BÀI 4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I & II

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x, y, z) xác định trên mặt S. Chia S một cách tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau, diện tích mỗi phần là ΔS_i (i=1,2,…,n). Trong mỗi ΔS_i ta lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý và lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$.

Nếu $I = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia S và cách chọn điểm M_i thì số I được gọi là *tích phân mặt loại 1* của f(x, y, z) trên S.

Ký hiệu $I = \iint\limits_S f(x, y, z)\,dS$.

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1. Định nghĩa

Nhận xét: Tích phân mặt loại 1 có các tính chất như tích phân đường loại 1.

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.2. Phương pháp tính

a) Chiếu S lên Oxy

• Nếu S có phương trình z = z(x, y) và S có hình chiếu trên Oxy là D thì:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy\ .$$

b) Chiếu S lên Oxz

• Nếu S có phương trình y = y(x, z) và S có hình chiếu trên Oxz là D thì:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y(x, y), z)\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2}\, dxdz\ .$$

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.2. Phương pháp tính

c) Chiếu S lên Oyz

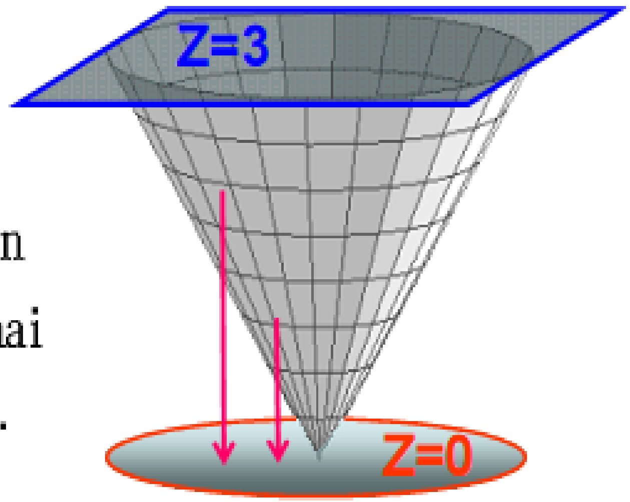
• Nếu S có phương trình x = x(y, z) và S có hình chiếu trên Oyz là D thì:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz\,.$$

Chú ý: Nếu hình chiếu của S xuống mp Oxy chỉ là một đường cong (trường hợp này xảy ra khi S là một mặt trụ song song với Oz) thì phải chiếu S xuống các mp khác, không chiếu xuống mp Oxy.

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

Ví dụ: Tính $\iint\limits_S x^2 + y^2 + z^2 \, ds$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 0$ và $z = 3$.



Ta có:

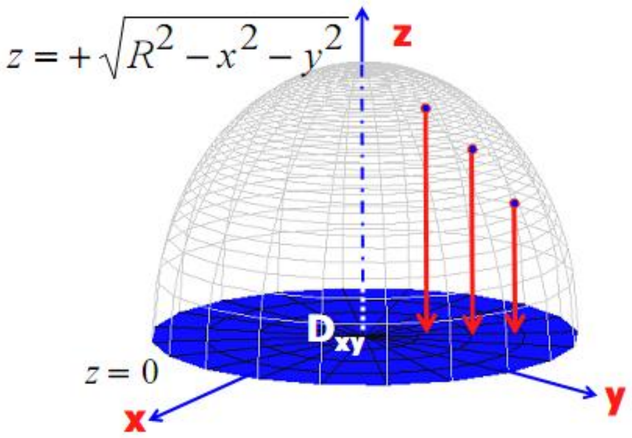
$$D = S\big|_{Oxy} : x^2 + y^2 \leq 9.$$

Vậy

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \iint\limits_D 2(x^2 + y^2).\sqrt{2}\, dx\, dy = \ldots$$

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

Ví dụ : Tính tích phân $\iint\limits_S x^2 + y^2 \, ds$, trong đó S là nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ lấy phần $z \geq 0$



Ta có:

$$S: \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

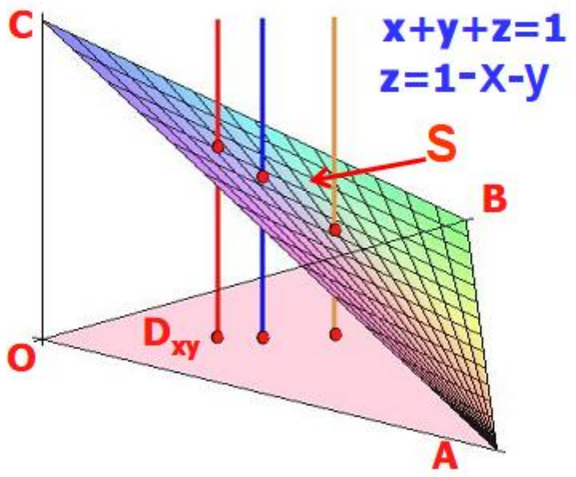
$$D = S\big|_{Oxy}: \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

