

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

ngkieudung@hcmut.edu.vn

Tài liệu chính:

1. Bài giảng và bài tập trên BKeL.
2. Giáo trình Xác suất và thống kê; Bài tập Xác suất và thống kê; tác giả Nguyễn Đình Huy, Đậu Thế Cấp; NXBĐHQG TPHCM; 2013.
3. Xác suất – Thống kê & Phân tích số liệu ; tác giả Nguyễn Tiến Dũng; NXBĐHQGTPHCM; 2019.

Một số tài liệu tham khảo:

4. Lý thuyết xác suất và thống kê toán học; tác giả Lý Hoàng Tú, Trần Tuấn Điệp, NXBGTVT; 2003.
5. Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán; PGS.TS. Nguyễn Cao Văn, TS.Trần Thái Ninh; NXB ĐHKQTĐ; 2008.
6. Xác suất thống kê; PGS.TS Tô Văn Ban; NXBGDVN; 2010.
7. Thống kê ứng dụng trong kinh tế- xã hội, tác giả Hoàng Trọng, Chu Nguyễn Mộng Ngọc; NXBLĐXH;2011.
8. Nhập môn hiện đại Xác suất và thống kê, tác giả Đỗ Đức Thái, Nguyễn Tiến Dũng; NXBĐHSP; 2010.
9. Probability & Statistics for Engineers & Scientists; Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, Keying Ye; Prentice Hall; 9th Edition.
10. Introduction to statistics and data analysis; Roxy Peck, Chris Olsen, Jay L Devore; Brooks_Cole Cengage Learning (2012).

PHẦN I: LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

- *Lý thuyết xác suất là bộ môn Toán học xác lập những quy luật tất nhiên ẩn giấu sau những hiện tượng mang tính ngẫu nhiên khi nghiên cứu một số lớn lần lặp lại cùng các hiện tượng ấy. Việc nắm bắt những quy luật này sẽ cho phép dự báo các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào.*
- Các khái niệm đầu tiên của xác suất hình thành vào giữa thế kỷ 17, gắn liền với tên tuổi của các nhà bác học Fermat, Pascal, Bernoulli,... dựa trên việc nghiên cứu các quy luật ẩn náu trong các trò chơi cờ bạc may rủi.
- *Đến năm 1933, nhà toán học Nga A.N.Kolmogorov đã đưa ra định nghĩa xác suất dựa vào hệ tiên đề, từ đó xây dựng được cơ sở chặt chẽ của lý thuyết xác suất.*
- Hiện nay, các phương pháp của lý thuyết xác suất được ứng dụng rộng rãi trong việc giải quyết các bài toán thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học tự nhiên, kỹ thuật và kinh tế - xã hội.

Chương 0: MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ TÚC

0.1. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

0.2. Các quy tắc đếm :

- Quy tắc cộng
- Quy tắc nhân

0.3. Giải tích tổ hợp :

- Chỉnh hợp ; Chỉnh hợp lặp ; Hoán vị ; Tổ hợp
- Nhị thức Newton

0.4. Liên hệ với GT1, GT2:

- Tích phân và tp Euler – Poisson; Cực trị hàm số.
- Tổng một số chuỗi số thông dụng

0.2.1 Quy tắc cộng:

Giả sử một công việc có thể tiến hành theo một trong k phương án riêng biệt nhau,

- phương án 1 có n_1 cách hoàn thành công việc,*
- phương án 2 có n_2 cách hoàn thành công việc,*
-*

- phương án k có n_k cách hoàn thành công việc,*

Khi đó có $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách thực hiện công việc.

0.2.2 Quy tắc nhân:

Giả sử một công việc được thực hiện qua k giai đoạn liên tiếp,

- giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện,*
- giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện ,*
-*

- giai đoạn k có n_k cách thực hiện .*

Khi đó sẽ có $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ cách thực hiện công việc trên.

Ví dụ 1

Để đi từ nhà đến trường, An phải đi qua 1 cây cầu.

*Có 2 cách để An đi từ nhà đến cây cầu,
và có 3 cách để đi từ cây cầu đến trường học.*

Hỏi An có bao nhiêu cách đi từ nhà đến trường ?



- Áp dụng Quy tắc cộng
- Áp dụng Quy tắc nhân
- Phân biệt cách sử dụng

0.3.1 Chỉnh hợp:

Chỉnh hợp chập k từ n phần tử khác nhau ($k \leq n$) là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử khác nhau đôi một từ n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp chập k từ n phần tử :

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ số}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

0.3.2 Chỉnh hợp lặp :

Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử khác nhau là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử , không nhất thiết khác nhau, từ n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử :

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

0.3.3 Hoán vị :

Hoán vị của n phần tử khác nhau là một nhóm có thứ tự gồm đúng n phần tử đã cho.

Số các hoán vị của n phần tử :

$$P_n = A_n^n = n!$$

0.3.4 Tổ hợp :

Tổ hợp chập k từ n phần tử khác nhau ($k \leq n$) là một bộ không kể thứ tự gồm k phần tử khác nhau đôi một từ n phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập k từ n phần tử :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Một số công thức thường gặp :

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Từ n phần tử riêng biệt

"Lấy" ra k phần tử

-Các phần tử khác nhau đôi một.
- Có xét thứ tự.

Số cách lấy:

$$A_n^k$$

- Các ptử có thể trùng nhau
- Có xét thứ tự

Số cách lấy:

$$\overline{A_n^k}$$

-Các ptử khác nhau đôi một
-Không xét thứ tự

Số cách lấy:

$$C_n^k$$

-Các phần tử có thể trùng nhau
-Không xét thứ tự

Số cách lấy:

$$\overline{C_n^k}$$

(tham khảo tài liệu 4.)

Ví dụ 2

Từ các số khác nhau 1,2,3,4,5 :

1. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau đôi một?
2. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số?
(các chữ số có thể trùng nhau).
3. Có thể tạo được bao nhiêu tập con gồm 3 chữ số khác nhau đôi một từ 5 chữ số trên?
4. Có bao nhiêu cách xếp thứ tự
5 chữ số trên?



1. *Cách 1:* Gọi số cần tìm là \overline{abc} .

- Chọn giá trị cho a : 5 cách.
- Chọn giá trị cho b : 4 cách.
- Chọn giá trị cho c : 3 cách.

Theo quy tắc nhân: có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách (60 số)

Cách 2:

- Ta sẽ chọn ra 3 chữ số từ 5 chữ số
- Các số tạo thành có tính chất sắp thứ tự
- Các chữ số khác nhau đôi một.

\Rightarrow Số cách chọn : $A_5^3 = 60$

2. *Cách 1:* Theo quy tắc nhân, có $5 \times 5 \times 5 = 125$ cách (125 số).

Cách 2:

- Ta sẽ chọn ra 3 chữ số từ 5 chữ số
- Các số tạo thành có tính chất sắp thứ tự
- Các chữ số có thể trùng nhau.

\Rightarrow Số cách chọn : $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$

- 3.
- Chọn ra 3 chữ số từ 5 chữ số
 - Các chữ số tạo thành 1 tập con nên tính thứ tự không có ý nghĩa.
 - Các chữ số khác nhau đôi một.

⇒ Số cách chọn : $C_5^3=10$ (10 tập con)

Nhận xét:

Tương ứng với 1 tập con { 1;3; 4} là 6 số 134; 143; 314; 341; 413; 431. 6 số này chính là 6 chỉnh hợp chập 3 từ 5 số ban đầu. Từ đó ta thấy có mối liên hệ giữa 10 tập con có 3 phần tử ở câu 3 với 60 số có 3 chữ số ở câu 1.

Công thức liên hệ: $C_5^3 \times 3!=A_5^3$; hay $C_n^k \times k!=A_n^k$

4. Số hoán vị : $P_5=5!=120$

0.4 Tích phân Euler-Poisson:

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}; \quad \sigma > 0 \qquad \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

+ Hàm tích phân Laplace (hàm lẻ) (*xem từ trang 70 trong GT*):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

0.5 Một số công thức tính tổng của 1 cấp số nhân; tổng của 1 số chuỗi thông dụng.

$$\bullet \sum_{k=0}^n a \times q^k$$

$$\bullet \sum_{k=0}^{+\infty} a \times q^k$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} k \times q^{k-1}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times q^{k-1}$$

Bài tập chương 0

BT 1. Có 7 bức tranh khác nhau và 5 cái móc trên tường, mỗi móc chỉ để treo đúng một tranh. Có bao nhiêu cách treo tranh trên tường?

BT 2. Một hộp có 7 bi đỏ, 3 bi vàng và 5 bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy ra 5 bi mà:

a) trong đó có đúng 3 bi xanh.

b) trong đó có ít nhất 3 bi xanh.

c) trong đó không màu nào có quá 2 bi.



BT 3. Có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

BT 4. Có 4 nơi thực tập khác nhau, mỗi nơi chỉ nhận 1 nhóm SV.

a) Có bao nhiêu cách chia đều 20 sinh viên thành 4 nhóm để đi thực tập ?

b) Có bao nhiêu cách chia đều 20 sinh viên thành 4 nhóm để đi thực tập, mà các sinh viên A và B đi cùng một nhóm, còn C và D đi cùng nhau ở một nhóm khác?

BT 5. Có bao nhiêu cách xếp 8 hành khách lên 3 toa tàu ?
(giả thiết mỗi người có thể lên một toa tùy ý, không phụ thuộc vào những hành khách còn lại)

BT 6. Tính (tham khảo):

$$a) I_1 = \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)^2} dx$$

$$b) I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x+3} dx$$



Chương I: CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

😊 ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT:

- Định nghĩa cổ điển về xác suất.
- Định nghĩa thống kê về xác suất.
- Định nghĩa hình học về xác suất.
- Định nghĩa xác suất theo tiên đề.

😊 CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT:

- Công thức cộng.
- Công thức nhân và xác suất có điều kiện.
- Công thức Becnoulli.
- Công thức xác suất toàn phần và ct Bayes.

§1. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

1.1 Phép thử và các loại biến cố.

1.2 Định nghĩa xác suất :

1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất.

1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất.

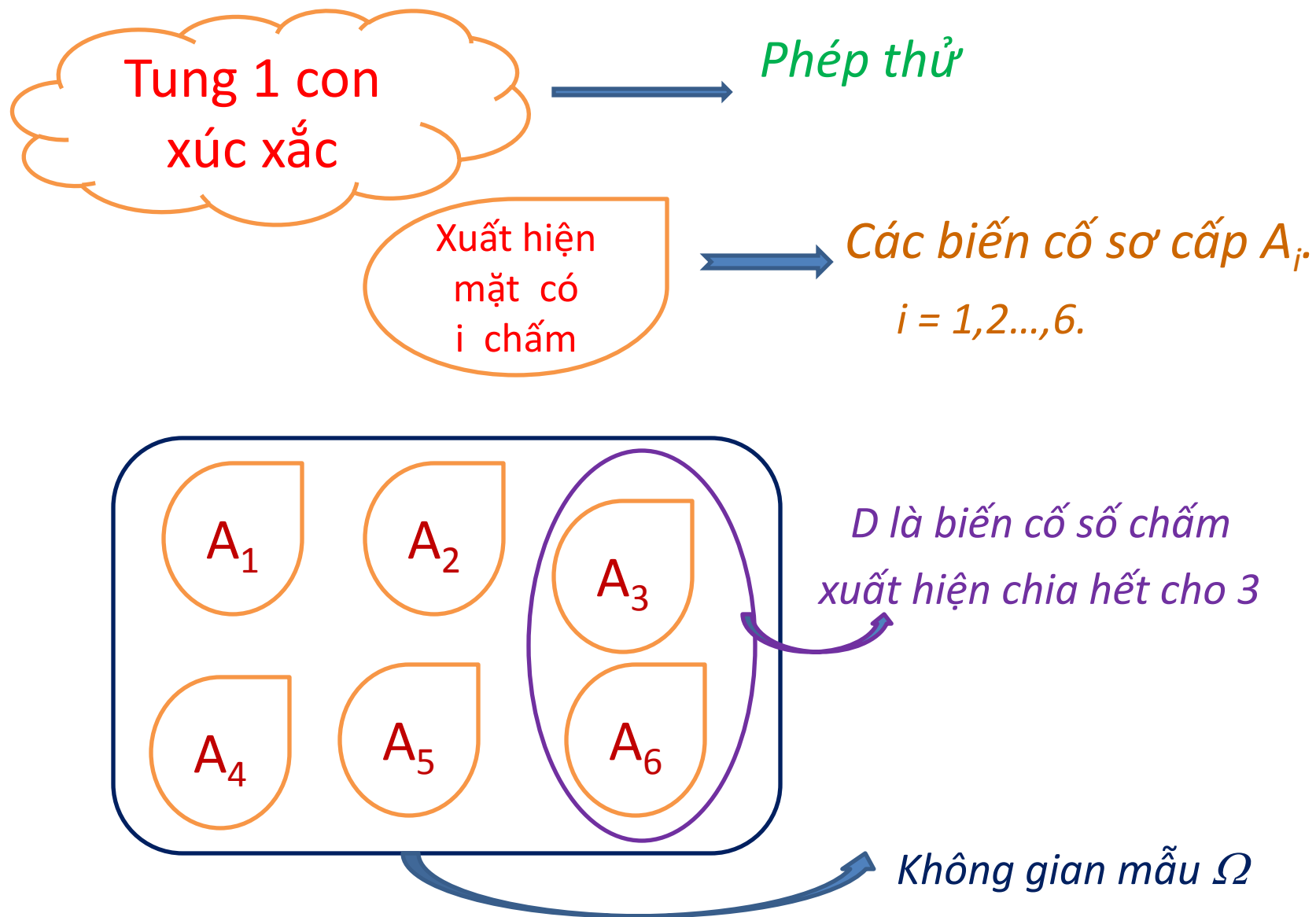
1.2.3 Định nghĩa hình học về xác suất.

