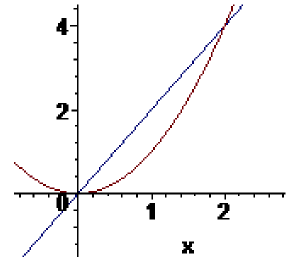
11. Hãy đổi thứ tự lấy tích phân $I=\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy.$

Ta viết miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/0\le x\le 2, x^2\le y\le 2x\}$. Ở cách biểu diễn này x cố định [0,2] còn y biến thiên theo x từ $y=x^2\to y=2x$.

Giờ ta cố định $y\in[0,4]$ thì x biến thiên từ

$x=y/2\to x=\sqrt{y}$



Vậy: $I=\int_0^4 dy\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.\to$ **chọn A.**

12.

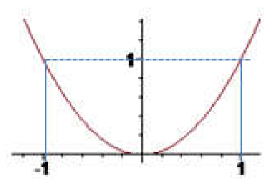
13. Hãy đổi thứ tự lấy tích phân $I=\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

Ta viết miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/-1\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$. Ở cách biểu diễn này x cố định [-1,1] còn y biến thiên theo x từ $y=0\to y=x^2$.

Giờ ta cố định $y\in[0,1]$ thì x biến thiên từ $x=-1\to x=-\sqrt{y}$ và từ $x=\sqrt{y}\to x=1$

$\Rightarrow I=\int_0^1 dy\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx$

$\to$ **chọn A.**



14. Cho tích phân $I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$ Thay đổi thứ tự tính tích phân ta được:

Ta viết miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/0\le x\le 1, x\le y\le \sqrt{x}\}$. Ở cách biểu diễn này x cố định [0,1] còn y biến thiên theo x từ $y=x\to y=\sqrt{x}$.

Tung độ giao điểm của $y=x, y=\sqrt{x}$ là $y=0, y=1$. Giờ cố định $y\in[0,1]$ thì x biến thiên từ $x=y\to x=y^2$. Vậy

$I=\int_0^1 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx\ \to$ **chọn D.**

15. Đổi thứ tự tính tích phân $I=\int_1^2 dx\int_2^{4-x} f(x,y)\,dy.$

Ta viết miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4-x\}$. Ở cách biểu diễn này x cố định [1,2] còn y biến thiên theo x từ $y=2\to y=4-x$.

Cố định $y\in[2,3]$ thì x biến thiên từ $x=1\to x=4-y$. Vậy: $I=\int_2^3 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx\ \to$ **chọn C.**

21. Tính tích phân $I=\int_1^2 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy$.

Ta có: $I=\int_1^2 dx\int_x^{2x}\left(x+2y\right)dy=\int\limits_1^2 (xy+y^2)\Big|_{y=x}^{y=2x}dx=\int\limits_1^2 4x^2dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_1^2=\frac{28}{3}\rightarrow$ **chọn A**.

22. Tính $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(2x-3\right)dxdy$

Đổi biến sang tọa độ cực xác định bởi: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 1\rightarrow 0\le r\le 1$ và $0\le\varphi\le 2\pi$ và khi đó: $2x-3=2r\cos\varphi-3$

Suy ra: $I=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(2r\cos\varphi-3)rdrd\varphi=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(2r^2\cos\varphi-3r)drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}r^3\cos\varphi-\frac{3}{2}r^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}d\varphi$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\cos\varphi-\frac{3}{2}\right)d\varphi=\left(\frac{2}{3}\sin\varphi-\frac{3}{2}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{3}{2}.2\pi=-3\pi\rightarrow \textbf{chọn A}.$$

23. Tính $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4,x\ge 0}\left(3-2y\right)dxdy$.

Đổi biến sang tọa độ cực xác định bởi: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 4\rightarrow 0\le r\le 2$ và $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$

Suy ra: $I=\int\limits_0^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(3-2r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_0^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(3r-2r^2\sin\varphi)drd\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}r^2-\frac{2}{3}r^3\sin\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{2}d\varphi$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(6-\frac{16}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=6\varphi+\frac{16}{3}\cos\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=6\pi\quad\rightarrow \textbf{chọn A}.$$

24. Tính $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 4\rightarrow 0\le r\le 2$ và $0\le\varphi\le 2\pi$

$\rightarrow D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le 2,0\le\varphi\le 2\pi\}$

Khi đó: $I=\iint\limits_{D'}\sqrt{r^2}rdrd\varphi=\int\limits_0^2 r^2dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=(2\pi-0).\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{16\pi}{3}\rightarrow$ **chọn A**.

25. Tính $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4,y\ge 0}3ydxdy$.

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 4\rightarrow 0\le r\le 2$

Vì $y\ge 0$ (nửa trên của hình tròn) nên $0\le\varphi\le\pi\rightarrow D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le 2,0\le\varphi\le\pi\}$

$I=\iint\limits_{D'}3r\sin\varphi.rdrd\varphi=\int\limits_0^2 3r^2dr\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=r^3\Big|_0^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}=8.[-(-1-1)]=16\rightarrow$ **chọn A**.

26. Tính $I=\iint\limits_D 12ydxdy$ với D là miền phẳng kín giới hạn bởi các đường $x=y^2,x=y$.

Tung độ giao điểm của $x = y^2, x = y$ là $y = 0, y = 1$. Cố định $y \in [0,1]$ thì x biến thiên từ $x = y^2 \to x = y$. Viết D thành: $D = \{(x,y) / 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y\}$

$$I = \int_0^1 12y dy \int_{y^2}^{y} dx = \int_0^1 12y\left(y - y^2\right)dy = \left(4y^3 - 3y^4\right)\Big|_0^1 = 1$$ $\to$ **chọn A.**

(nên vẽ hình để dễ dàng xác định cận lấy tích phân)

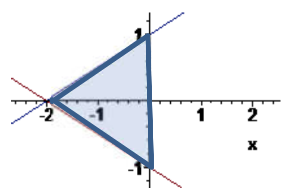
27. Tính tích phân $I = \iint\limits_D x \ln y dxdy$ với $D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le e \end{cases}$.

$$I = \int_0^4 x dx \int_0^e \ln y dy = 4\int_0^e \ln y dy = 4 \lim_{a \to 0^+} \int_a^e \ln y dy = 4 \lim_{a \to 0^+} \left[y \ln y - y\Big|_a^e \right] = 4 \lim_{a \to 0^+} \left(a - a \ln a\right) = 4.0 = 0$$

$\to$ **chọn A.**

28. Tính tích phân I = $\iint\limits_D (x^2 + y)$dxdy với D là miền giới hạn bởi các đường:

$y = -\dfrac{x}{2} - 1;\ y = \dfrac{x}{2} + 1;\ x = 0.$



$D = \{(x,y) / -2 \le x \le 0, -\dfrac{x}{2} - 1 \le y \le \dfrac{x}{2} + 1\}$

Suy ra: $$I = \int_{-2}^{0} dx \int_{-\frac{x}{2}-1}^{\frac{x}{2}+1} (x^2 + y)dy = \int_{-2}^{0} \left[\left(x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right)\Bigg|_{y=-\frac{x}{2}-1}^{y=\frac{x}{2}+1} \right] dx = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + 2x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{4}{3}$$

$\to$ **chọn A.**

29. Tính tích phân I = $\iint\limits_D \dfrac{\text{dxdy}}{(x+y)^2}$ với $D: \{(x,y) \,|\, 3 \le x \le 5; 1 \le y \le 2\}$

$$I = \int_3^5 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_3^5 \left[\left(-\frac{1}{x+y} \right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} \right] dx = \int_3^5 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x+2}\Bigg|_3^5 = \ln\frac{6}{7} - \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{15}{14}$$

$\to$ **chọn A.**

30. Tính tích phân I = $\iint\limits_D (x^2 + y^2)$dxdy với $D = [-1,1] \times [0,3]$

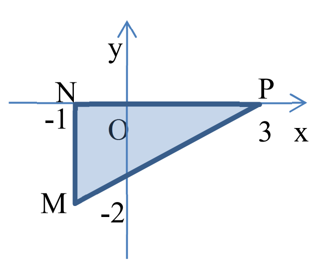
Viết lại: $D = [-1,1] \times [0,3] = \{(x,y) / -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 3\}$

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^3 (x^2 + y^2)dy = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=3} \right] dx = \int_{-1}^{1} \left(3x^2 + 9\right)dx = (x^3 + 9x)\,\Big|_{-1}^{1} = 20$$ $\to$ **chọn A.**

31. Tính tích phân I = $\iint\limits_D (2x^2 - 8xy)dxdy$ với D là hình tam giác MNP có các đỉnh:

M(-1,-2); N(-1,0); P(3,0).

Vẽ hình miền D:



Phương trình cạnh MP: $x-2y=3$ hay $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$, của NP là: $y=0$. Khi đó viết lại miền D:

$$D=\{(x,y)/-1\le x\le 3,\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\le y\le 0\}$$

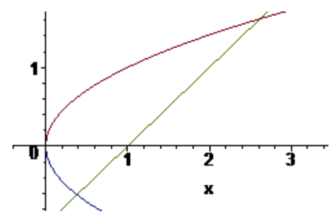
$$I=\int_{-1}^{3}dx\int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{0}(2x^2-8xy)dy=\int_{-1}^{3}\left[\left(2x^2y-4xy^2\right)\Big|_{y=x/2-3/2}^{0}\right]dx=\int_{-1}^{3}(-3x^2+9x)dx$$

$$=\left(-x^3+\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=8\to \textbf{chọn A}.$$

32. Tính $I=\iint\limits_D dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường y=x-1; x = y^2.

Tung độ giao điểm của 2 đường $x=y+1$ và $x=y^2$ là $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2},y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Viết D dạng: $D=\left\{(x,y)/\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le y\le\frac{1+\sqrt{5}}{2},y^2\le x\le y+1\right\}$



$$I=\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}dy\int_{y^2}^{y+1}dx=\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(y+1-y^2)dy=\left(\frac{1}{2}y^2+y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

33. Tính tích phân $I=\iint\limits_D\frac{\ln y}{x+1}dxdy$, với D là miền xác định bởi: $x=0,\ x=1,\ y=1,\ y=e.$

Miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/0\le x\le 1,1\le y\le e\}$

$$I=\iint\limits_D\frac{\ln y}{x+1}dxdy=\int_0^1\frac{dx}{x+1}\int_1^e\ln ydy=\ln(x+1)\big|_0^1\left(y\ln y-y\big|_1^e\right)=\ln 2.(0+1)=\ln 2\to \textbf{chọn A}.$$

34. Tính tích phân $I=\int_2^4 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy$

$$I=\int_2^4\frac{1}{x}dx\int_x^{2x}ydy=\int_2^4\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}y^2\Bigg|_x^{2x}\right)dx=\int_2^4\frac{1}{x}\left(2x^2-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{3}{2}\int_2^4 xdx=\left(\frac{3}{4}x^2\right)\Bigg|_2^4=9\to \textbf{chọn A}.$$

35. Tính tích phân $I=\int_1^2 dy\int_0^{\ln y}e^x dx$.

$$I=\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^x dx=\int_1^2\left(e^x\Big|_0^{\ln y}\right)dy=\int_1^2 (y-1)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-y\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}$$, (Chú ý: $e^{\ln y}=y$) $\rightarrow$ **chọn A**.

36. Tính tích phân I = $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}$dxdy với D là phần tư thứ nhất của hình tròn $x^2+y^2\le a^2$.

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2\le a^2 \rightarrow 0\le r\le a$

Vì D là $1/4$ thứ nhất của hình tròn nên $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. $\rightarrow D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le a, 0\le\varphi\le\pi/2\}$

$$\Rightarrow I=\iint_{D'}\sqrt{r^2}\,r dr d\varphi=\int_0^a r^2 dr\int_0^{\pi/2} d\varphi=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\frac{1}{3}r^3\Bigg|_0^a=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{a^3\pi}{6}$$ $\rightarrow$ **chọn B**.

