11. $f(\beta_1, \dots, \beta_p) := \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{i,j}\beta_j \right)^2$

が凸であることを示す。凸関数の和もまた凸関数なので、

各 i について、$\left(y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{i,j}\beta_j \right)^2$ の凸性を言えばよい。

簡単のため、$(y - x^T\beta)^2$ とおく。

$\alpha \in (0,1)$ と $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^p$ に対して、

$$\alpha(y - x^T\beta_1)^2 + (1-\alpha)(y - x^T\beta_2)^2 - (y - x^T(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2))^2$$

$$= \alpha(y^2 - 2yx^T\beta_1 + (x^T\beta_1)^2) + (1-\alpha)(y^2 - 2yx^T\beta_2 + (x^T\beta_2)^2)$$
$$- (y^2 - 2yx^T(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2) + (x^T(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2))^2)$$

$$= \alpha(x^T\beta_1)^2 + (1-\alpha)(x^T\beta_2)^2 - (x^T(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2))^2$$

$$= \alpha(1-\alpha)(x^T(\beta_1 - \beta_2))^2.$$

≥ 0 （$=$ は $\beta_1 = \beta_2$ のとき成り立つ）

よって、$f(\beta_1, \dots, \beta_p)$ は凸関数。