# BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Bộ môn Đại số và Xác suất Thống kê

4-2020

### Chú ý đối với sinh viên

1. Các bài tập được tập hợp trong tài liệu này sẽ được sử dụng chung trong các giờ bài tập của học phần ĐSTT cho các lớp hệ 2 tín chỉ và hệ 3 tín chỉ.
2. Yêu cầu về việc chuẩn bị bài tập cho từng tuần sẽ được giảng viên thông báo trực tiếp cho sinh viên.
3. Để thực hiện tốt các bài tập được đề nghị sinh viên cần phải ghi nhớ chắc chắn các nội dung lý thuyết được giảng dạy trên lớp, tham khảo và vận dụng tốt những phương án xử lý trong các ví dụ mẫu của sách giáo khoa.

## PHẦN I: ĐỀ BÀI

### 1. Ma trận và định thức

**Bài 1.1.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Tính $A^{567}$.
b) Tính $\det(A^{576} + 2A^{567} + 3A^{675})$.

**Bài 1.2.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Tính $A^{2018}$.
b) Tính $\det(2A^{2017} - 3A^{2018} + 4A^{2019})$.

**Bài 1.3.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Tính $A^{200} + A$.

**Bài 1.4.** Cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -22 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $A^2$, $A^{2018}$ và $A^{2019}$.
b) Cho $n$ là số nguyên dương. Hãy tính theo $n$ định thức của ma trận $B$ với $B = A^{2018} + 3A^n$.

**Bài 1.5.** Cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $A^2$, $A^{2018}$ và $A^{2019}$.
b) Cho $m, n$ là hai số nguyên dương. Hãy tính theo $m, n$ định thức của ma trận $B$ với $B = 5A^m + 7A^n$.

**Bài 1.6.** Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x & x \\ x & 3 & 3 & x \\ x & x & 3 & 3 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$

**Bài 1.7.** Giải phương trình: $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

**Bài 1.8.** Tính giá trị của định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

**Bài 1.9.** Cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $\det(A^4 + 3A^3)$.
b) Tính hạng của ma trận $A + 5I$.

**Bài 1.10.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $\det(AB)$ và $\det(BA)$.
b) Tính hạng của ma trận $BA + 4I$.

**Bài 1.11.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $\det(A^3B^2 + 4A^2B^3)$.
b) Tính $(A + 2B)^2 - 19(A + 2B)$.

**Bài 1.12.** Cho các ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định giá trị của $\det(AB)$.

**Bài 1.13.** Cho các ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định giá trị của $\det(A^2B - 3AB^2)$.

**Bài 1.14.** Cho các ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy xác định giá trị của $\det(A^3B^2 - 3A^2B^3)$.
b) Tính hạng của ma trận $A + 3B$.

**Bài 1.15.** Cho các ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng ma trận $A^3B^2 + 3A^2B^3$ khả nghịch.
b) Tính hạng của ma trận $A^2B - 2AB^2$.

**Bài 1.16.** Tính nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.17.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
a) Tính $A^3 - 8A^2 + 17A$.
b) Tính $A^{-1}$.

**Bài 1.18.** Tìm $x$ để ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & x \\ b & b & x & x \\ c & c & c & x \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

với $a, b, c, d$ là các số cho trước.

**Bài 1.19.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $x$ để $A^4 - 3A^3$ là một ma trận khả nghịch.

**Bài 1.20.** Tìm $x$ để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & x & -2 & -2 \\ x & x & x & -1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.21.** Tìm $x$ để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & x & -2 & -2 \\ -2 & -2 & x & x \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.22.** Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.23.** Giải phương trình ma trận

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.24.** Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.25.** Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.26.** Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.27.** Tính hạng của ma trận sau theo $x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.28.** Tính hạng của ma trận sau theo $x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & x \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.29.** Tính hạng của ma trận sau theo $x$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \end{pmatrix}.$$

**Bài 1.30.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $x$ biết $r(A) = 2$.

## 2. Hệ phương trình

**Bài 2.1.** Giải hệ phương trình sau theo phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 26 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 = -37 \end{cases}$$

**Bài 2.2.** Giải hệ phương trình sau theo phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 - 8x_5 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 7 \end{cases}$$

**Bài 2.3.** Giải hệ phương trình sau theo phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 14 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$$

**Bài 2.4.** Giải hệ phương trình sau theo phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$$

**Bài 2.5.** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 23 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases}$$

**Bài 2.6.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Tìm giá trị của $\lambda$ để hệ có nghiệm duy nhất.
b) Giải hệ khi $\lambda = 2$.

**Bài 2.7.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $\lambda$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 13 \\ 8x_1 - 6x_2 + \lambda x_3 + 18x_4 = 26 \end{cases}$$

**Bài 2.8.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $\alpha$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + (\alpha + 5)x_4 = 3 \end{cases}$$

**Bài 2.9.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

Xác định $\lambda$ để hệ trên có nghiệm. Giải hệ với $\lambda$ tìm được.

**Bài 2.10.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ 6x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = \lambda \end{cases}$$

Xác định $\lambda$ để hệ trên có nghiệm. Giải hệ với $\lambda$ tìm được.

**Bài 2.11.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = \lambda \end{cases}$$

a) Tìm $\lambda$ để hệ được cho có nghiệm.
b) Giải hệ thuần nhất tương ứng với hệ được cho.

**Bài 2.12.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 + 8x_4 = \lambda \end{cases}$$

a) Tìm $\lambda$ để hệ được cho có nghiệm.
b) Giải hệ thuần nhất tương ứng với hệ được cho.

**Bài 2.13.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 = 6 \end{cases}$$

Giải hệ với $\lambda \neq -2$.

**Bài 2.14.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 9x_2 - 7x_3 + \lambda x_4 = 8 \end{cases}$$

Giải hệ với $\lambda \neq 8$.

**Bài 2.15.** Xác định nghiệm của hệ phương trình sau theo tham số $\lambda$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

**Bài 2.16.** Xác định nghiệm của hệ phương trình sau theo tham số $\lambda$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

## 3. Không gian tuyến tính

**Bài 3. 1.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, -1), \quad a_2 = (3, 2, 1), \quad a_3 = (-1, 1, 3).$$

Chứng minh rằng phần tử $x = (7, 7, 3)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 2.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, -2), \quad a_2 = (3, -4, 1), \quad a_3 = (-3, 2, 1).$$

Chứng minh rằng phần tử $x = (5, -6, 1)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 3.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 2, 3), \quad a_2 = (3, 1, -1), \quad a_3 = (5, 3, 1).$$

Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính của phần tử $x = (2, 3, 4)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 4.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (2, 3, -1)$ $a_3 = (3, -1, 2)$, $a_4 = (2, 8, -2)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của $a_4$ trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

**Bài 3. 5.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1, 2, -2)$, $a_2 = (2, -1, 3)$ $a_3 = (3, 1, 4)$, $a_4 = (5, 5, 3)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của $a_4$ trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

**Bài 3.6.** Tìm $\lambda$ để $x = (1, 4, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = (1, 1, -2); \;\; a_2 = (2, -3, 1); \;\; a_3 = (-1, -3, 4).$$

**Bài 3.7.** Tìm $\lambda$ để $x = (2, 3, 2, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 1, 2, 2); \;\; a_2 = (2, 3, 1, 4); \;\; a_3 = (3, 4, 2, 3).$$

**Bài 3.8.** Tìm $\lambda$ để $x = (4, 12, -7, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 1, -1, -2); \;\; a_2 = (1, 2, -3, -1);$$
$$a_3 = (1, -1, 4, 2), \;\; a_4 = (1, 3, 2, 1).$$

**Bài 3. 9.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (-2, 1, 1), \;\; a_2 = (1, -2, 1), \;\; a_3 = (1, 1, 2).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của phần tử $x = (1, 3, -2)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 10.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 2, -1, 1), \; a_2 = (1, -2, 2, 1), \; a_3 = (1, 1, -1, 1).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của phần tử $x = (4, 6, -1, 3)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 11.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, -1, -1), \;\; a_2 = (1, 2, 3), \;\; a_3 = (2, 1, \lambda),$$

trong đó $\lambda$ là tham số.
a) Tìm các giá trị của $\lambda$ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.
b) Thay $\lambda = 1$, hãy tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của phần tử $x = (4, 2, 3)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 3. 12.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 1),\ a_2 = (1, 2, 3),\ a_3 = (2, 1, 4).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ có là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ hay không? Tại sao?

**Bài 3. 13.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với
$a_1 = (1, 2, 1, 2),\ a_2 = (1, 2, -1, 1),$
$a_3 = (2, 1, 3, 1),\ a_4 = (1, 3, -2, 2).$
a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ hay không? Tại sao?

**Bài 3. 14.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với
$a_1 = (1, 1, -1, 2),\ a_2 = (2, 3, -1, 1),$
$a_3 = (-1, 1, 1, 3),\ a_4 = (2, 2, 5, 6).$
a) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính hay là hệ phụ thuộc tuyến tính?
b) Cho $b \in \mathbb{R}^4$ là một phần tử nào đấy. Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b\}$ là hệ độc lập tuyến tính hay là hệ phụ thuộc tuyến tính?

**Bài 3.15.** Xác định giá trị của $\lambda$ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ được cho dưới đây là hệ phụ thuộc tuyến tính:

$$a_1 = (2, 3, -2, 3),\ a_2 = (2, -1, 2, 1),\ a_3 = (1, 1, 1, \lambda).$$

**Bài 3. 16.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2, 1, 2, 3),\ a_2 = (1, 4, 1, 5),\ a_3 = (3, -2, 3, \lambda).$$

a) Tìm $\lambda$ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.
b) Với $\lambda$ tìm được hãy xác định biểu diễn tuyến tính của $a_2$ theo hệ $\{a_1, a_3\}$.