37. Trong hệ tọa độ cực, tích phân $I=\iint_{x^2+y^2\le 2}\dfrac{dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ được tính theo công thức nào sau đây:

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 2 \rightarrow 0\le r\le\sqrt{2}$ và $0\le\varphi\le 2\pi$

$\rightarrow D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le\sqrt{2}, 0\le\varphi\le 2\pi\}$

Do đó: $I=\iint_{D'}\dfrac{rdrd\varphi}{\sqrt{9-r^2}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\dfrac{rdr}{\sqrt{9-r^2}}$ $\rightarrow$ **chọn A**.

38. Tính tích phân I = $\iint_D \dfrac{\text{dxdy}}{\sqrt{1+\text{x}^2+y^2}}$ với D là phần tư thứ nhất của hình tròn đơn vị.

Viết miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 1 \rightarrow 0\le r\le 1$ và $0\le\varphi\le\pi/2$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\pi/2\}$

$$\Rightarrow I=\iint_{D'}\frac{\text{rdrd}\varphi}{\sqrt{1+\text{r}^2}}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+r^2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$ $\rightarrow$ **chọn A**.

39. Dùng tọa độ cực, tính tích phân: I= $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)^{3/2}dxdy$.

Miền lấy tích phân: $D=\{(x,y)/-2\le y\le 2, 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$. Vậy D là nửa phải hình tròn $x^2+y^2\le 4$.

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2\le 4 \rightarrow 0\le r\le 2$ và $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D'=\{(r,\varphi)/0\le r\le 2, -\pi/2\le\varphi\le\pi/2\}$

$$\Rightarrow I=\iint_{D'}\left(r^2\right)^{3/2}.rdrd\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 r^4 dr=\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{5}\cdot r^5\right)\Bigg|_0^2=\pi\cdot\frac{32}{5}=\frac{32\pi}{5}$$ $\rightarrow$ **chọn A**.

40. Tính tích phân $I = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, với D là miền xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 9.$

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le 9 \to 0 \le r \le 3$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 0 \le r \le 3, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr = 2\pi.3 = 6\pi$$ $\to$ **chọn A**.

41. Tính tích phân $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, với D là miền xác định bởi: $1 \le x^2 + y^2 \le 4.$

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Từ $1 \le x^2 + y^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le r^2 \le 4 \to 1 \le r \le 2$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 1 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} \sqrt{r^2}.rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^2 dr = 2\pi.\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_1^2\right) = 2\pi.\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}$$ $\to$ **chọn A**.

42. Đổi sang tọa độ cực rồi tính : $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx$.

Viết lại miền tích phân: $D = \{(x,y) / 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\} = \{(x,y) / x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$ (tức D là nửa trên của hình tròn đơn vị)

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$ và $0 \le \varphi \le \pi$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi\}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy = \iint\limits_{D'} r^2.rdrd\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \pi.\left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4}$$ $\to$ **chọn B**.

43.Tính tích phân $I = \iint\limits_D xydxdy$, với D là miền xác định bởi: $x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0, R > 0.$

D là **phần tư thứ nhất** của hình tròn tâm (0,0) bán kính R.

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le R^2 \Rightarrow 0 \le r \le R$ và $0 \le \varphi \le \pi / 2$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le \pi / 2\}$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_{D'} r\cos\varphi.r\sin\varphi.rdrd\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}r^4\Big|_0^R \left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^4}{8}$$

$\to$ **chọn A**.

44. Tính $I = \iint_D xydxdy$, với D là nửa phía trên đường tròn $x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$ và $0 \le \varphi \le \pi$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi\}$

$$I = \iint_{D'} r\cos\varphi . r\sin\varphi . rdrd\varphi = \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{4}r^4\Big|_0^1 \left(-\cos 2\varphi\Big|_0^\pi\right) = 0 \rightarrow \textbf{chọn A}.$$

45. Tính tích phân $I = \iint_D (1 + x^2 + y^2)dxdy,$ với D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1.$

Đổi biến sang tọa độ cực x/đ bởi: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$

Khi đó: miền lấy tích theo tọa độ mới là $D' = \{(r,\varphi) / 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$\Rightarrow I = \iint_{D'} (1 + r^2)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r + r^3)dr = 2\pi . \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \textbf{chọn A}.$$

46. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $\mathbf{\dfrac{dx}{\cos y} + \dfrac{dy}{\sin x} = 0}$ (1) (đây là ptvp tách biến)

$(1) \Leftrightarrow \cos ydy = -\sin xdx$

$\rightarrow \int \cos ydy = \int -\sin xdx \rightarrow \sin y = \cos x + C \rightarrow \sin y - \cos x = C$ $\rightarrow$ **chọn A**.

47. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $\mathbf{\dfrac{dx}{1+x^2} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.}$ (2)

$$(2) \rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C \rightarrow \arctan x + \arcsin y = C \rightarrow \textbf{chọn A}.$$

48. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'\sin^2 x + y = 0.$

$$y'\sin^2 x + y = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x . \frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{\sin^2 x} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-1}{\sin^2 x}dx$$

$$\rightarrow \ln y = \cot x + C_0 \rightarrow y = e^{\cot x + C_0} = e^{C_0}e^{\cot x} = Ce^{\cot x}$$

Vậy $y = Ce^{\cot x}$, (với $C = e^{C_0}$) $\rightarrow$ **chọn A**

49. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'\left(1 - e^x\right) + e^x y = 0.$

$$y'\left(1 - e^x\right) + e^x y = 0 \Leftrightarrow \left(1 - e^x\right)\frac{dy}{dx} + e^x y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{e^x}{e^x - 1}dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x - 1}dx \rightarrow \ln y = \ln(e^x - 1) + C_0 = \ln C(e^x - 1) \quad (*)$$

Suy ra: $y = C(e^x - 1)$ (ở (*) ta chọn $C_0 = \ln C$) $\rightarrow$ **chọn A**

51. Nghiệm riêng của phương trình vi phân $(1 + e^x)yy' = e^x$ thỏa điều kiện ban đầu y(0) = -1 là:

$$(1 + e^x)yy' = e^x \Leftrightarrow ydy = \frac{e^x}{e^x + 1}dx \rightarrow \int ydy = \int \frac{e^x}{e^x + 1}dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \ln(e^x + 1) + C$$

Thay điều kiện đầu $y(0)=-1,(x=0\to y=-1)$ ta được: $\frac{1}{2}(-1)^2=\ln(2)+C\Rightarrow C=\frac{1}{2}-\ln 2$

$\to \frac{1}{2}y^2=\ln(e^x+1)+\frac{1}{2}-\ln 2\to \frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}=\ln\frac{e^x+1}{2}$ (lấy e mũ 2 vế)

$\to e^{\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{e^x+1}{2}\to e^{\frac{y^2}{2}}.e^{\frac{-1}{2}}=\frac{e^x+1}{2}\to 2e^{\frac{y^2}{2}}=e^{\frac{1}{2}}(e^x+1)$ hay $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}(e^x+1)\to$ **chọn A**

52. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân y' = -y/x với điều kiện đầu y(1)=2 .

$y'=-y/x\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\to\int\frac{dy}{y}=\int\frac{-dx}{x}\to \ln y=-\ln x+C$

Thay điều kiện đầu $y(1)=2,(x=1\to y=2)$ ta được: $C=\ln 2$

Vậy nghiệm riêng: $\ln y=-\ln x+\ln 2\to \ln y=\ln\frac{2}{x}\to y=2/x\to$ **chọn B**

53. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân (1+x^2)dy+ydx=0 với điều kiện đầu y(1)=1

(1+x^2)dy+ydx=0 $\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{-1}{1+x^2}dx\to\int\frac{dy}{y}=\int\frac{-1}{1+x^2}dx\to \ln y=-\arctan x+C$

Thay điều kiện đầu $y(1)=1,(x=1\to y=1)$ at được:

$0=-\arctan 1+C\to C=\frac{\pi}{4}$

Vậy nghiệm riêng là: $\ln y=\frac{\pi}{4}-\arctan x\to y=e^{\frac{\pi}{4}-\arctan x}\to$ **chọn A**

54. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : $\sqrt{1-y^2}dx+x\ln xdy=0.$

$\sqrt{1-y^2}dx+x\ln xdy=0\Leftrightarrow\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\frac{dx}{x\ln x}\to\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int-\frac{dx}{x\ln x}$

$\to$ **chọn B**

$\to\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}\to \arcsin y=-\ln|\ln x|+C$ hay $\arcsin y+\ln|\ln x|=C$

56. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : $\sqrt{1-x^2}dy+y\ln ydx=0.$

Hoàn toàn tương tự 54) ta chỉ cần đổi vai trò giữa x và y.

Vậy nghiệm tquat là: $\arcsin x+\ln|\ln y|=C$ $\to$ **chọn A**

57. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0.$

$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0\Leftrightarrow\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0\to\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0$

$\to-\int\frac{d(1-y^2)}{2\sqrt{1-y^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0\to-\sqrt{1-y^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|=C\to$ **chọn C**

58. Nghiệm của bài toán: $y'=\frac{\cos x}{\sin y},y(0)=\pi$, là:

$y'=\frac{\cos x}{\sin y}\Leftrightarrow\sin ydy=\cos xdx\to\int\sin ydy=\int\cos xdx\to-\cos y=\sin x+C$

Thay đk đều $y(0)=\pi,(x=0\to y=\pi)$ vào ta được: $-\cos\pi=\sin 0+C\Rightarrow C=1$

Vậy nghiệm bài toán là: $\cos y+\sin x+1=0$ $\to$ **chọn A**

59. Nghiệm của bài toán: $(1+y^2)dx + x\ln x dy = 0,\ y(e)=1$ là

$$(1+y^2)dx + x\ln x dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x\ln x} + \frac{dy}{1+y^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x\ln x} + \int \frac{dy}{1+y^2} = C$$

$$\to \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} + \int \frac{dy}{1+y^2} = C \to \ln|\ln x| + \arctan y = C$$

Thay đk đầu $y(e)=1, (x=e \to y=1)$ ta được: $C = \ln|\ln e| + \arctan 1 = 0 + \frac{\pi}{4}$

Vậy nghiệm là: $\ln|\ln x| + \arctan y = \frac{\pi}{4}$ $\to$ **chọn A**

60. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $\sqrt{1+y^2}dx + xy\ln x dy = 0.$

$$\sqrt{1+y^2}dx + xy\ln x dy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} + \int \frac{dx}{x\ln x} = C \to \int \frac{d(1+y^2)}{2\sqrt{1+y^2}} + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = C$$

$$\to \sqrt{1+y^2} + \ln|\ln x| = C$$

$\to$ **chọn A**

61. Phương trình đẳng cấp là phương trình vp nếu viết được dưới dạng: $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ hay $\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right)$,

hoặc cho ở dạng: $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ với P, Q là 2 hàm đẳng cấp cùng cấp.

$\to$ **chọn B.** Vì $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$. tử và mẫu của vế phải đều là hàm đẳng cấp cấp 2.

62. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$; $y(1)=2$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ (*) đây là ptvp đẳng cấp. (*) viết lại dạng: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ (*)′

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux \to \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ thay vào (*)′, ta được:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right) = \frac{1-u^2}{2u} \to \frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\to \int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x} \to -\ln|1-u^2| = \ln|x| + C$$

Thay đk đầu: $y(1)=2, (x=1 \to y=2, u=y/x=2)$ ta được: $C = -\ln 3$

Suy ra: $-\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln 3 \to \ln|u^2-1| + \ln|x| = \ln 3 \to \ln|x(u^2-1)| = \ln 3$

$\to x(u^2-1) = 3$ thay $u = \frac{y}{x}$. Suy ra: $x\left(\frac{y^2}{x} - 1\right) = 3$ $\to$ **chọn A.**

63. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$. (1)

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux \to y' \equiv \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ thay vào (1), ta được:

$$x\frac{du}{dx} + u = u - u^2 \to x\frac{du}{dx} = -u^2 \to \int \frac{du}{-u^2} = \int \frac{dx}{x} \to \frac{1}{u} = \ln|x| + C \to \frac{x}{y} = \ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{x}{\ln|x| + C}$$

$\to$ **chọn A.**

64. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $xy' = y + x$.