1.2.4 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tham khảo).

1.3 Nguyên lý xác suất lớn và xác suất nhỏ.

1.1 Phép thử và các loại biến cố :

- Việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản để quan sát một hiện tượng nào đó gọi là thực hiện một **phép thử** (*trial*).
- **Phép thử ngẫu nhiên** là phép thử mà ở hai lần thử bất kỳ với đầu vào và quá trình chuyển hóa giống nhau nhưng kết quả đầu ra lại có thể hoàn toàn khác nhau, không dự báo được .
- Mỗi kết cục không thể phân chia được của phép thử gọi là **biến cố sơ cấp**. Tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp tạo thành **không gian các biến cố sơ cấp**, hay gọi là **không gian mẫu**, kí hiệu là Ω .
- Hợp thành của các kết cục nào đó gọi là một **biến cố** (hay sự kiện- *event*). Như vậy mỗi biến cố chính là một tập con của không gian mẫu.



Trong thực tế có thể xảy ra các loại biến cố sau:

- Biến cố nhất định xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là *biến cố chắc chắn*, được kí hiệu là Ω .
- Biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là *biến cố không thể có*, được kí hiệu là \emptyset .
- Biến cố có thể xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một phép thử cụ thể gọi là *biến cố ngẫu nhiên*.

Người ta thường dùng các kí hiệu là A, B, C hay $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, B_n$ để biểu diễn biến cố.

1.2 Khái niệm về xác suất:

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng cho khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất :

Xét một phép thử mà không gian mẫu có thể chia thành n kết cục duy nhất đồng khả năng; trong n kết cục đó có m_A kết cục thuận lợi cho biến cố A . Ta định nghĩa xác suất của biến cố A theo cổ điển:

$$P(A) = \frac{m_A}{n}$$

Để thuận lợi, người ta hay lấy $n = |\Omega|$ là số các biến cố sơ cấp trong Ω , với điều kiện các biến cố này duy nhất và khả năng xuất hiện ngang nhau.

Các tính chất : $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\Omega) = 1$ $P(\emptyset) = 0$

Ví dụ 1:

Một hộp có 7 bi đỏ, 3 bi vàng và 5 bi xanh có kích thước như nhau. Người ta lấy ra ngẫu nhiên 5 bi.

Tìm xác suất của biến cố trong 5 bi đó có ít nhất 3 bi xanh.



Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố trong 5 bi lấy ra có ít nhất 3 bi xanh.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{sô' cách lâ'y 5 bi mà có i't nhât 3 bi xanh}}{\text{sô' cách lâ'y 5 bi tùy ý trong 15 bi}} \\ &= \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2 + C_5^4 \cdot C_{10}^1 + C_5^5}{C_{15}^5} = \frac{167}{1001} \quad \left(\neq \frac{C_5^3 \cdot C_{12}^2}{C_{15}^5} \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 2:

Có 9 người lên 6 toa tàu một cách ngẫu nhiên. Giả sử số người lên tàu ở mỗi toa không bị giới hạn.

Tìm xác suất có 2 toa không ai lên, có 3 toa mà mỗi toa có 2 người lên, và 1 toa có 3 người lên.



Hướng dẫn:

$$\text{Xác suất cần tìm} = \frac{m}{n}$$

+ n là số cách xếp ngẫu nhiên 9 người lên 6 toa tàu.

Người thứ nhất có 6 cách chọn toa để lên,

người thứ hai có 6 cách chọn toa để lên,

...

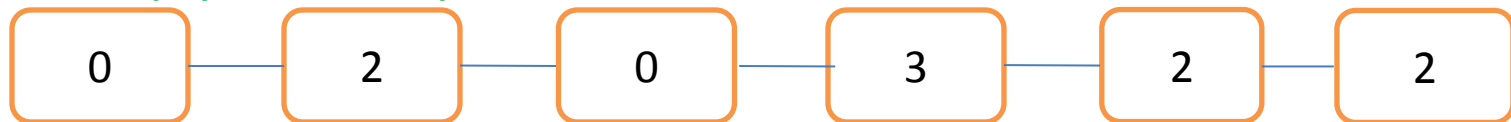
người thứ 9 cũng có 6 cách chọn toa để lên

Sử dụng quy tắc nhân $\Rightarrow n = 6^9$

+ m là số cách xếp 9 hành khách lên các toa thỏa :

- có 2 toa không ai lên
- có 3 toa mà mỗi toa có 2 HK lên
- có 1 toa với 3 hành khách .

Mô tả 1 quy trình xếp hành khách lên tàu:



- Chọn 2 toa không có ai lên: C_6^2
- Chọn tiếp 3 toa mà mỗi toa sẽ xếp 2 hành khách : C_4^3
- Chọn tiếp toa sẽ xếp 3 hành khách lên: 1 cách
- Chọn 2 người vào toa hai đầu tiên: C_9^2
- Chọn 2 người vào toa hai tiếp theo: C_7^2
- Chọn 2 người vào toa hai sau cùng: C_5^2
- Chọn 3 người vào toa còn lại: 1 cách

Sử dụng quy tắc nhân $\Rightarrow m = C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$

BT 1: Tung 2 con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tìm xác suất của các biến cố:

a) Tổng số chấm trên 2 con xúc xắc bằng 7.

b) Có ít nhất một mặt sáu chấm xuất hiện.



BT 2: Một tòa nhà có 5 lầu. Giả sử có 8 người vào tầng trệt để lên các lầu một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất có 2 lầu mà mỗi lầu có 3 người lên, và 1 lầu khác có 2 người lên.

BT 3 : Một hộp có 8 quả cầu trắng, 7 quả cầu xanh và 5 quả cầu đỏ có cùng kích thước. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 6 quả cầu.

a) Tìm xác suất trong 6 quả cầu lấy ra có 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu xanh và 1 quả cầu đỏ.

b) Tìm XS trong 6 quả cầu lấy ra có 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu xanh và 1 quả cầu đỏ; quả cầu đỏ được lấy ra sau cùng.

Hướng dẫn:

BT 1:

$$a) \frac{6}{36}$$

$$b) \frac{11}{36}$$

BT 2

$$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3}{5^8} = \frac{672}{15625}$$

BT 3: a) 2 cách:

$$\bullet \frac{m}{n} = \frac{C_8^3 \times C_7^2 \times C_5^1 \times 6!}{A_{20}^6} = \frac{49}{323}$$

$$\bullet \frac{m}{n} = \frac{C_8^3 \times C_7^2 \times C_5^1}{C_{20}^6} = \frac{49}{323}$$

b) **Cách 1:**

$$\frac{m}{n} = \frac{C_8^3 \times C_7^2 \times C_5^1 \times 5!}{A_{20}^6} = \frac{49}{1938}$$

Cách 2: Sử dụng quy tắc nhân (sẽ trình bày ở phần sau)

$$\bullet P(B) = \frac{C_8^3 \times C_7^2 \times 5!}{A_{20}^5} \times \frac{C_5^1}{C_{15}^1} = \frac{49}{1938}$$

$$\bullet P(B) = \frac{C_8^3 \times C_7^2}{C_{20}^5} \times \frac{5}{15} = \frac{49}{1938}$$

Có trường hợp nào KHÔNG sử dụng xác suất cổ điển?

- ❑ Có 1 máy sản xuất tự động. Khi cho máy sản xuất ngẫu nhiên 1 sản phẩm thì ta có thể thu được 1 chính phẩm hoặc 1 phế phẩm. Khi đó $\Omega = \{ \text{chính phẩm; phế phẩm} \}$.

\Rightarrow Xác suất máy sản xuất được chính phẩm = ?



- ❑ Một hộp có 5 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi, có hoàn lại bi vào hộp sau mỗi lần lấy, cho đến khi gặp được bi đỏ thì dừng lại.

Khi đó $\Omega = \{ \mathbb{D}_1 ; X_1\mathbb{D}_2 ; X_1X_2\mathbb{D}_3 ; \dots \}$.

\Rightarrow Xác suất người đó dừng lại sau lần lấy bi thứ 5 = ?

1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất :

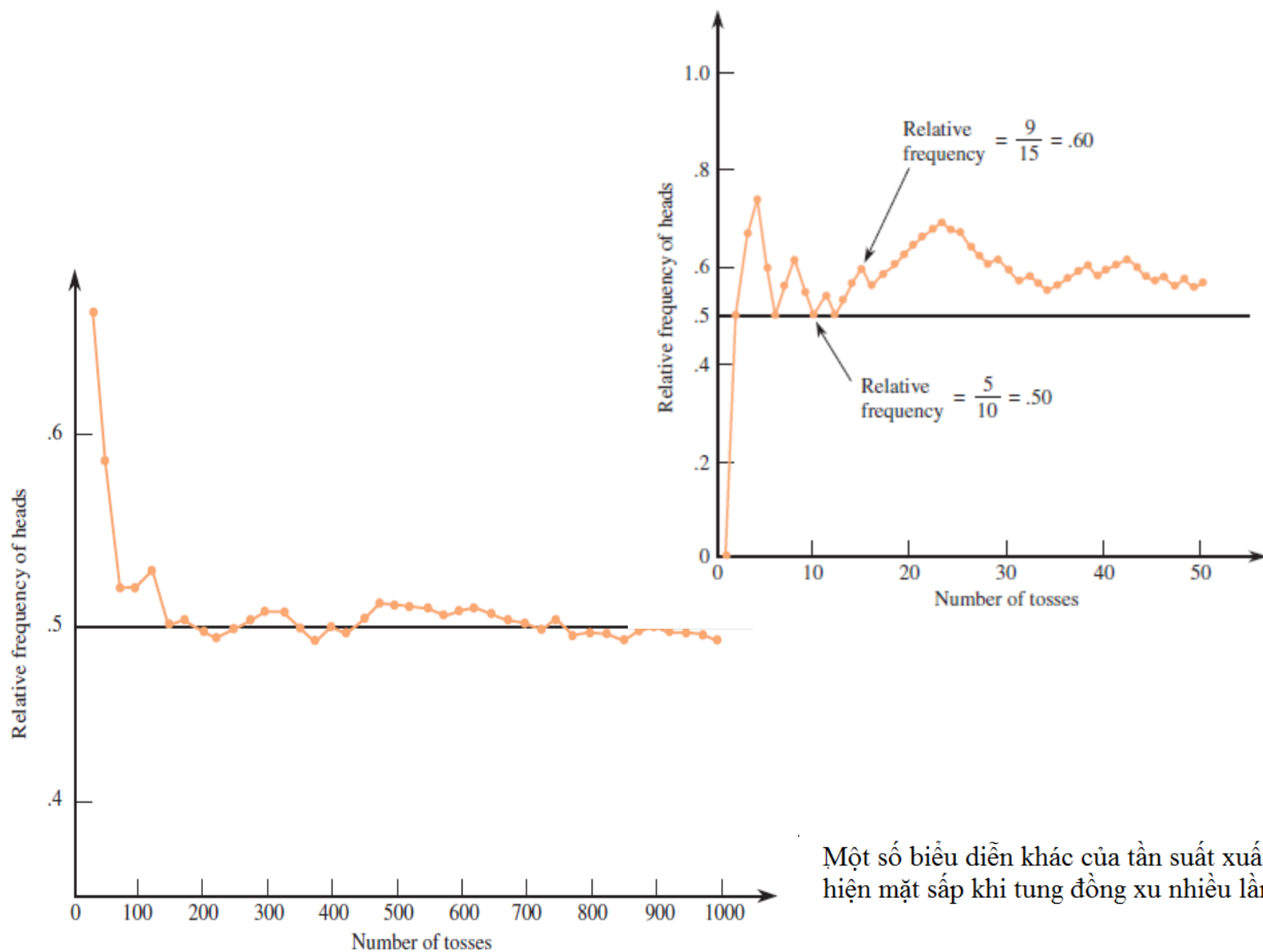
Tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử là **tỉ số** giữa số phép thử trong đó biến cố A xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện.

