9. $X^\top X$ は非負定値対称行列なので、

直交行列 V を用いて、

$$V^\top X^\top X V = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_p \end{pmatrix}$$

と表せる。

$$V^\top(X^\top X + N\lambda I)V$$

$$= V^\top X^\top X V + N\lambda I$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 + N\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_p + N\lambda \end{pmatrix}$$

となるから、

$X^\top X + N\lambda I$ の固有値は $\gamma_1 + N\lambda, \ldots, \gamma_p + N\lambda$ である。

また、$\det(X^\top X) = \gamma_1 \cdots \gamma_p$ より、

$X^\top X$ に逆行列が存在しない条件は、

「$\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ のうちいずれかが 0」である。

$\det(X^\top X + N\lambda I) = (\gamma_1 + N\lambda) \cdots (\gamma_p + N\lambda)$ より、

$\gamma_1, \ldots, \gamma_p \geq 0$ と $\lambda > 0$ ならば、

$X^\top X + N\lambda I$ の行列式はつねに 0 より大きいので、

必ず逆行列が存在する。