**Bài 3.17.** Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (10, 9, 9)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = (1, 1, 2);\ a_2 = (1, 2, 3);\ a_3 = (3, 1, -1).$$

**Bài 3.18.** Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (8, 8, 19, 19)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:
$a_1 = (1, 1, 2, 3);\ a_2 = (2, 1, 3, 4);$
$a_3 = (2, 3, -2, 1);\ a_4 = (1, 3, 3, 1).$

**Bài 3.19.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho $M$ là không gian con hai chiều có cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (1, 2, -2),\quad u_2 = (2, 2, -1).$$

Cho các phần tử $u = (4, 7, 2),\ v = (1, 3, 5)$. Hãy xác định số thực $\lambda$ sao cho $u - \lambda v \in M$.

**Bài 3.20.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là không gian con hai chiều có cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (2, 1, -1, 1),\quad u_2 = (1, 2, 3, -1).$$

Cho các phần tử $u = (0, 1, 1, 3),\ v = (1, 1, 1, -1)$. Hãy xác định số thực $\lambda$ sao cho $u - \lambda v \in M$.

**Bài 3.21.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là không gian con ba chiều có cơ sở là $\{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (1, 2, -1, 1),\ u_2 = (2, 1, 3, 2),\ u_3 = (-1, 2, 1, 2).$$

Hãy xác định số thực $\lambda$ biết rằng phần tử $x = (2, 5, 3, \lambda)$ nằm trong $M$.

**Bài 3.22.** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các tập con $M$ và $N$ như sau

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\},$$
$$N = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 \geq 0\}.$$

Hãy cho biết trong các tập con trên, tập con nào là một không gian con của $\mathbb{R}^3$. Ứng với mỗi tập con là không gian con của $\mathbb{R}^3$, hãy xác định một cơ sở và số chiều của nó.

**Bài 3.23.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$, không gian con $M$ được xác định bởi

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở và số chiều của $M$.

**Bài 3.24.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho không gian con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$$

và phần tử $w \in M$ với $w = (1, 5, 1, 1)$. Hãy xác định một cơ sở và số chiều của $M$ và cho biết tọa độ của $w$ trên cơ sở được đưa ra.

**Bài 3.25.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và véc tơ $x$ có tọa độ trong cơ sở $(a)$ là $[x]_a = (1, 2, -3)$. Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x$ trong cơ sở mới $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, biết ma trận chuyển từ cơ sở $(a)$ sang cơ sở $(b)$ là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 3.26.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho hai hệ cơ sở $(a)$ và $(b)$ với ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$ là

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cho biết phần tử $x$ có tọa độ trong cơ sở thứ nhất $(a)$ là $[x]_a = (2, 4, 5)$. Hãy tính tọa độ $[x]_b$ của phần tử $x$ trong cơ sở thứ hai $(b)$.

**Bài 3.27.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3,\ b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3,\ b_3 = 4a_1 + 5a_2 + a_3.$$

Cho biết phần tử $x$ có tọa độ trong cơ sở thứ nhất $(a)$ là $[x]_a = (1, -3, 5)$. Hãy tính tọa độ $[x]_b$ của phần tử $x$ trong cơ sở thứ hai $(b)$.

**Bài 3.28.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho hai hệ cơ sở $(a)$ và $(b)$ với ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$ là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cho biết phần tử $x$ có tọa độ trong cơ sở thứ nhất $(a)$ là $x_a = (1, 4, -2)$. Hãy tính tọa độ $x_b$ của phần tử $x$ trong cơ sở thứ hai $(b)$.

**Bài 3.29.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho hai hệ cơ sở $(a)$ và $(b)$ với ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$ là

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(b)$ sang hệ $(a)$.

**Bài 3.30.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 - a_3,\ b_2 = a_1 + 4a_2 + 2a_3,\ b_3 = 3a_1 - a_2 + a_3.$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(b)$ sang hệ $(a)$.

**Bài 3.31.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (2, -1, 3),\ a_2 = (1, 1, 2),\ a_3 = (2, 1, 4),$$
$$b_1 = (1, 2, 3),\ b_2 = (3, 1, -2),\ b_3 = (-1, 1, 2).$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$.

**Bài 3.32.** Trong không gian tuyến tính ba chiều $U$ cho ba hệ cơ sở $(e)$, $(a)$ và $(b)$. Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $(e)$ sang cơ sở $(a)$ là

$$T_{ea} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

và ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $(e)$ sang cơ sở $(b)$ là

$$T_{eb} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$.

**Bài 3.33.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (3, 1, 4),\ a_2 = (5, -4, 2),\ a_3 = (2, 1, 1),$$
$$b_1 = (3, -2, 3),\ b_2 = (4, 1, -2),\ b_3 = (3, 4, 2).$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(b)$ sang hệ $(a)$.

## 4. Ánh xạ tuyến tính

**Bài 4.1.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 - x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Chứng minh rằng $f$ là một ánh xạ tuyến tính.
b) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

**Bài 4.2.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Chứng minh rằng $f$ là một ánh xạ tuyến tính.
b) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.

**Bài 4.3.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3 + \alpha),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ($\alpha$ là tham số).
a) Hãy xác định $\alpha$ để ánh xạ $f$ là một ánh xạ tuyến tính.
b) Với $\alpha$ tìm được hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

**Bài 4.4.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm ma trận của $f$ trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (2, 1, -1),\ a_2 = (1, -2, 3),\ a_3 = (3, 2, 1).$$

**Bài 4.5.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 - 5x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. a) Chứng minh rằng $f$ là một ánh xạ tuyến tính.
b) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$, biết rằng $a_1 = (0, 4, 0)$, $a_2 = (2, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, -1)$.

**Bài 4.6.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$
b) Xác định $x \in \mathbb{R}^3$ để $f(x) = (6, 2, 6)$.

**Bài 4.7.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - x_4, 3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_3 - 2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.
b) Tìm tất cả $x \in \mathbb{R}^4$ để $f(x) = f(1, 2, 1, 2)$.

**Bài 4.8.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 5x_3, x_1 + 3x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .
a) Cho $u = (1, -1, 2)$. Hãy tìm $x \in \mathbb{R}^3$ để

$$f(x + 2u) + f(2x - u) = (11, -7, 18).$$

b) Cho $u = (2, -1, 2)$. Hãy tìm $x \in \mathbb{R}^3$ để

$$f(x+u)+f(x+2u)+\ldots+f(x+5u) = f(36x+108u).$$

**Bài 4.9.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1+x_2+2x_3, x_1+3x_2+2x_3, 3x_1+3x_2+5x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy chỉ ra rằng ma trận của $f$ trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (1, 1, 2),\ a_2 = (2, 2, -3),\ a_3 = (1, -1, 0)$$

là một ma trận đường chéo.

**Bài 4.10.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1-2x_2+x_3, -2x_1-2x_2+2x_3, -5x_1-10x_2+7x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ $f$.

**Bài 4.11.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1-x_2+2x_3+x_4, 3x_2-x_3+6x_4, 3x_3+5x_4, 3x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ $f$.

**Bài 4.12.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1, -3x_1+2x_2, 5x_1-x_2+2x_3, 2x_1-x_2+4x_3+2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ $f$.

**Bài 4.13.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ $f$.

**Bài 4.14.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ $f$.
c) Hãy xây dựng một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ bao gồm ba véc tơ riêng của $f$.

**Bài 4.15.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.16.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.17.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.18.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.19.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.20.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.21.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng ma trận $A$ không chéo hóa được

**Bài 4.22.** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng ma trận $A$ chéo hóa được.

**Bài 4.23.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận được cho dưới đây. Chứng minh rằng ma trận đó đồng dạng với ma trận chéo và biến đổi ma trận đó về ma trận chéo.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.24.** Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận được cho dưới đây. Chứng minh rằng ma trận đó đồng dạng với ma trận chéo và biến đổi ma trận đó về ma trận chéo.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bài 4.25.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của $A$.
b) Ma trận $A$ có chéo hóa được không? Tại sao? Nếu được hãy tìm ma trận $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 4.26.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của $A$.
b) Ma trận $A$ có chéo hóa được không? Tại sao? Nếu được hãy tìm ma trận $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 4.27.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng ma trận $A$.
b) Ma trận $A$ có đồng dạng với ma trận chéo hay không. Nếu có hãy chỉ ra ma trận chuyển $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 4.28.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng ma trận $A$.
b) Ma trận $A$ có đồng dạng với ma trận chéo hay không. Nếu có hãy chỉ ra ma trận chuyển $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 4.29.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng ma trận $A$.
b) Ma trận $A$ có đồng dạng với ma trận chéo hay không. Nếu có hãy chỉ ra ma trận chuyển $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

## 5. Không gian Euclid (Dành riêng cho hệ 3 tín chỉ)

**Bài 5.1.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị trực giao đồng thời với véc tơ sau:

$$v_1 = (1, 0, 10, 12),\ v_2 = (2, 2, -4, -5),$$
$$v_3 = (3, 11, -4, -1).$$

**Bài 5.2.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ cơ sở trực chuẩn $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = \frac{1}{5}(4, -2, -2, 1)$, $u_2 = \frac{1}{5}(-1, -2, 2, 4)$, $u_3 = \frac{1}{5}(2, 4, 1, 2)$. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể có của $u_4$.

