Chương 1: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

A. Lý thuyết:

I. Khái niệm hàm số một biến:

1. Hàm số: Cho $X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}$, ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là hàm số một biến số thực. Tập X được gọi là miền xác định. Tập $f(X) = \{y \in Y / y = f(x), x \in X\}$ được gọi là miền giá trị kí hiệu là R_f.

2. Các loại hàm số:

a) Hàm đơn điệu: Cho hàm f xác định trên (a,b).

Hàm f được gọi là tăng nếu với x_1, x_2 thuộc (a,b), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. f được gọi là giảm nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Các hàm số tăng hoặc giảm gọi chung là các hàm số có tính đơn điệu.

b) Hàm chẵn, hàm lẻ: Cho hàm f xác định trên tập X. Hàm f được gọi là hàm chẵn nếu $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X, f(-x) = f(x)$. Hàm f được gọi là hàm lẻ nếu $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X, f(-x) = -f(x)$.

Hàm chẵn có đồ thị đối xứng qua trục tung, hàm lẻ có đồ thị đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

c) Hàm bị chặn:

- Ta gọi hàm số $y = f(x)$ là bị chặn trên trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số $M \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$.

- Ta gọi hàm số $y = f(x)$ là bị chặn dưới trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số $N \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \ge N$ với mọi $x \in D$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại số $0 < M \in \mathbb{R}$ sao cho $\left|f(x)\right| \le M$ với mọi $x \in D$.

Ví dụ

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là các hàm số bị chặn vì $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mà $\left|\sin x\right| \le 1$, $\left|\cos x\right| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Còn hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là hàm số không bị chặn trong khoảng $(0, +\infty)$.

d) Hàm tuần hoàn

Giả sử hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ xác định trên tập hợp số thực X. Nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in X$ ta đều có: $x + T \in X \,\&\, f(x+T) = f(x)$ (1) thì f gọi là một hàm số tuần hoàn.

Từ đẳng thức trên suy ra: Với mọi $x \in X$ thì $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots$

Nếu trong tập hợp các số $T > 0$ thỏa mãn đẳng thức (1) có số nhỏ nhất thì số đó được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f.

Ví dụ

Các hàm số $f(x) = \sin x$ & $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là những hàm số tuần hoàn có chu kì 2π, hàm số $h(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ có chu kì π.

3. Hàm số sơ cấp

Ta gọi các hàm số gồm: hàm hằng, hàm luỹ thừa, hàm số mũ, hàm logarit, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược là các ***hàm số sơ cấp cơ bản***.

Ta gọi các hàm cho bởi một công thức duy nhất, trong đó có hữu hạn phép toán hàm (tổng, hiệu, tích, thương và hợp hàm) tác động lên một số hữu hạn các hàm sơ cấp cơ bản là các ***hàm số sơ cấp***.

Sau đây là một số hàm số sơ cấp cơ bản.

a) Hàm số mũ $y = a^x$, với $1 \neq a > 0$.

Hàm mũ có miền xác định là $\mathbb{R}$*, miền giá trị là* $(0, +\infty)$*. Nếu* $a > 1$ *thì hàm đồng biến,* $0 < a < 1$ *thì hàm nghịch biến.*

b) Hàm số lôgarit $y = \log_a x$, *với* $1 \neq a > 0$.

Hàm lôgarit có miền xác định là $(0, +\infty)$*, miền giá trị là* $\mathbb{R}$*. Nếu* $a > 1$ *thì hàm đồng biến* $0 < a < 1$ *thì hàm nghịch biến. Hàm lôgarit* $y = \log_a x$ *là hàm số ngược của hàm số mũ* $y = a^x$.

c) Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

• *Nếu* α *- là* ***số hữu tỷ*** *thì miền xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào* α*. Chẳng hạn* $y = x^{\frac{1}{2}}$ *có miền xác định là* $(0, +\infty)$*; nhưng hàm số* $y = x^{-\frac{1}{3}}$ *có miền xác định lại là:* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• *Nếu* α *- là* ***số vô tỷ dương*** *thì ta quy ước miền xác định là* $[0, +\infty]$.

