25. $0 < \alpha < 1$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^p$.

$$\|y - X(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma)\|_2^2 = \alpha\|y - X\beta\|_2^2 + (1-\alpha)\|y - X\gamma\|_2^2$$

$\beta \mapsto \|y - X\beta\|_2^2$ の凸性より、 $\beta = \gamma$.

$$\hat{\beta}, \hat{\gamma} \in \underset{\beta}{\mathrm{argmin}}\{\|y - X\beta\|_2^2 + \lambda\|\beta\|_1\}.$$

$$C^* = \|y - X\hat{\beta}\|_2^2 + \lambda\|\hat{\beta}\|_1 = \|y - X\hat{\gamma}\|_2^2 + \lambda\|\hat{\gamma}\|_1$$

とすると、 $\alpha \in (0,1)$ に対し、

$$\|y - X(\alpha\hat{\beta} + (1-\alpha)\hat{\gamma})\|_2^2 + \lambda\|\alpha\hat{\beta} + (1-\alpha)\hat{\gamma}\|_1$$

$$\leq \alpha\|y - X\hat{\beta}\|^2 + (1-\alpha)\|y - X\hat{\gamma}\|^2 + \lambda(\alpha\|\hat{\beta}\|_1 + (1-\alpha)\|\hat{\gamma}\|_1)$$

$$= \alpha(\|y - X\hat{\beta}\|_2^2 + \lambda\|\hat{\beta}\|_1) + (1-\alpha)(\|y - X\hat{\gamma}\|_2^2 + \lambda\|\hat{\gamma}\|_1)$$

$$= \alpha C^* + (1-\alpha)C^*$$

$$= C^*$$

$$\therefore \|y - X\hat{\beta}\|_2^2 = \|y - X\hat{\gamma}\|_2^2$$