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

Người ta nhận thấy nếu tiến hành số lượng lớn các phép thử trong những điều kiện như nhau thì tính ổn định của tần suất khá rõ ràng.

Ví dụ 3: Người ta tiến hành tung đồng xu nhiều lần.

Người gieo	Số lần gieo (n)	Số lần được mặt sấp (k)	Tần suất (f)
Buffon	4.040	2.048	0,5069
Kerrich	10.000	5.067	0,5067
Pearson (lần 1)	12.000	6.019	0,5016
Pearson (lần 2)	24.000	12.012	0,5005



Một số biểu diễn khác của tần suất xuất hiện mặt sấp khi tung đồng xu nhiều lần.

Qua các ví dụ trên, ta thấy khi số phép thử tăng lên nhiều thì tần suất xuất hiện mặt sấp sẽ dao động ngày càng ít hơn xung quanh giá trị không đổi là 0,5.

Điều đó cho phép hy vọng khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ (*) về giá trị 0,5.

Định nghĩa:

Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số p không đổi mà tần suất xuất hiện biến cố đó sẽ dao động rất ít xung quanh nó khi số phép thử tăng lên vô hạn.

Như vậy:

Khi n đủ lớn ta có thể coi $P(A) \approx f(A)$

(*): SV có thể tìm hiểu thêm trong tài liệu tham khảo (4) về sự khác nhau giữa khái niệm hội tụ theo xác suất và khái niệm hội tụ trong môn Giải tích đã được học.

Ví dụ 4

Theo dõi ngẫu nhiên 10.000 bé mới sinh ở một vùng, người ta thấy có 5097 bé trai.

Tần suất sinh bé trai trong khảo sát: $f_n = 5097/10000$.

Vì số lượng bé được theo dõi là $n = 10.000$ khá lớn nên ta có thể coi xác suất sinh con trai p ở vùng này xấp xỉ bằng:

$$p \approx f_n = 5097/10.000 = 0,5097.$$

Tỉ lệ trên cho tương ứng 100 bé gái với khoảng 104 bé trai. Tỷ số giới tính khi sinh tự nhiên trên thế giới dao động từ 104 – 106 trẻ em trai cho mỗi 100 trẻ em gái.

Định nghĩa xác suất theo thống kê được sử dụng rất phổ biến trong các lĩnh vực của cuộc sống.

I.2.3 Định nghĩa hình học về xác suất :

- Giả sử **một phép thử có vô hạn, không đếm được các kết cục đồng khả năng** có thể biểu diễn bởi một miền hình học Ω nào đó đo được, còn tập các kết cục đồng khả năng thuận lợi cho biến cố A được biểu diễn bởi một miền hình học **D** nào đó đo được. Khi đó xác suất của biến cố A được tính như sau: .

$$P(A) = \frac{\text{Độ đo miền D}}{\text{Độ đo miền } \Omega}$$

- Tùy theo **miền** Ω là một đường thẳng, một miền phẳng hay khối không gian mà độ đo được xác định tương ứng là độ dài, diện tích hay là thể tích.

Ví dụ 5



Xét phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$,
hệ số a được lấy ngẫu nhiên trong đoạn $[0; 1]$,
còn hệ số b được lấy ngẫu nhiên trong đoạn $[-1; 1]$.

- a) Tìm xác suất phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.
- b) Tìm xác suất phương trình có nghiệm kép.
- c*) Trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm phân biệt, tìm xác suất để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

Hướng dẫn:

Do a, b là 2 tham số độc lập nên ta dùng trục Ox trong mặt phẳng Oxy để biểu diễn cho các giá trị của a , và trục Oy để biểu diễn cho các giá trị của b .

Độ đo được sử dụng ở đây là diện tích miền phẳng.

a) Phương trình có 2 nghiệm thực PB

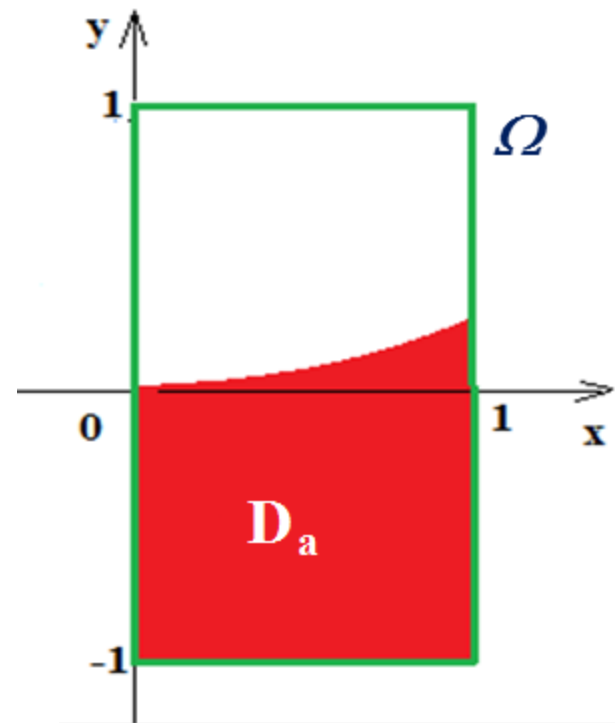
$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow b < \frac{a^2}{4}$$

- Miền $\Omega = [0; 1] \times [-1; 1]$.

- Miền D chính là miền phẳng nằm trong Ω giới hạn bởi $y < \frac{x^2}{4}$

Xác suất cần tìm:

$$\frac{\text{Diện tích } D_a}{\text{Diện tích } \Omega} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} - (-1) \right) dx}{2} = \frac{13}{24}$$



b) Miền D_b chính là đoạn đường cong có phương trình $y = x^2/4$.
Diện tích miền $D_b = 0$ nên XS phương trình có nghiệm kép $= 0$.

Ví dụ này cho thấy một biến cố có xác suất bằng 0 vẫn có thể xảy ra; hay một biến cố có xác suất bằng 1 vẫn có thể không xảy ra trong 1 phép thử.

c) Hướng dẫn: Miền $\Omega_c \equiv D_a$

1.3 Nguyên lý xác suất lớn và xác suất nhỏ :

- Nếu một biến cố có xác suất xảy ra rất nhỏ thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.
- Tương tự như vậy, nếu biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất gần 1 thì thực tế có thể cho rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử.
- Mức xác suất khá nhỏ mà từ đó ta cho rằng không xảy ra biến cố có ý nghĩa khác nhau với những bài toán thực tế khác nhau.

§2. CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

2.1 Quan hệ giữa các biến cố

2.2 Một số phép toán giữa các biến cố

2.3 Các định lý xác suất :

2.3.1 Công thức cộng.

2.3.2 Công thức nhân và xác suất có điều kiện.

2.3.3 Công thức Becnoulli.

2.3.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

2.1 Quan hệ giữa các biến cố

Các khái niệm:

- Ta nói biến cố A **kéo theo** biến cố B và ký hiệu là $A \Rightarrow B$ (hay $A \subset B$), nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B xảy ra.

(Như vậy một biến cố được gọi là *biến cố sơ cấp* nếu không có biến cố nào khác kéo theo nó).

- Hai biến cố A và B được gọi là **bằng nhau**, ký hiệu là $A = B$, nếu biến cố A kéo theo biến cố B và ngược lại, tức là

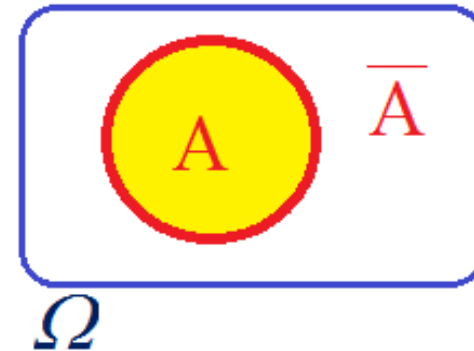
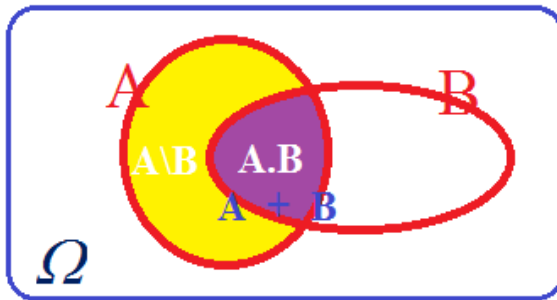
$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

- Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nhau nếu chúng không thể cùng xảy ra trong một phép thử.
- Hai biến cố A và B gọi là **đối lập** với nhau, ký hiệu là $B = \bar{A}$, nếu A xảy ra thì B không xảy ra và khi A không xảy ra thì B xảy ra.

2.2 Một số phép toán giữa các biến cố

- **Phép cộng:** Tổng của hai biến cố A và B là biến cố C , ký hiệu là: $C = A + B$ (hay $C = A \cup B$), xảy ra khi có **ít nhất** 1 trong 2 biến cố A, B xảy ra.
- **Phép nhân:** Tích của hai biến cố A và B là biến cố C, ký hiệu là: $C = AB$ (hay $C = A \cap B$), xảy ra khi cả 2 biến cố A và B **cùng xảy ra**.
- **Phép trừ:** Hiệu của biến cố A và B (theo thứ tự đó) là biến cố C, ký hiệu là: $C = A \setminus B$, xảy ra khi **biến cố A xảy ra và biến cố B không xảy ra**.

Vì mỗi biến cố bất kỳ chính là một tập con của Ω , nên có sự đồng nhất trong quan hệ và phép toán giữa các biến cố với quan hệ và phép toán giữa các tập hợp.

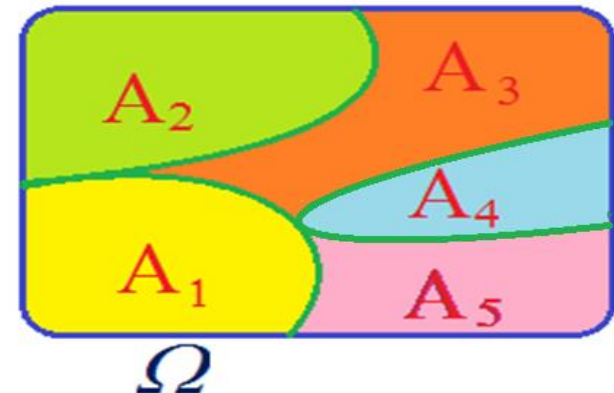


-Hệ n biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ được gọi là *hệ biến cố đầy đủ* nếu *các biến cố trong hệ xung khắc với nhau đôi một* và *tổng của chúng là biến cố chắc chắn*;

tức là:

$$A_i \cdot A_j = \emptyset \text{ với } \forall i \neq j$$

và
$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega.$$



Ví dụ 6

Tung ngẫu nhiên 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất.

Gọi A_i là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bằng i ; $i = 1, 2, \dots, 6$.

Gọi B là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn.

Gọi C là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ.

Gọi D là biến cố số chấm xuất hiện trên con xúc xắc chia hết cho 3.