Vậy

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2) ds = \iint\limits_D (x^2 + y^2) . \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \ldots$$

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

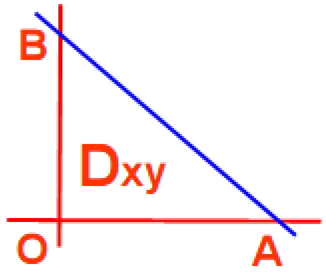
Ví dụ : Tính $\iint\limits_S x+y+z\, ds$ trong đó S cho bởi $x+y+z=1,\ z\geq 0,\ x\geq 0, y\geq 0$



Ta có:

$$S:\quad z = 1 - x - y$$

$$D = S\Big|_{Oxy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$



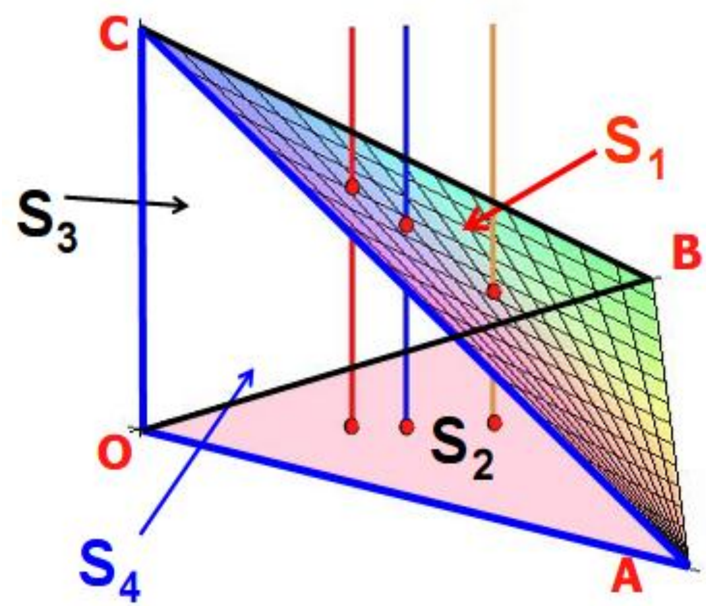
Vậy

$$\iint\limits_S (x+y+z)ds = \iint\limits_D (x+y+z).\sqrt{3}dxdy = \ldots$$

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

Ví dụ : Tính $\iint\limits_S x+y+z\,ds$ trong đó S là mặt xung quanh hình chóp cho bởi

$x+y+z\le 1,\ z\ge 0,\ x\ge 0, y\ge 0$



Mặt S gồm có bốn mặt của tứ diện **OABC**

Tích phân S_1 trên mặt **ABC** đã tính trong ví dụ trước . Ta tính tích phân trên các mặt còn lại $\underbrace{\text{OAB}}_{S_2}$, $\underbrace{\text{OBC}}_{S_3}$, $\underbrace{\text{OCA}}_{S_4}$

Trên mặt OAB , phương trình của mặt là $z = 0$, hình chiếu của mặt xuống Oxy là chính tam giác OAB

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.3. Ứng dụng

1) Diện tích mặt S là $\iint_S dS$.

2) Nếu mặt S có hàm mật độ khối lượng là $\rho(x, y, z)$ thì khối lượng của mặt S là:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)dS .$$

Khi đó, tọa độ trọng tâm G của mặt S là:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)dS, \ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)dS,$$

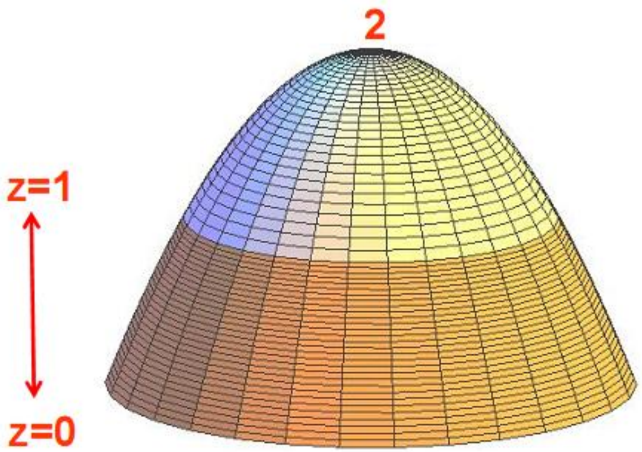
$$z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)dS.$$