• *Nếu* α *- là* ***số vô tỷ âm*** *thì ta quy ước miền xác định của nó là* $(0, +\infty)$.

d) Các hàm số lượng giác.

• $y = \sin x$ *có miền xác định* $\mathbb{R}$*, miền giá trị* $[-1, 1]$*, là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

• $y = \cos x$ *có miền xác định* $\mathbb{R}$*, miền giá trị* $[-1, 1]$ *là hàm chẵn, tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

• $y = \tan x$ *có miền xác định:* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, *miền giá trị* $\mathbb{R}$, *là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* π.

• $y = \cot x$ *có miền xác định:* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *miền giá trị* $\mathbb{R}$, *là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* π.

e)Các hàm số lượng giác ngược.

- *Hàm* $y = \arcsin x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \sin x$
- *Hàm* $y = \arccos x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \cos x$
- *Hàm* $y = \arctan x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \tan x$
- *Hàm* $y = \operatorname{arc}\cot x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \cot x$

Tóm tắt định nghĩa của các hàm số ngược:

Hàm số lượng giác ngược	Miền xác định	Miền giá trị
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arc}\cot x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	$0 \leq y \leq \pi$

II. Giới hạn hàm một biến:

1. Giới hạn hàm một biến:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a,b) có thể trừ điểm $x_0 \in (a,b)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là A khi $x \to x_0$ nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ và ta viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

2. Giới hạn một phía:

Nếu $x < x_0$ *mà* $x \to x_0$ *thì ta quy ước viết* $x \to x_0^-$ *và nếu* $x > x_0$ *mà* $x \to x_0$ *thì ta quy ước ta viết* $x \to x_0^+$.

a) Giới hạn bên trái

Số L *được gọi là giới hạn trái của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to x_0^-$ *nếu* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$0 < x_0^- - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. *Khi đó viết* $L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$.

b) Giới hạn bên phải

Số L *được gọi là giới hạn phải của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to x_0^+$, *nếu* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$0 < x - x_0^+ < \delta \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$. *Khi đó viết* $L = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

3. Các tính chất:

Tính chất 1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *khi và chỉ khi với mọi dãy* $\{x_n\} \subset (a,b)$ *sao cho* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ *đều có* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Tính chất 2: *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$ *thì*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = A \pm B$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = AB$;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$;

(iv) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$ $(B > 0)$.

Tính chất 3:
Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ & $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

4. Một số giới hạn cơ bản:

1	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	2	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	3	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$
4	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	5	$\lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$	6	$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$
7	$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$	8	$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$	9	$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,cot} x = 0$
10	$\lim\limits_{x \to -\infty} arc\cot x = \pi$	11	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty, (a > 1)$	12	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0, (a > 1)$
13	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $(0 < a < 1)$	14	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $(0 < a < 1)$	15	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $(a > 1)$
16	$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, $(a > 1)$	17	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $(0 < a < 1)$	18	$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ $(0 < a < 1)$

19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$
22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	24	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0\,(\alpha>0)$
25	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^p}{e^x}=0$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$	27	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
28	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}.$				

5. Vô cùng bé, vô cùng lớn:

a) Vô cùng bé: Hàm $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

b) Vô cùng lớn: Hàm $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng lớn khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty.$

c) So sánh hai vô cùng bé

Xét hai vô cùng bé $f(x)$ *và* $g(x)$ $\left(\textit{khi } x\to x_0 \textit{ hay } x\to\infty\right)$.

i) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ *thì ta nói* $f(x)$ *là vô cùng bé bậc cao so với* $g(x)$ *(nghĩa là* $f(x)$ *dần tới* 0 *nhanh hơn* $g(x)$ *đến nỗi tỷ số* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *vẫn còn dần tới 0)*

ii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$ *thì ta nói* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là vô cùng bé cùng bậc .*

iii) Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ thì $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai (VCB) tương đương, ký hiệu là : $f(x)\sim g(x)$.