$xy' = y + x \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$ (*)

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux \to y' \equiv \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Thay vào (*), được:

$x\frac{du}{dx} + u = u + 1 \to x\frac{du}{dx} = 1 \to du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \to u = \ln|x| + C$

hay $\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C) \to$ **chọn A.**

65. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' = \frac{y}{x} + 1$ (*), với điều kiện đầu y (1) = 1.

(*) $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$ đây la ptvp ở câu 64) do đó: nghiệm tổng quát là: $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$ $y = x(\ln|x| + C)$

Thay đk đầu $y(1) = 1, (x = 1 \to y = 1)$ ta được: $1 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 1$

Vậy nghiệm riêng là: $\frac{y}{x} = \ln|x| + 1 \to$ **chọn A.**

66. Phương trình vp toàn phần là phương trình vp dạng: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ trong đó P,Q là các hàm khả vi liện tục và thỏa $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (**).

Đối với việc kiểm tra phải là ptvp toàn phần không ta chỉ cần kiểm tra đk (**), (còn đk khả vi liên tục thì hầu như các phương trình cho các hàm P,Q thường đã thỏa).

Ta thấy pt ở A. $e^x\left(y - x^2\right)dx + \left(e^x - y^2 \sin y\right)dy = 0$ có: $P = e^x\left(y - x^2\right), Q = \left(e^x - y^2 \sin y\right)$ mà $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nên nó là ptvp toàn phần. $\to$ **chọn A.**

67. Theo chú ý ở 66. Ta chọn A. $\left(ye^x - x\sin x\right)\mathrm{dx} + \left(e^x - y\cos y\right)\mathrm{dy} = 0,$ (1)

$(P = ye^x - x\sin x, Q = e^x - y\cos y)$ Vì $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ (1) là ptvptp.

68. Chọn A.

69. Chọn A. $(y\sin x - \cos y)dx - (\cos x - x\sin y)dy = 0.$

Ví có : $P = y\sin x - \cos y, Q = -(\cos x - x\sin y) = -\cos x + x\sin y$ thỏa $\frac{\partial P}{\partial y} = \sin x + \sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

70. Chon C. $\left(ye^x - x\sin x\right)\mathrm{dx} + \left(e^x - y\cos y\right)\mathrm{dy} = 0$

$P = ye^x - x\sin x; Q = e^x - y\cos y$ thỏa $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$

71. Dạng bài tập này ta tính y' rồi thay vào từng phương trình.

Ta có: $y = 2x + Ce^x \Rightarrow y' = 2 + Ce^x$

Suy ra: $y' - y = 2 - 2x = 2(1 - x)$ đây chính là ptvp A. $\to$ **chọn A.**

72. Tương tự 71. Từ $y = Ce^{2x} + x^2 \Rightarrow y' = 2Ce^{2x} + 2x$

$\Rightarrow y' - 2y = 2x - x^2 = 2x(1 - x)$ $\to$ **chọn A.**

73. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' - \frac{y}{x} = 3x^3$.

Đây là ptvp tuyến tính với $p(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = x^3$. Nghiệm tquat dạng: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$

Ta có: $\int p(x)dx = \int \frac{-1}{x}dx = -\ln x \Rightarrow e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x} = x$ và $e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

Suy ra: $y = x\left[\int 3x^3.\frac{1}{x}dx + C\right] = x\left(x^3 + C\right) = Cx + x^4$. Vậy $y = Cx + x^4 \rightarrow$ **chọn A.**

74. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'\cos^2 x + y = 0$, với điều kiện $y(0) = 1$.

$$y'\cos^2 x + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\cos^2 x + y = 0 \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} + \int\frac{dx}{\cos^2 x} = C$$

$\rightarrow \ln|y| + \tan x = C$

Thay đk đầu $y(0) = 1, (x = 0 \rightarrow y = 1)$ ta được $\ln|1| + \tan 0 = C \Rightarrow C = 0$

Vậy nghiệm cần tìm là: $\ln|y| + \tan x = 0 \Leftrightarrow \ln|y| = -\tan x \Rightarrow y = e^{-\tan x}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

75. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' + 2\frac{y}{x} = 0$.

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{2dx}{x} = 0 \Rightarrow \int\frac{dy}{y} + \int\frac{2dx}{x} = C_0$$

$$\rightarrow \ln|y| + 2\ln|x| = C_0 \rightarrow \ln|y| + \ln x^2 = C_0 \Leftrightarrow \ln|yx^2| = C_0 \Rightarrow yx^2 = e^{C_0} = C \Rightarrow y = \frac{C}{x^2}$$

$\rightarrow$ **chọn A**

76. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy' - y = 3x^4$

Pt viết lại dạng: $y' - \frac{1}{x}y = 3x^3$

(Đây là ptvp tuyến tính với $P = -\frac{1}{x}, Q = 3x^3$)

Nghiệm tquat dạng: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$ (*)

Ta có: $\int P(x)dx = -\int\frac{dx}{x} = -\ln|x| = \ln|x|^{-1} \Rightarrow e^{\int P(x)dx} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ va $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln|x|} = x$

Thay vào (*): $y = x\left[\int 3x^3\cdot\frac{1}{x}dx + C\right] = x\left(\int 3x^2dx + C\right) = x(x^3 + C) = x^4 + Cx$

Vậy nghiệm tq của ptvp đã cho là: $y = x^4 + Cx \rightarrow$ **chọn A**

77. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy' - 2y = 2x^3$

Pt viết lại thành: $y' - \frac{2}{x}y = 2x^2$ (Đây là ptvp tuyến tính với $P = -\frac{2}{x}, Q = 2x^2$)

Nghiệm tổng quát có dạng: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$ (1)

Ta có: $\int P(x)dx = -\int\frac{2dx}{x} = -2\ln|x| = \ln|x|^{-2} \Rightarrow e^{\int P(x)dx} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ va $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$

Thay vào (1): $y = x^2\left[\int 2x^2\cdot\frac{1}{x^2}dx + C\right] = x^2\left(\int 2dx + C\right) = x^2(x + C) = x^3 + Cx^2$

Vậy nghiệm tq của ptvp đã cho là: $y = x^3 + Cx^2 \rightarrow$ **chọn A**

78. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' - 2y = e^{2x}$ (2)

(Đây là ptvp tuyến tính với $P = -2, Q = e^{2x}$)

Ta có: $\int P(x)dx = -\int 2dx = -2x \Rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{-2x}$ va $e^{-\int P(x)dx} = e^{2x}$

Thay vào (2): $y = e^{2x}\left[\int e^{2x}\cdot e^{-2x}dx + C\right] = e^{2x}\left(\int dx + C\right) = e^{2x}(x + C)$

Vậy nghiệm tq của ptvp đã cho là: $y = e^{2x}(x + C) \rightarrow$ **chọn A**

79. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy'+2y=5x^3$

Viết lại pt dạng: $y'+\frac{2}{x}y=5x^2$ (Đây là ptvp tuyến tính với $P=\frac{2}{x}, Q=5x^2$)

Nghiệm tổng quát có dạng: $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$ (3)

Ta có: $\int P(x)dx=\int\frac{2dx}{x}=2\ln|x|=\ln x^2 \Rightarrow e^{\int P(x)dx}=x^2$ va $e^{-\int P(x)dx}=e^{-\ln x^2}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$

Thay vào (3): $y=x^{-2}\left[\int 5x^2\cdot x^2dx+C\right]=x^{-2}\left(\int 5x^4dx+C\right)=x^{-2}(x^5+C)=x^3+\frac{C}{x^2}\to$ **chọn A**

80. Chọn cách đổi biến thích hợp để biến phương trình Bernoulli $4y'-4y=\frac{2x+1}{y^3}$ thành phương trình vi phân tuyến tính.

Pt viết lại dạng: $4y'-4y=(2x+1)y^{-3}$ hay $4y^3y'-4y^4=(2x+1)$ (4)

Đặt $z=y^{1-(-3)}=y^4\to z'=4y^3y'$. Thay vào (4), ta được:

$z'-4z=2x+1$ (và đây là phương trình tuyến tính với hàm cần tìm là z(x)) $\to$ **chọn A**

81. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''-3y'+2y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}=C_1e^x+C_2e^{2x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})\to$ **chọn A**

82. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''-5y'+6y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})\to$ **chọn D**

83. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''-4y'+4y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})\to$ **chọn A**

84. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''-6y'+9y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2-6\lambda+9=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2=3$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})\to$ **chọn A**

85.Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y''+5y'+6y=0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2+5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$ $(C_1,C_2\in\mathbb{R})\to$ **chọn C**

86. . Nghiệm của bài toán $y''-5y'+6y=0, y(0)=2, y'(0)=3$ là:

Ta có phương trình đặc trưng: $\lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

Vậy nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

Suy ra: $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$. Thay đk đầu:

$$\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=2 \\ 2C_1+3C_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bái toán là: $y=3e^{2x}-e^{3x} \to$ **chọn A**

87. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $y''+y''-2y=0$ (*) thỏa: y(0)=0, y'(0)=1.

Pt đặc trưng của (*) là: $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-2$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của của pt là: $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

Suy ra: $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$. Thay đk đầu:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-2C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1/3 \\ C_2=-1/3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bái toán là: $y=\frac{1}{3}e^x-\frac{1}{3}e^{-2x} \to$ **chọn A**

88. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : $y''-3y'=0$

Ta có pt đặc trưng: $\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=3$

Nghiệm tổng quát của pt là: $y=C_1+C_2e^{3x}, (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \to$ **chọn A**

89. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : y''+ 4y'+4y=0.

Tương tự 83. $\to$ **chọn B**

90. Nghiệm của phương trình vi phân $y''+6y'+9y=0$ (*), với điều kiện y(0)= 1 và y'(0)=1 là:

Pt đặc trưng của (*) là: $\lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$

Nghiệm tổng quát của pt là: $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

Suy ra: $y'=-3C_1e^{-3x}+(C_2-3C_2x)e^{-3x}$. Thay đk đầu $y(0)=1, y'(0)=1$ ta được:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ -3C_1+C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm cần tìm là: $y=e^{-3x}+4xe^{-3x} \to$ **chọn A**

91. Một nghiệm riêng của phương trình $y''+4y'-5y=xe^x$ (1:

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''+4y'-5y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2+4\lambda-5=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-5$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=x, \alpha=1$. Mà $\alpha=1$ trùng với nghiệm đơn của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=x(ax+b)e^x \to$ **chọn A**

92. Một nghiệm riêng của phương trình $y''+y'-6y=x^2e^{-2x}$ (1):

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''+y'-6y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=-3$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=x^2,\alpha=-2$. Mà $\alpha=-2$ không trùng với nghiệm của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ $\to$ **chọn A**

93. Một nghiệm riêng của phương trình $y''-4y'+3y=\left(2x+1\right)e^x$:

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''-4y'+3y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=3$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=2x+1,\alpha=1$. Mà $\alpha=1$ trùng với nghiệm đơn của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=x(ax+b)e^x$ $\to$ **chọn A**

94. Một nghiệm riêng của phương trình $y''-3y'+2y=2x^2-3$ (1):

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''-3y'+2y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=2x^2-3,\alpha=0$. Mà $\alpha=0$ ***không trùng với nghiệm*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=ax^2+bx+C$ $\to$ **chọn A**

95. Một nghiệm riêng của phương trình $y''-4y'+4y=\left(-3x+2\right)e^{2x}$ (1)

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''-4y'+4y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=-3x+2,\alpha=2$. Mà $\alpha=2$ ***trùng với nghiệm kép*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=x^2(ax+b)e^{2x}$ $\to$ **chọn A**

