10. (a) $f(u) = u^2$.

$\alpha \in (0,1)$ と $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ について,

$$\alpha u_1^2 + (1-\alpha) u_2^2 - (\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2)^2$$

$$= \alpha(1-\alpha) u_1^2 - 2\alpha(1-\alpha) u_1 u_2 + \alpha(1-\alpha) u_2^2$$

$$= \alpha(1-\alpha)(u_1 - u_2)^2$$

≥ 0 ($=$ は $u_1 = u_2$ で成り立つ).

よって $f(u) = u^2$ は 凸.

(b) $f(u,v) = u^2 + v^2$.

$\alpha \in (0,1)$ と $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ について.

$$\alpha(u_1^2 + v_1^2) + (1-\alpha)(u_2^2 + v_2^2) - \left((\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2)^2 + (\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2)^2\right)$$

$$= \alpha(1-\alpha)(u_1 - u_2)^2 + \alpha(1-\alpha)(v_1 - v_2)^2$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left((u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2\right)$$

≥ 0 ($=$ は $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$ で成り立つ.)

よって. $f(u,v) = u^2 + v^2$ は 凸.

(c) $f(u) = |u|$

$$\left(\alpha |u_1| + (1-\alpha)|u_2|\right) - |\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2|$$

$$= 2\alpha(1-\alpha)(|u_1||u_2| - u_1 u_2)$$

≥ 0 ($=$ は u_1, u_2 が同符号のとき)

よって. $f(u) = |u|$ は 凸.