**Bài 5.3.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ cơ sở trực chuẩn $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = \frac{1}{6}(5, 1, 3, 1)$, $u_2 = \frac{1}{6}(-1, 3, -1, 5)$, $u_3 = \frac{1}{6}(-3, -1, 5, 1)$. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể có của $u_4$.

**Bài 5. 4.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với

$$u_1 = (2, 1, -1, -2), \quad u_2 = (1, -2, 3, -2),$$
$$u_3 = (2, 1, -4, 1), \quad u_4 = (-2, 1, -3, 4).$$

Hãy chỉ ra rằng nếu phần tử $x \in \mathbb{R}^4$ nào đấy thỏa mãn $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ thì ta phải có $x \perp u_4$.

**Bài 5. 5.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với

$$u_1 = (2, -1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3, -2),$$
$$u_3 = (2, 2, 3, -3), \quad u_4 = (2, 1, 2, -2).$$

Hãy chỉ ra rằng nếu phần tử $x \in \mathbb{R}^4$ nào đấy thỏa mãn $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ thì ta phải có $x \perp u_4$.

**Bài 5.6.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$$u_1 = (1, -1, 1, 2),\ u_2 = (-2, 1, 2, 3),\ v = (2, \lambda, -1, \mu).$$

Hãy xác định giá trị của $\lambda$ và $\mu$ để $v \perp u_1,\ v \perp u_2$.

**Bài 5.7.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$$u = (1, 3, -2, 2),\ v_1 = (1, 3, 2, -1), v_2 = (0, -1, 1, 1).$$

Hãy xác định $\lambda, \mu$ sao cho $w = u + \lambda v_1 + \mu v_2$ thỏa mãn điều kiện $w \perp v_1,\ w \perp v_2$.

**Bài 5. 8.** Cho M là không gian con hai chiều của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ có cơ sở gồm hai véc tơ $u = (1, -1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2, 1)$. Hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị thuộc $M$ sao cho véc tơ đó trực giao với véc tơ $w = (1, -2, -2, 1)$.

**Bài 5. 9.** Cho M là không gian con hai chiều của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ có một cơ sở gồm hai véc tơ $u = (2, 1, 1, 2)$, $v = (3, 3, 1, 3)$. Hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị thuộc $M$ sao cho véc tơ đó trực giao với véc tơ $w = (1, 2, 3, -2)$.

**Bài 5.10.** Cho M là không gian con của không gian Euclid $\mathbb{R}^5$ có cơ sở gồm hai véc tơ

$$u = (2, 1, 2, 1, 1), \qquad v = (1, 0, -1, 3, -1).$$

Hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị thuộc $M$ sao cho véc tơ đó trực giao với véc tơ $w = (-1, 2, 1, -1, 3)$.

**Bài 5.11.** Trong không gian $\mathbb{R}^5$, cho $M$ là không gian con ba chiều có một cơ sở gồm 3 véc tơ

$$u_1 = (1, -3, -1, 1, 1),\ u_2 = (1, -1, 2, -1, 1),$$
$$u_3 = (-1, 3, -1, -1, -3).$$

Hãy xác định trong $M$ véc tơ có độ dài đơn vị trực giao với cả hai véc tơ $v_1 = (2, 1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 3, 5)$.

**Bài 5.12.** Trong không gian $\mathbb{R}^6$ cho $M$ là không gian con ba chiều có một cơ sở gồm 3 véc tơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1),\ u_2 = (2, -3, 4, 1, 5, 2),$$
$$u_3 = (3, -4, 10, 2, 1, 3).$$

Hãy xác định trong $M$ véc tơ có độ dài đơn vị trực giao với cả hai véc tơ

$$v_1 = (2, -1, 1, 3, 1, -4),\ v_2 = (3, -2, 1, 2, 1, -1).$$

**Bài 5. 13.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm hai véc tơ $u_1 = (1, 2, -3, 3)$; $u_2 = (2, 1, -1, 5)$. Hãy phân tích phần tử $x = (6, 1, 4, 8)$ thành $x = u + v$ trong đó $u \in M$ và $v = M^{\perp}$.

**Bài 5. 14.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho véc tơ $x = (1, 0, -7, 2)$ và cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm 2 véc tơ $u_1 = (1, 2, -3, 2)$, $u_2 = (2, -1, -2, 1)$. Hãy tìm các véc tơ $u, v$ với $u \in M$, $v \in M^{\perp}$ sao cho ta có đẳng thức $x = u + v$.

**Bài 5. 15.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho véc tơ $x = (6, 6, -6, 0)$ và cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm 2 véc tơ $u_1 = (1, 2, -1, 2)$, $u_2 = (2, -1, -2, 1)$. Hãy tìm các véc tơ $u, v$ với $u \in M$, $v \in M^{\perp}$ sao cho ta có đẳng thức $x = u + v$.

**Bài 5.16.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho véc tơ $x = (4, -1, -5, 4)$ và cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm 2 véc tơ $u_1 = (2, -2, -3, 2)$, $u_2 = (1, -1, -2, 1)$. Hãy tìm các véc tơ $u, v$ với $u \in M$, $v \in M^\perp$ sao cho ta có đẳng thức $x = u + v$.

**Bài 5.17.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^5$ cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm 2 véc tơ

$$u_1 = (1, 1, -1, 3, 4);\ u_2 = (2, 3, 1, -3, -14).$$

Hãy phân tích véc tơ $x = (5, -5, 1, -2, -9)$ thành tổng $x = u + v$ với $u \in M$ và $v \in M^\perp$.

**Bài 5.18.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là một không gian con hai chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (3, 1, 1, 1),\ u_2 = (-1, -3, 1, -1).$$

Hãy tìm $x \in M$ sao cho $||x - u_1|| = 6, ||x - u_2|| = 6$.

**Bài 5.19.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là một không gian con hai chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (1, 2, -4, 6),\ u_2 = (1, -6, 2, -4).$$

Hãy tìm $x \in M$ sao cho $||x-u_1|| = 15, ||x-u_2|| = 15$.

**Bài 5.20.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho $M$ là một không gian con hai chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (7, -4, 2, -2),\ u_2 = (-7, 2, -4, 2).$$

Hãy tìm $x \in M$ sao cho $||x-u_1|| = 13, ||x-u_2|| = 13$.

**Bài 5.21.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^5$ cho $M$ là một không gian con hai chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (-1, 2, 3, 7, 1),\ u_2 = (2, -1, -1, -7, 3).$$

Hãy tìm $x \in M$ sao cho $||x-u_1|| = 14, ||x-u_2|| = 14$.

**Bài 5.22.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử $a_1 = (1, 1, 0, 1)$; $a_2 = (1, 0, -1, 1)$ và không gian con

$$L = \{x \in \mathbb{R}^4 | \langle x, a_1\rangle = 0, \langle x, a_2\rangle = 0\}.$$

a) Tìm một cơ sở của $L$.
b) Trực chuẩn hóa hệ gồm các véc tơ $a_1, a_2$ và các véc tơ trong cơ sở của $L$ đã tìm được ở câu ($a$).

**Bài 5.23.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử $a_1 = (1, 2, 3, -1)$; $a_2 = (2, 3, -1, 4)$ và không gian con

$$L = \{x \in \mathbb{R}^4 | \langle x, a_1\rangle = 0, \langle x, a_2\rangle = 0\}.$$

a) Tìm một cơ sở của $L$.
b) Trực chuẩn hóa hệ gồm các véc tơ $a_1, a_2$ và các véc tơ trong cơ sở của $L$ đã tìm được ở câu ($a$).

**Bài 5.24.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử $a_1 = (1, 1, 2, -1)$; $a_2 = (2, 1, -1, 3)$ và không gian con

$$L = \{x \in \mathbb{R}^4 | \langle x, a_1\rangle = 0, \langle x, a_2\rangle = 0\}.$$

a) Tìm một cơ sở của $L$.
b) Trực chuẩn hóa hệ gồm các véc tơ $a_1, a_2$ và các véc tơ trong cơ sở của $L$ đã tìm được ở câu ($a$).

**Bài 5.25.** Trong một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ

$$a_1 = (2, 1, -3, -1),\ a_2 = (3, 1, -1, 2) \text{ và } b = (1, \mu, 0, 2\lambda).$$

a) Tìm $\lambda, \mu$ để véc tơ $b$ trực giao với hai véc tơ $a_1$ và $a_2$.
b) Với $\lambda, \mu$ tìm được, hãy trực giao hóa hệ $\{a_1, a_2, b\}$.

**Bài 5.26.** Trong một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$$a_1 = (1, 1, -3, -1),\ a_2 = (2, 1, -1, 2) \text{ và } b = (2, \gamma, 1, \alpha).$$

a) Tìm $\alpha, \gamma$ để véc tơ $b$ trực giao với hai véc tơ $a_1$ và $a_2$.
b) Với $\alpha, \gamma$ tìm được, hãy trực giao hóa hệ $\{a_1, a_2, b\}$.

**Bài 5.27.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u = (14, 8, 10, 12)$, $v_1 = (1, 3, 1, 5)$, $v_2 = (7, 1, 11, 3)$.
a) Hãy xác định các số $\lambda,\ \mu$ sao cho $w = u + \lambda v_1 + \mu v_2$ trực giao với các véc tơ $v_1, v_2$.
b) Hãy xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ $\{v_1, v_2, w\}$ theo thủ tục Gram–Schmidt.

**Bài 5.28.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u = (6, -10, -4, 17)$, $v_1 = (2, 4, 2, 5)$, $v_2 = (2, 14, 11, 13)$.
a) Hãy xác định các số $\lambda,\ \mu$ sao cho $w = u + \lambda v_1 + \mu v_2$ trực giao với các véc tơ $v_1, v_2$.
b) Hãy xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ $\{v_1, v_2, w\}$ theo thủ tục Gram–Schmidt.