96. Nghiệm tổng quát của phương trình $y''+3y'-4y=x$ (1)

Xét ptvp tuyến tính thuần nhất: $y''+3y'-4y=0$ (2)

PT đặc trưng của (2): $\lambda^2+3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-4$

Nghiệm tổng quát của (2) là: $y_1=C_1e^x+C_2e^{-4x}$

Xét (1). Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x)=x,\alpha=0$. Mà $\alpha=0$ ***không trùng với nghiệm*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r=ax+b$

Khi đó: $y_r'=a;y_r''=0$ thay vào (1): $3a-4(ax+b)=x\Leftrightarrow-4ax+3a-4b=x$ đồng nhất 2 vế ta có:

$\begin{cases}-4a=1\\3a-4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\b=-\dfrac{3}{16}\end{cases}$ Suy ra: một nghiệm riêng của (1) là: $y_r=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{16}$

Do đó: nghiệm tổng quát của (1) là: $y = y_1 + y_r = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$ $\rightarrow$ **chọn A**

97. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân : y''- 4y' + 3y = x (1)

Xét ptvp thuần nhất: $y'' - 4y' + 3y = 0$ (2)

PT đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

Suy ra: nghiệm tq của (2) là: $y_1 = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Xét (1). Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x) = x, \alpha = 0$. Mà $\alpha = 0$ ***không trùng với nghiệm*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r = ax + b$

Khi đó: $y_r' = a; y_r'' = 0$ thay vào (1): $-4a + 3(ax+b) = x \Leftrightarrow 3ax + (-4a+3b) = x$ đồng nhất 2 vế ta có:

$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ -4a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{9} \end{cases}$. Suy ra, một nghiệm riêng của (1) là: $y_r = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là: $y = y_1 + y_r = C_1e^x + C_2e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ $\rightarrow$ **chọn A**

98. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' + y' = e^x$ (1)

Xét ptvp thuần nhất: $y'' + y' = 0$ (2)

PT đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$

Suy ra: nghiệm tq của (2) là: $y_1 = C_1 + C_2e^{-x}$.

Xét (1). Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x) = 1, \alpha = 1$. Mà $\alpha = 1$ ***không trùng với nghiệm*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r = ae^x$

Khi đó: $y_r' = ae^x; y_r'' = ae^x$ thay vào (1): $ae^x + ae^x = e^x \Leftrightarrow 2ae^x = e^x$ đồng nhất 2 vế ta có:

$\Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Suy ra, một nghiệm riêng của (1) là: $y_r = \frac{1}{2}e^x$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là: $y = y_1 + y_r = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ $\rightarrow$ **chọn A**

99. Một nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' + y' - 2y = -4x$ (1)

Xét ptvp thuần nhất: $y'' + y' - 2y = 0$ (2)

PT đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x) = -4x, \alpha = 0$. Mà $\alpha = 0$ ***không trùng với nghiệm*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng:

$y_r = ax + b$

Khi đó: $y_r' = a; y_r'' = 0$ thay vào (1): $a - 2(ax+b) = -4x \Leftrightarrow -2ax + (a-2b) = -4x$ đồng nhất 2 vế ta có:

$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Suy ra, một nghiệm riêng của (1) là: $y_r = 2x + 1 \rightarrow$ **chọn A**

100. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 2y' + y = xe^x$ (1)

Xét ptvp thuần nhất: $y'' - 2y' + y = 0$ (2)

PT đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Suy ra: nghiệm tq của (2) là: $y_1 = C_1e^x + C_2xe^x = (C_1 + C_2x)e^x$.

Xét (1). Vế phải của pt không thuần nhất (1), có dạng: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$,trong đó $p(x) = x, \alpha = 1$. Mà $\alpha = 1$ ***trùng với nghiệm kép*** của pt đặc trưng của ptvp thuần nhất nên nghiệm riêng của (1) có dạng: $y_r = (ax+b)x^2e^x$

Khi đó: $y_r' = [ax^2 + (3a+b)x + 2b]xe^x; y_r'' = [ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b]e^x$ thay vào (1):

$(6ax + 2b)e^x = xe^x \Rightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 0 \end{cases}$ đồng nhất 2 vế ta có:

Suy ra, một nghiệm riêng của (1) là: $y_r = \dfrac{1}{6}x^3e^x$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là: $y = y_1 + y_r = (C_1 + C_2x)e^x + \dfrac{1}{6}x^3e^x \rightarrow$ **chọn A**

101. Cho hàm $f(x,y) = 3^{x/y}$. Tính $df(1,1)$.

Ta có:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Mà $f(x,y) = 3^{x/y} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_x 3^{x/y}\ln 3 = \dfrac{1}{y}3^{x/y}\ln 3;\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_y 3^{x/y}\ln 3 = \dfrac{-x}{y^2}3^{x/y}\ln 3$

Suy ra: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{1}{1}3^{1/1}\ln 3 = 3\ln 3; \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{-1}{1^2}.3^{1/1}\ln 3 = -3\ln 3$

Do đó: $df(1,1) = 3\ln 3dx - 3\ln 3dy = 3\ln 3(dx - dy) \rightarrow$ **chọn D**

102. Cho hàm $f(x,y) = \dfrac{x+y}{2+y}$. Tính $df(1,1)$.Tương tự 101.

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2+y}.(x+y)'_x = \dfrac{1}{2+y}.1 = \dfrac{1}{2+y};$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{(x+y)'_y(2+y) - (2+y)'_y(x+y)}{(2+y)^2} = \dfrac{1.(2+y) - 1.(x+y)}{(2+y)^2} = \dfrac{2-x}{(2+y)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \dfrac{2-1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{9}$

Vậy: $df(1,1) = \dfrac{1}{3}dx + \dfrac{1}{9}dy = \dfrac{1}{9}(3dx + dy) \rightarrow$ **chọn D**

105. Vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số $z = e^y + e^x + 1$

Vi phân toàn phần cấp 1 là $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

Với $z'_x = e^x, z'_y = e^y$ Suy ra: $dz = e^x dx + e^y dy$ $\rightarrow$ **chọn A**

106. Tìm vi phân cấp 1 của hàm $z = f(x, y) = x^2 + 4^y$.

$\Rightarrow dz = z'_x dx + z'_y dy = 2xdx + 4^y \ln 4dy$ $\rightarrow$ **chọn A**

107. Cho $f(x,y,z) = xy^2 z^{xy}$. Giá trị $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,1)$ là:

$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y^2 (x.z^{xy})'_x = y^2(1.z^{xy} + x.y.z^{xy} \ln z)$ **(chú ý: sử dụng đạo hàm của u.v và a^u)**

Suy ra: $\frac{\partial f(1,2,1)}{\partial x} = 3^2(1^{1.3} + 1.3.\ln 1) = 9$ (do ln1=0) $\rightarrow$ **chọn D**

108. Cho $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 x + z^2 x + 2^z$. Tính $\frac{\partial f}{\partial z}\left(1, \sqrt{2}, -1\right)$

Ta có: $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2zx + 2^z \ln 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}\left(1,\sqrt{2},-1\right) = 2.(-1).1 + 2^{-1}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - 2$ $\rightarrow$ **chọn B**

109. Cho hàm $f(x,y) = 3^x + y^3$. Tìm $\nabla f(0,-1)$.

Chú ý: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3^x \ln 3;$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$. Suy ra: $\Rightarrow \frac{\partial f(0,-1)}{\partial x} = 3^0 \ln 3 = \ln 3;$ $\frac{\partial f(0.-1)}{\partial y} = 3(-1)^2 = 3$

Vậy: $\nabla f(0,-1) = (\ln 3, 3) \rightarrow$ **chọn A.**

110. Cho hàm $f(x,y) = e^{x+2y}$. Tìm $\nabla f(1,0)$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+2y}; \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x+2y}$. Suy ra: $\nabla f(1,0) = (e, 2e) \rightarrow$ **chọn A.**

111. Cho hàm $f(x,y,z) = xe^{\frac{y}{z}}$. Tìm $\nabla f(x, y, z)$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{y}{z}};$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x.\frac{1}{z}.e^{\frac{y}{z}} = \frac{x}{z}e^{\frac{y}{z}};$ $\frac{\partial f}{\partial z} = x.\frac{-y}{z^2}e^{\frac{y}{z}} = -\frac{xy}{z}e^{\frac{y}{z}}$

Vậy: $\nabla f(x,y,z) = \left(e^{\frac{y}{z}}, \frac{x}{z}e^{\frac{y}{z}}, -\frac{xy}{z}e^{\frac{y}{z}}\right) \rightarrow$ **chọn A.**

112. Cho hàm $f(x,y) = x^2 + x\cos^2 y$. Tìm $\nabla f(x, y)$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \cos^2 y;$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x\cos y \sin y = -x\sin(2y)$

Vậy: $\nabla f(x,y) = \left(2x + \cos^2 y, -x\sin(2y)\right) \rightarrow$ **chọn A.**

113. Cho hàm hai biến $z=\sin(xy)$. Tính z''_{xy}.

$\Rightarrow z'_x = y\cos(xy) \Rightarrow z''_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$ $\rightarrow$ **chọn A.**

114. Cho hàm hai biến $z=e^{2x-y}$. Kết quả nào sau đây sai?

$\Rightarrow z'_x = 2e^{2x-y} \Rightarrow z''_{xx} = 4e^{2x-y}$

$\Rightarrow z''_{xy} = -2e^{2x-y}$

Tới đây ta thấy câu sai là A. $\rightarrow$ **chọn A.**

115. Cho hàm hai biến $z=\sin(x+y)$. Tính đạo hàm riêng $z^{(6)}_{x^3y^3}$?

$\rightarrow z'_x = \cos(x+y) \rightarrow z''_{xx} = -\sin(x+y) \rightarrow z^{(3)}_{x^3} = -\cos(x+y)$

$\rightarrow z^{(4)}_{x^3y} = \sin(x+y) \rightarrow z^{(5)}_{x^3y^2} = \cos(x+y) \rightarrow z^{(6)}_{x^3y^3} = -\sin(x+y)$ $\rightarrow$ **chọn A.**

116. Tìm vi phân cấp hai của hàm hai biến $z=3x^3+4xy^2-2y^3$.

$\Rightarrow z'_x = 9x^2+4y^2 \Rightarrow z''_{xx} = 18x$ va z''_{xy}=8y

$z'_y = 8xy - 6y^2 \Rightarrow z''_{yy} = 8x - 12y$

Vậy: $d^2z = 18xdx^2 + 2.8ydxdy + (8x-12y)dy^2$ $\rightarrow$ **chọn A.**

117. Tìm vi phân cấp hai của hàm hai biến $z=x^2+x\sin^2 y$.

$\rightarrow z'_x = 2x+\sin^2 y \Rightarrow z''_{xx} = 2$ va $z''_{xy} = 2\sin y\cos y = \sin(2y)$

$z'_y = 2x\sin y\cos y = x\sin(2y) \Rightarrow z''_{yy} = 2x\cos(2y)$

Vậy: $d^2z = 2dx^2 + 2.\sin(2y)dxdy + 2x\cos(2y)dy^2$ $\rightarrow$ **chọn A.**

118. . Cho hàm $f(x,y)=x^2e^{2y}$. Tính $d^2f(1,0)$.