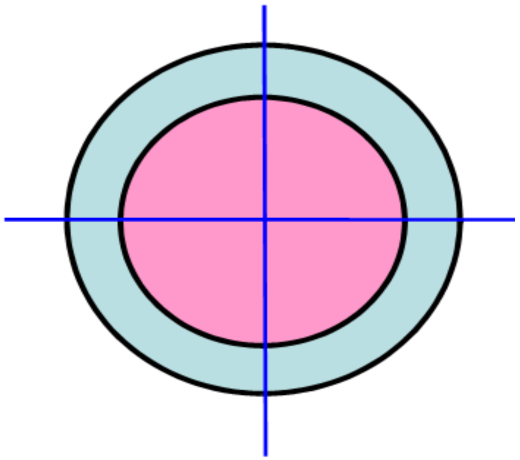
1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.3. Ứng dụng

Ví dụ : Tính diện tích nửa trên mặt cầu bán kính R và diện tích toàn bộ mặt cầu .

Ví dụ : **Tính diện tích của mặt cong S , trong đó S là phần của mặt paraboloid** $z = 2 - x^2 - y^2$ **lấy trong phần** $0 \le z \le 1$





2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.1. Mặt định hướng

• Xem mặt cong S là tập hợp các điểm M(x,y,z) thỏa mãn phương trình : F(x,y,z) = 0 (1).

• Mặt S gọi là mặt trơn nếu vector gradient $\nabla F(x,y,z) = (F'_x, F'_y, F'_z)$ liên tục và khác θ trên S (hay nói cách khác hàm F(x,y,z) có các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục và không đồng thời bằng 0 trên S).

• Chú ý rằng mặt cong S thường cho bởi phương trình

$$z = f(x,y), (x,y) \in G \qquad (2).$$

Khi đó ta có thể coi phương trình trên là trường hợp riêng của dạng

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0 \quad \text{có} \quad \nabla F(x,y,z) = (f'_x, f'_y, -1).$$

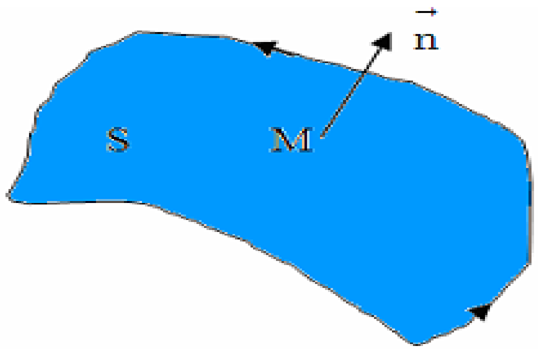
Và khi đó mặt S là mặt trơn khi và chỉ khi các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục trên G.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.1. Mặt định hướng

Định nghĩa: Mặt trơn S được gọi là *mặt định hướng* nếu pháp vector đơn vị $\vec{n}$ xác định tại mọi điểm M thuộc S (có thể trừ biên S) biến đổi liên tục khi M chạy trên S. Mặt định hướng có hai phía, phía mà nếu đứng trên đó thì $\vec{n}$ hướng từ chân lên đầu là phía dương, ngược lại là phía âm.



- Hướng của biên S là hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ ngọn của $\vec{n}$.

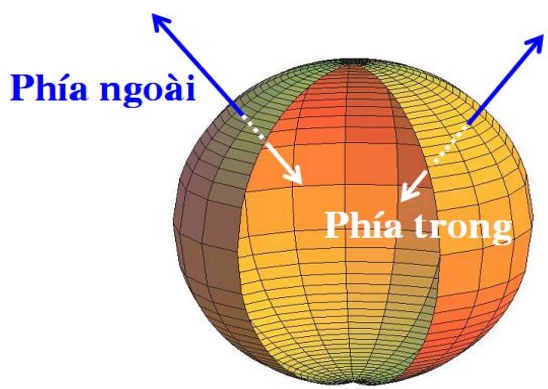
2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