**Bài 5.29.** Bằng phương pháp trực chuẩn hoá Gram–Schmidt hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ từ cơ sở đã cho sau đây:

$$a_1 = (2, -1, 2);\ a_2 = (4, 1, 1);\ a_3 = (-2, 6, -3).$$

Tính tọa độ của phần tử $x = (3, 1, 5)$ trên cơ sở nhận được.

**Bài 5.30.** Bằng phương pháp trực chuẩn hóa Gram–Schmidt hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^4$ từ cơ sở được cho sau đây:

$$a_1 = (1, 0, 1, -1);\quad a_2 = (0, 2, 2, 2);$$
$$a_3 = (5, -2, 3, 2);\quad a_4 = (3, 1, 1, 1).$$

Tính tọa độ của phần tử $x = (1, 2, 5, 6)$ trên cơ sở nhận được.

**Bài 5.31.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}),\quad u_2 = (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}),\ u_3 = (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}).$$

a) Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm tọa độ của phần tử $x = (3, 4, 5)$ trên cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$.

**Bài 5.32.** Giả sử rằng $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ và ta được biết rằng $u_1 = \frac{1}{6}(3, 5, 1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{6}(-5, 3, 1, -1)$, $u_3 = \frac{1}{6}(-1, -1, 3, 5)$. Giả sử phần tử $x = (4, 2, 1, -5)$ có tọa độ trên $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Hãy tính $x_4^2$.

**Bài 5.33.** Giả sử rằng $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ và ta được biết rằng $u_1 = \frac{1}{7}(2, 4, 2, 5)$, $u_2 = \frac{1}{7}(-5, 2, -4, 2)$, $u_3 = \frac{1}{7}(2, 5, -2, -4)$. Giả sử phần tử $x = (2, -3, 1, 5)$ có tọa độ trên $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Hãy tính $x_4^2$.

**Bài 5.34.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^5$ cho $M$ là không gian con ba chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2, u_3\}$ với $u_1 = (1, 1, 1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 0, 3, -2, 1)$,
$u_3 = (-1, 2, 1, -1, 2)$.
Hãy xác định một cơ sở trực chuẩn và số chiều của không gian con $M^\perp$.

**Bài 5.35.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hai véc tơ $u_1 = (2, 1, -2, 2)$; $u_2 = (1, -1, -1, -1)$. Gọi $M$ là tập hợp tất cả các véc tơ của $\mathbb{R}^4$ trực giao với $u_1, u_2$.

a) Chứng minh rằng $M$ là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b) Xác định một cơ sở trực chuẩn của $M$.

**Bài 5.36.** Cho ma trận

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm $x, y, z$ để $Q$ là ma trận trực giao.

**Bài 5.37.** Hãy tìm $x, y, z, t$ để ma trận $Q$ được cho sau đây là ma trận trực giao:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}.$$

**Bài 5.38.** Hãy xây dựng một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ sao cho cơ sở này có chứa hai phần tử như sau

$$u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1);\ u_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1).$$

**Bài 5.39.** Hãy xây dựng một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ sao cho cơ sở này có chứa hai phần tử như sau

$$u_1 = \frac{1}{6}(5, 3, -1, -1);\ u_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 5, -3).$$

**Bài 5.40.** Chéo hóa ma trận đối xứng thực sau đây bằng ma trận trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

## 6. Một số bài tập nâng cao

**Bài 6.1.** Cho $A^2 = A$. Hãy chỉ ra rằng $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$.

**Bài 6.2.** Chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

**Bài 6.3.** Chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

**Bài 6.4.** Tính giá trị định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

**Bài 6.5.** Chứng minh rằng ma trận vuông cấp hai

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

thỏa mãn phương trình

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)I = 0.$$

**Bài 6.6.** Chứng minh rằng nếu $A$ là ma trận thực và $AA^T = \theta$ thì $A = \theta$.

**Bài 6.7.** Cho hai ma trận vuông cấp hai $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Hãy tìm một ma trận khả nghịch $T$ sao cho $TA = BT$.
b) Tính $A^{2011}$.

**Bài 6.8.** Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n$ khả nghịch có ma trận phụ hợp là $A^*$. Hãy chứng minh rằng $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.

**Bài 6.9.** Cho $A$ là một ma trận vuông sao cho $A^4 = 0$. Hãy chứng minh rằng $I + A$ là một ma trận khả nghịch.

**Bài 6.10.** Cho $A$ là một ma trận vuông sao cho $A^{10} = 0$. Hãy chứng minh rằng $I + A^2 + A^5$ là một ma trận khả nghịch.

**Bài 6.11.** Cho $A, B$ là hai ma trận vuông cùng cấp sao cho $(AB)^{10} = I$. Chứng minh rằng $(BA)^{10} = I$.

**Bài 6.12.** Cho $A$ là một ma trận vuông thực cấp ba có ba giá trị riêng thực phân biệt. Hãy chứng minh rằng ma trận $A^3$ cũng có ba giá trị riêng thực phân biệt.

**Bài 6.13.** Cho $A$ là một ma trận vuông thực cấp ba có ba giá trị riêng thực phân biệt. Hãy chứng minh rằng ma trận $A^5 - A^4 + A$ cũng có ba giá trị riêng thực phân biệt.

**Bài 6.14.** Cho $A$ là một ma trận vuông thực cấp $n$ khả nghịch và có $n$ giá trị riêng thực dương phân biệt. Chứng minh rằng ma trận $A^3 + 2A - 3A^{-1}$ cũng có $n$ giá trị riêng thực phân biệt.

**Bài 6.15.** Cho $A$ là một ma trận vuông cấp hai đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy tính giá trị của định thức $\det(A^3 + 3A)$.

**Bài 6.16.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Tính $\det B$ với $B = A^{2004} - A^{1002}$.

**Bài 6.17.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

**Bài 6.18.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**Bài 6.19.** Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận $A$ và $B$ sao cho $AB - BA = I$.

**Bài 6.20.** Cho $A, B$ là hai ma trận vuông cấp $n$ sao cho $r(AB - BA) = 1$. Chứng minh rằng $(AB - BA)^2 = \theta$.

**Bài 6.21.** Cho $A, B$ là các ma trận kích thước $3 \times 2$ và $2 \times 3$. Giả sử rằng tích $A.B$ là

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Bài 6.22.** Cho $A, B$ là các ma trận vuông cấp 3 với các phần tử thực sao cho

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0.$$

Chứng minh rằng $\det(xA + yB) = 0$ với mỗi cặp số thực $x, y$.

**Bài 6.23.** Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n$. Chứng minh rằng nếu $A$ là một ma trận luỹ linh và $B$ là ma trận giao hoán với $A$ thì $I - AB$ và $I + AB$ là các ma trận khả nghịch.

**Bài 6.24.** Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} 2015 & -2014 \\ 2014 & -2013 \end{pmatrix}$. Hãy xác định số nguyên dương $n$ sao cho tồn tại ma trận vuông cấp hai $X$ với các phần tử nguyên để

$$X^{2015} + X^n = 2A.$$

## PHẦN II: ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

### 1. Ma trận và định thức

**1.1**. a) $A^{567} = -A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
b) $A^{576} + 2A^{567} + 3A^{675} = I - 5A$, $\det(A^{576} + 2A^{567} + 3A^{675}) = 26$.
**1.2**. a) $A^{2018} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
b) $2A^{2017} - 3A^{2018} + 4A^{2019} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(2A^{2017} - 3A^{2018} + 4A^{2019}) = 3$.
**1.3**. $A^{200} + A = \theta$.
**1.4**. a) $A^2 = A^{2018} = I,\ A^{2019} = A$.
b) $n = 2k$ thì $\det B = 64$, $n = 2k + 1$ thì $\det B = -32$.
**1.5**. a) $A^2 = A^{2018} = I,\ A^{2019} = A$.
b) Nếu $m, n$ chẵn thì $\det B = 1728$. Nếu $m$ chẵn, $n$ lẻ thì $\det B = -288$. Nếu $m$ lẻ, n chẵn thì $\det B = 288$. Nếu $m, n$ lẻ thì $\det B = -1728$.
**1.6**. $x = \pm 3$.
**1.7**. $x \in \{-1, 1, 2\}$.