$\rightarrow f'_x = 2xe^{2y} \Rightarrow f''_{xx} = 2e^{2y}$ va $f''_{xy} = 4x2^{2y}$

$f'_y = 2x^2e^{2y} \Rightarrow f''_{yy} = 4x^2e^{2y}$

Suy ra: $f''_{xx}(1,0) = 2.e^0 = 1; f''_{xy}(1,0) = 4.1.e^0 = 4; f''_{yy}(1,0) = 4.1^2.e^0 = 4$

119. Cho hàm $f(x,y)=y\ln x$. Tính $d^2f(1,2)$.

$\rightarrow f'_x = y.\frac{1}{x} \Rightarrow f''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$ va $f''_{xy} = \frac{1}{x}$

$f'_y = \ln x \Rightarrow f''_{yy} = 0$

$\Rightarrow f''_{xx}(1,2) = -2; f''_{xy}(1,2) = 1; f''_{yy}(1,2) = 0$

Vậy $d^2f(1,2) = f''_{xx}(1,2)dx^2 + 2.f''_{xy}(1,2)dxdy + f''_{yy}(1,2)dy^2 = -2dx^2 + 2dxdy = 2(-dx^2+dxdy)$

$\rightarrow$ **chọn A.**

120. Vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $z=ye^x+xe^y$ là:

$\rightarrow f'_x = y.e^x + e^y \Rightarrow f''_{xx} = ye^x$ va $f''_{xy} = e^x + e^y$

$f'_y = e^x + xe^y \Rightarrow f''_{yy} = xe^y$

Vậy $d^2z = f''_{xx}dx^2 + 2.f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = ye^x dx^2 + 2(e^x + e^y)dxdy + xe^y dy^2$ $\rightarrow$ **chọn A.**

121. Tìm vi phân cấp 2 của hàm $z = x^2 + x\sin^2 y.$

$\rightarrow z'_x = 2x + \sin^2 y \rightarrow z''_{xx} = 2;\ \ z''_{xy} = 2\sin y\cos y = \sin 2y$

$z'_y = 2x\sin y\cos y = x\sin 2y \rightarrow z''_{yy} = 2x\cos 2y$

Suy ra : $d^2z = 2dx^2 + 2\sin 2y dxdy + 2x\cos 2y dy^2$ $\rightarrow$ **chọn A.**

122. Tìm $z_{xy}(0, \pi/2)$ của hàm $z = \cos(xy - \cos y)$.

$\rightarrow z'_x = -y\sin(xy - \cos y) \rightarrow z''_{xy} = -\sin(xy - \cos y) - y(x + \sin y)\cos(xy - \cos y)$

Suy ra: $z''_{xy}(0, \pi/2) = -\sin\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

123. Cho $f(x,y) = xy\ln x$. Biểu thức $d^2f(1, 2)$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y\ln x + y.x.\frac{1}{x} = y(\ln x + 1) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x} \quad \textbf{và} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln x + 1$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x\ln x \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Tính được: $\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x \partial y} = 1; \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2} = 0$

$d^2 f(1,2) = \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2}dx^2 + 2.\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2} = 2dx^2 + 2dxdy$ $\rightarrow$ **chọn A.**

124. Cho hàm $f(x,y) = 2x^2e^{xy} - xy + 2x + 1$. Tính $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(2x+1) = 2x^2 \cdot xe^{xy} - x + 0 = 2x^3e^{xy} - x$ $\rightarrow$ **chọn A.**

125. . Cho $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{x^y + y}$ Tính $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(e^{xy})'_y(x^y + y) - (x^y + y)'_y e^{xy}}{(x^y + y)^2} = \frac{xe^{xy}(x^y + y) - (x^y\ln x + 1)e^{xy}}{(x^y + y)^2}$$

Suy ra: $\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{e}{4}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

126. Cho hàm số $z = x^2y + \cos(xy) + y$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

$\Rightarrow z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - x\sin(xy) + 1 \rightarrow$ **chọn C.**

127. Cho $z(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Hãy tính z'_x.

$$\to z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \to \textbf{chọn A.}$$

128. Hãy tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ với $f(x,y)=xy\sin^2 x$.

$$\to \frac{\partial f}{\partial x}=y\sin^2 x+2xy\sin x\cos x=y\sin^2 x+xy\sin(2x)$$
$$\to \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sin^2 x+xy\sin(2x)\right)=\sin^2 x+x\sin(2x)$$
$\to$ **chọn A.**

129. Tìm đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ của hàm $z=xe^y+y^2+y\sin x$.

$$\to \frac{\partial f}{\partial x}=e^y+y\cos x\to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-y\sin x\ \to \textbf{chọn A.}$$

130. Cho hàm hai biến $z=e^{x+2y}$. Kết quả nào sau đây đúng?

$$\to \frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+2y}\to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x+2y}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+2y}\right)=2e^{x+2y}\qquad \to \textbf{chọn A.}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2e^{x+2y}\to \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

131. Tìm đạo hàm riêng z''_{xy} của hàm $z=\ln(x^4+y^2+1)$.

$$\to z'_x=\frac{4x^3}{x^4+y^2+1}\to z''_{xy}=\left(\frac{4x^3}{x^4+y^2+1}\right)'_y=4x^3.\frac{-2y}{(x^4+y^2+1)^2}=\frac{-8x^3y}{(x^4+y^2+1)^2}\ \to \textbf{chọn B.}$$

133. Tìm vi phân của hàm $z=x^2-2xy+\sin(xy)$.

$$\to z'_x=2x-2y+y\cos(xy);\ \ z'_y=-2x+x\cos(xy)$$
$$\Rightarrow dz=z'_xdx+z'_ydy=(2x-2y+y\cos(xy))dx+(-2x+x\cos(xy))dy$$
$\to$ **chọn C.**

135. Tìm vi phân cấp hai của hàm $z=e^{xy}$ tại $M_0(1,2)$.

$$\to \frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\to \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}\to \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\to \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$$

Tại $M_0(1,2)$ thì $\dfrac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x^2}=4e^2;\dfrac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x\partial y}=3e^2;\dfrac{\partial^2 z(1,2)}{\partial y^2}=e^2$

$$d^2z(1,2)=\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x^2}dx^2+2.\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial y^2}dy^2=4e^2dx^2+6e^2dxdy+e^2dy^2$$
$$=e^2(4dx^2+6dxdy+dy^2)$$

$\rightarrow$ **chọn A.**

136. Cho hàm $z=ue^v$ trong đó $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Đạo hàm riêng z'_x được tính theo công thức nào sau đây:

$\rightarrow z'_x\equiv\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^v u'_x+ue^v v'_x$ $\rightarrow$ **chọn A.**

137. Hàm hợp $z=x+\sin(\frac{y}{x})$ với $y=x^2$ có đạo hàm riêng z'_x và $\frac{dz}{dx}$ lần lượt là

$\rightarrow z'_x=1-\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right),\ z'_y=\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right);\ \frac{dy}{dx}=2x$

$\rightarrow \frac{dz}{dx}=z'_x+z'_y\cdot\frac{dy}{dx}=1-\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot 2x=1+\cos x$

(chú ý: thay $y=x^2$ vào biểu thức để được kết quả cuối**)** $\rightarrow$ **chọn D.**

138. Hàm hợp $z=\arctan(\frac{u}{v})$ với $u=x\sin y, v=x\cos y$ có đạo hàm riêng

Áp dụng CT: $z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x; z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y$

$$z'_u=\frac{\frac{1}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}}=\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{\cos y}{x}; z'_v=\frac{-\frac{u}{v^2}}{1+\frac{u^2}{v^2}}=-\frac{u}{u^2+v^2}=-\frac{\sin y}{x}$$ Vì $u^2+v^2=x^2\sin^2 y+x^2\cos^2 y=x^2$

$u'_x=\sin y, v'_x=\cos y, u'_y=x\cos y, v'_y=-x\sin y$. Thay vào CT trên, ta được:

$\rightarrow z'_x=\frac{\cos y}{x}\cdot\sin y-\frac{\sin y}{x}\cdot\cos y=0;\ z'_y=\frac{\cos y}{x}\cdot x\cos y-\frac{\sin y}{x}\cdot(-x\sin y)=1$

$\rightarrow$ **chọn B.**

139. Hàm ẩn $y=y(x)$ xác định từ phương trình $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$ có

Đặt $F=xe^y+ye^x-e^{xy}=0$. Ta có: $\rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{e^y+ye^x-ye^{xy}}{xe^y+e^x-xe^{xy}}=\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$ $\rightarrow$ **chọn C.**

140. Hàm ẩn $z=z(x,y)$ xác định từ phương trình $e^z-xyz=0$ có các đạo hàm riêng:

Đặt $F=e^z-xyz=0$. Khi đó: $F'_x=-yz, F'_y=-xz, F'_z=e^z-xy$. Suy ra:

$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz}{e^z-xy}; z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz}{e^z-xy}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

141. Tính vi phân toàn phần cấp 1 của hàm số: $z=\sqrt{x^3+y^3}$.

Ta có: $z'_x=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}; z'_y=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$

Suy ra: Vi phân toàn phần cấp 1 của z là: $dz = z'_x dx + z'_y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}dy$ $\rightarrow$ **chọn B.**

142. Cho $f(x,y) = xy\sin(2y)$, với $y = e^x + x$. Tính $\frac{df}{dx}$.

Ta có:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = y\sin(2y) + (x\sin(2y) + 2xy\cos(2y))(e^x+1) = y\sin(2y) + x(\sin(2y) + 2y\cos(2y))(e^x+1)$$

$\rightarrow$ **chọn A.**

143. Tìm $\frac{\partial f}{\partial x}$ biết $f(u,v) = u^2\sin v,\ u = x^2+y^2,\ v = \frac{y}{x}$.

Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\sin v.2x + u^2\cos v.\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 4xu\sin v - \frac{yu^2}{x^2}\cos v$ $\rightarrow$ **chọn A.**

144. Cho các hàm: $u = \sqrt{r^2+s^2},\ r = y + x\cos z,\ s = x + y\sin z.$ Giá trị của đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$ tại x=1, y=2, z= 0 là:

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}\cdot(\cos z) + \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}\cdot 1$

Tai $x=1, y=2, z=0 \Rightarrow r=3; s=1; \sqrt{r^2+s^2} = \sqrt{10}$. Do đó :

$\frac{\partial u(1,2,0)}{\partial x} = \frac{3}{\sqrt{10}}.1 + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

145. Hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình $\cos(x-y) = xe^y$ (*) có y'(x) là:

Đặt $F = \cos(x-y) - xe^y = 0$. Khi đó: $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-\sin(x-y)-e^y}{\sin(x-y)-xe^y} = \frac{\sin(x-y)+e^y}{\sin(x-y)-xe^y}$. $\rightarrow$ **chọn A.**

Cách khác: có thể đạo hạm (*) hai vế theo x.

146. Cho hàm $z = u\sin(v)$ trong đó $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Đạo hàm riêng z'_x được tính theo công thức nào sau đây:

Ta có: $z'_x = z'_u.u'_x + z'_v.v'_x = \sin(v).u'_x + u\cos(v).v'_x$ $\rightarrow$ **chọn A.**

147. Cho hàm số $z = z(x,y)$ xác định từ phương trình $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$. Tính z'_x, z'_y tại $M_0(1,-2,2)$.

Đặt $F = z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$

$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-4z}{3z^2-4x}; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{3z^2-4x}$. Khi đó tại $M_0(1,-2,2)$, thì

$z'_x(1,-2,2) = -\frac{-4.2}{3.2^2-4.1} = 1; z'_y(1,-2,2) = -\frac{2.(-2)}{3.2^2-4.1} = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

148. . Tính f'_x, biết $f(u,v) = u^2\sin v,\ u = x^2+y^2,\ v = \frac{y}{x}$.