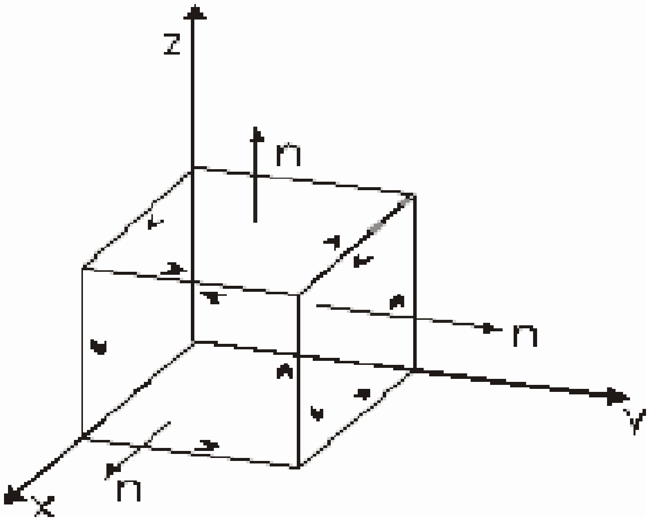
2.1. Định nghĩa

2.1.1. Mặt định hướng

• Khi mặt S không kín, ta gọi *phía trên* là phía mà $\vec{n}$ lập với tia Oz góc nhọn, ngược lại là *phía dưới*.
Khi mặt S kín ta gọi *phía trong* và *phía ngoài*.

• Mặt trơn từng khúc S là *định hướng được* nếu hai phần trơn bất kỳ của S nối với nhau bởi đường biên C có định hướng ngược nhau.





2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

- Cho hàm số f(x, y, z) xác định trên mặt định hướng, trơn từng khúc S. Chia S một cách tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau, diện tích mỗi phần là ΔS_i (i=1,2,…,n). Trong mỗi ΔS_i ta lấy điểm $M_i(\xi_i, \eta_i, \xi_i)$ tùy ý.

Gọi D_i là hình chiếu của ΔS_i lên Oxy kèm theo dấu *dương* nếu ΔS_i có *định hướng trên*, ngược lại là dấu *âm*.

Lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \xi_i).S(D_i)$.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Nếu $I = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \xi_i).S(D_i)$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia S và cách chọn điểm M_i thì số I được gọi là *tích phân mặt loại 2* của f(x, y, z) trên mặt định hướng S.

Ký hiệu $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$.

- Tương tự, khi chiếu S lên Ozx và Oyz ta có

$\iint\limits_S f(x,y,z)dzdx$ và $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

- Kết hợp cả 3 dạng trên ta được *tích phân mặt loại 2* của các hàm P, Q, R trên S:

$$\boxed{\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy}.$$

Nhận xét

- Nếu đổi hướng của mặt S thì tích phân đổi dấu.
- Nếu S kín thì tích phân còn được ký hiệu là:

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\ .$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.1. Định nghĩa

2.1.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

• Kết hợp cả 3 dạng trên ta được *tích phân mặt loại 2* của các hàm P, Q, R trên S:

$$\boxed{\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy}.$$

<u>Nhận xét</u>

• Nếu đổi hướng của mặt S thì tích phân đổi dấu.

• Nếu S kín thì tích phân còn được ký hiệu là:

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.2. Liên hệ với tích phân mặt loại 1

• Cho mặt định hướng trơn từng khúc S có pháp vector đơn vị $\vec{n}$. Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi $\vec{n}$ với các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó:

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

Trong đó:

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}},$$

$$|\cos\beta| = \frac{1}{\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}}, \quad |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}.$$

Chú ý: $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – pháp vector đơn vị của mặt S.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3. Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

Giả sử cần tính tích phân

$$\iint_S R\,dxdy = \iint_S R\cos\gamma\,ds \qquad (3),$$

trong đó, S là mặt cong có phương trình z = z(x,y) (trơn hoặc trơn từng khúc) với pháp vector định hướng $\vec{n}$ lên trên (tức là phía trên của mặt cong và pháp vector $\vec{n}$ tạo với hướng dương của trục Oz một góc nhọn).

Vế phải (3) là giới hạn của tổng tích phân mặt loại 1

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z(x_i, y_i)).\cos\gamma.\Delta S_i \qquad (4)$$

Mặt khác, ta có

$$\cos\gamma.\Delta S_i \approx \Delta D_i \qquad (5),$$

với $\Delta D_i = \Delta S_i\big|_{Oxy}$.