**1.8**. $D = 0$.
**1.9**. a) $\det(A^4 + 3A^3) = -61952$.
b) $r(A + 5I) = 3$.
**1.10**. a) $\det(AB) = -36$, $\det(BA) = 0$.
b) $r(BA + 4I) = 3$.
**1.11**. a) $\det(A^3B^2 + 4A^2B^3) = 911.400$.
b) $(A + 2B)^2 - 19(A + 2B) = -70I$.
**1.12**. $\det(AB) = -47$, $(\det A = -47, \det B = 1)$.
**1.13**. $\det(A^2B - 3AB^2) = 15.080.310$.
HD: $\det(A^2B - 3AB^2) = \det A. \det(A - 3B). \det B$.
**1.14**. a) $\det(A^3B^2 - 3A^2B^3) = 122.132.500$.
b) $r(A + 3B) = 3$.
**1.15**. a) $\det(A^3B^2+3A^2B^3) = (\det A)^2 \det(A+3B)(\det B)^2 \neq 0$ vì $\det A = 39, \det B = -51, \det(A+3B) = -1878$. Do đó ma trận $A^3B^2 + 3A^2B^3$ khả nghịch.
b) $\det(A^2B-2AB^2) = \det A. \det(A+3B). \det B \neq 0$ vì $\det A = 39, \det B = -51, \det(A + 3B) = 207$. Do đó $r(A^2B - 2AB^2) = 3$.
**1.16**. $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
**1.17**. a) $A^3 - 8A^2 + 17A = 10I$.
b) $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
**1.18**. Nếu $d = 0$ thì không tồn tại $x$ để $A$ khả nghịch.
Nếu $d \neq 0$ thì $A$ khả nghịch với $x \notin \{a, b, c\}$.
HD: Hãy chỉ ra rằng $\det A = d(a - x)(b - x)(c - x)$.
**1.19**. $x \notin \{0, 3\}$.
HD: Sử dụng đẳng thức $\det(A^4 - 3A^3) = (\det A)^3 \det(A - 3I)$.
**1.20**. $x \notin \{-2, -1, 2\}$.
**1.21**. $x \notin \{-2, 1, 2\}$.
**1.22**. $X = -\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -31 & -9 & 8 \\ 15 & -27 & 6 \\ -11 & -9 & -14 \end{pmatrix}$.
**1.23**. $X = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 17 & 10 & 8 \\ -29 & 29 & 0 \\ -29 & 0 & 29 \end{pmatrix}$.
**1.24**. $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.
**1.25**. $r(A) = 2$.
**1.26**. $r(A) = 3$.
**1.27**. Nếu $x = 1$ thì $r(A) = 1$. Nếu $x = -\dfrac{3}{2}$ thì $r(A) = 3$.
Nếu $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$ thì $r(A) = 4$.
**1.28**. Nếu $x = 1$ thì $r(A) = 1$. Nếu $x = -1$ thì $r(A) = 3$.
Nếu $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ thì $r(A) = 4$.
**1.29**. Nếu $x = 2$ thì $r(A) = 1$. Nếu $x \neq 2$ thì $r(A) = 3$.
**1.30**. $x = 2$.

## 2. Hệ phương trình

**2.1**. $x = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{20}{9}, \dfrac{25}{9}\right)$.
**2.2**. $x = (3 - 3x_4 + 2x_5, 1, -2, x_4, x_5)$ với $x_4, x_5$ tùy ý.
**2.3**. $x = (1, 3 + x_4, 2 + 2x_5, x_4, x_5)$ với $x_4, x_5$ tùy ý.
**2.4**. $x = (-9 - 17x_4, 7 + 11x_4, 1 + 3x_4, x_4)$ với $x_4$ tùy ý.
**2.5**. $x = (-64, 43, 4, -2)$.
**2.6**. a) $\lambda \neq 5$.
b) $x = \left(\dfrac{52}{39}, \dfrac{28}{39}, -\dfrac{46}{39}\right)$.
**2.7**. $x = (4 - 3x_4, 1 - x_4, 0, x_4)$ với mọi $\lambda$.
**2.8**. Nếu $\alpha = -2$ hệ phương trình có nghiệm là
$x = (21 - 10x_3 - x_4, -12 + 7x_3, x_3, x_4)$ với $x_3, x_4$ tùy ý.
Nếu $\alpha \neq -2$ hệ phương trình có nghiệm là
$x = (21 - 10x_3, -12 + 7x_3, x_3, 0)$ với $x_3$ tùy ý.
**2.9**. Hệ có nghiệm với mọi $\lambda$, $x = \left(\dfrac{10 - \lambda}{2}, \dfrac{10 - \lambda}{2}, \dfrac{\lambda - 6}{2}\right)$ với mọi $\lambda$.
**2.10**. Với $\lambda = 14$ thì hệ có nghiệm và nghiệm là $x = (-28 + 17x_4 + 14x_5, 25 - 14x_4 - 11x_5, 6 - 2x_4 - 2x_5, x_4, x_5)$ với $x_4, x_5$ tùy ý.
**2.11**. a) $\lambda = 5$.
b) $x = (-5x_3 - 8x_4, -7x_3 - 13x_4, x_3, x_4)$ với $x_3, x_4$ tùy ý.
**2.12**. a) $\lambda = 7$.
b) $x = \left(-x_3 + \dfrac{1}{7}x_4, -x_3 + \dfrac{12}{7}x_4, x_3, x_4\right)$ với $x_3, x_4$ tùy ý.
**2.13**. $x = \left(\dfrac{\lambda + 26}{\lambda + 2} + \dfrac{3}{2}x_3, \dfrac{2\lambda - 36}{\lambda + 2} - \dfrac{7}{2}x_3, x_3, \dfrac{-8}{\lambda + 2}\right)$ với $x_3$ tùy ý.
**2.14**. $x = \left(\dfrac{26\lambda - 221}{11(\lambda - 8)} - \dfrac{10}{11}x_3, \dfrac{-3\lambda + 20}{11(\lambda - 8)} + \dfrac{13}{11}x_3, x_3, \dfrac{1}{\lambda - 8}\right)$ với $x_3$ tùy ý.
**2.15**. $x\left(-\dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{\lambda}{4}\right)$.
**2.16**. Nếu $\lambda \neq 19$ thì hệ vô nghiệm. Nếu $\lambda = 19$ thì hệ có nghiệm $x = (4 - 70x_4, -1 + 55x_4, -6x_4, x_4)$ với $x_4$ tùy ý.

## 3. Không gian tuyến tính

**3.1**. Hãy chỉ ra rằng $x = 2a_1 + 2a_2 + a_3$.
**3.2**. Hãy chỉ ra rằng $x = \dfrac{6\alpha_3 + 2}{7}a_1 + \dfrac{5\alpha_3 + 11}{7}a_2 + \alpha_3 a_3$ với $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tùy ý. Nói riêng, nếu chọn $\alpha_3 = 2$ thì $x = 2a_1 + 3a_2 + 2a_3$.
**3.3**. $x = \dfrac{-4\alpha_3 + 7}{5}a_1 + \dfrac{-7\alpha_3 + 1}{5}a_2 + \alpha_3 a_3$ với $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tùy ý.
**3.4**. $a_4 = (1 - \alpha_4)a_1 + (2 - 2\alpha_4)a_2 + (\alpha_4 - 1)a_3 + \alpha_4 a_4$ với $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tùy ý.
**3.5**. $a_4 = (1 - \alpha_4)a_1 + (\alpha_4 - 1)a_2 + (2 - 2\alpha_4)a_3 + \alpha_4 a_4$ với $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tùy ý.
**3.6**. $\lambda = -5$.
**3.7**. $\lambda = 7$.
**3.8**. $\lambda \in \mathbb{R}$ tùy ý.
**3.9**. a) Sử dụng định nghĩa hoặc chỉ ra ma trận của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ có hạng bằng 3 (có định thức khác 0).
b) $x = -\dfrac{7}{6}a_1 - \dfrac{11}{6}a_2 + \dfrac{1}{2}a_3$.
**3.10**. a) Sử dụng định nghĩa hoặc chỉ ra ma trận của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ có hạng bằng 3.
b) Phần tử $x$ không có biểu diễn tuyến tính trên hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.
**3.11**. a) $\lambda \neq 2$.
b) $x = a_1 + a_2 + a_3$.
**3.12**. a) Sử dụng định nghĩa hoặc chỉ ra ma trận của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ có hạng bằng 3.
b) Hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
**3.13**. a) Sử dụng định nghĩa hoặc chỉ ra ma trận của hệ

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có hạng bằng 4.
b) Hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.
**3.14**. a) Hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ độc lập tuyến tính.
b) Hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b\}$ phụ thuộc tuyến tính.
**3.15**. Không tồn tại $\lambda$ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.
**3.16**. a) $\lambda = 1$.
b) $a_2 = 2a_1 - a_3$.
**3.17**. $[x]_a = (1, 3, 2)$.
**3.18**. $[x]_a = \left(\frac{92}{35}, \frac{89}{35}, -\frac{23}{35}, \frac{8}{5}\right)$.
**3.19**. $\lambda = 1$.
**3.20**. $\lambda = -4$.
**3.21**. $\lambda = 5$.
**3.22**. $M$ là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ và $\dim M = 2$. $N$ không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$.
**3.23**. Phân tích để đi đến việc lựa chọn ba phần tử thích hợp của $M$ và chỉ ra chúng tạo thành một hệ vừa là hệ sinh của $M$ vừa là hệ độc lập tuyến tính. $\dim M = 3$.
**3.24**. Tương tự bài 3.24.
**3.25**. $[x]_b = \left(-2, \frac{9}{7}, \frac{15}{7}\right)$.
**3.26**. $[x]_b = \left(\frac{7}{4}, \frac{37}{16}, -\frac{11}{8}\right)$.
**3.27**. $[x]_b = \left(-\frac{79}{73}, \frac{60}{73}, \frac{8}{73}\right)$.
**3.28**. $[x]_b = \left(-\frac{31}{19}, \frac{27}{19}, \frac{1}{19}\right)$.
**3.29**. $T_{ba} = -\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -17 & -5 & 8 \\ 5 & 13 & -11 \\ 9 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.
**3.30**. $T_{ba} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 6 & 5 & -13 \\ -2 & 5 & 11 \\ 10 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.
**3.31**. $T_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ -1 & 31 & -13 \\ 2 & -22 & 10 \end{pmatrix}$.
**3.32**. $T_{ab} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -14 & 14 & 13 \\ -16 & 11 & 7 \\ 17 & -12 & -14 \end{pmatrix}$.
**3.33**. $T_{ba} = \frac{1}{97}\begin{pmatrix} 68 & 132 & 19 \\ -27 & 56 & 11 \\ 65 & -45 & 31 \end{pmatrix}$.