Ta có: $f'_x = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x = 2u\sin v.2x + u^2\cos v.\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 4x\sin v - \frac{yu^2}{x^2}\cos v$ $\rightarrow$ **chọn A.**

149. Cho hàm hai biến $z = -x^2 + 4x - 4y^2 + 4y + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng:

Ta có: $\begin{cases} z'_x = -2x+4=0 \\ z'_y = -8y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1/2 \end{cases}$. Suy ra: (2, 1/2) là điểm dừng của hàm số

$z''_{xx} = -2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = -8$. Tại (2, -2) ta có:

$$A = z''_{xx}(2,1/2) = -2 < 0; B = z''_{xy}(2,1/2) = 0; C = z''_{yy}(2,1/2) = -8$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-2)(-8) - 0^2 = 16 > 0$$

Vậy (2,1/2) là điểm cực đại của hàm z và $z_{\max} = 9$ $\rightarrow$ **chọn A.**

150. Cho hàm hai biến $z = x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng:

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x-4=0 \\ z'_y = 8y-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. Suy ra: (2, 1) là điểm dừng của hàm số

$z''_{xx} = 2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 1$. Tại (2, 1) ta có: $A = z''_{xx}(2,1) = 2 > 0; B = z''_{xy}(2,1) = 0; C = z''_{yy}(2,1) = 1$

$$\Delta = AC - B^2 = 2.1 - 0^2 = 2 > 0$$

Vậy (2,1/2) là điểm cực tiểu của hàm z và $z_{\min} = -1$ $\rightarrow$ **chọn A.**

151. Cho hàm số $z = x^3 - y^2 - 3x + 6y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 3x^2-3=0 \\ z'_y = -2y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$. Suy ra: z có điểm dừng là (1,3) và (-1,3).

Do ta thấy trong các lựa chọn A,B,C có 1 khẳng định C: có 2 điểm dừng nên ta chọn ngay.
$\rightarrow$ **chọn C.**
(Ngoài ra nếu không có lựa chọn như C thì ta phải xét tie1p như sau:
$z''_{xx} = 6x; z''_{xy} = 0, z''_{yy} = -2$.

+ Tại (1, 3) ta có: $A = z''_{xx}(1,3) = 6 > 0; B = z''_{xy}(1,3) = 0; C = z''_{yy}(1,3) = -2$

$\Delta = AC - B^2 = -2.6 - 0^2 = -12 < 0$. Do đó: (1,3) không là điểm cực trị của z.

+ Tại (1, 3) ta có: $A = z''_{xx}(-1,3) = -6 < 0; B = z''_{xy}(-1,3) = 0; C = z''_{yy}(-1,3) = -2$

$$\Delta = AC - B^2 = -2.(-6) - 0^2 = 12 > 0$$

Vậy (-1, 3) là điểm cực đại của hàm z và $z_{\max} = 11$)

152. Với hàm số $z = xe^y + 5$, khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = e^y > 0, \forall y \\ z'_y = xe^y \end{cases}$. Do đó hàm số không có điểm dừng $\rightarrow$ **chọn D.**

153. Cho hàm số $z = xe^y + ye^x + 2$ và điểm M(-1,-1). Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = e^y + ye^x \\ z'_y = xe^y + e^x \end{cases}$. Thay $M(-1,-1)$ vào ta thấy $z'_x = 0, z'_y = 0$. Do đó: $M(-1,-1)$ là điểm dừng của hàm số.

Ta lại có: $z''_{xx} = ye^x; z''_{xy} = e^x + e^y; z''_{yy} = xe^y$. Tại điểm dừng $M(-1,-1)$ thì

$A = z''_{xx}(-1,-1) = -e^{-1} < 0; B = z''_{xy}(-1,-1) = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}; C = z''_{yy}(-1,-1) = -e^{-1}$ \

$\Delta = AC - B^2 = e^{-2} - 4e^{-2} = -3e^{-1} < 0$. Suy ra: $M(-1,-1)$ không là điểm cực trị.

Vậy $M(-1,-1)$ là điểm dừng nhưng không phải là điểm cực trị. $\rightarrow$ **chọn D.**

154. Cho hàm số $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 4 - 2x = 0 \\ z'_y = -4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$. Suy ra: (2, -2) là điểm dừng của hàm số.

$z''_{xx} = -2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = -2$. Tại (2, -2) ta có: $A = z''_{xx}(2,-2) = -2 < 0; B = z''_{xy}(2,-2) = 0; C = z''_{yy}(2,-2) = -2$ và $\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0$.

Vậy (2, -2) là điểm cực đại của hàm z và $z_{\max} = 8$ $\rightarrow$ **chọn A.**

155. Cho hàm số $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ z'_y = -2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \end{cases}$

Có 4 điểm dừng $(0,0),(1,4),(1,-4),(-5/3,0)$.

Ta có: $z''_{xx} = 12x + 10; z''_{xy} = -2y; z''_{yy} = -2x + 2$

Tại (0,0): $A = 10 > 0, B = 0, C = 2$ và $\Delta = AC - B^2 = 20 > 0$. Suy ra (0,0) là điểm cực tiểu của hàm số.

$\rightarrow$ **chọn A.**

(Do có đáp án trả lời nên ta không cần xét các điểm dừng còn lại)

156. Cho hàm số $z = -x - y + xe^y + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = -1 + e^y = 0 \\ z'_y = -1 + xe^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Suy ra: z có một điểm dừng M(1, 0).

$z''_{xx} = 0, z''_{xy} = e^y; z''_{yy} = xe^y$. Tại M(1, 0) thì $A = 0, B = 1, C = 1$ và $\Delta = AC - B^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$

Vậy hàm số không có cực trị. $\rightarrow$ **chọn C.**

157. Hàm hai biến $z = x^3 + 2xy - 8y^3$:

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y = 2x - 24y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1/3 \\ y = -1/6 \end{cases}$. Suy ra: z có 2 điểm dừng O(0, 0) và $M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

(+) $z''_{xx} = 6x; z''_{xy} = 2; z''_{yy} = -48y$.

Tại điểm dừng O(0,0) thì $A = z''_{xx}(0,0) = 0; B = z''_{xy}(0,0) = 2; C = z''_{yy}(0,0) = 0$; $\Delta = AC - B^2 = 0 - 2^2 < 0$. Do đó O(0,0) không là điểm cực trị của hàm số.

Tại điểm dừng $M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ thì $A = z''_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 2 > 0; B = z''_{xy}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 2; C = z''_{yy}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 8$ và $\Delta = AC - B^2 = 2.8 - 2^2 = 12 > 0$.

Do đó: $M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số và $z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27}$.$\rightarrow$ **chọn C.**

158. Tìm cực trị của hàm số: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x + y - 3 = 0 \\ z'_y = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$. $f(x,y)$ có một điểm dừng (0,3).

Ta có: $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 1y; z''_{yy} = 2$

Tại (0,3): $A = 2 > 0, B = 1, C = 2$ và $\Delta = AC - B^2 = 2.2 - 1^1 = 3 > 0$. Suy ra (0,3) là điểm cực tiểu của hàm số. $\rightarrow$ **chọn A.**

159. Cho hàm $z = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$. Và các điểm I(0,0), J(2,0), K(-2,0), L(1,1). Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 16x = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy z có 3 điểm dừng I(0,0), J(2,0) và K(-2,0).

$z''_{xx} = 12x^2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 2$

Tại I(0,0): $A = z''_{xx}(0,0) = 0; B = z''_{xy}(0,0) = 0; C = z''_{yy}(0,0) = 2$ và $\Delta = AC - B^2 = 0$.

Tại J(2,0): $A = z''_{xx}(2,0) = 48 > 0; B = z''_{xy}(2,0) = 0; C = z''_{yy}(2,0) = 2$ và $\Delta = AC - B^2 = 48.2 - 0^2 > 0$.

Tại K(-2,0): $A = z''_{xx}(-2,0) = 48 > 0; B = z''_{xy}(2,0) = 0; C = z''_{yy}(2,0) = 2$ và $\Delta = AC - B^2 = 48.2 - 0^2 > 0$.

Suy ra: hàm số đạt cực tiểu tại J và K$\rightarrow$ **chọn A.**

160. Cho hàm $z = x^3 + y^2 + 27x + 2y + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 27 > 0, \forall x \\ z'_y = 2y + 2 \end{cases}$. Suy ra: hàm số không có điểm dừng. Vậy hàm số không có cực trị.

$\rightarrow$ **chọn A.**

161. Xét hàm số $f(x,y) = -x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} f'_x = -2x + y + 1 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/4 \end{cases}$. Suy ra: hàm số có một điểm dừng $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

*) $f''_{xx} = -2; f''_{xy} = 1; f''_{yy} = 2$.

Tại điểm dừng $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ thì $A = f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -2 < 0; B = f''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 1; C = f''_{yy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 2$

và $\Delta = AC - B^2 = -2.2 - 1^2 < 0$. Do đó hàm số không có cực trị. $\rightarrow$ **chọn D.**

162. Xét hàm số $f(x,y,z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z}$. Điểm dừng của hàm số này là những điểm nào trong các điểm sau: M(0;0;0), N(1;1;1), P(-1; 1; -1), Q(1; -1; 1)?

Ta có: $\begin{cases} f'_x = 1 - \dfrac{y}{x^2} \\ f'_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} \\ f'_z = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$ (*) Thay tọa độ các điểm trên vào (*) ta thấy: **N(1;1;1), P(-1; 1; -1)** thì

$f'_x = 0; f'_y = 0; f'_z = 0$ nên nó làm điểm dừng của hàm số. $\rightarrow$ **chọn C.**

163. Xét hàm số $z = x^2 - y^4$ - $2x$ + $32y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x - 2 = 0 \\ z'_y = -4y^3 + 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Suy ra: hàm số có một điểm dừng $M(1,2)$.

(+) $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = -12y^2$.

Tại điểm dừng $M(1,2)$ thì $A = z''_{xx}(1,2) = 2; B = z''_{xy}(1,2) = 0; C = z''_{yy}(1,2) = -48$

và $\Delta = AC - B^2 = 2.(-28) < 0$. Suy ra $M(1,2)$ không là điểm cực trị. $\rightarrow$ **chọn A.**

164. Điểm dừng của hàm $f(x,y) = (x-1)^2 + 2^{y^2}$ là:

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2(x-1) = 0 \\ z'_y = 2^{y^2}.2y\ln 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Suy ra điểm dừng của hàm số là $M(1,0)$ $\rightarrow$ **chọn A.**

165. Tìm điểm dừng của hàm f(x,y) = ysinx.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = y\cos x = 0 \\ z'_y = \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = 0 \end{cases}$,k $\in \mathbb{Z}$. Suy ra điểm dừng của hàm số là $M(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ **chọn A.**

166. Tìm giá trị cực đại M của hàm $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

Xem câu 154 $\rightarrow$ **chọn A.**

167. Tìm giá trị cực trị M của hàm $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Xem 158. Ta có: M$M = f(0,3) = -9$ $\rightarrow$ **chọn A.**

168. Cho hàm $z = x^2 - y^4 - 2x + 32y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Trùng với câu 163. $\rightarrow$ **chọn D.**

169. Cho hàm $z = x^2$ -$2y + y^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x = 0 \\ z'_y = -2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Suy ra: hàm số có một điểm dừng $M(0,1)$.

(+) $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 2$.

Tại điểm dừng $M(0,1)$ thì $A = z''_{xx}(0,1) = 2 > 0; B = z''_{xy}(0,1) = 0; C = z''_{yy}(0,1) = 2$

và $\Delta = AC - B^2 = 2.2 - 0^2 = 4 > 0$. Suy ra $M(0,1)$ là điểm cực tiểu. $\rightarrow$ **chọn B.**

170. Cho hàm $z = 3x^2 - 12x + 2y^3 + 3y^2 - 12y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 6x - 12 = 0 \\ z'_y = 6y^2 + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$. $\Rightarrow$ hàm số có 2 điểm dừng $M(2,1)$ và $N(2,-2)$.

(+) $z''_{xx} = 6; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y + 6$.

Tại điểm dừng $M(2,1)$ thì $A = z''_{xx}(2,1) = 6 > 0; B = z''_{xy}(2,1) = 0; C = z''_{yy}(2,1) = 18$

và $\Delta = AC - B^2 = 6.18 - 0^2 > 0$. Suy ra $M(2,1)$ là điểm cực tiểu.