Chú ý: Nếu $\alpha(x)$ là vô cùng bé khi $x\to x_0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là vô cùng lớn khi $x\to x_0$.

d) So sánh các vô cùng lớn:

Xét hai vô cùng lớn $f(x)$ *và* $g(x)$ $(\textit{khi } x\to x_0 \textit{ hay } x\to\infty)$

i) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=+\infty$ *thì ta nói* $f(x)$ *là vô cùng lớn bậc cao so với* $g(x)$.

ii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = k \neq 0\,(k = const)$ *thì ta nói* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai vô cùng lớn cùng bậc.*

iii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 1$ *thì* $f(x)$ *và* $g(x)$ *được gọi là hai vô cùng lớn tương đương,*

ký hiệu là: $f(x) \sim g(x)$.

e) Ứng dụng thay các vô cùng bé, vô cùng lớn trong tính giới hạn *Giả sử* $f(x),\ F(x),\ g(x),\ G(x)$ *là các vô cùng bé (hay các vô cùng lớn)) đồng thời khi* $x \to a$

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(x) \sim F(x) \\ g(x) \sim G(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x).G(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{F(x)}{G(x)} \end{cases}$$

Ví dụ:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên $\sin x \sim x$ khi $x \to 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right) = 2$ nên $x-1$ và $\sqrt{x}-1$ là hai vô cùng bé cùng cấp khi $x \to 1$.

(c) Cho $\alpha > \beta > 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-\beta} = 0$ nên x^α là vô cùng bé cấp cao hơn vô cùng bé x^β khi $x \to 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ nên e^x là vô cùng lớn cấp cao hơn x khi $x \to \infty$.

Một số vô cùng bé tương đương:

1	$\sin x \sim x$	khi $x \to 0$
2	$\tan x \sim x$	khi $x \to 0$
3	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	khi $x \to 0$
4	$\arcsin x \sim x$	khi $x \to 0$
5	$\arctan x \sim x$	khi $x \to 0$
6	$e^{ax}-1 \sim ax$	khi $x \to 0$
7	$a^x-1 \sim x\ln a$	khi $x \to 0$

8	$\ln(1+ax) \sim ax$	khi $x \to 0$
9	$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$	khi $x \to 0$ và $\alpha > 0$
10	$(\alpha \pm \beta \pm \gamma) \sim \alpha$	α, β, γ là các (VCB) khi $x \to a$ và α là (VCB) bậc thấp nhất (Quy tắc **ngắt bỏ (VCB) bậc cao**)
11	$(A \pm B \pm C) \sim A$	A, B, C là các (VCL) khi $x \to a$ và A là (VCL) bậc cao nhất (Quy tắc **ngắt bỏ (VCL) bậc thấp**)

III. Hàm một biến liên tục:

1. Hàm số liên tục: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ta nói hàm f liên tục trái tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ta nói hàm f liên tục phải tại x_0.

2. Các tính chất:

Tính chất 1: *Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nếu và chỉ* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại x_0 thì được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Tính chất 2: *Nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại x_0 thì các hàm sau đây cũng liên tục tại x_0.*

(i) $f(x) \pm g(x)$;

(ii) $f(x)g(x)$;

(iii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$;

(iv) $f(x)^{g(x)}$ $(g(x) > 0)$.

Tính chất 3: *Nếu hàm $f(x)$ liên tục tại x_0, hàm $g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì hàm $g(f(x))$ liên tục tại x_0.*

Hàm số liên liên tục trên khoảng.

Hàm số liên tục trên khoảng (a,b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó. Hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và liên tục trái tại b liên tục phải tại a.

Tính chất 4: *Nếu hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó và do đó có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.*

Lưu ý: Các hàm sơ cấp liên tục trên tập xác định của nó.

