

Cài đặt Nhánh và cận cho MIP

Tối ưu tổ hợp

Ngày 15 tháng 5 năm 2020

Nhánh và cận

- ▶ Xây dựng một **chứng minh** rằng nghiệm là tối ưu dựa trên việc **phân hoạch** không gian lời giải.
- ▶ **Nhánh**: Quá trình phân hoạch.
- ▶ **Cận**: Dùng cận dưới để xây dựng chứng minh nghiệm tối ưu.

$$\begin{aligned}\min \quad & z = c(x) \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \text{ nguyên}\end{aligned}$$

- ▶ LP nói lỏng có nghiệm x^0 .
- ▶ Ta biết $c(x^0) \leq x^*$ với x^* là nghiệm tối ưu.
- ▶ Nếu x^0 nguyên, thì x^0 là nghiệm tối ưu.
- ▶ Nếu x^0 có một thành phần x_i^0 không nguyên. Ta phải tách bài toán thành hai bài toán con bằng cách thêm ràng buộc.

Tách thành hai bài toán con

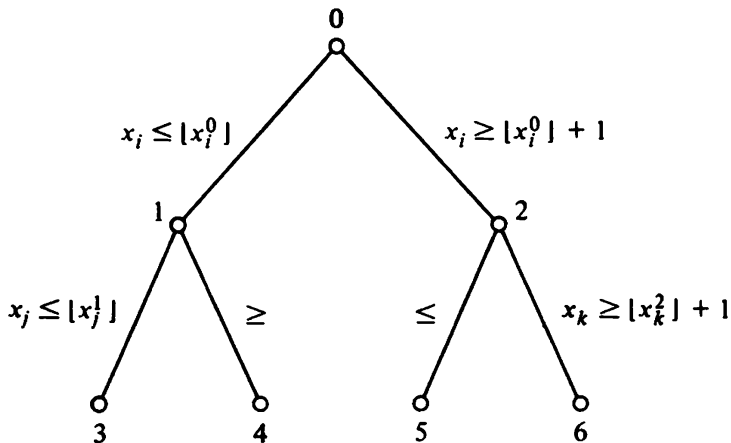
Bài toán 1

$$\begin{aligned}\min \quad & z = c(x) \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \text{ nguyên} \\ & x_i \leq \lfloor x_i^0 \rfloor\end{aligned}$$

Bài toán 2

$$\begin{aligned}\min \quad & z = c(x) \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \text{ nguyên} \\ & x_i \geq \lfloor x_i^0 \rfloor + 1\end{aligned}$$

- ▶ Khi LP nới lỏng có nghiệm x^0 với thành phần x_i^0 không nguyên.
- ▶ Nghiệm của bài toán x^* phải thuộc không gian nghiệm chấp nhận được hoặc của bài toán 1 hoặc của bài toán hai.
- ▶ Ta tiếp tục tách mỗi bài toán thành các bài toán con nếu cần thiết.



Hình: Biểu diễn không gian lời giải như một cây nhị phân

Nút chết

- ▶ Giả sử ta có nghiệm nguyên tốt nhất tính đến thời điểm hiện tại với chi phí z_m .
- ▶ Ta đang xem xét một nút với cận dưới $z_k = c(x^k) \geq z_m$.
- ▶ Khi đó, mọi nghiệm x là con cháu của x^k phải thoả mãn

$$c(x) \geq z_k \geq z_m.$$

- ▶ Vậy thì ta không cần xử lý nhánh x^k .
- ▶ Ta nói nút x^k là nút chết.

Ví dụ

Xét bài toán quy hoạch nguyên

$$\min x_1 - 2x_2$$

thỏa mãn

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-4x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ và nguyên}$$

Chiến lược nào sẽ hiệu quả?

- ▶ Phương pháp tìm kiếm: DFS hay BFS hay nút có chặn dưới nhỏ nhất?
- ▶ Chọn biến không nguyên để thêm ràng buộc? Chọn biến giúp tăng chặn dưới càng nhiều càng tốt.

Bài tập lập trình

- ▶ Hãy cài đặt thuật toán nhánh và cận cho MIP.
- ▶ Bạn có thể chọn chiến lược nào bạn thấy phù hợp.
- ▶ Mô tả các test mà bạn đã thử nghiệm.

Bài tập

Dùng thuật toán nhánh và cận để giải bài toán quy hoạch nguyên

$$\max 5.5x_1 - 2.1x_2$$

thỏa mãn

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$8x_1 + 2x_2 \leq 17$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \leq 0$$

x_1, x_2 nguyên