Chú ý: Do $\vec{n}$ tạo với Oz góc nhọn nên $\cos\gamma > 0$ và ΔD_i lấy dấu +.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3. Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

Thế (5) vào (4) ta được tổng tích phân kép, qua giới hạn ta được

$$\iint_S R(x, y, z(x, y))\,dxdy = \iint_D R(x, y, z(x, y))\,dxdy \quad ,$$

trong đó

$$D = S\big|_{Oxy} .$$

Nếu đổi hướng của mặt S (tức đổi phía của S) thì $\cos\gamma < 0$ và ΔD_i lấy dấu - , tức là

$$\iint_S R(x, y, z)\,dxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))\,dxdy \quad .$$

Tương tự, ta có

$$\iint_S P\,dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz \ ,$$

$$\iint_S Q\,dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz .$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3. Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

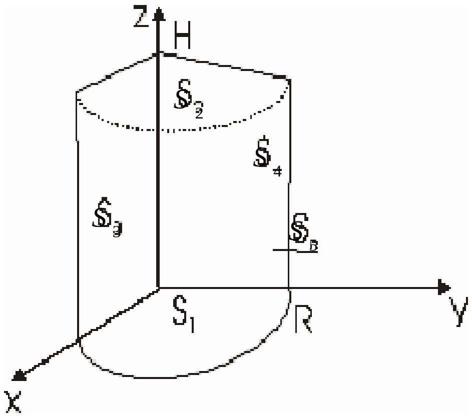
Chú ý: Nếu hình chiếu của S xuống một mặt phẳng nào đó (ví dụ mặt phẳng Oxy) chỉ là một đường cong (trường hợp này xảy ra khi S là một phần mặt trụ có các đường sinh song song với trục Oz) thì tích phân tương ứng với các biến vi phân của mặt phẳng đó bằng 0 (tức $\iint_S R\,dx\,dy = 0$).

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3 Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

Ví dụ: Tính $I = \iint\limits_S yz\,dxdy,$ S - phía ngoài của mặt giới hạn bởi

$x^2 + y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, 0 \le z \le h.$



Ta có:

$$I = \iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3} + \iint\limits_{S_4} + \iint\limits_{S_5},$$

trong đó

S_1, S_2 − hai mặt đáy; S_3, S_4 − hai mặt bên nằm trong Oxz, Oyz tương ứng; S_5 − mặt trụ cong.

Vì $\iint\limits_{S_3} = \iint\limits_{S_4} = \iint\limits_{S_5} = 0$ (xem chú ý 2.3) và $\iint\limits_{S_1} yz\,dxdy = 0$ (vì z = 0) nên

$$I = \iint\limits_{S_2} yz\,dxdy = h \iint\limits_{\substack{x^r + y^2 \le R^2 \\ x \ge 0, y \ge 0}} y\,dxdy = h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R r^2\,dr = \frac{hR^3}{3}.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3. Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

Ví dụ

Tính $I = \iint\limits_S (x+z)dxdy$

trong đó S là phần mặt $z = x^2 + y^2$, bị cắt bởi mặt phẳng $x + z = 2$, phía dưới theo hướng trục 0z.

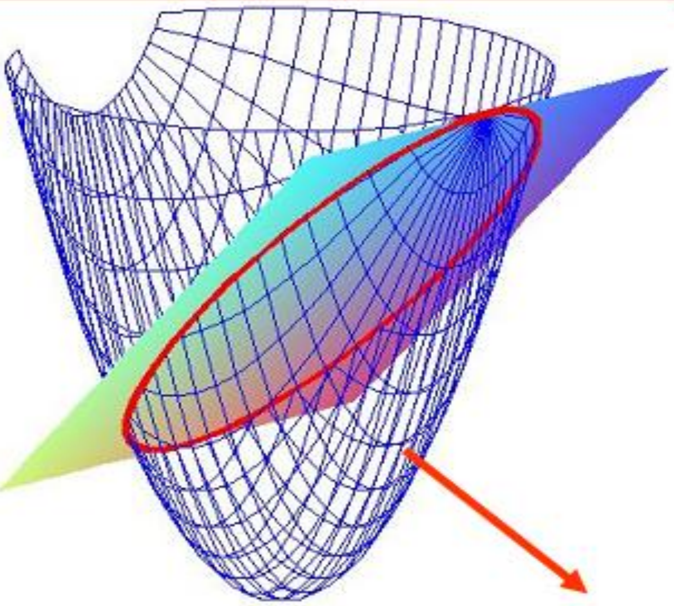
Pháp vécto tạo với 0z một góc luôn tù.