- Hãy sử dụng các biến cố này để minh họa cho các khái niệm và các phép toán vừa được định nghĩa trong bài.*

- * $A_1 \subset C ; C \not\subset A_1$
- * A_1 và A_2 xung khắc
- * A_1 và A_2 không đối lập.
- * B và C xung khắc
- * $\{A_1; A_2; A_3\}$ xung khắc đôi một
- * B và C đối lập.
- * Biến cố đối lập của biến cố D là biến cố “số chấm xuất hiện không chia hết cho 3”.
- * Biến cố đối lập của A_5 là biến cố “xuất hiện số chấm khác 5”.
- * $A_3 + A_6 = D$
- * $A_2 + A_4 + A_6 = B$
- * $A_3 \cdot A_6 = \emptyset$
- * $B \cdot D = A_6$
- * $B \setminus D = A_2 + A_4$
- * $\{A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6\}$ là nhóm biến cố đầy đủ.
- * $\{B, C\}$ là nhóm biến cố đầy đủ
- * $\{C; A_2; A_4; A_6\}$ là nhóm biến cố đầy đủ.
- * $\{C; A_2; A_4; D\}$ không phải nhóm biến cố đầy đủ.

Các tính chất :

1. $A + B = B + A$; $AB = BA$
2. $(A+B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$
3. $A(B+C) = AB + AC$; $A + (BC) = (A+B)(A+C)$
4. $A \setminus (B+C) = (A \setminus B)(A \setminus C)$; $A \setminus (BC) = (A \setminus B) + (A \setminus C)$
5. Nếu $A \subset B$ thì $A+B = B$; $AB = A$
6. $\overline{\overline{A}} = A$
7. $A + \overline{A} = \Omega$; $A \cdot \overline{A} = \emptyset$
8. $\overline{A+B+C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Ví dụ 7

Bắn 3 phát đạn vào bia. Gọi A_i là biến cố phát đạn thứ i trúng; $i=1,2,3$. Hãy biểu diễn những biến cố sau qua các biến cố A_i và các biến cố đối lập của chúng:

- a) A: “Cả 3 phát đạn đều trúng”.
- b) B: “Cả 3 phát đạn đều trật”.
- c) C: “Ít nhất một phát trúng”.
- d) D: “Có đúng một phát trúng”.
- e) E: “Ít nhất một phát trượt”.
- f) F: “Không ít hơn 2 phát trúng”.
- g) G: “Không quá 1 phát trúng”.
- h) H: “Không trúng trước phát thứ hai”.



$$\text{a)} \quad A = A_1 A_2 A_3 \qquad \text{b)} \quad B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \qquad (\neq \overline{A})$$

$$\text{c)} \quad C = A_1 + A_2 + A_3 = \overline{B}$$

$$\text{d)} \quad D = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

$$\text{e)} \quad E = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} = \overline{A}$$

$$\text{f)} \quad F = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

$$\text{hay } F = A_1 \cdot A_2 + A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_3$$

$$\text{g)} \quad G = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

$$\text{h)} \quad H = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$$

$$\text{hay } H = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} (\overline{A_3} + A_3) + \overline{A_1} \cdot A_2 (\overline{A_3} + A_3) = \overline{A_1} (\overline{A_2} + A_2) = \overline{A_1}$$

2.3 Các định lý xác suất

2.3.1 Công thức cộng :

- Trường hợp tổng quát:

$$* P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$* P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) +P(ABC)$$

$$* P(A_1 + A_2 ++ A_n) = \\ = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i . A_j) + + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$$

- Nếu A, B xung khắc nhau thì : $P(A+B) = P(A) + P(B)$

- Nếu $A_1, A_2, ..A_n$ xung khắc đôi một thì:

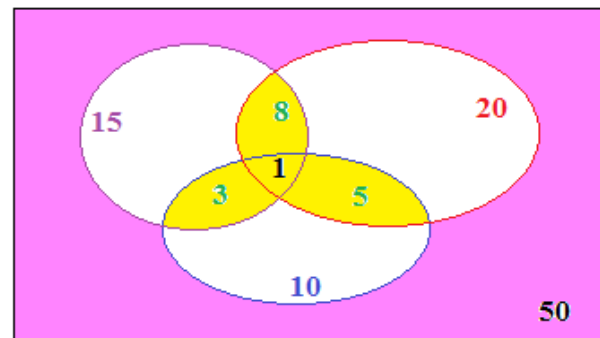
$$P(A_1+A_2+..+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+...+ P(A_n)$$

- Nếu $\{A_1, A_2, ..A_n\}$ là nhóm biến cố đầy đủ thì $P(A_1)+ P(A_2)....+ P(A_n)= 1$

Ví dụ 8

Trong một lớp **50** học sinh (HS) có :

- **20** HS chơi bóng đá;
- **15** HS chơi bóng chuyền ;
- **10** HS chơi bóng rổ;
- **8** HS chơi cả bóng đá và bóng chuyền;
- **5** HS chơi cả bóng đá và bóng rổ;
- **3** HS chơi đồng thời bóng chuyền và bóng rổ;
- **1** học sinh chơi cả 3 môn trên.



Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất HS đó:

- a) chơi ít nhất một môn bóng. b) chơi đúng 2 môn bóng.
c) HS đó chơi bóng đá hoặc hoặc bóng chuyền, nhưng không cùng chơi cả 2 môn này.

Câu a) là ví dụ minh họa công thức cộng xác suất.

Gọi Đ là biến cố chọn được học sinh chơi bóng đá;

C là biến cố chọn được học sinh chơi bóng chuyền;

R là biến cố chọn được học sinh chơi bóng rổ.

Gọi A là biến cố học sinh đó chơi ít nhất một môn bóng;

Khi đó $A = Đ + C + R$

$$P(A) = P(Đ) + P(C) + P(R) - P(ĐC) - P(CR) - P(ĐR) + P(ĐCR)$$

$$P(A) = \frac{20}{50} + \frac{15}{50} + \frac{10}{50} - \frac{8}{50} - \frac{5}{50} - \frac{3}{50} + \frac{1}{50} = \frac{30}{50} = 0,6$$

Kết quả trên có thể nhằm trực tiếp từ biểu đồ Ven.

b) $13/50$.

c) $19/50 = P(Đ) + P(C) - 2 * P(ĐC)$

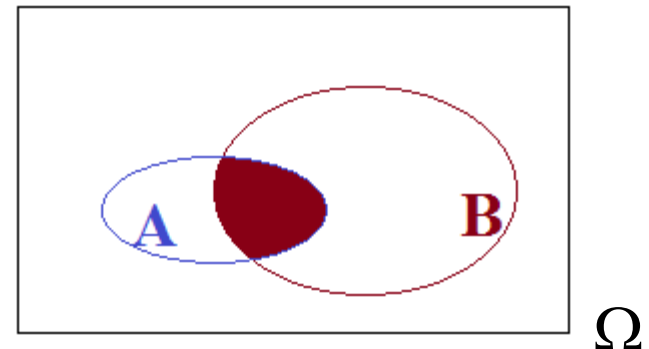
2.3.2 Công thức nhân :

- Định nghĩa **xác suất có điều kiện** (*conditional probability*)

Xác suất của biến cố A với điều kiện B chính là XS của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra, ký hiệu $P(A/B)$ hay $P(A|B)$.

- *Một cách nói khác:*

Nếu chỉ xét trong các trường hợp thuận lợi cho biến cố B (tức là xem như $\Omega \equiv B$) thì xác suất biến cố A xảy ra là bao nhiêu?

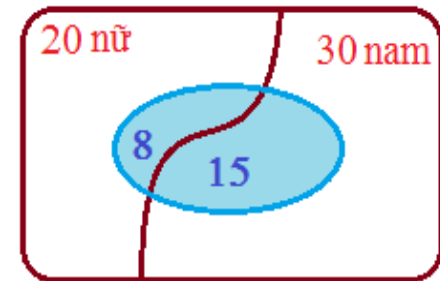


- Công thức:
$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$
 khi $P(B) \neq 0$

- Công thức nhân: $P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$

Ví dụ 9

Trong lớp có 20 bạn nữ và 30 bạn nam, ta thấy có 8 bạn nữ và 15 bạn nam mặc áo màu xanh. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Hãy tính:



- a) XS bạn được chọn là bạn nữ.
- b) XS bạn đó mặc áo màu xanh.
- c) XS chọn được một bạn nữ mặc áo màu xanh.
- d) Biết rằng bạn đó là nữ thì xác suất bạn đó mặc áo màu xanh là bao nhiêu?
- e) Nếu bạn đó mặc áo màu xanh thì khả năng bạn đã chọn được một học sinh nam là bao nhiêu?



$$a) P(Nu) = 20/50$$

$$b) P(X) = 23/50$$

$$c) P(X.Nu) = 8/50$$

$$d) P(X/Nu) = 8/20$$

$$e) P(Nam/X) = 15/23$$

Ví dụ 10

Tung 2 con xúc xắc cân đối, đồng chất.

Tìm xác suất của biến cố tổng số chấm ở mặt trên 2 con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng có ít nhất một mặt 6 chấm.



Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố tổng số chấm ở mặt trên 2 con xúc xắc bằng 7.
Gọi B là biến cố trên mặt 2 con xúc xắc có ít nhất 1 mặt 6 chấm.
Xác suất cần tìm chính là $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2 / 36}{11 / 36} = \frac{2}{11}$$

Có thể tính bằng định nghĩa xác suất có điều kiện.

xx1 \ xx2	1	2	3	4	5	6
1						AB
2					A	B
3				A		B
4			A			B
5		A				B
6	AB	B	B	B	B	B

- Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại, tức là:

$$P(A/B)=P(A/\bar{B})=P(A)$$

và
$$P(B/A)=P(B/\bar{A})=P(B)$$

- Hệ các biến cố $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ được gọi là **độc lập toàn thể** (hay *độc lập tương hỗ*) nếu mỗi biến cố trong hệ đều độc lập với một tích bất kỳ các biến cố còn lại. Dễ thấy $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ độc lập toàn thể thì nó cũng độc lập đôi một. Điều ngược lại nói chung không đúng (sinh viên có thể tham khảo thêm ví dụ trong tài liệu (4)).

Ví dụ 11

Một hộp có 5 bi đỏ & 5 bi vàng với kích thước giống hệt nhau.

a) Rút ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi.

Gọi D_1 là biến cố viên bi rút ra đầu tiên có màu đỏ;
 D_2 là biến cố viên bi rút ra sau đó có màu đỏ.

$$P(D_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(D_2/D_1) = \frac{4}{9} \neq P(D_2/\overline{D_1}) = \frac{5}{9} \Rightarrow D_1 \text{ và } D_2 \text{ không độc lập.}$$

b) Rút ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi nhưng bỏ bi lại vào hộp sau mỗi lần rút.

$$P(D_1) = \frac{5}{10}$$

$$P(D_2/D_1) = \frac{5}{10} = P(D_2/\overline{D_1}) = \frac{5}{10} \Rightarrow D_1 \text{ và } D_2 \text{ là độc lập.}$$

- Công thức nhân trong trường hợp tổng quát:

$$* P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$* P(A_1.A_2 \dots A_n) = \\ = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

- Nếu A, B là 2 biến cố độc lập thì:

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

- Nếu các biến cố A_1, A_2, \dots, A_n độc lập toàn thể thì:

$$P(A_1.A_2 \dots A_n) = P(A_1).P(A_2) \dots P(A_n).$$

Ví dụ 12

Xác suất máy tự động thứ nhất sản xuất ra 1 một sản phẩm tốt là 0,9; còn xs máy thứ hai sản xuất ra sản phẩm tốt là 0,7.

Cho mỗi máy sản xuất một sản phẩm.

Tính xác suất thu được ít nhất một sản phẩm tốt.
(làm bằng nhiều cách)



Hướng dẫn:

Gọi A_1 là biến cố sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất là tốt;

A_2 là biến cố sản phẩm do máy thứ hai sản xuất là tốt;

Gọi A là biến cố thu được ít nhất một sản phẩm tốt.

Cách 1: $A = A_1 + A_2$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= 0,9 + 0,7 - 0,9 \times 0,7 = 0,97 \text{ do } A_1; A_2 \text{ độc lập} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}A &= \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2} + A_1 \cdot A_2 \\P(A) &\stackrel{\text{xk}}{=} P(\overline{A_1} \cdot A_2) + P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(A_1 \cdot A_2) \\&\stackrel{\text{dl}}{=} P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(A_1) \cdot P(A_2) \\&= 0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,3 + 0,9 \times 0,7 = 0,97\end{aligned}$$

Cách 3:

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) \stackrel{\text{dl}}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \\&= 1 - 0,1 \times 0,3 = 0,97\end{aligned}$$

Ví dụ 13

Một hộp có 15 bi đỏ và 5 bi xanh cùng cỡ.