## 4. Ánh xạ tuyến tính

**4.1**. a) Sinh viên tự giải.
b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
**4.2**. a) Sinh viên tự giải.
b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
**4.3**. a) $\alpha = 0$.
b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
**4.4**. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
b) $B = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 120 & -192 & 120 \\ 11 & -52 & -4 \\ -89 & 92 & -116 \end{pmatrix}$.
**4.5**. a) Sinh viên tự giải.
b) $B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 6 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
**4.6**. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
b) $x = (1, 1, -1)$.
**4.7**. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
b) $x = (1, x_4, 2x_4 - 3, x_4)$ với $x_4$ tùy ý.
**4.8**. a) $x = (1, 2, -1)$.
b) $x = -3u = (-6, 3, -6)$.
**4.9**. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
b) Hãy chỉ ra rằng $f(a_1) = 8a_1,\ f(a_2) = a_2,\ f(a_3) = 2a_3$ và sử dụng chúng.
**4.10**. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.
b) $\lambda = 2$, $x = x_1(1, 0, 1) + x_2(0, 1, 2)$ với $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.
**4.11**. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
b) $\lambda = 3$, $x = x_1(1, 0, 0, 0)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
**4.12**. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
b) $\lambda = 2$, $x = x_4(0, 0, 0, 1)$ với mọi $x_4 \neq 0$.
**4.13**. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\lambda = 1$, $x = x_2(1, 1, -3)$ với mọi $x_2 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_1(1, 0, -1)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 4$, $x = x_2(1, 1, 0)$ với mọi $x_2 \neq 0$.
**4.14**. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $\lambda = 1$, $x = x_1(1, 1, -\frac{3}{2})$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_3(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ với mọi $x_3 \neq 0$; $\lambda = 4$, $x = x_2(-1, 1, 0)$ với mọi $x_2 \neq 0$.
c) Ứng với $\lambda = 1$ chọn véc tơ riêng $a_1 = (2, 2, -3)$ (gán $x_1 = 2$); ứng với $\lambda = 2$ chọn véc tơ riêng $a_2 = (-1, 2, 3)$ (gán $x_3 = 2$); ứng với $\lambda = 4$ chọn véc tơ riêng $a_3 = (-1, 1, 0)$ (gán $x_2 = 1$).
**4.15**. $\lambda = 1$, $x = x_2(-1, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)$ với mọi $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$; $\lambda = 9$, $x = x_1(1, 1, 3)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
**4.16**. $\lambda = 0$, $x = x_3(-1, -1, 1)$ với mọi $x_3 \neq 0$; $\lambda = 1$, $x = x_3(0, 1, 1)$ với mọi $x_3 \neq 0$; $\lambda = 3$, $x = x_2(1, 1, 2)$ với mọi $x_2 \neq 0$.
**4.17**. $\lambda = 0$, $x = x_1(1, 1, -2)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_1(1, -1, 0)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 5$, $x = x_3(2, 2, 1)$ với mọi $x_3 \neq 0$.
**4.18**. $\lambda = -1$, $x = x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$ với mọi $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$; $\lambda = 5$, $x = x_1(1, 1, 1)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
**4.19**. $\lambda = 1$, $x = x_1(1, 1, -\frac{3}{2})$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_3(-3, 1, 1)$ với mọi $x_3 \neq 0$; $\lambda = 5$, $x = x_3(1, 1, 1)$ với

mọi $x_3 \neq 0$.
**4.20**. $\lambda = 2$, $x = x_1(1,0,0,0)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = -2$, $x = x_1(1,-4,0,0)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 3$, $x = x_2(6,1,\frac{5}{2},0)$ với mọi $x_2 \neq 0$; $\lambda = -3$, $x = x_3(\frac{6}{5},16,1,-6)$ với mọi $x_3 \neq 0$.
**4.21**. Ma trận $A$ có hai giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 1$ (bội $n_1 = 2$), $\lambda_2 = 4$ (bội $n_2 = 1$). Ứng với $\lambda_1 = 1$ ta có $r(A - \lambda_1 I) = 2 \neq n - n_1 = 3 - 2 = 1$.
**4.22**. Ma trận $A$ có hai giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 1$ (bội $n_1 = 2$), $\lambda_2 = 6$ (bội $n_2 = 1$). Hãy chỉ ra rằng $r(A - \lambda_1 I) = n - n_1$ và $r(A - \lambda_2 I) = n - n_2$ (ở đây $n = 3$).
**4.23**. Ma trận $A$ có ba giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 11$ nên $A$ chéo hóa được. Biến đổi đồng dạng đưa $A$ về ma trận chéo có thể lựa chọn là

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \text{ với } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**4.24**. Ma trận $A$ có hai giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = -1$ (bội $n_1 = 2$), $\lambda_2 = -3$ (bội $n_2 = 1$). Chỉ ra ma trận $A$ chéo hóa được bằng cách xây dựng một cơ sở gồm 3 véc tơ riêng của $A$. Biến đổi đồng dạng đưa $A$ về ma trận chéo có thể lựa chọn là

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ với } T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.25**. a) $\lambda = 1$, $x = x_1(1,2,-2)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_1(1,5,-3)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 5$, $x = x_1(1,2,0)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
b) Lựa chọn một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm 3 véc tơ riêng ứng với $A$, chẳng hạn là $a_1 = (1,2,-2), a_2 = (1,5,-3), a_3 = (1,2,0)$. Từ đó khẳng định được $A$ là ma trận chéo hóa được. Biến đổi đồng dạng đưa $A$ về ma trận chéo tương ứng với việc lựa chọn $\{a_1, a_2, a_3\}$ là

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ với } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.26**. a) $\lambda = 1, x = x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1)$ với mọi $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$; $\lambda = 7$, $x = x_3(1,1,1)$ với mọi $x_3 \neq 0$.
b) Tương tự bài 4.24.
**4.27**. a) $\lambda = 1$, $x = x_1(1,1,-\frac{3}{2})$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 2$, $x = x_1(1,-1,0)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 8$, $x = x_1(1,1,2)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
b) Tương tự bài 4.25.
**4.28**. a) $\lambda = 1$, $x = x_1(1,1,-1)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 8$, $x = x_1(1,1,\frac{5}{2})$ với mọi $x_1 \neq 0$.
b) Ma trận $A$ không chéo hóa được (tương tự bài 4.21).
**4.29**. a) $\lambda = 2$, $x = x_1(1,1,-1)$ với mọi $x_1 \neq 0$; $\lambda = 8$, $x = x_1(1,1,1)$ với mọi $x_1 \neq 0$.
b) Ma trận $A$ không chéo hóa được (tương tự bài 4.21).

## 5. Không gian Euclid

**5.1**. $x = \pm\dfrac{1}{7}(2,-2,-5,4)$.
**5.2**. $u_4 = \pm\dfrac{1}{5}(-2,1,-4,2)$.
**5.3**. $u_4 = \pm\dfrac{1}{6}(1,-5,-1,3)$.
**5.4**. Cách 1: Chứng minh rằng nếu $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ thì $x = x_4(1,1,1,1)$ và ta tính được trực tiếp $\langle x, u_4\rangle = 0$.
Cách 2: Chỉ ra $u_4$ có dạng $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ nên khi $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ ta có $\langle x, u_4\rangle = \lambda_1\langle x, u_1\rangle + \lambda_2\langle x, u_2\rangle + \lambda_3\langle x, u_3\rangle = 0$.
**5.5**. Tương tự bài 5.4.
**5.6**. $\lambda = 3, \mu = 1$.
**5.7**. $\lambda = -\dfrac{6}{41}, \mu = \dfrac{37}{41}$.
**5.8**. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{20}}(3,-1,3,1)$.
**5.9**. $x = \pm\dfrac{1}{2}(1,-1,1,1)$.
**5.10**. $x = \pm\dfrac{1}{8}(5,2,3,5,1)$.
**5.11**. $x = \pm\dfrac{1}{8}(3,-7,2,1,1)$.
**5.12**. $x = \pm\dfrac{1}{8}(1,3,-4,1,6,1)$.
**5.13**. $u = (4,-1,3,9),\ v = (2,2,1,-1)$.
**5.14**. $u = (3,1,-5,3),\ v = (-2,-1,-2,-1)$.
**5.15**. $u = (4,3,-4,5),\ v = (2,3,-2,-5)$.
**5.16**. $u = (3,-3,-5,3),\ v = (1,2,0,1)$.
**5.17**. $u = (3,4,0,0,-10),\ v = (2,1,1,-2,1)$.
**5.18**. $x = 2u_1 + 2u_2 = (4,-4,4,0)$ hoặc $x = -(u_1 + u_2) = (-2,2,-2,0)$.
HD: Từ giả thiết chúng ta có $\langle u_1, u_1\rangle = 18, \langle u_1, u_2\rangle = -9$, $\langle u_2, u_2\rangle = 18$. Nếu $x$ là phần tử cần tìm thì $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Chỉ ra rằng $\|x - u_1\|^2 = 18(\lambda_1 - 1)^2 - 18(\lambda_1 - 1)\lambda_2 + 18\lambda_2^2$ và đối chiếu với giả thiết $\|x - u_1\| = 6$ ta có phương trình $18(\lambda_1 - 1)^2 - 18(\lambda_1 - 1)\lambda_2 + 18\lambda_2^2 = 36$. Tiếp theo từ giả thiết $\|x - u_2\| = 6$ ta có phương trình $18\lambda_1^2 - 18\lambda_1(\lambda_2 - 1) + 18(\lambda_2 - 1)^2 = 36$. Giải hệ hai phương trình được đưa ra ta thu được hai nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ và $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
**5.19**. $x = 3u_1 + 3u_2 = (6,-12,-6,6)$ hoặc $x = -2u_1 - 2u_2 = (-4,8,4,-4)$.
**5.20**. $x = 4u_1 + 4u_2 = (0,-6,-6,0)$ hoặc $x = -2u_1 - 2u_2 = (0,4,4,0)$.
**5.21**. $x = 3u_1 + 3u_2 = (3,3,6,0,12)$ hoặc $x = -2u_1 - 2u_2 = (-2,-2,-4,0,-8)$.
**5.22**. a) Có thể chọn cơ sở của $L$ là $\{a_3, a_4\}$ với $a_3 = (1,-1,1,0)$ và $a_4 = (-1,0,0,1)$.
b) (Theo cách chọn của câu (a)) Hệ trực giao: $u_1 = a_1, u_2 = a_2 - \dfrac{2}{3}u_1, u_3 = a_3, u_4 = a_4 + \dfrac{1}{3}u_3$. Sau đó chuẩn hóa các phần tử $u_1, u_2, u_3, u_4$.
**5.23**. a) Có thể chọn cơ sở của $L$ là $\{a_3, a_4\}$ với $a_3 = (11,-7,1,0)$ và $a_4 = (-11,6,0,1)$.
b) (Theo cách chọn của câu (a)) Hệ trực giao: $u_1 = a_1, u_2 = a_2 - \dfrac{1}{15}u_1, u_3 = a_3, u_4 = a_4 + \dfrac{163}{171}u_3$. Sau đó chuẩn hóa các phần tử $u_1, u_2, u_3, u_4$.
**5.24**. a) Có thể chọn cơ sở của $L$ là $\{a_3, a_4\}$ với $a_3 = (3,-5,1,0)$ và $a_4 = (-4,5,0,1)$.
b) (Theo cách chọn của câu (a)) Hệ trực giao: $u_1 = a_1, u_2 = a_2 + \dfrac{2}{7}u_1, u_3 = a_3, u_4 = a_4 + \dfrac{37}{35}u_3$. Sau đó chuẩn hóa các phần tử $u_1, u_2, u_3, u_4$.
**5.25**. a) $\lambda = -\dfrac{1}{6},\ \mu = -\dfrac{7}{3}$.
b) Hệ trực giao: $u_1 = a_1, u_2 = a_2 - \dfrac{8}{15}u_1, u_3 = b$.
**5.26**. a) $\alpha = -\dfrac{4}{3},\ \gamma = -\dfrac{1}{3}$.
b) Hệ trực giao: $u_1 = a_1, u_2 = a_2 - \dfrac{1}{3}u_1, u_3 = b$.
**5.27**. a) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$.
b) Hệ trực chuẩn: $u_1 = \dfrac{1}{6}(1,3,1,5), u_2 = \dfrac{1}{6}(3,-1,5,-1)$, $u_3 = \frac{1}{6}(5,1,-3,-1)$.