Phương trình: $z = x^2 + y^2$

Hình chiếu của S xuống 0xy:

$x^2 + y^2 \le 2 - x$

$(x + 1/2)^2 + y^2 \le 9/4$



2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.3. Phương pháp tính (Đưa về tích phân kép)

$$I = \iint_S (x+z)dxdy$$

Dấu – vì góc γ tù

$$= -\iint_{(x+1/2)^2+y^2 \le 9/4} (x+(2-x))dxdy$$

$$I = -\iint_{(x+1/2)^2+y^2 \le 9/4} 2dxdy$$

$$= -2 \cdot S_{\text{hình tròn}} = -2 \cdot \frac{9}{4}\pi$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

*** Dùng liên hệ với tích phân mặt loại 1**

Ví dụ

Tính $I = \iint_S (2x+y)dydz + (2y+z)dxdz + (2z+x)dxdy$

trong đó S là phần mặt phẳng $x+y+z=3$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$, phía dưới theo hướng trục 0z.

Pháp véctơ đơn vị: $\overrightarrow{n_0} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$

$$I = \iint_S \left((2x+y)\frac{-1}{\sqrt{3}} + (2y+z)\frac{-1}{\sqrt{3}} + (2z+x)\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) ds$$

$$I = \frac{-3}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) ds$$

$$= -\sqrt{3} \iint_{x^2+y^2 \le 2x} (x+y+3-x-y)\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy$$

$$= -9 \cdot S_{\text{hình tròn}} = -9\pi$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.4. Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường)

Cho mặt định hướng S trơn từng khúc với biên là chu tuyến C trơn từng khúc và không tự cắt (chu tuyến đơn giản). Cho các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở chứa S. Khi đó ta **có công thức Stokes**:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_C Pdx + Qdy + Rdz \quad (5),$$

trong đó, hướng của chu tuyến C được lấy theo hướng dương ứng với mặt định hướng S.

* Để dễ nhớ có thể viết công thức Stokes ở dạng "hình thức" sau

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.4. Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường)

Lưu ý: Công thức Stokes thường được dùng ở dạng liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 1.

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds \quad (6),$$

với $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) -$ vector pháp đơn vị ứng với phía của mặt cong S.

* Để dễ nhớ có thể viết công thức Stokes ở dạng "hình thức" sau

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.4. Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường)

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int_C x^2 y^3 dx + dy + zdz$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ trong mặt phẳng z = 0 lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz.

Theo định lý Stokes, chuyển tích phân trên thành tích phân mặt S, với S là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ trong mặt phẳng Oxy hướng lên trên (theo chiều dương của trục Oz). Vậy

$$I = \int_C x^2 y^3 dx + dy + zdz = \iint_{x^2+y^2\le R^2} 0\,dydz + 0\,dxdz - 3x^2y^2 dxdy =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^R r^5\, dr = -\frac{3}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} . \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^R = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.4. Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân đường)

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int_C ydx + zdy + xdz,$ với C là đường tròn giao của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ và mặt phẳng $x + y + z = 0$ và hướng tích phân trên C là hướng dương khi nhìn từ ngọn của tia Oz.

Gọi S là hình tròn với biên là đường tròn C. Theo định lý Stokes ta có:

$$I = -\iint_S dydz + dxdz + dxdy = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,ds,$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma -$ các cosin chỉ hướng của vector pháp $\vec{n}$ của mặt phẳng $x + y + z = 0.$ Mà ta có: $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$ vậy

$$I = -\sqrt{3}\iint_S ds = -\sqrt{3}\pi R^2.$$

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.5. Định lý Gauss – Ostrogratski (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân bội ba)

Cho Ω là miền đóng, bị chặn trong không gian, với biên S trơn từng khúc (tức là có thể chia S thành hữu hạn các mặt trơn). Cho các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở chứa Ω. Khi đó ta có công thức:

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (^*)$$

trong đó tích phân mặt được lấy theo phía ngoài của mặt S.

Chú ý: Nhờ công thức G – O, ta có thể tính thể tích vật thể bằng cách tính tích phân mặt nếu lấy P = x, Q = y, R = z. Khi đó $(^*)$ trở thành:

$$\iiint_\Omega 3\,dxdydz = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$$

$$\Rightarrow V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

với S là mặt biên của Ω lấy theo phía ngoài.

2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

2.5. Định lý Gauss – Ostrogratski (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân bội ba)

Ví dụ: Tính tích phân $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy,$ với S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

Theo công thức G – O ta có:

$$I = 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz.$$

Chuyển sang tọa độ cầu

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi R^5.$$