Tại điểm dừng $M(2,-2)$ thì $A = z''_{xx}(2,1) = 6 > 0; B = z''_{xy}(2,1) = 0; C = z''_{yy}(2,1) = -18$

và $\Delta = AC - B^2 = 6.(-18) - 0^2 < 0$. Suy ra $M(2,-2)$ không là điểm cực trị.

Vậy hàm số chỉ có một điểm cực tiểu. $\rightarrow$ **chọn D.**

171. Tìm cực trị của hàm $z = x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 3$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x - 4 = 0 \\ z'_y = 8y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng $M(2,1)$.

(+) $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 8$.

Tại điểm dừng $M(2,1)$ thì $A = z''_{xx}(2,1) = 2 > 0; B = z''_{xy}(2,1) = 0; C = z''_{yy}(2,1) = 8$

và $\Delta = AC - B^2 = 2.8 - 0^2 = 16 > 0$. Suy ra $M(2,1)$ là điểm cực tiểu.. $\rightarrow$ **chọn A.**

172. Tìm cực trị của hàm $z = -x^2 + 4xy - 10y^2 - 2x + 16y$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = -2x + 4y - 2 = 0 \\ z'_y = 4x - 20y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng $M(1,1)$.

(+) $z''_{xx} = -2; z''_{xy} = 4; z''_{yy} = -20$.

Tại điểm dừng $M(1,1)$ thì $A = z''_{xx}(1,1) = -2 < 0; B = z''_{xy}(1,1) = 4; C = z''_{yy}(1,1) = -20$

và $\Delta = AC - B^2 = -2.(-20) - 4^2 = 24 > 0$. Suy ra $M(1,1)$ là điểm cực đại. $\rightarrow$ **chọn B.**

173. Cho hàm $z = x^2 - y - \ln|y| - 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x = 0 \\ z'_y = -1 - \dfrac{y}{|y|^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số có 1 điểm dừng $M(0,-1)$.

(+) $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = \dfrac{-|y| + 2}{|y|^3}$.

Tại điểm dừng $M(0,-1)$ thì $A = z''_{xx}(0,-1) = 2 > 0; B = z''_{xy}(0,-1) = 0; C = z''_{yy}(0,-1) = 1$

và $\Delta = AC - B^2 = 2.1 - 0^2 = 2 > 0$. Suy ra $M(0,-1)$ là điểm cực tiểu. $\rightarrow$ **chọn A.**

174. Tìm cực trị của $z = x^2(y-1) - 3x + 2$ thỏa điều kiện $x - y + 1 = 0$.

Từ $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y - 1 = x$ thay vào z ta được: $z = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow z'_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Có hai điểm dừng: $(-1,0);(1,2)$. Đây là hàm một biến nên ta lập bảng biến thiên, ta thấy: $(-1,0)$ là điểm cực đại và $(1,2)$ là điểm cực tiểu. $\rightarrow$ **chọn A.**

Chú ý: Ta cũng có kết luận tương tự bằng cách sử dụng PP nhân tử Lagrange.

175. Tìm cực trị của hàm hai biến $z = \frac{x^3}{3} - 3x + y - 3$ thỏa điều kiện $-x^2 + y + 4 = 0$.

Đặt $\varphi(x,y) = -x^2 + y + 4 = 0$. Lập hàm Lagrange: $L = \frac{x^3}{3} - 3x + y - 3 + \lambda(-x^2 + y + 4)$

Ta có: $\begin{cases} L'_x = x^2 - 3 - 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 1 + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$. L có 2 điểm dừng $(-3,5,-1);(1,-3,-1)$.

$\Rightarrow L''_{xx} = 2x - 2\lambda; L''_{xy} = 0; L''_{yy} = 0$

Tại $(-3,5,-1)$ ta có: $L''_{xx} = 2(-3) - 2(-1) = -4; L''_{xy} = 0; L''_{yy} = 0$ và do đó: $d^2L = L''_{xx}dx^2 + 0 + 0 = -4dx^2 < 0$

Suy ra: z đạt cực đại tại $(-3,5)$

Tại $(1,-3,-1)$ ta có: $L''_{xx} = 2(1) - 2(-1) = 4; L''_{xy} = 0; L''_{yy} = 0$ và do đó: $d^2L = L''_{xx}dx^2 + 0 + 0 = 4dx^2 > 0$

Suy ra: z đạt cực tiểu tại $(1,-3)$.

Vậy: z đạt cực tiểu tại $A(1;-3)$ và đạt cực đại tại $B(-3;5)$.$\rightarrow$ **chọn A.**

Chú ý: Ta có thể đưa bài toán tìm cực trị có điều kiện về bài toán tìm cực trị tự do của hàm một biến bằng cách giải y theo x hoặc x theo y từ phương trình điều kiện rồi thay vào hàm z ban đầu. Như cách câu 180.

176. Tìm cực trị của hàm $z = 2x^2 + y^2 - 2y - 2$ thỏa điều kiện $y - x + 1 = 0$.

Từ $y - x + 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$ thay vào z ta được: $z = 2x^2 + (x-1)^2 - 2(x-1) - 2 = 3x^2 - 4x - 3$

$\Rightarrow z'_x = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = 2/3$ thay vào trên $y = 2/3 - 1 = -1/3$.

Có một điểm dừng: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Lập bảng biến thiên ta thấy $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cực tiểu của ham số.

$\rightarrow$ **chọn A.**

177. Tìm cực trị của hàm hàm $z = x^2(y+1) - 3x + 2$ thỏa điều kiện $x + y + 1 = 0$.

Từ $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = -x$ thay vào z ta được: $z = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow z'_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Suy ra: z có 2 điểm dừng $(-1,0),(1,-2)$.

Lập bảng biến thiên ta xác định được: z đạt cực đại tại $(-1,0)$ và đạt cực tiểu tại $(1,-2)$. $\rightarrow$ **chọn D.**

178. Tìm cực trị của hàm $z = xy$ thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$.

Từ $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$ thay vào z ta được: $z = x(1-x) = -x^2 + x$. Suy ra:
$z'_x = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Thay vào trên $y = 1 - 1/2 = 1/2$.

Vậy có một điểm dừng $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Lập bảng biến thiên ta thấy $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là điểm cực đại của z. $\rightarrow$ **chọn B.**

179. Tìm cực trị của hàm $z = 2x^2 + y^2 - 2y - 2$ thỏa điều kiện $-x + y + 1 = 0$.
Trùng bài 176, chỉ là cách viết hơi khác của điều kiện.

180. Tìm cực trị của hàm $z = \dfrac{x^3}{3} - 3x + y$ thỏa điều kiện $-x^2 + y = 1$.

Từ $-x^2 + y = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$ thay vào hàm z ta được: $z = \dfrac{x^3}{3} - 3x + x^2 + 1$. Suy ra:

$z'_x = x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$ thay vào $y = x^2 + 1$ ta được 2 điểm dừng: $(1,2), (-3,10)$.

Lập bảng biến thiên:

x		-3		1	
z'_x	+	0	-	0	+
z	↗		↘		↗

Từ bảng biến thiên ta thấy z đạt cực đại tại $(-3,10)$ và đạt cực tiểu tại $(1,2)$. $\rightarrow$ **chọn C.**

181. Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện $x + y = 1$.

Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$ (*) thay vào z ta được: $z = x^2 + (-x+1)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Suy ra:
$z'_x = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ thay vào (*): $y = 1/2$

z có 1 điểm dừng $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Lập bảng biến thiên (xem 180) ta thấy: z đạt cực tiểu tại $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

$\rightarrow$ **chọn B.**

182. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $z = -x + 2y + 3$ trên tập $D = [0;1] \times [0;1]$.

Chú ý: Đối bài toán tìm GTLN và GTNN mà hàm cần tìm là ***hàm tuyến tính (bậc nhất)*** và miền xác định là miền ***đa giác lồi bị chặn*** thì ta chỉ cần tìm tọa độ các đỉnh của đa giác rồi thay vào hàm z. Sau đó so sánh các giá trị tìm ra GTLN, GTNN.

D là miền hình chữ nhật có 4 đỉnh O(0,0), A(0,1), B(1,1) và C(1,0). Thay vào z ta được:

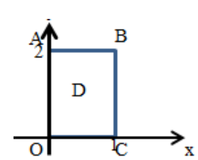
GTLN= $z(A) = 5$ và GTNN= $z(C) = 2$. $\rightarrow$ **chọn A.**

183. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $z = x + 2xy + 3y - 6$ trên tập $D = [0;1] \times [0;2]$.

Xét bên trong D: $0 < x < 1, 0 < y < 2$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 1 + 2y = 0 \\ z'_y = 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$ điểm này không nằn trong D (loại).

Xét trên biên của D:



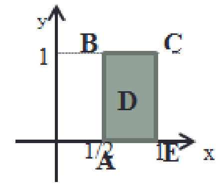
1) AB: $x = 0, (0 \le y \le 2)$ Suy ra: $z = 3y - 6$. Có 2 điểm cần xét

   là O(0,0) và A(0,2). $Z(O) = -6; z(A) = 0$.
2) AB: $y = 2, (0 \le x \le 1)$. $\Rightarrow z = 5x$. Có 2 điểm cần xét A(0,2) và B(1,2). $\rightarrow z(B) = 5$.
3) BC: $x = 1, (0 \le y \le 2). \Rightarrow z = 5y - 5$. Có 2 điểm cần xét B và C(1,0). $z(C) = -5$
4) AC: $y = 0, (0 \le x \le 1). \Rightarrow z = x - 6$. Có 2 điểm cần xét là O và C.

So sánh các giá trị ở tr6en ta đượ: GTNN của z là -6 và GTLN của z là 5. $\rightarrow$ **chọn A.**

184. Tìm giá trị nhỏ nhất *m* của hàm $z = \ln x - 2y$ trong miền D = [1/2,1]×[0,1].

Xét bên trong D: $1/2 < x < 1, 0 < y < 1$



Ta có: $\begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x} \\ z'_y = -2 \end{cases}$ không có điểm dừng

Xét trên biên D:

1) AB: $x = \dfrac{1}{2}, (0 \le y \le 1)$. $\Rightarrow z = \ln\dfrac{1}{2} - 2y$. Có 2 điểm cần xét: $A(1/2,0); B(1/2,1)$.

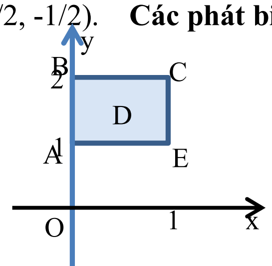
   $Z(A) = \ln\dfrac{1}{2}; z(B) = \ln\dfrac{1}{2} - 2$.
2) BC: $y = 1, (1/2 \le x \le 1)$. $\Rightarrow z = \ln x - 2$. Có 2 điểm cần xét B và C(1,1). $\to z(C) = -2$.
3) CE: $x = 1, (0 \le y \le 1)$.$\Rightarrow z = -2y$. Có 2 điểm cần xét: C và E(1,0). $\Rightarrow z(E) = 0$.
4) AE: $y = 0, (1/2 \le x \le 1)$ $\Rightarrow z = \ln x$. Có 2 điểm cần xét: A và E.

So sánh các giá trị trên ta có GTNN của z là: $\ln\dfrac{1}{2} - 2$ $\to$ **chọn A.**

185. Xét hàm $z = x + 2xy + 3y - 6$ trong miền D = [0,1]×[1,2] và những phát biểu sau:

(1) *z* đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại M(1,2). (2) *z* đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 tại N(0,1).

(3) *z* có điểm dừng P(-3/2, -1/2). **Các phát biểu nào ở trên là đúng?**



Xét bên trong D: $0 < x < 1,\ 1 < y < 2$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 1 + 2y = 0 \\ z'_y = 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$. Điểm này không nằm trong D.