**5.28**. a) $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 2$.
b) Hệ trực chuẩn: $u_1 = \frac{1}{7}(2,4,2,5), u_2 = \frac{1}{7}(4,-2,5,-2)$, $u_3 = \frac{1}{7}(-2,-5,2,4)$.
**5.29**. Cơ sở trực chuẩn: $u_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2), u_2 = \frac{1}{3}(2,2,-1)$, $u_3 = \frac{1}{3}(-1,2,2)$. Tọa độ của $x$ trên cơ sở $\{u_1,u_2,u_3\}$ là $[x]_u = (5,1,3)$.
**5.30**. Cơ sở trực chuẩn: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1), u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$, $u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0)$, Tọa độ của $x$ trên cơ sở $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ là $[x]_u = \left(0, \frac{13}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
**5.31**. a) Sinh viên tự giải.
b) Tọa độ của $x$ trên cơ sở $\{u_1,u_2,u_3\}$ là $[x]_u = \left(\frac{48}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.
**5.32**. $x_4^2 = \frac{121}{9}$.
**5.33**. $x_4^2 = \frac{361}{49}$.
**5.34**. Có thể lựa chọn một cơ sở thông thường $\{e_1,e_2\}$ của $M$ với $e_1 = (2,1,-2,0,1),\ e_2 = (-9,-8,12,5,0)$. Trực chuẩn hóa hệ $\{e_1,e_2\}$ ta thu được một cơ sở trực chuẩn $\{w_1,w_2\}$ của $M$ với $w_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,-2,0,1),\ w_2 = \frac{1}{8}(1,-3,2,5,5)$.
**5.35**. a) Sinh viên tự giải.
b) Thực hiện tương tự bài 5.34.
**5.36**. $(x,y,z) = \pm\frac{1}{3}(2,-1,2)$.
**5.37**. $(x,y,z,t) = \pm(1,1,1,1)$.
**5.38**. Bước 1: Chỉ ra hệ $\{u_1,u_2\}$ là hệ trực chuẩn nên tồn tại cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^4$ chứa hệ $\{u_1,u_2\}$. Bước 2: Xét tất cả các véc tơ $x \in \mathbb{R}^4$ sao cho $x \perp u_1, x \perp u_2$ và chỉ ra $x = (x_4,x_3,x_3,x_4)$. Chọn $a_1 = (1,1,1,1)$ ứng với việc gán $x_3 = x_4 = 1$ thì $a_1 \perp u_1, a_1 \perp u_2$. Tiếp theo chọn $x = (x_4,x_3,x_3,x_4)$ sao cho $x \perp a_1$ và ta thu được $x = a_2 = (1,-1,-1,1)$. Chuẩn hóa hệ $\{a_1,a_2\}$: $u_3 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, u_4 = \frac{a_2}{\|a_2\|}$ thì hệ $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ chính là cơ sở trực chuẩn cần xây dựng.
**5.39**. Tương tự bài 5.38.
**5.40**. Biến đổi đồng dạng đưa ma trận $A$ về ma trận đường chéo và ma trận trực giao được lựa chọn để sử dụng tương ứng là

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \text{ và } T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

## 6. Một số bài tập nâng cao

**6.1**. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.
**6.2**. Sử dụng các biến đổi sơ cấp để rút nhân tử chung $(a+b+c)$ ra ngoài định thức ba lần để thu được $(a+b+c)^3$ bên ngoài định thức. Sau đó khai triển định thức sẽ thu được nhân tử còn lại của vế phải là $2abc$.
**6.3**. $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
HD: Thực hiện phép nhân ma trận $A^TA$. Sử dụng kết quả phép nhân để thu được $(\det A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ và suy ra rằng $\det A = k(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ với $k^2 = 1$. Thay $b = c = d = 0$ vào hai vế đẳng thức này để khẳng định $k = 1$.
**6.4**. $D = \left(1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \ldots + \frac{x}{a_n - x}\right) \prod_{1 \le i \le n} (a_i - x)$
nếu $x \neq a_i$ với mọi $i = 1,2,\ldots,n$. Nếu $x = a_i, i = 1,2,\ldots,n$ thì $D = x(a_1 - x)\ldots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\ldots(a_n - x)$.
**6.5**. Tính toán trực tiếp.
**6.6**. Đặt $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi đó kết quả phép nhân hàng $i$ của $A$ và cột $i$ của $A^T$ chính là $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2$. Nếu tổng này bằng 0 thì tất cả phần tử trên hàng thứ $i$ của $A$ là 0.
**6.7**. a) Sinh viên tự giải.
b) $A^{2011} = \begin{pmatrix} 2.3^{2011} - 2^{2011} & 2^{2011} - 3^{2011} \\ 2.3^{2011} - 2^{2012} & 2^{2012} - 3^{2011} \end{pmatrix}$
**6.8**. Sử dụng $AA^* = (\det A)I$ để đưa ra đẳng thức $\det A \det A^* = (\det A)^n$.
**6.9**. Sử dụng đẳng thức $I - A^4 = (I-A)(I+A)(I+A^2)$ để chứng minh $\det(I+A) \neq 0$.
**6.10**. Đặt $B = I + A^3$ thì $A^2 + A^5 = A^2B$ và $A^2B = BA^2$. Do đó $(A^2B)^5 = A^{10}B^5 = \theta$ và ta phân tích được tương tự bài 6.9.
**6.11**. Chỉ ra $\det A \neq 0$ và sử dụng đẳng thức $(BA)^{10} = A^{-1}(AB)^{10}A$.
**6.12**. Nếu $A$ có ba giá trị riêng thực phân biệt là $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ thì các giá trị riêng của $A^3$ là $\lambda_1^3,\lambda_2^3,\lambda_3^3$ và là ba số thực phân biệt.
**6.13**. Nếu $A$ có ba giá trị riêng thực phân biệt là $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ thì các giá trị riêng của $A^5 - A^4 + 4A$ là $f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)$ với $f(x) = x^5 - x^4 + x$. Do $f(x)$ đồng biến nên $f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)$ là ba số thực phân biệt.
**6.14**. Nếu $A$ có các giá trị riêng thực là $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n > 0$ thì ma trận $A^3 + 3A - 5A^{-1}$ có các giá trị riêng là $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)$ với $f(x) = x^3 + 2x - 3x^{-1}$. Do $f(x)$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ nên $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)$ là $n$ giá trị riêng phân biệt.
**6.15**. $\det(A^3 + 3A) = 2280$.
**6.16**. $\det B = 18^{1002}(2^{1002}-1)(3^{1002}-1)^2$.
**6.17**. $D = n!$.
HD: Cộng hàng 1 vào các hàng $2,3,\ldots,n$, ta thu được định thức tam giác.
**6.18**. $D = 1$.
HD: Ký hiệu định thức là $D_n$. Bước 1, biến đổi định thức theo thứ tự sau: lấy hàng $n$ trừ hàng $(n-1)$, hàng $(n-1)$ trừ hàng $(n-2)$, ..., lấy hàng 2 trừ hàng 1. Lấy kết quả thu được khai triển theo cột 1. Bước 2, biến đổi định thức theo thứ tự sau: lấy cột $(n-1)$ trừ đi cột $(n-2)$, lấy lấy cột $(n-2)$ trừ đi cột $(n-3)$, ..., lấy cột 2 trừ cột 1. Đến đây ta thu được $D_{n-1}$, nghĩa là $D_n = D_{n-1}$.
**6.19**. Hãy chỉ ra $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ với mọi $A,B$ vuông cùng cỡ. Từ đó chỉ ra được $\text{trace}(AB-BA) = 0 \neq \text{trace}(I) = n$ nên $AB - BA \neq I$.
**6.20**. Hãy chỉ ra rằng nếu $M$ là ma trận vuông và $r(M) = 1$ thì $M^2 = (\text{trace}(M))M$, sau đó sử dụng $\text{trace}(AB - BA) = 0$.
**6.21**. Hãy chỉ ra rằng $r(AB) = 2$ và $(AB)^2 = 9AB$. Sử dụng $r(AB) = 2$ để chỉ ra $r(BA) \ge r((AB)^2) = 2$ và khẳng định được $BA$ là ma trận khả nghịch. Sử dụng $(AB)^2 = 9AB$ để chỉ ra $(BA)^3 = 9(BA)^2$. Nhân $(BA)^{-2}$ vào hai vế đẳng thức $(BA)^3 = 9(BA)^2$ thì thu được kết quả.
**6.22**. Nếu $x = 0$ thì $\det(xA + yB) = \det(yB) = y^3 \det B = 0$. Nếu $x \neq 0$ thì $\det(xA+yB) = x^3P(t)$ trong đó $t = \frac{y}{x}$ và $P(t) = \det(A + tB)$ là đa thức bậc 3. Theo giả thiết $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ nên $P(t)$ phải có dạng $P(t) = \alpha t(t^2-1)$ với $\alpha$ là hằng số. Tiếp theo $\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^3}P(t) = \lim_{t\to\infty} \det(\frac{1}{t}A + B) = \det B = 0$. Từ đó ta có $P(t) = 0$ với mọi $t$.
**6.23**. Tương tự bài 6.10.
**6.24**. $n = 2013$.
HD: Đặt $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ thì phương được cho là $X^{2015} + X^n = 2I + 4028M$. Chỉ ra $X$ thỏa mãn phương trình $MX = XM$ và giải phương trình này để thu được $X = \alpha I + \beta M$ với $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$. Sử dụng $M^2 = \theta$ để chỉ ra $X^{2015} + X^n = (\alpha^{2015} + \alpha^n)I +$

