

Cài đặt thuật toán Nhánh và Cắt để giải bài toán quy hoạch nguyên tuyến tính

1. Thuật toán Nhánh và cắt

1. Giải bài toán LP nới lỏng; nếu lời giải x^* là nguyên, kết thúc.
2. Tìm một nhát cắt hợp lệ nhưng lại cho phép bỏ đi nghiệm x^* không nguyên vừa tìm được. Nếu tìm được lát cắt như vậy, thêm nó vào bài toán ban đầu; quay lại bước 1.
3. Ngược lại, rẽ nhánh (theo thuật toán nhánh và cận). Với mỗi bài toán con, xử lý theo phương pháp *nhánh và cắt* kết hợp với việc đánh giá cận trên và cận dưới.

2. Làm thế nào tìm một cắt hiệu quả

2.1. Lát cắt phủ

Xét ràng buộc

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$$

Một tập $C \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ gọi là *phủ* nếu

$$\sum_{j \in C} a_j > b$$

Rõ ràng, nếu C là tập phủ, vậy ta không thể xảy ra chuyện mọi biến nguyên thuộc tập phủ đều > 0 . Nói cách khác

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

là một bất đẳng thức hợp lệ. Bất đẳng thức này được viết lại như dưới đây và gọi là lát cắt phủ

$$\sum_{j \in C} (1 - x_j) \geq 1$$

2.2. Bài toán tìm lát cắt phủ cắt nghiệm của LP nới lỏng

Bây giờ ta xét **bài toán separation**:

- Xét nghiệm x^* của của bài toán LP nới lỏng.
- Ta muốn tìm biết liệu có tìm được một nhát cắt phủ cắt bỏ điểm x^* từ ràng buộc $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$?

Bài toán này có thể viết lại dưới dạng bài toán tìm kiếm:

- Xét nghiệm x^* của của bài toán LP nới lỏng.
- Tìm tập $C \subseteq N$ thoả mãn

$$\begin{aligned}\sum_{j \in C} (1 - x_j^*) &< 1 \\ \sum_{j \in C} a_j &> b\end{aligned}$$

Bài toán tối ưu tương ứng là

$$\min \sum_{j=1}^n (1 - x_j^*) z_j \quad \text{thoả mãn} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j z_j > b \\ z_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Nếu giá trị tối ưu tìm được < 1 thì ta có một lát cắt. Các biến z được gán bằng 1 chính là một phủ.

Nếu ta thay thế z_j bởi $1 - y_j$, ta biến đổi bài toán tối ưu ở trên thành bài toán Knapsack.

Ví dụ,

- Xét nghiệm của bài toán LP nói lỏng

$$x^* = (0, 0, 3/4, 1/2, 1, 0)$$

- xét ràng buộc

$$45x_1 + 46x_2 + 79x_3 + 54x_4 + 53x_5 + 125x_6 \leq 178$$

Bài toán separation là

$$\min \quad z_1 + z_2 + 1/4z_3 + 1/2z_4 + z_6$$

thoả mãn

$$45z_1 + 46z_2 + 79z_3 + 54z_4 + 53z_5 + 125z_6 > 178$$

Giải bài toán này ta được $\min = -0.25$ và $z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1$. Do đó ta có lát cắt phủ

$$(1 - x_3) + (1 - x_4) + (1 - x_5) \geq 1$$

lát cắt này sẽ loại nghiệm x^* vì $1 - 3/4 + 1 - 1/2 + 0 = 3/4 < 1$

3. Yêu cầu cài đặt bài toán

- Cài đặt thuật toán nhánh và cắt
- Ở bước 2 của thuật toán, bạn có thể dùng thư viện giải bài toán Knapsack để tìm một lát cắt phủ; và dùng lát cắt này trong thuật toán.

4. Test bài toán

Để test, bạn hãy dùng dữ kiện của bài toán Set Cover như sau:

- Quy dẫn bài toán Set Cover về bài toán quy hoạch nguyên
- Dùng dữ liệu quy dẫn này để test với thuật toán Nhánh và cắt. Nói cách khác, dùng thuật toán

nhánh và cắt để giải bài toán Cover Set.

Mô tả chi tiết những test nào mà thuật toán bạn chạy tốt. Bạn có thể gợi ý một vài lát cắt khác để tăng tốc.