Xét trên biên của D:

Trên AB: $x = 0, 1 \le y \le 2$. $\to z = 3y - 6$. Có 2 điểm cần xét: $z(A) = z(0,1) = -3; z(B) = z(0,2) = 0$

Trên BC: $y = 2, 0 \le x \le 1 \to z = 5x$. Có 2 điểm cần xét $z(C) = z(1,2) = 5; z(B) = 0$

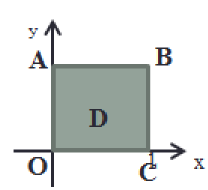
Trên CE: $x = 1, 1 \le y \le 2$. $\to z = 5y - 5$. Có 2 điểm cần xét: $z(C) = 5; z(E) = z(1,1) = 0$

Trên AE: $y = 1, 0 \le x \le 1 \to z = 3x - 3$. $z(A) = -3; z(E) = z(1,1) = 0$

So sánh các giá trị trên, ta thấy: GTLN của z là 5 đạt tại (1,2) và GTNN của z là -3 đạt tại (0,1).

$\to$ **chọn A.**

186. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $z = x^2 - 2x - y + 4$ trên tập $D = [0;1] \times [0;1]$.



Xét bên trong D: $0 < x < 1, 0 < y < 1$

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x - 2 \\ z'_y = -1 \neq 0, \forall x, y \end{cases}$. Không có điểm dừng

Xét trên biên của D:

1) OA: $x = 0, (0 \le y \le 1)$. $\Rightarrow z = -y + 4$. Có 2 điểm cần xét: O(0,0) và A(0,1). $\Rightarrow z(O) = 4, z(A) = 3$.
2) AB: $y = 1, (0 \le x \le 1). \Rightarrow z = x^2 - 2x + 3$. Suy ra: $z'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Điểm dừng $(1,1)$ trùng với B. $\rightarrow z(B) = 2$. z(A) đã xét.
3) BC: $x = 1, (0 \le y \le 1). \Rightarrow z = -y + 3$. Có 2 điểm cần xét B(1,1) và C(1,0). $\Rightarrow z(C) = 3$.
4) OC: $y = 0, (0 \le x \le 1). \Rightarrow z = x^2 - 2x + 4. \Rightarrow z'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Có điểm dừng $(1,0)$ trùng với C(đã xét).

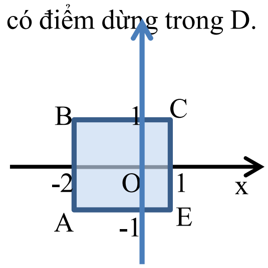
So sánh các giá trị ở trên ta có: GTLN của z là 4 và GTNN của z là: 2$\rightarrow$ **chọn A.**

189. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm $z = x^2 + 2x + 2y + 4$ trong miền $-2 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Xét trên biên của D: $-2 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x + 2 \\ z'_y = 2 \neq 0, \forall y \end{cases}$ nên không có điểm dừng trong D.

Xét trên biên:



Trên AB: $x = -2, -1 \le y \le 1$. $\rightarrow z = 2y + 4$ Ta có 2 điểm cần xét:
$z(B) = z(-2,1) = 2.1 + 4 = 6; z(A) = z(-2,-1) = 2(-1) + 4 = 2$

Trên BC: $y = 1, -2 \le x \le 1$. $\rightarrow z = x^2 + 2x + 6 \Rightarrow z'_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, y = 1$. Có điểm dừng $M_0(-1,1)$

$z(M_0) = z(-1,1) = 5$, $z(C) = z(1,1) = 9$

Trên CE: $x = 1, -1 \le y \le 1$. $\rightarrow z = 2y + 7$ .Ta có 2 điểm cần xét: $z(E) = z(1,-1) = 2.(-1) + 7 = 5; z(C) = 9$

Trên AE: $y = -1, -2 \le x \le 1$. $\rightarrow z = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow z'_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, y = -1$. Co điểm dừng $M_1(-1,-1)$ và do đó $z(M_1) = z(-1,-1) = 1$.

So sánh các giá trị tại z(A), z(B), z(C), z(E) , z(M_0) và $z(M_1)$ ta có: GTNN $m = 1$ và GTLN $M = 9$.

$\rightarrow$ **chọn A.**

190. GTLN, GTNN của $z = x^2 - y^2$ trên $D: x^2 + y^2 \le 4$

-Xét bên trong D: $x^2 + y^2 < 4$

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x = 0 \\ z'_y = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Có 1 điểm dừng O(0,0) $\rightarrow f(O) = f(0,0) = 0$

-Xét trên biên của D: $x^2 + y^2 = 4$ (1)

Cách 1: Đưa về tìm cực trị hàm 1 biến

Từ (1) $\rightarrow y = 4 - x^2, (-2 \le x \le 2)$ (2)

Khi đó: $z = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4 \rightarrow z'_x = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Với $x = 0 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

Có 2 điểm dừng (0,-2) và (0, 2). Ta có $f(0,-2) = -4, f(0,2) = -4$

Xét tại 2 biên của điều kiện (2): $x = -2, x = 2 \Rightarrow y = 0$. Có 2 điểm cần xét: (2,0) và (-2,0)

$\Rightarrow f(2,0) = 4, f(-2,0) = 4$

So sánh các giá trị ta có GTLN là 4 đạt tại (2,0) và (-2,0)

GTNN là -4 đạt tại (0,-2) và (0,2) $\rightarrow$ **chọn D.**

Cách 2: Tìm cực trị có điều kiện của $z = x^2 - y^2$ **với điều kiện** $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

Hàm Lagrange: $L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

$$\rightarrow \begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 & \text{(a)} \\ L'_x = -2y + 2\lambda y = 0 & \text{(b)} \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

Từ (a) $\rightarrow x = 0$ hoặc $\lambda = -1$. Thay x=0 vào (3) $\rightarrow y = \pm 2$

Từ (b)$\rightarrow y = 0$ hoặc $\lambda = 1$. Thay y=0 vào (3)$\rightarrow x = \pm 2$

Ta có 4 điểm dừng: $(0,2),(-2,0)$ ứng với nhân tử $\lambda = 1$

$(0,-2),(2,0)$ ứng với nhân tử $\lambda = -1$

Tính $f(0,2) = -4; f(-2,0) = 4, f(0,-2) = -4; f(2,0) = 4$.

So sánh các gia trị này với f(O) ta có GTLN là 4 đạt tại (2,0) và (-2,0)

GTNN là -4 đạt tại (0,-2) và (0,2) $\rightarrow$ **chọn D.**

192. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (y - x)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y = x + 1; y = 0; x = 0$.

Ta viết lại miền lấy tích phân: $D = \{(x, y) / -1 \le x \le 0, 0 \le y \le x + 1\}$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{0} \left\{ \int_{0}^{x+1} (y - x)dy \right\} dx = \int_{-1}^{0} \left\{ \frac{y^2}{2} - yx \Bigg|_{y=0}^{x+1} \right\} dx = \int_{-1}^{0} \left\{ \frac{(x+1)^2}{2} - x(x+1) \right\} dx = \int_{-1}^{0} \left\{ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right\} dx = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} \Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}$$

$\rightarrow$ **chọn B.**

194. Tìm cực trị của hàm $z = \frac{x^3}{3} - 3x + y$ thỏa điều kiện $-x^2 + y + 1 = 0$.

Từ $-x^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 1$ thay vào z ta được:

$z = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 1 \Rightarrow z'_x = x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -3$

Có hai điểm dừng $(1,0);(-3,8)$. Ta có bảng biến thiên:

x		-3		1	
z'_x	+	0	-	0	+
z	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy z đạt cực đại tại (-3,8) và đạt cực tiểu tại (1,0). $\rightarrow$ **chọn A.**

195. Nghiệm của phương trình vi phân: $y'' + 9y = 0$ (1), với điều kiện $y(0) = 3$ và $y'(0) = 3$ là:

Phương trình đặc trưng của (1): $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$. Do đó nghiệm tổng quát của (1) có dạng:

$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. Suy ra: $y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x$

Điều kiện đầu: $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ 3C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là: $y = 3\cos 3x + \sin 3x \rightarrow$ **chọn A.**

196. Cho hàm số $z = -x^2 + 2y^2 + 12x + 8y + 5$. Khẳng định nào sau đây ĐÚNG?

Ta có: $\begin{cases} z'_x = -2x + 12 = 0 \\ z'_y = 4y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$. Suy ra: z có một điểm dừng $(6,-2)$

Ta có: $z''_{xx} = -2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 4$. Tai điểm dừng ta có: $A = -2 < 0, B = 0, C = 4$ và $\Delta = AC - B^2 = -2.4 - 0^2 = -8 < 0$.

Vậy hàm số có điểm dừng nhưng không có cực trị. $\rightarrow$ **chọn C.**

197. Nghiệm của phương trình vi phân toàn phần: $(y + e^x)dx + xdy = 0$ (1) là:

Đây là ptvp toàn phần với $P(x,y) = y + e^x; Q(x,y) = x$ (vì $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$). Do đó tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho: $du = Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow u = C$ (2).

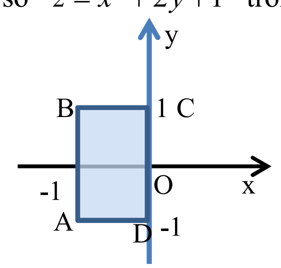
Ta có: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P = y + e^x & (3) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q = x & (4) \end{cases}$. Tích phân (3) theo x ta được: $u = yx + e^x + C(y)$ (5) $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y)$ thay vào (4) được: $x = x + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = 0$. Thay vào (5): $u = yx + e^x$.

Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là: $yx + e^x = C$. $\rightarrow$ **chọn D.**

198. Hãy biểu diễn cận lấy tích phân của miền phẳng Ω trong tọa độ Descartes Oxy, với $\Omega = \{(x,y) / y \ge 3x^2, y \le 6 - 3x\}$.

Ta có: hoành độ giao điểm của $y = 3x^2, y = 6 - 3x$ là $x = -2$ và $x = 1$. Do đó miền lấy tích phân của miền Ω là $\Omega = \{(x,y) / -2 \le x \le 1, 3x^2 \le y \le 6 - 3x\}$. $\rightarrow$ **chọn A.**

199. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $z = x^2 + 2y + 1$ trong miền $D = [-1,0] \times [-1,1]$.



Xét bện trong D, $D_1 = \{(x,y) / -1 < x < 0, -1 < y < 1\}$

Ta có: $\begin{cases} z'_x = 2x \\ z'_y = 2 \end{cases}$ Hàm số không có điểm dừng trong D_1 .

Trên biên AB: $x = -1, -1 \le y \le 1 \Rightarrow z = 2y + 2$. $Z(A) = Z(-1,0) = 2; Z(B) = Z(-1,1) = 4$

Trên biên BC: $y = 1, -1 \le x \le 0 \Rightarrow z = x^2 + 3 \Rightarrow z'_x = 2x = 0 \rightarrow x = 0$. Điểm dừng (0,1)

$Z(0,1) = Z(C) = 3$

Trên biên DC: $x = 0, -1 \le y \le 1 \Rightarrow z = 2y + 1$. $Z(D) = Z(0,-1) = -1$

Trên biên AD: $y=-1,-1\le x\le 0 \Rightarrow z=x^2-1 \Rightarrow z'_x=2x=0 \Rightarrow x=0$. Điểm dừng (0,-1)

$$Z(0,-1)=Z(D)=-1$$

Vậy: GTLN của z là $M=4$ và GTNN của z là $m=-1$. $\rightarrow$ **chọn A.**

200. Cho hàm $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2+y}$. Tinh $df(1,1)$

Ta có: $f'_x=\dfrac{1}{2+y}; f'_y=\dfrac{2+y-(x+y)}{(2+y)^2}=\dfrac{2-x}{(2+y)^2}$

$\Rightarrow f'_x(1,1)=\dfrac{1}{3}$ và $f'_y(1,1)=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow df(1,1)=f'_x(1,1)dx+f'_y(1,1)dy=\dfrac{1}{9}\left(3dx+dy\right)$ $\rightarrow$ **chọn D.**