B. Bài tập:

I. Bài tập có lời giải:

1. Bài tập giới hạn:

1. Chứng minh: a) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=13$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

<u>Giải</u>

$$a)\quad \left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right| = \left|\frac{4x^2-1-13(2x-1)}{2x-1}\right| = \left|\frac{(2x-1).(2x+1)-13(2x-1)}{(2x-1)}\right|$$

$$=\left|\frac{\cancel{(2x-1)}(2x+1-13)}{\cancel{(2x-1)}}\right| = \left|2x-12\right| = 2\left|x-6\right| \Rightarrow \left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right|<\varepsilon \Leftrightarrow 2\left|x-6\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|x-6\right|<\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\delta} \Rightarrow \left|x-6\right|<\delta \Rightarrow \left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}=13, \text{ (đpcm).}$$

b) Cho $\varepsilon>0$ bé tùy ý. Ta có: $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \ hay\ \dfrac{1}{|x|}<\varepsilon \Rightarrow |x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ do đó nếu lấy

$M=\dfrac{1}{\varepsilon}\in\mathbb{R}$ thì với mọi x thỏa mãn điều kiện $|x|>M \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

c) Với một số $A>0$ cho trước bất kỳ, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}>A \Leftrightarrow |x-1|>\dfrac{1}{\sqrt{A}}$. Chọn

$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ ta được $f(A)>0$ với mọi x mà $0<|x-1|<\delta \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

2. Chứng minh hàm số $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

<u>Giải</u>

Nếu chọn hai dãy số có số hạng tổng quát : $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ & $x'_n=\dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ chúng ta suy ra: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$, mặt khác chúng ta lại có:

$\bullet \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$

$\bullet \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x'_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{1}{\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$

Như vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x'_n\right) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $I_a = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$, b) $I_b = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{2x}$,

c) $I_c = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x^2}$

Giải

Vì: a), b) không thuộc dạng vô định nào, nên ta có:

$a)\ I_a = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3} = \dfrac{4+5}{4-3} = 9.$

$b)\ I_b = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{2x} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+1}}{2.1} = \dfrac{\cancel{2}.\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}.$

c) Vì : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$, còn $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, nên $I_c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}$.

Theo kiến thức về hàm số mũ a^x đã biết thì khi cơ số $0 < a < 1$ thì $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$,

Do đó $I_c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$

5. Tính các giới hạn sau:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Giải:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = \dfrac{0}{1} = 0, (chia\ cho\ x^3)$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1$ (chia cho $\sqrt{x}$)

6. Tính các giới hạn sau:

$a)\ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6};\quad b)\ \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Giải:

$$a)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+x)}{\cancel{(x+2)}(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x}{x-3}=\frac{(-2)^2-2}{-2-3}$$

$$=\frac{4-2}{-5}=-\frac{2}{5}.$$

$$b)\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(1-x)}(x+2)}{\cancel{(1-x)}(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=\frac{-3}{3}=-1$$

.7. Tìm giới hạn:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Giải:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

8. Tính $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$.

Giải

$$I=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{x^2\ (\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{2-(1+\cos x)}{x^2\ (\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{2}{4}.1.\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

9. Tìm các giới hạn sau:

$a)\ I_a = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}}$; $b) I_b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$; $c)\ I_c = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

Giải:

$$a)\ I_a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right) = \frac{1}{2}\ \&\ \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow I_a = \frac{1}{2}.$$

$$b) I_b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$$

$$c)\ I_c = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right]^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}} = e^2.$$

10. Tìm các giới hạn sau:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

Giải:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a+x}{a}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a\,\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}$$

$$b)\ \lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}-1\right)}{x-e}$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}} = \frac{1}{e}.$$

11. Tìm các giới hạn sau:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$

Giải:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x} = \frac{2}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}-\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2.\left(e^{\sin 2x}-1\right)}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2.1-1.1=2-1=1.$$

12. Bằng cách thay thế các vô cùng bé tương đương tính các giới hạn sau:

$$a)\ I_a=\lim_{x\to 0}\frac{7x+\sin^2 x}{\sin 5x-x^3};b)\ I_b=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt[5]{1+15x}-1};$$

$$c)\ I_c=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3+3x)}{\ln(1+7x)};\ d)\ I_d=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^{2014}x}+\sqrt[6]{1+6x^2}-2}{\ln(1+\tan^2 x)}.$$