Ví dụ 13₁) Lấy ngẫu nhiên (cùng lúc) 7 viên bi.

a) Tìm xác suất của biến cố A: “có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh trong các bi được lấy ra”.

Ví dụ 13₂) Lấy ngẫu nhiên lần lượt 7 viên bi.

b) Tìm xác suất của biến cố B: “có được 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh , mà các viên bi đỏ và xanh được lấy ra theo thứ tự luân phiên”.

c) Tìm xác suất của biến cố C: “có được 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh”.

$$a) P(A) = \frac{C_{15}^4 \times C_5^3}{C_{20}^7} = \frac{455}{2584}$$

$$b) P(B) = P(D_1 X_2 D_3 X_4 D_5 X_6 D_7)$$

$$= P(D_1) \cdot P(X_2 | D_1) \cdot P(D_3 | D_1 X_2) \cdot P(X_4 | D_1 X_2 D_3) \dots$$

$$P(B) = \frac{15}{20} \times \frac{5}{19} \times \frac{14}{18} \times \frac{4}{17} \times \frac{13}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{12}{14} = \frac{13}{2584}$$

$$c) P(C) = P(B) \times \text{số cách thay đổi thứ tự màu sắc của 7 viên}$$

bi khi lấy ra khỏi hộp

$$P(C) = P(B) \times C_7^4 = \frac{13}{2584} \times C_7^4 = \frac{455}{2584}$$

(cũng có thể dùng xscđ – BT3, slide 26)

Nhận xét: $P(C) = P(A) \Rightarrow ???$

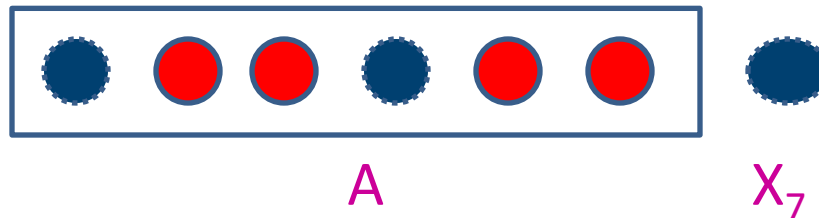
Ví dụ 14

Một hộp có 15 bi đỏ và 5 bi xanh cùng cỡ.
Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi cho đến
khi được đủ 3 viên bi xanh thì dừng.



Tìm xác suất có được 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh.

Hướng dẫn:



Gọi A là b/c lấy 4 viên đỏ và 2 viên xanh từ hộp (thứ tự màu tùy ý). Xác suất cần tìm : $P(A.X_7) = P(A). P(X_7|A)$

$$= \frac{C_{15}^4 \times C_5^2}{C_{20}^6} \times \frac{3}{14} = \frac{195}{2584}$$

Ví dụ 15

Một hộp có 15 bi đỏ và 5 bi xanh cùng cỡ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 7 viên bi, có hoàn lại bi sau mỗi lần lấy.

a) Tìm xác suất của bc A: “có 4 lần lấy được viên bi đỏ và 3 lần lấy được viên bi xanh, theo thứ tự luân phiên”

b) Tìm xác suất của biến cố B: “có được 4 lần lấy bi đỏ và 3 lần lấy bi xanh” .

Hướng dẫn:

$$a) P(A) = P(D_1 X_2 D_3 X_4 D_5 X_6 D_7)$$

$$P(A) = \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} \times \frac{15}{20} = \left(\frac{15}{20}\right)^4 \times \left(\frac{5}{20}\right)^3$$

$$b) P(B) = C_7^4 \times P(A) = C_7^4 \times \left(\frac{15}{20}\right)^4 \times \left(\frac{5}{20}\right)^3 \Rightarrow \text{ct Bernoulli}$$



Ví dụ 16

Một hộp có 10 lá phiếu trong đó chỉ có 3 lá phiếu may mắn. Mỗi người lần lượt rút ngẫu nhiên một lá phiếu. (Không hoàn lại sau mỗi lần rút).

- a) Tìm xác suất có đúng 1 người rút được lá phiếu may mắn trong 3 người đầu tiên (*nhiều cách*).
- b) Nếu trong 3 người đầu chỉ có 1 người rút được phiếu may mắn thì hãy tìm xác suất người đó là người rút thứ hai .
- c) Giả sử việc rút phiếu sẽ dừng lại nếu có đủ 3 người rút được phiếu may mắn. Tìm xác suất có 8 người đã tham gia.
- d) Hãy so sánh cơ hội rút được phiếu may mắn của những người tham gia.
(*Số người có mặt ≥ 10*)



Hướng dẫn:

Gọi A_i là biến cố người thứ i rút được phiếu may mắn, $i = 1; 2; 3$.

a) Gọi A là biến cố trong 3 người rút phiếu đầu tiên chỉ có 1 người rút được phiếu may mắn.

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$$

Có thể viết cách khác: $A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$
và dùng các công thức xs để tính ra cùng một kết quả.

b) XS cần tìm: $P(A_2|A) = \frac{P(A_2 \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3})}{P(A)} = \frac{1}{3}$

c) Gọi F là biến cố trong 7 người đầu có 2 người rút được phiếu may mắn; C là biến cố có 8 người đã tham gia. $\Rightarrow C = F \cdot A_8$.

$$\Rightarrow P(C) = P(F \cdot A_8) = P(F) \cdot P(A_8|F) = \frac{C_7^2 \cdot C_5^5}{C_{10}^7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{40}$$

d) So sánh các $P(A_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$

* $P(A_1) = 3/10.$

*
$$A_2 = A_1 A_2 + \overline{A_1} A_2 \quad (\text{vì } A_1 A_2 + \overline{A_1} A_2 = (A_1 + \overline{A_1}) A_2 = \Omega \cdot A_2 = A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_2) \stackrel{\text{xk}}{=} P(A_1 A_2) + P(\overline{A_1} A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2 | \overline{A_1})$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{10} \dots\dots\dots$$

.....
* Tính $P(A_9)$: Gọi F_1 là b/c trong 8 người đầu có 1 người rút trúng.
 F_2 là biến cố trong 8 người đầu có 2 người rút trúng.
 F_3 là biến cố trong 8 người đầu có 3 người rút trúng.

$$A_9 = F_1 A_9 + F_2 A_9 + F_3 A_9$$

$$P(A_9) = P(F_1) \cdot P(A_9 | F_1) + P(F_2) \cdot P(A_9 | F_2) + P(F_3) \cdot P(A_9 | F_3)$$
$$= \frac{C_3^1 \cdot C_7^7}{C_{10}^8} \times \frac{2}{2} + \frac{C_3^2 \cdot C_7^6}{C_{10}^8} \times \frac{1}{2} + \frac{C_3^3 \cdot C_7^5}{C_{10}^8} \times 0 = \frac{3}{10}$$

* Tương tự ta tính được $P(A_{10}) = 3/10$; $P(A_{11}) = 0.$

Ví dụ 17

Một hộp có 2 bi xanh, 3 bi trắng và 4 bi đỏ cùng cỡ.

Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi (không hoàn lại sau mỗi lần lấy), cho đến khi được bi đỏ thì dừng.

Tìm các xác suất:

a) Có 2 bi trắng và một bi xanh được lấy ra (làm theo 2 cách).

b) Không có bi trắng nào được lấy ra (2 cách)

c) Tìm xác suất lấy được ít nhất 1 bi xanh biết rằng không có bi trắng nào được lấy ra.



Hướng dẫn: Gọi X_i là biến cố lấy được bi xanh ở lần lấy thứ i ;
 \bar{D}_i là biến cố lấy được bi đỏ ở lần lấy thứ i ;
 V_i là biến cố lấy được bi vàng ở lần lấy thứ i ; $i = 1, 2, \dots$

a) Gọi bc A: “có 2 bi trắng và một bi xanh được lấy ra”

$A \equiv$ “trong 3 viên đầu có 2 trắng, 1 xanh; viên thứ 4 là đỏ”.

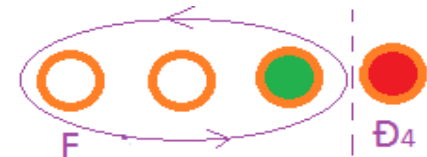
Cách 1: $A = T_1 \cdot T_2 \cdot X_3 \cdot \bar{D}_4 + T_1 \cdot X_2 \cdot T_3 \cdot \bar{D}_4 + X_1 \cdot T_2 \cdot X_3 \cdot \bar{D}_4$

$$P(A) \stackrel{\text{xlk}}{=} P(T_1) \cdot P(T_2 | T_1) \cdot P(X_3 | T_1 T_2) \cdot P(\bar{D}_4 | T_1 T_2 X_3) + \\ + P(T_1 \cdot X_2 \cdot T_3 \cdot \bar{D}_4) + P(X_1 \cdot T_2 \cdot X_3 \cdot \bar{D}_4)$$

$$P(A) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} = 3 \times \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{21}$$

Cách 2: Nếu gọi F là biến cố trong 3 viên bi đầu có 2 bi trắng, 1 bi xanh thì $A = F \cdot \bar{D}_4$.

$$P(A) = P(F) \cdot P(\bar{D}_4 / F) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_9^3} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{21}$$



b) Gọi B là biến cố không có bi trắng nào được lấy ra.

$$B = \bar{D}_1 + X_1 \bar{D}_2 + X_1 X_2 \bar{D}_3$$

Cách 1:

$$P(B) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

Cách 2:

$$P(B) = \frac{4}{9} + \frac{C_2^1}{C_9^1} \cdot \frac{4}{8} + \frac{C_2^2}{C_9^2} \cdot \frac{4}{7} \equiv \sum_{k=0}^2 \frac{C_2^k}{C_9^k} \times \frac{4}{9-k} = \frac{4}{7}$$

c) Gọi E là biến cố lấy được ít nhất 1 bi xanh. XS cần tìm:

$$\begin{aligned} P(E/B) &= \frac{P(EB)}{P(B)} = \frac{P(E \cdot [\bar{D}_1 + X_1 \bar{D}_2 + X_1 X_2 \bar{D}_3])}{P(B)} \\ &= \frac{P(X_1 \bar{D}_2 + X_1 X_2 \bar{D}_3)}{P(B)} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Ví dụ 18

Gieo đồng thời ba con xúc sắc cân đối, đồng chất một cách độc lập.

Tính xác suất của các biến cố:

- a) Tổng số chấm xuất hiện là 10 nếu biết rằng ít nhất có một con xuất hiện mặt 3 chấm.
- b) Có ít nhất một con xuất hiện mặt 1 chấm nếu biết rằng số chấm xuất hiện trên 3 con là khác nhau.



$$\text{a) } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{91}{6^3}} = \frac{15}{91} \qquad \text{b) } P(C|D) = \frac{\frac{60}{6^3}}{\frac{120}{6^3}} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 19

Ta gọi xác suất 1 linh kiện hoạt động tốt trong một khoảng thời gian ấn định T là độ tin cậy của linh kiện trong khoảng thời gian ấy. Giả sử một hệ thống thiết bị gồm nhiều linh kiện ghép thành. Độ tin cậy của một hệ thống chính là xác suất để hệ thống đó hoạt động tốt trong khoảng thời gian ấn định.

Giả sử n là số linh kiện của hệ thống.

Ký hiệu p_i là độ tin cậy của linh kiện A_i ; $i = 1, 2, \dots, n$.