$(2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})\beta M$. Từ đó quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha^{2015} + \alpha^n = 2 \\ (2015\alpha^{2014} + n\alpha^{n-1})\beta = 2048 \end{cases}$$

Chỉ ra $\alpha$ là ước của 2 để giải phương trình thứ nhất và tính ra nghiệm $\alpha = 1$. Thay $\alpha = 1$ vào phương trình thứ hai thì thu được $(2015 + n)\beta = 4048$. Dựa vào $n + 2015$ là ước số của 4048 ta khẳng định được $n + 2015 = 4048$ và suy ra $\beta = 1$. Từ đó ta tính được $n = 2013$ và hơn nữa tính được $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

## MẪU ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Bộ môn Đại số và Xác suất thống kê trân trọng giới thiệu một số mẫu đề thi kết thúc học phần môn Đại số tuyến tính. Để có sự chuẩn bị tốt cho kỳ thi sinh viên cần lưu ý các điểm sau:

1. Sinh viên học ĐSTT 2 tín chỉ chỉ làm bốn câu đầu tiên. Thời gian làm bài đối với mỗi đề thi là 70 phút.
2. Sinh viên học ĐSTT 3 tín chỉ chỉ làm cả 5 câu. Thời gian làm bài đối với mỗi đề thi là 90 phút.
3. Không được mang tài liệu trong phòng thi. Không mang điện thoại vào phòng thi.
4. Mang thẻ sinh viên khi đi thi, mang máy tính (nếu cần) để sử dụng trong giờ thi.
5. Sinh viên không được nháp vào đề thi, phải nộp lại đề thi cùng bài làm khi hết giờ làm bài.

### ĐỀ SỐ 1

**Bài 1.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tính $A^{215}$.

b) Tính $\det(A^{512} + 4A^{215} + 2A^{251})$.

**Bài 2.** Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 8 \end{cases}$$

**Bài 3.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 3, -2),\ a_2 = (2, 1, 2, 1),\ a_3 = (1, 3, 3, 2).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

b) Tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của phần tử $x = (4, 0, 4, -2)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

**Bài 4.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm ma trận của $f$ trên cơ sở $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (2, 1, 4),\ a_2 = (1, -1, 1),\ a_3 = (2, 2, 1).$$

**Bài 5.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với

$$u_1 = (1, 1, 1, 2),\quad u_2 = (2, 1, 1, -1),$$
$$u_3 = (3, 2, -1, 3),\quad u_4 = (5, 2, 5, -4).$$

Hãy chỉ ra rằng nếu phần tử $x \in \mathbb{R}^4$ nào đấy thỏa mãn $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ thì ta phải có $x \perp u_4$.

### ĐỀ SỐ 2

**Bài 1.** Tính hạng ma trận sau theo $x$

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 3 & x \\ 3 & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}.$$

**Bài 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

**Bài 3.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (2, 1, 3)$ $a_3 = (1, 4, 2)$, $a_4 = (5, 0, 2)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của $a_4$ trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

**Bài 4.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của $A$.

b) Ma trận $A$ có chéo hóa được không? Tại sao? Nếu được hãy tìm ma trận $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 5.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho véc tơ $x = (2, 4, -5, 6)$ và cho $M$ là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm 2 véc tơ $u_1 = (2, 1, 3, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1, 2)$. Hãy tìm các véc tơ $u, v$ với $u \in M$, $v \in M^\perp$ sao cho ta có đẳng thức $x = u + v$.

### ĐỀ SỐ 3

**Bài 1.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tính nghịch đảo của ma trận $A$.

b) Giải phương trình $AX = B$.

**Bài 2.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $\lambda$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 6x_1 + 10x_2 + \lambda x_3 + 5x_4 = 15 \end{cases}$$

**Bài 3.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho không gian con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}$$

và phần tử $w \in M$ với $w = (1, 1, 3, 1)$. Hãy xác định một cơ sở và số chiều của $M$ và cho biết tọa độ của $w$ trên cơ sở được đưa ra.

**Bài 4.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (4x_1+3x_2-3x_3, x_1-2x_2-3x_3, x_1+3x_2+2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$
b) Xác định $x \in \mathbb{R}^3$ để $f(x) = f(2, -1, 3)$.

**Bài 5.** Bằng phương pháp trực chuẩn hoá Gram–Schmidt hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ từ cơ sở đã cho sau đây:

$$a_1 = (2, 2, 1);\ a_2 = (4, 10, -1);\ a_3 = (2, 7, 3).$$

Tính tọa độ của phần tử $x = (1, 8, 9)$ trên cơ sở nhận được.

## ĐỀ SỐ 4

**Bài 1.** Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $\det(2A^3B^2 + 3A^2B^3)$.
b) Tính hạng của ma trận $A + 2B$.

**Bài 2.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

Xác định $\lambda$ để hệ trên có nghiệm. Giải hệ với $\lambda$ tìm được.

**Bài 3.** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (2, 1, -1),\ a_2 = (3, 1, 2),\ a_3 = (2, 1, 4),$$
$$b_1 = (1, 2, 3),\ b_2 = (-1, 0, 2),\ b_3 = (5, 1, 2).$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ $(a)$ sang hệ $(b)$.

**Bài 4.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng ma trận $A$.
b) Ma trận $A$ có đồng dạng với ma trận chéo hay không. Nếu có hãy chỉ ra ma trận chuyển $T$ và ma trận đường chéo $B$ để cho $B = T^{-1}AT$.

**Bài 5.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ $u = (3, -2, -2, 11)$, $v_1 = (2, -1, 3, 3)$, $v_2 = (1, 1, -1, 2)$.
a) Hãy xác định các số $\lambda$, $\mu$ sao cho $w = u + \lambda v_1 + \mu v_2$ trực giao với các véc tơ $v_1, v_2$.
b) Hãy xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ $\{v_1, v_2, w\}$ theo thủ tục Gram–Schmidt.

## ĐỀ SỐ 5

**Bài 1.** Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & x \\ x & x & x & x \\ x & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

**Bài 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 9x_4 - 2x_5 = 14 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 13 \end{cases}$$

**Bài 3.** Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (3, 10, -2, 3)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:
$a_1 = (1, 1, -1, 2);\ a_2 = (2, 3, 1, 1);$
$a_3 = (-1, 2, -2, 1);\ a_4 = (1, 1, 1, -1).$

**Bài 4.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (4x_1+x_2-x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_1-3x_2+2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ $f$ trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy chỉ ra rằng ma trận của $f$ trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (1, 1, 4),\ a_2 = (3, -1, 5),\ a_3 = (-1, -1, 1)$$

là một ma trận đường chéo.

**Bài 5.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ cơ sở trực chuẩn $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = \frac{1}{5}(4, 2, 1, 2)$, $u_2 = \frac{1}{5}(-1, 2, 4, -2)$, $u_3 = \frac{1}{5}(2, -4, 2, -1)$. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể có của $u_4$.