Giải:

$$a)\ I_a=\lim_{x\to 0}\frac{7x+\sin^2 x}{\sin 5x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cancel{x}}{5\cancel{x}}=\frac{7}{5}.$$

$$b)\ I_b=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt[5]{1+15x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.4.\cancel{x}}{\frac{1}{5}.15.\cancel{x}}=\frac{2}{3}.$$

$$c)\ I_c=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3+3x)}{\ln(1+7x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x}}{7\cancel{x}}=\frac{3}{7}.$$

$$d)\ I_d=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^{2014}x}+\sqrt[6]{1+6x^2}-2}{\ln(1+\tan^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\arcsin^{2014}x}-1\right)+\left(\left(1+6x^2\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)}{\ln(1+\tan^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^{2014}x}-1}{\ln(1+\tan^2 x)}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+6x^2\right)^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+\tan^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^{2014}x}{\tan^2 x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{6}.x^2}{\cancel{6}}}{\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2014}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}x^{2012}+\lim_{x\to 0}1=0+1=1.$$

13. Tính $I=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Giải:

- $I = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \sqrt{(-\infty)^2+1} - (-\infty) = \sqrt{(+\infty)+1} + \infty = +\infty,\ (+)$

- $I = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \dfrac{1}{+\infty} = 0\ (++)$

14. Tính $I = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

Giải:

$(\circ)\ I = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+0}} = 2.$

$(\circ\circ)\ I = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1+0}} = -2$

15. Tính $I = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x}$

Giải:

Vì : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x} = \dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}\left|\sin 2x\right|}{x}$. Do đó :

- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sqrt{2}\sin 2x}{x} = -2\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 2x}{2x} = -2\sqrt{2}\ (*)$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2}\sin 2x}{x} = 2\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2\sqrt{2}\ (**)$

2. Bài tập về hàm liên tục:

1. Chứng minh rằng các hàm số $a)\ y = x^2,\ b)\ y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$.

Giải

$a)\ \forall\varepsilon>0,\ x_0\in\mathbb{R}: \left|x^2-x_0^2\right| = \left|(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)\right|^2 \le \left|x-x_0\right|^2 + 2\left|x_0\right|\left|x-x_0\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|x-x_0\right|^2 + 2\left|x_0\right|\left|x-x_0\right| - \varepsilon < 0\ (1).$ Đặt

$t = \left|x-x_0\right| \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 + 2\left|x_0\right|t - \varepsilon < 0\ (2)$

$\Delta' = \left|x_0\right|^2 + \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon} \Rightarrow t_{1,2} = -\left|x_0\right| \pm \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}.$

với $t < -\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}$ thì thỏa mãn (2), nên $\left|x - x_0\right| < -\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}$

Lại đặt: $-\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon} = \delta > 0$ thì $\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$ nên hàm số

$y = x^2$ liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$.

$b)$ $\forall \varepsilon > 0$ & $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có: $\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right| = \dfrac{\left|x - x_0\right|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x.x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}$

$$= \frac{\left|x - x_0\right|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} \le \frac{\left|x - x_0\right|}{\frac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}} < \varepsilon \Rightarrow \left|x - x_0\right| < \frac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}.\varepsilon.$$

Đặt: $\delta = \dfrac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}.\varepsilon \Rightarrow \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_o}\right| < \varepsilon$ nên hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại điểm $x = x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & khi\ x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & khi\ x \neq 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số trên tại điểm $x = 0$.

<u>Giải</u>

- $f(0) = \dfrac{1}{6}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x} - 1) - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = f(0).$

3. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ \sqrt{2} & khi\ x = 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$.

<u>Giải</u>

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2}\left|\sin x\right|}{\sin x}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x + \dfrac{\sqrt{2}\,\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right) = \sin 0 + \sqrt{2} = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{2}\,\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right) = \sin 0 - \sqrt{2} = 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

Vì: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{2} \neq -\sqrt{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=0$.

4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 1 & khi\ x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$.