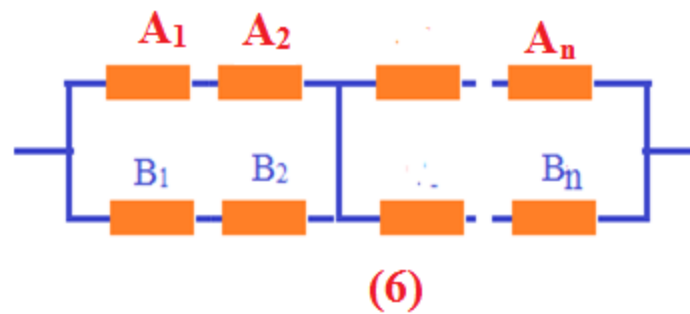
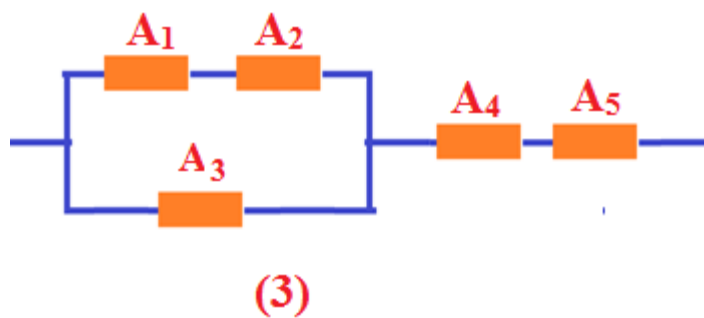
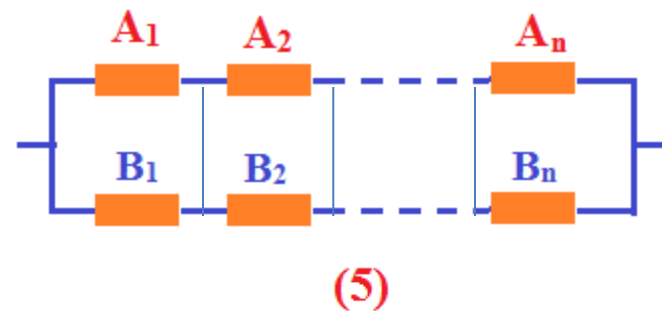
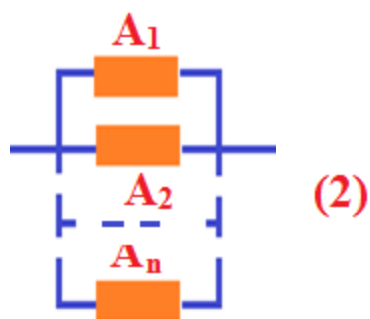
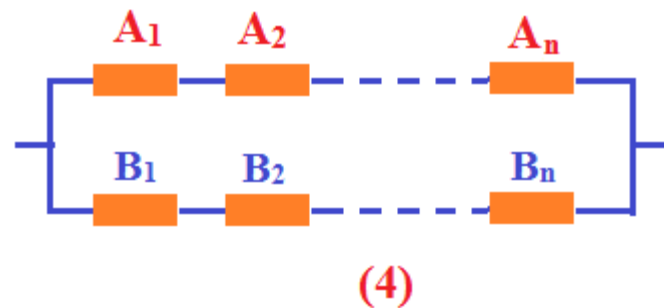
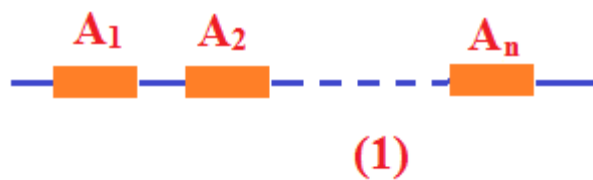
a) Hãy tìm độ tin cậy của từng hệ thống (1); (2); (3).

b) Hãy tìm độ tin cậy của ht (1); (2) khi $n = 5$; $p_i = 0,8$ với mọi i .

Hãy nhận xét kết quả khi n là một số lớn.

c) Để tăng độ tin cậy cho hệ thống (1), người ta mắc dự phòng thêm như hệ (4); (5); (6). So sánh độ tin cậy của hệ (4) và (5).





*Hướng dẫn
sơ lược:*

* Hệ (1) hoạt động tốt trong khoảng thời gian T
 $\Leftrightarrow \forall A_i$ hoạt động tốt trong khoảng thời gian T

$$+ P(\text{Hệ (1) hoạt động tốt}) = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

$$+ P(\text{Hệ (1) hoạt động không tốt}) = 1 - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

$$\text{Khi } n=5; p_i=0,8 \quad \forall i \quad \text{thì } P(\text{Hệ (1) tốt}) = 0,8^5 = 0,32768$$

* Hệ (2) hoạt động không tốt trong khoảng thời gian T

$$\Leftrightarrow \forall A_i \text{ hoạt động không tốt trong khoảng thời gian T}$$

$$+ P(\text{Hệ (2) h.động không tốt}) = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n; q_i = 1 - p_i$$

$$+ P(\text{Hệ (2) hoạt động tốt}) = 1 - q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n$$

$$\text{Khi } n=5; \forall p_i=0,8 \quad \text{thì } P(\text{Hệ (2) hđ tốt}) = 1 - 0,2^5 = 0,99968$$

\Rightarrow *Hãy nhận xét về 2 giá trị xác suất tìm được.*

$$\begin{aligned} * P(\text{Hệ (3) hđ tốt}) &= P(\text{cụm } A_1, A_2, A_3 \text{ tốt}) \times p_4 \times p_5 \\ &= [1 - P(\text{cụm 1,2 không tốt}) \times q_3] \times p_4 \times p_5 \\ &= [1 - (1 - p_1 \times p_2) \times q_3] \times p_4 \times p_5 \end{aligned}$$

Ví dụ 20

Ba cậu bé Phúc; Lộc; Thọ, theo thứ tự, luân phiên nhau tung 1 con xúc xắc và xoay vòng tung cho đến khi mặt trên con xúc xắc xuất hiện 6 chấm. Cậu bé nào tung được mặt 6 chấm sẽ giành quyền ưu tiên của trò chơi.

Tìm xác suất bé Lộc nhận được quyền ưu tiên đó.



Hướng dẫn:

S_i là biến cố lần tung xúc xắc thứ i xuất hiện mặt 6 chấm.

Xác suất cần tìm là:

$$\begin{aligned} & P(\overline{S_1} \cdot S_2 + \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot S_3 + \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{S_3} \cdot S_4 + \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{S_3} \cdot \overline{S_4} \cdot S_5 + \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{S_3} \cdot \overline{S_4} \cdot \overline{S_5} \cdot S_6 + \dots) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{91} \end{aligned}$$
$$S = u_1 \times \frac{1}{1 - q}$$

Ví dụ 21

Một kiện hàng có 6 sản phẩm loại A; 8 sản phẩm loại B và 10 sản phẩm loại C. Một người lấy từng sản phẩm ra cho đến khi lấy được 2 sản phẩm loại A thì dừng.

Tìm xác suất của biến cố E: “trong các sản phẩm đã lấy ra có được 3 sản phẩm loại B”.



Hướng dẫn:

$$E = [1A+3B].A_5 + [1A+3B+1C].A_6 + \underbrace{[1A+3B+2C].A_7}_{\substack{\swarrow \\ \frac{C_6^1 \times C_8^3 \times C_{10}^2}{C_{24}^6} \times \frac{5}{18}}} + \dots + [1A+3B+10C].A_{15}$$

Xác suất cần tìm là:

$$P(E) = \sum_{k=0}^{10} \frac{C_6^1 \times C_8^3 \times C_{10}^k}{C_{24}^{1+3+k}} \times \frac{5}{24-(1+3+k)} = \frac{24}{143}$$

Ví dụ 22

Một chuyến tàu hỏa gồm n toa dừng bánh tại một sân ga. Có k hành khách mới bước lên tàu ngẫu nhiên và độc lập với nhau, ($k \geq n$). Giả sử mỗi người có thể lên một toa bất kỳ. Hãy tính xác suất mỗi toa đều có hành khách mới ngồi.

HD: Gọi B là b/c có ít nhất 1 toa không có người lên.
Xác suất cần tìm là $1 - P(B)$.



Gọi A_i là biến cố toa thứ i không có người lên; $i = 1, 2, \dots, n$;

thì $B = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ và:

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &= \frac{n \cdot (n-1)^k}{n^k} - \frac{C_n^2 \cdot (n-2)^k}{n^k} + \frac{C_n^3 \cdot (n-3)^k}{n^k} - \dots + \frac{(-1)^{n-2} \cdot C_n^{n-1} \cdot 1}{n^k} + 0 \end{aligned}$$

2.3.3 Định lý Bernoulli :

- Giả sử ta thực hiện n phép thử độc lập.
- Trong mỗi phép thử, biến cố B xuất hiện với xác suất p không đổi; và không xuất hiện với xác suất $q = 1 - p$.

Khi đó: a) XS biến cố B xuất hiện đúng k lần là : $C_n^k p^k q^{n-k}$

b) XS b/c B xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần là : $\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

c) Ta nói *số lần b/c B xuất hiện có khả năng nhất* (hay *số lần xuất hiện chắc nhất*) là số k_0 mà XS để b/c B xuất hiện đúng k_0 lần trong n phép thử là cao nhất.

k_0 được tìm từ biểu thức: $np - q \leq k_0 \leq np - q + 1$; $k_0 \in \mathbb{N}$.

* Nếu np là một số nguyên thì số có khả năng nhất chính là np .

* Số lần biến cố B xuất hiện trong n phép thử độc lập còn được gọi là số lần thành công, và p được gọi là XS thành công.

Ví dụ 23

Tung 5 lần một con xúc xắc cân đối và đồng chất.

- Tìm xác suất có đúng 3 lần được mặt 6 chấm.
- Tìm xác suất có từ 2 đến 4 lần được mặt 6 chấm.
- Hãy cho biết số lần được mặt 6 chấm có khả năng nhất?



Hướng dẫn: Đây là ví dụ minh họa cho công thức Bernoulli.

- Gọi S_i là biến cố lần tung thứ i được mặt 6 chấm; $i=1,2,\dots,5$.
và A là biến cố có đúng 3 lần tung được mặt 6 chấm.

$$A = S_1 S_2 S_3 \overline{S_4} \overline{S_5} + S_1 S_2 \overline{S_3} S_4 \overline{S_5} + \dots + \overline{S_1} \overline{S_2} S_3 S_4 S_5$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \overset{vk}{P(S_1 S_2 S_3 \overline{S_4} \overline{S_5})} + P(S_1 S_2 \overline{S_3} S_4 \overline{S_5}) + \dots + P(\overline{S_1} \overline{S_2} S_3 S_4 S_5) \\ &\overset{dl}{=} P(S_1)P(S_2)P(S_3).P(\overline{S_4}).P(\overline{S_5}) + \dots; \text{ có } C_5^3 \text{ nhóm} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \dots = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

Minh họa câu c)

Cách 1: Sử dụng định nghĩa:

Số lần được mặt 6
chấm trong 5 lần tung

Xác suất tương ứng

So sánh các xác suất

0	0.40188	Max
1	0.40188	Max
2	0.16075	
3	0.03215	
4	0.00322	
5	0.00013	

Suy ra số lần được mặt 6 chấm có khả năng nhất là 0 và 1.

Cách 2: Sử dụng công thức: Do $n=5$; $p=1/6$; $q=5/6$ nên $np-q = 0$
 $\Rightarrow 0 \leq k_0 \leq 1 \Rightarrow$ Kết luận $k_0=0$ hay $k_0=1$.

Ví dụ 24

Một đề trắc nghiệm gồm 20 câu, mỗi câu có 5 đáp án để chọn. An không học bài nên làm bài bằng cách lựa chọn ngẫu nhiên. Tìm xác suất An chọn được ít nhất 10 câu đúng. Số câu đúng có khả năng nhất của An là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

Đây là dạng bt Bernoulli với $n=20$; $p=1/5$; $k=10 \rightarrow 20$.

Xác suất cần tìm:

$$\sum_{k=10}^{20} C_{20}^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 2,59 \times 10^{-3} \approx 0,3\%$$

Số câu đúng có khả năng nhất là k_0 mà

$$np-q \leq k_0 \leq np-q + 1 \Rightarrow k_0 = 4$$



Ví dụ 25 Bài toán nào sau đây dùng công thức Bernoulli?

- a) Trong kho có 200 sản phẩm, người ta thống kê được tỉ lệ sp loại 1; loại 2 và phế phẩm tương ứng là 60%; 30% và 10%.
Lấy ngẫu nhiên từ kho 15 sản phẩm.
Tìm xác suất có được 10 sản phẩm loại 1; 4 sản phẩm loại 2 và 1 phế phẩm.
- b) Trong kho có 2000 sản phẩm, người ta thống kê được tỉ lệ sp loại 1; loại 2 và phế phẩm tương ứng là 60%; 30% và 10%.
Lấy ngẫu nhiên từ kho 15 sản phẩm.
Tìm xác suất có được 10 sp loại 1; 4 sp loại 2 và 1 phế phẩm.
- c) Người ta thống kê được tỉ lệ sản phẩm loại 1; loại 2 và phế phẩm của một phân xưởng tương ứng là 60%; 30% và 10%.
Lấy ngẫu nhiên từ phân xưởng 15 sản phẩm.
Tìm xác suất có được 10 sp loại 1; 4 sp loại 2 và 1 phế phẩm.



