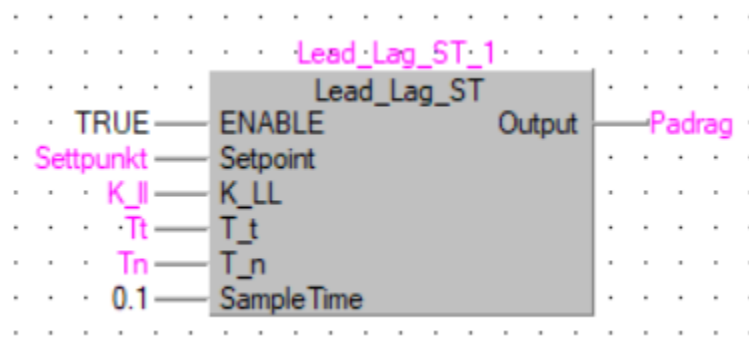
$\mathbf{u}[k]$: Pådrag fra LL-elementet

$\mathbf{r}[k]$: Nåværende settpunkt

$\mathbf{r}[\mathbf{k} - 1]$: Forrige settpunkt

$\mathbf{u}[\mathbf{k} - 1]$: Forrige pådrag

Implementering i GX Works



Figur 9: Funksjonsblokk for lead-lag i GX Works

For å få koden mest mulig oversiktlig ble det brukt en funksjonsblokk for utregning av pådraget. Inne i funksjonsblokken ligger differenslikningen utledet vha. Tustins metode. Variablene settpunkt, K_LL, T_t og T_n skal kunne endres og tilpasses mange forskjellige systemer. Disse skal senere kobles opp mot HMI og styres fra operatørpanel eller lignende.

```
IF ENABLE = 0 THEN
  LL_Output := 0.0;
  Setpoint_local := Setpoint;
ELSE
  Setpoint_local := Setpoint;
  diff1 := Setpoint_prev*K_LL*(SampleTime - 2.0*T_t)/(SampleTime+2.0*T_n);
  diff2 := Setpoint_local*K_LL*(SampleTime+2.0*T_t)/(SampleTime+2.0*T_n);
  diff3 := U_prev*(SampleTime-2.0*T_n)/(SampleTime+2.0*T_n);
  LL_Output := diff1 + diff2 - diff3;

  (* Saturate both values *)
  IF LL_Output > MAX_OUTPUT THEN
    LL_Output := MAX_OUTPUT;
  ELSIF LL_Output < MIN_OUTPUT THEN
    LL_Output := MIN_OUTPUT;
  END_IF;

  INT(1, LL_Output, Output); (* Convert from FLOAT to Word *)
END_IF;

U_prev := LL_Output;
Setpoint_prev := Setpoint_local;
```

Figur 10: Lead-lag funksjonen ble kodet med struktur tekst i GX Works. Dette er et utsnitt fra GX Works testprogrammet til Lead-Lag, komplett programkode finnes her: [GitHub](#)

Referanser

- Anstenrud, T. (2021, Januar 21). Forelesning 3 Z-transformasjon. Trondheim, Trøndelag, Norge.
- Bjørvik, K., & Hveem, P. (2014). PID-regulator. I K. Bjørvik, & P. Hveem, *Reguleringsteknikk* (s. 42). Trondheim: Kybernetes forlag.
- Dessen, F. (2021, Februar 3). Foroverkobling - Forelesningsnotater. Trondheim, Trøndelag, Norge.
- Taylor, D. (2017, 06 23). *Erdos Miller: Engineering solutions*. Hentet fra Blog: PID Anti-windup Techniques: <https://info.erdosmiller.com/blog/pid-anti-windup-techniques>
- Åström, K. J., & Hägglund, T. (2006). *Advanced PIC Control*.