1. $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ が与えられたとき

$$S := \sum_{i=1}^{N} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

を最小化する β_0, β_1 を求める。

以下 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$

$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ とおく。

S は β_0, β_1 に関して凸関数なので

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0$$ を解けばよい。

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) = -2N(\bar{y} - (\beta_0 + \beta_1 \bar{x}))$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) = -2N(\overline{xy} - (\beta_0 \bar{x} + \beta_1 \overline{x^2}))$$

より
$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 + \bar{x}\hat{\beta}_1 = \bar{y} \\ \bar{x}\hat{\beta}_0 + \overline{x^2}\hat{\beta}_1 = \overline{xy} \end{cases}$$ を解いて

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\bar{x}\,\overline{xy} - \overline{x^2}\,\bar{y}}{\bar{x}^2 - \overline{x^2}}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\bar{x}\,\bar{y} - \overline{xy}}{\bar{x}^2 - \overline{x^2}}$$