Ví dụ 25c)

Người ta thống kê được tỉ lệ sản phẩm loại 1; loại 2 và phế phẩm của một phân xưởng tương ứng là 60%; 30% và 10%.

Lấy ngẫu nhiên từ phân xưởng 15 sản phẩm.

Tìm xác suất có được 10 sản phẩm loại 1; 4 sản phẩm loại 2 và 1 phế phẩm.



Hướng dẫn:

Khi lấy 1 sản phẩm, ta xem như đang thực hiện một phép thử với 3 kết quả xảy ra. Có 15 phép thử độc lập như vậy.



- Xác suất xảy ra 1 trường hợp cụ thể: $0,6^{10} \times 0,3^4 \times 0,1$

- Số trường hợp xảy ra: $C_{15}^{10} \times C_5^4 \times C_1^1$

Đáp số: $C_{15}^{10} \times C_5^4 \times 0,6^{10} \times 0,3^4 \times 0,1 \approx 0,0735$

Ví dụ 26

Một hộp bi có 5 bi đỏ và 7 vàng và 9 xanh.

a) Rút lần lượt 9 viên bi, có hoàn lại bi sau mỗi lần rút. Tìm xác suất rút được 2 bi vàng, 3 bi đỏ và 4 bi xanh.

b) Rút lần lượt từng bi, có hoàn lại bi sau mỗi lần rút, cho đến khi gặp đủ 3 bi đỏ thì dừng. Tìm XS đã rút được 2 bi vàng và 4 bi xanh.



Hướng dẫn:

$$a) \quad C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot \left(\frac{7}{21}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{21}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{21}\right)^4$$

Bài này còn được gọi là bài toán Bernoulli mở rộng.

$$b) \quad \left[C_8^2 \cdot C_6^4 \cdot \left(\frac{7}{21}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{21}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{21}\right)^2 \right] \times \frac{5}{21}$$

Ví dụ 27

Một cậu bé lần lượt giải từng câu đố trong một trò chơi trên điện thoại theo hình thức lựa chọn câu trả lời phù hợp trong các đáp án được gợi ý. Trò chơi sẽ tự động dừng nếu người chơi trả lời sai đến 7 câu, còn nếu vượt qua được câu thứ 20 thì người chơi sẽ được vào vòng trong. Giả sử rằng xác suất cậu bé trả lời đúng cho mỗi câu hỏi là 0,6.

a) Tìm xác suất cậu bé dừng chơi sau câu trả lời thứ 9.

b) Tìm xác suất cậu bé được vào vòng trong.

Hướng dẫn:

- $P(\text{dừng ngay sau câu thứ } 7) = 0,4^7$

- $P(\text{dừng ngay sau câu thứ } 8) = C_7^6 \times 0,6 \times 0,4^7$

- $P(\text{dừng ngay sau câu thứ } 9) = C_8^6 \times 0,6^2 \times 0,4^7$

..... XS cần tìm: $1 - \sum_{k=7}^{20} C_{k-1}^6 \times 0,6^{k-7} \times 0,4^7$



Ví dụ 28 Để vận chuyển đường dài, người ta xếp các trái đào vào những hộp 12 trái. Tuy nhiên, theo thống kê của một cửa hàng bán trái cây thì có đến 8% các trái đào mới nhập về đã bị hư hỏng trong quá trình vận chuyển.

a) Nếu chọn ngẫu nhiên 4 trái đào từ một hộp thì xác suất có không quá 1 trái hỏng là bao nhiêu?

b) Nếu chọn ngẫu nhiên 4 trái đào từ một hộp có 2 trái hỏng thì xác suất cả 4 trái không hỏng là bao nhiêu?

c) Tính XS trong 10 hộp đào có 1 hộp hỏng hơn 2 trái.



Ví dụ 29

Giả sử các đèn giao thông tại những giao lộ trong thành phố hoạt động độc lập ; tín hiệu đèn đỏ kéo dài trong 30 giây liên tiếp, đèn vàng trong 4 giây và đèn xanh trong 26 giây. Tìm xác suất một người đi qua 8 giao lộ có 2 lần gặp đèn vàng và 3 lần gặp đèn đỏ.

Ví dụ 30

Một người viết n tấm thiệp khác nhau gửi cho n người bạn. Trong lúc lơ đãng anh ta đã bỏ ngẫu nhiên n tấm thiệp này vào n bì thư đã ghi sẵn địa chỉ của những người bạn nói trên và gửi đi.

a) Tìm xác suất trong những người bạn đó, có ít nhất 1 trong 2 người A và B sẽ nhận đúng thiệp dành cho mình.

b) Tìm xác suất có ít nhất một người bạn nhận đúng thiệp dành cho mình?



2.3.4 Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes:

Định lý: Giả sử $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ là hệ biến cố đầy đủ và F là một biến cố bất kỳ.

Khi đó ta có các công thức sau:

a)
$$P(F) = P(H_1).P(F/H_1) + \dots + P(H_n).P(F/H_n) = \sum_{i=1}^n P(H_i).P(F/H_i)$$

Công thức xác suất toàn phần hay CT xác suất đầy đủ.

b)
$$P(H_k/F) = \frac{P(H_k.F)}{P(F)} = \frac{P(H_k).P(F/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i).P(F/H_i)}; \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ (khi P(F) \neq 0) \end{array}$$

Công thức Bayes.

Chứng minh

a) Ta có:

$$F = F.\Omega = F.(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = FH_1 + FH_2 + \dots + FH_n$$

$\forall \{FH_1, FH_2, \dots, FH_n\}$ đôi một xung khắc nên

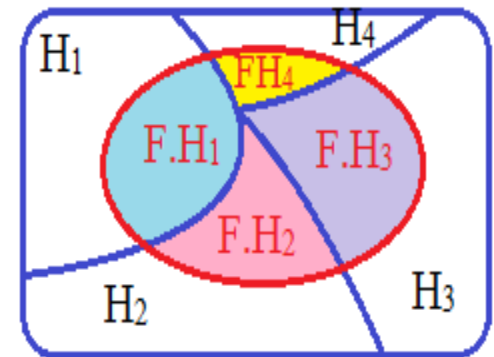
$$P(F) = P(FH_1) + P(FH_2) + \dots + P(FH_n)$$

$$= P(H_1).P(F/H_1) + P(H_2).P(F/H_2) + \dots + P(H_n).P(F/H_n)$$

b) Theo công thức nhân, ta có:

$$P(H_k/F) = \frac{P(H_k F)}{P(F)} = \frac{P(H_k).P(F/H_k)}{P(F)}$$

$$k \in \{1, 2, \dots, n\}$$



Ví dụ 31

Một nhà máy sản xuất bóng đèn có 3 phân xưởng sản xuất.

Phân xưởng 1 sản xuất 50%;

phân xưởng 2 sản xuất 20%;

còn phân xưởng 3 sản xuất 30%

số bóng đèn của cả nhà máy.



Tỉ lệ phế phẩm của các phân xưởng lần lượt là 1% ; 3% và 2,5%.

a) Tìm tỉ lệ phế phẩm chung của toàn nhà máy.

b) Nếu kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm từ trong kho thành phẩm chung của nhà máy mà thấy đó là phế phẩm thì khả năng sản phẩm đó do phân xưởng 2 sản xuất là bao nhiêu?

Hướng dẫn: Lấy ngẫu nhiên 1 bóng đèn từ kho chung của nhà máy. Gọi F là biến cố bóng đèn đó hỏng.

H_i là b/c sản phẩm lấy ra do phân xưởng i sản xuất, $i=1,2,3$.

a) Tỷ lệ phế phẩm của nhà máy chính là $P(F)$.

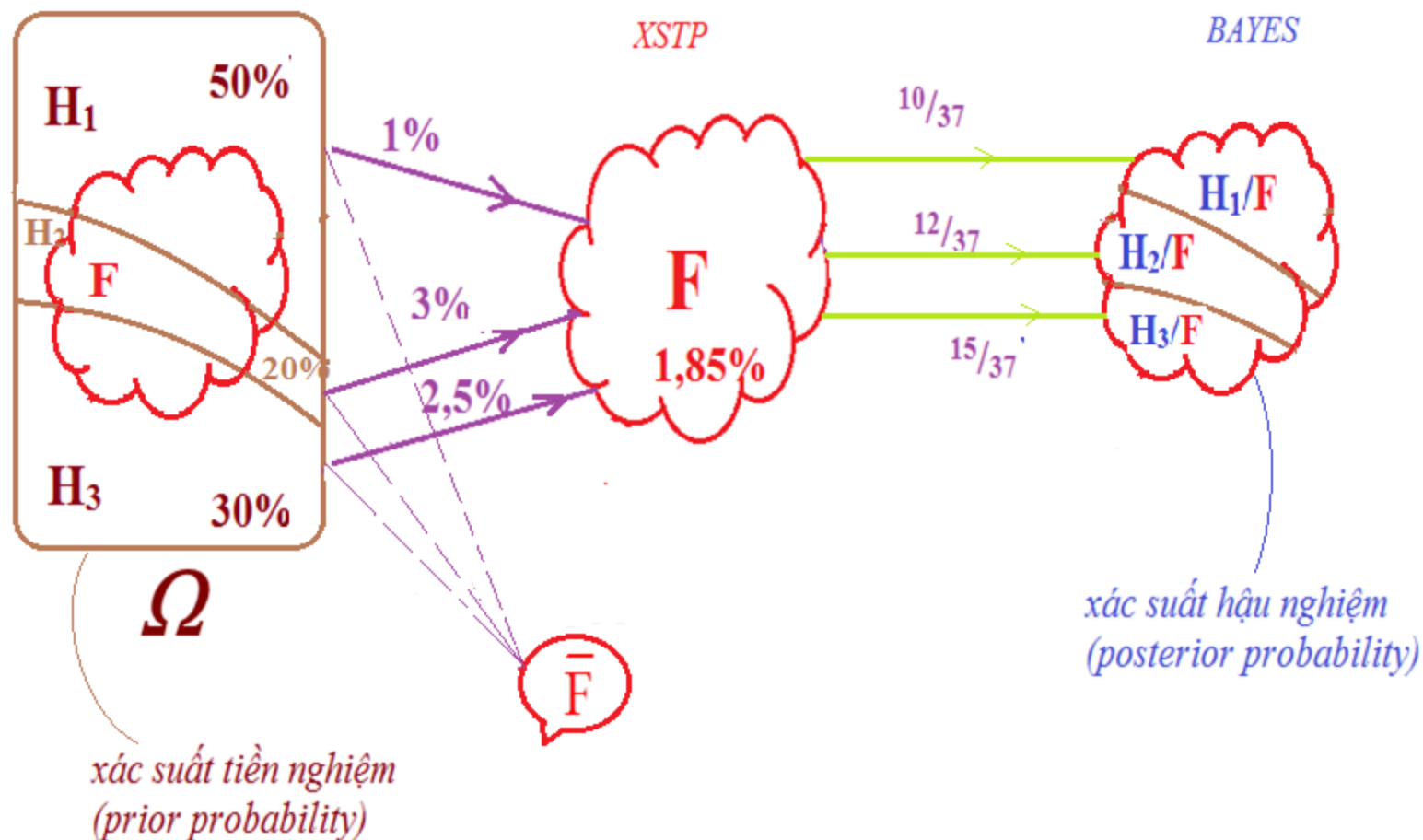
Do $\{H_1; H_2; H_3\}$ tạo thành nhóm biến cố đầy đủ, nên

$$\begin{aligned} P(F) &= P(H_1) \times P(F|H_1) + P(H_2) \times P(F|H_2) + P(H_3) \times P(F|H_3) \\ &= 50\% \times 1\% + 20\% \times 3\% + 30\% \times 2,5\% = 1,85\% \end{aligned}$$

b) Dùng công thức Bayes :

$$P(H_2 | F) = \frac{P(H_2 \cdot F)}{P(F)} = \frac{P(H_2) \cdot P(F|H_2)}{P(F)} = \frac{20\% \times 3\%}{1,85\%} = \frac{12}{37} \approx 32,43\%$$

Dựa vào biểu thức tính $P(F)$ có thể thấy nếu ta ngẫu nhiên lấy phải bóng Đèn hỏng thì bóng đèn đó có khả năng cao nhất do phân xưởng 3 sản xuất.