Giải

Chọn hai dãy điểm $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ với $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ & $x'_n = \dfrac{2}{\pi(1+4n)}$. Khi đó ta có:

Chọn hai dãy điểm $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ với $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ & $x'_n = \dfrac{2}{\pi(1+4n)}$. Khi đó ta có:

- $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0$, (1)

- $x'_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{\dfrac{2}{\pi(1+4n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$, (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ không tồn tại, nên hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm $x = 0$.

5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x-1} & khi\ \ x \neq 1 \\ -\pi & khi\ \ x = 1 \end{cases}$.

Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Giải

- Nếu $x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ là hàm liên tục nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, (1).

- Tại $x = 1 \Rightarrow f(1) = -\pi$.

Đặt:

$$t = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ (x \to 1) \Rightarrow t \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{t}$$

$= \pi \lim\limits_{\pi t\to 0} \dfrac{\sin(\pi+\pi t)}{\pi t} = -\pi \lim\limits_{\pi t \to 0} \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} = -\pi.1 = -\pi = f(1) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$, (2). Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

6. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & khi\ x < 1 \\ 5 & khi\ x = 1 \\ 2x - 3b & khi\ x > 1 \end{cases}$, với a, b là các tham số thực.

Tìm các giá trị a và b để $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Giải

$+$ Khi $x = 1 \Rightarrow f(1) = 5$ (1)

$+ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3$ (2)

$+ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x - 3b) = 2 - 3b$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b + 3 = 2 - 3b = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 3 = 5 \\ -3b + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

7. Cho $f(x) = \begin{cases} e^x & khi\ x < 0 \\ a + x & khi\ x \ge 0 \end{cases}$. Chọn a như thế nào để $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Giải

- Miền xác định của $f(x)$ là toàn bộ $\mathbb{R}$.
- Nếu $x < 0 \Rightarrow f(x) = e^x$ là một hàm liên tục $\forall x \in (-\infty, 0)$, (1)
- Nếu $x > 0 \Rightarrow f(x) = a + x$ là một hàm liên tục $\forall x \in (0, +\infty)$, (2)
- Tại $x = 0 \Rightarrow f(0) = a$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^o = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (a + x) = a$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a=1.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ với $a=1$ thì hàm số đã cho liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

II. Bài tập không lời giải:

Câu 1: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{3x-2}}{x-1}.$$

Câu 2: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}.$$

Câu 3: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}.$$

Câu 4: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{x\sin x}.$$

Câu 5: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}.$$

Câu 6: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}.$$

Câu 7: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Câu 8: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3\sin x}{x-\sin x}}.$$

Câu 9: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Câu 10: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x.$$

Câu 11: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2-4x+3}\right).$$

Câu 12: Tìm giới hạn sau

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3}\right).$$

Câu 13: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{khi } \; x\geq 1, \\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}} & \text{khi } \; x<1, \end{cases}$$

tại điểm $x=1$.

Câu 14: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x-\sin 3x}{x} & \text{khi } \; x>0, \\ x^2-2x+2 & \text{khi } \; x\leq 0, \end{cases}$$

tại điểm $x=0$.

Câu 15: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1, \\ 4 & \text{khi } x=1. \end{cases}$$

Câu 16: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases} 7-x & \text{khi } \; x\leq 3, \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{khi } \; x>3. \end{cases}$$

Câu 17: Tìm $a \in \mathbb{R}$ để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{khi } \ x \neq 0, \\ a & \text{khi } \ x = 0, \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 0$.

Câu 18: Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & \text{khi } \ x < 1, \\ 5 & \text{khi } \ x = 1, \\ 2x - 3b & \text{khi } \ x > 1, \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 1$.

Câu 19: Tìm $a \in \mathbb{R}$ để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^2 - 1\right)\sin\dfrac{\pi}{x-1} & \text{khi } \ x \neq 1, \\ a & \text{khi } \ x = 1, \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 20: Tìm $a \in \mathbb{R}$ để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } \ x > 2, \\ ax + \dfrac{1}{4} & \text{khi } \ x \leq 2, \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.