Ví dụ 32

Hộp I gồm 2 bi trắng và 8 bi đen.

Hộp II chứa 3 bi trắng và 2 bi đen.

Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 bi bỏ đi, số bi còn lại của 2 hộp dồn chung vào hộp rỗng thứ ba.

a) Từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên một bi.

Tìm xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ 3 có màu trắng.

b) Từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên 2 bi.

Tìm xác suất lấy được 1 bi đen và 1 bi trắng.



a) Gọi F là b/c viên bi lấy ra từ hộp thứ 3 có màu trắng.

H_1 là biến cố hộp 1 bỏ đi bi trắng và hộp 2 bỏ đi bi trắng

H_2 là ----- bi trắng và ----- bi đen

H_3 là ----- bi đen ----- bi trắng

H_4 là ----- bi đen ----- bi đen

Do $\{H_i\}_{i=1,\dots,4}$ là hệ biến cố đầy đủ ,

và $P(H_1) = P(\text{Hộp 1 bỏ bi trắng}) \times P(\text{Hộp 2 bỏ bi trắng})$ nên

$$P(F) = P(H_1).P(F|H_1) + P(H_2)*P(F|H_2) + \dots + P(H_4)*P(F|H_4)$$

$$P(F) = \left[\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{5} \right] \times \frac{3}{13} + \left[\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} \right] \times \frac{4}{13} + \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{5} \right] \times \frac{4}{13} + \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{5} \right] \times \frac{5}{13} = \frac{21}{65}$$

b) Gọi E là b/c 2 bi lấy ra từ hộp thứ 3 có 1 trắng, 1 đen.

$$P(E) = \left[\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{5} \right] \times \boxed{} + \left[\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} \right] \times \boxed{} + \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{5} \right] \times \boxed{} + \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{5} \right] \times \boxed{} = \frac{457}{975}$$

Ví dụ 33

Cho biết tỷ lệ người mắc bệnh B. ở một vùng là 0,1% và có một loại xét nghiệm để tìm ra người mắc bệnh B. **Đối với một người mắc bệnh B thì kết quả xét nghiệm chắc chắn ra dương tính**, nhưng trong số những người không mắc bệnh này thì cũng có đến 5% số người có phản ứng dương tính với xét nghiệm.

- a) Nếu một người nào đó được chọn ngẫu nhiên có phản ứng dương tính đối với xét nghiệm loại này thì khả năng người đó mắc bệnh B là bao nhiêu?
Nhận xét ý nghĩa của kết quả.



Hướng dẫn: Gọi B là bc người được chọn mắc bệnh; $P(B) = 0,1\%$
D là bc người được chọn có xét nghiệm (+); $P(D/B)=1$;
 $P(D/\bar{B})=0,05$

Xác suất cần tìm: $P(B/D)$

$$\begin{aligned} P(B/D) &= \frac{P(BD)}{P(D)} = \frac{P(B) \times P(D|B)}{P(B) \times P(D|B) + P(\bar{B}) \times P(D|\bar{B})} \\ &= \frac{0,001 \times 1}{0,001 \times 1 + 0,999 \times 0,05} \\ &\approx 0,019627 \quad (\approx 2\%) \end{aligned}$$

Có thể nói rằng kết quả xét nghiệm (+) không giúp ta kết luận được gì về việc người đó có mắc bệnh hay không.

b) Nếu một người nào đó được chọn ngẫu nhiên có phản ứng dương tính đối với cả 4 lần liên tiếp thực hiện xét nghiệm này một cách độc lập thì khả năng người đó mắc bệnh B là bao nhiêu? Nhận xét ý nghĩa của kết quả.

Hướng dẫn:

Gọi D_4 là biến cố cả 4 lần người đó có xét nghiệm (+)

$$\begin{aligned} P(B/D_4) &= \frac{P(BD_4)}{P(D_4)} = \frac{P(B).P(D_4|B)}{P(B).P(D_4|B) + P(\bar{B}).P(D_4|\bar{B})} \\ &= \frac{0,001 \times 1^4}{0,001 \times 1^4 + 0,999 \times (0,05)^4} \approx 0,99379 \quad (\approx 100\%) \end{aligned}$$

Trong trường hợp này khi có cả 4 lần độc lập xét nghiệm (+), ta thấy gần như chắc chắn người được xét nghiệm mắc bệnh.

Ví dụ 34

Giả sử:

*Trong HK1, tỉ lệ sv khoa KT giao thông đậu môn XSTK là 93%;
còn tỉ lệ thi đậu của SV khoa Cơ khí là 87%.

*Trong HK2, tỉ lệ sv khoa KT giao thông đậu môn XSTK là 73%;
còn tỉ lệ thi đậu của SV khoa Cơ khí là 69%.

Có thể cho rằng tỉ lệ đậu trong cả năm học của sv khoa KT giao thông là cao hơn so với sv khoa Cơ khí hay không?

(Một năm học có 2 học kỳ)



	Khoa KT Giao thông	Khoa cơ khí
Học kỳ 1	Tỉ lệ đậu: 93% 81/87	Tỉ lệ đậu: 87% 234/270
Học kỳ 2	Tỉ lệ đậu: 73% 192/263	Tỉ lệ đậu: 69% 55/80

Cả năm	Tỉ lệ đậu: 78% 273/350	Tỉ lệ đậu: 83% 289/350
--------	---------------------------	---------------------------

Nghịch lý Simson

Ví dụ 35

Một thùng rượu gồm $\frac{2}{3}$ số chai loại A và $\frac{1}{3}$ số chai loại B có hình thức giống nhau. Người ta chọn ra ngẫu nhiên 1 chai để đem cho 4 chuyên gia nếm rượu nếm thử. Giả thiết mỗi ông có khả năng đoán đúng là 80%.

a) Nếu chai đó là loại A thì xác suất có 3 ông đoán A và 1 ông đoán B là bao nhiêu?

b) Nếu có 3 ông đoán A và 1 ông đoán B thì xác suất chai rượu đó loại A là bao nhiêu?



Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{a)XS cần tìm} &= \text{XS " 3 ông đoán đúng và 1 ông đoán sai"} \\ &= C_4^3 \times 0,8^3 \times 0,2^1 = 0,4096 \end{aligned}$$

b) Gọi F là biến cố “3 ông đoán A, 1 ông đoán B”

A là bc chai rượu lấy ra là loại A

XS cần tìm = $P(A/F)$

$$P(A/F) = \frac{P(AF)}{P(F)} = \frac{P(A).P(F/A)}{P(A).P(F/A)+P(B).P(F/B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times C_4^3 \times 0,8^3 \times 0,2}{\frac{2}{3} \times C_4^3 \times 0,8^3 \times 0,2 + \frac{1}{3} \times C_4^1 \times 0,8^1 \times 0,2^3} = \frac{32}{33}$$

Ví dụ 36

Hộp I có 10 sản phẩm loại A và 5 sản phẩm loại B.
Hộp II có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B.
Chọn ngẫu nhiên 1 hộp và từ đó lấy ra 1 sản phẩm
thì được sản phẩm loại A.



- a) Tìm xác suất đã chọn được hộp I.
- b) Nếu lấy thêm 2 sản phẩm nữa từ hộp đã chọn thì xác suất có được thêm một sản phẩm loại A và 1 sản phẩm loại B là bao nhiêu?

Hướng dẫn:

Gọi F là biến cố sản phẩm lấy ra (đầu tiên) loại A

H_1 biến cố đã chọn hộp I; H_2 biến cố đã chọn hộp II;

E là biến cố 2 sản phẩm lấy thêm có 1 loại A, 1 loại B

a) Xác suất cần tìm:

$$\begin{aligned} P(H_1/F) &= \frac{P(H_1 F)}{P(F)} = \frac{P(H_1) \cdot P(F/H_1)}{P(H_1) \cdot P(F/H_1) + P(H_2) \cdot P(F/H_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{10}{15}}{\frac{1}{2} \times \frac{10}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10}} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

Hơn nữa , tính tương tự hoặc sử dụng biến cố đối lập, ta còn có được kết quả (cho câu sau):

$$P(H_2/F) = \frac{6}{11}$$

b) Xác suất cần tìm: $P(E / F)$

Cách 1:

Ta đã có biến cố F xảy ra , tức là $\{H_1/F\}$ và $\{H_2/F\}$ đang là 1 nhóm biến cố đầy đủ. Và :

$$P(H_1 / F) = \frac{5}{11} \qquad P(H_2 / F) = \frac{6}{11}$$

Sử dụng công thức tìm $P(E/F)$ với hệ biến cố này, ta có:

$$\begin{aligned} P(E / F) &= P(H_1 / F) \times P(E / H_1 F) + P(H_2 / F) \times P(E / H_2 F) \\ &= \frac{5}{11} \times \frac{C_9^1 \cdot C_5^1}{C_{14}^2} + \frac{6}{11} \times \frac{C_7^1 \cdot C_2^1}{C_9^2} = \frac{1312}{3003} \end{aligned}$$

Xác suất cần tìm: $P(E / F)$

Cách 2: Sử dụng biến đổi đơn giản hơn:

$$\begin{aligned} P(E / F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(H_1).P(FE/H_1) + P(H_2).P(FE/H_2)}{P(H_1).P(F/H_1) + P(H_2).P(F/H_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{10}{15} \times \frac{C_9^1 \times C_5^1}{C_{14}^2} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{C_7^1 \times C_2^1}{C_9^2}}{\frac{1}{2} \times \frac{10}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10}} = \frac{1312}{3003} \end{aligned}$$

Ví dụ 37

Một sinh viên thi vấn đáp phải bốc thăm tùy ý 3 câu hỏi từ 2 hộp đựng đề thi có hình thức giống nhau.

Hộp I có 6 câu hỏi khó và 4 câu hỏi dễ .

Hộp II gồm 3 câu hỏi khó và 3 câu hỏi dễ .

Nếu 1 sinh viên đã chọn ngẫu nhiên 1 hộp và từ đó rút 2 phiếu đều gặp câu hỏi khó thì sinh viên này nên rút câu hỏi tiếp theo ở cùng hộp đó hay ở hộp còn lại thì sẽ có nhiều khả năng gặp được câu hỏi dễ hơn?



Gọi: H_1 là biến cố SV đã rút 2 câu đầu từ hộp I.

H_2 là biến cố SV đã rút 2 câu đầu từ hộp II.

A là b/c SV đã rút được 2 câu hỏi khó.

B_1 là b/c SV rút tiếp được câu hỏi dễ từ hộp đang chọn.

B_2 là b/c SV rút tiếp được câu hỏi dễ từ hộp còn lại.

Yêu cầu bài toán: So sánh $P(B_1/A)$ và $P(B_2/A)$.

Cách 1: $\{H_1; H_2\}$ tạo thành nhóm biến cố đầy đủ.

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A \cdot B_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(AB_1|H_1) + P(H_2) \cdot P(AB_1|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2}} = 0,5938 \end{aligned}$$

Tương tự:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A \cdot B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2}} = 0,4625$$

Suy ra nếu SV tiếp tục rút tiếp câu thứ 3 từ hộp đã chọn thì có nhiều khả năng hơn để gặp câu thứ 3 dễ.

Cách 2: $\{H_1; H_2\}$ tạo thành nhóm biến cố đầy đủ.

* $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$. \longrightarrow XS tiền nghiệm

$$* P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_3^2}{C_6^2}} = 0,625$$

và:

* $P(H_2|A) = 0,375$. (Tính tương tự hoặc $P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A)$).

————→ $P(H_1|A)$ và $P(H_2|A)$ được coi là các XS hậu nghiệm

Vì giả thiết biến cố A đã xảy ra nên $P(H_1|A)$ và $P(H_2|A)$ trở thành hệ biến cố đầy đủ.

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= P(H_1|A) \cdot P(B_1|H_1A) + P(H_2|A) \cdot P(B_1|H_2A) \\ &= 0,625 \times \frac{4}{8} + 0,375 \times \frac{3}{4} = 0,5938 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2|A) &= P(H_1|A) \cdot P(B_2|H_1A) + P(H_2|A) \cdot P(B_2|H_2A) \\ &= 0,625 \times \frac{3}{6} + 0,375 \times \frac{4}{10} = 0,4625 \end{aligned}$$

Nên tiếp tục rút câu hỏi tiếp theo từ hộp đã chọn.