BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GIẢI TÍCH 1	
Chương 1	**Hàm số và giới hạn**
	Câu 1: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ bằng A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 7 D. 6 E. -1 F. 4
	Câu 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x^2+x-1)$ bằng A. $-\infty$ B. -2 C. 7 D. $+\infty$ E. -3 F. 8
	Câu 3: Khi $x\to 0$, VCB $1-\cos x$ tương đương với A. $\frac{1}{2}x$ B. $\frac{1}{2}x^2$ C. x D. $-x$ E. -2x F. x^2
	Câu 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}^+}\frac{x}{10x-2}$ bằng A. $\frac{1}{10}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $+\infty$ D. $-\infty$ E. -1 F. 2
	Câu 5: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\tan x}$ A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 2 E. -2 F. -1

	Câu 6: Tìm k để hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{\sin^2 x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 2k+1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ liên tục: A. -3/4 B. -3/2 C. 1 D. -2 E. -1 F. 2/3

Chương 2	**Đạo hàm và vi phân**
	Câu 7: Nếu $y = \cos 3x$ thì $y' =$ A. $3\cos 3x$ B. $-3\sin 3x$ C. $-\cos 3x$ D. $-\frac{1}{3}\cos 3x$ E. $-3\cos 3x$ F. $3x\cos 3x$
	Câu 8: Nếu $y = \arctan 2x$ thì $y' =$ A. $2\text{arccot}\, 2x$ B. $2\tan 2x$ C. $\frac{1}{1+4x^2}$ D. $\frac{2}{1+4x^2}$ E. $\frac{1}{1+2x^2}$ F. $-\frac{1}{1+4x^2}$
	Câu 9: Nếu $f(x) = \frac{1}{16}(x^2-2)^3(x^2-4)$ thì $f'(2)$ =? A. 2 B. 0 C. -2 D. 1 E. -1 F. 3
	Câu 10: Nếu $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right)$ thì $f'(x)$ =? A. $1 + \frac{x}{x^2+1}$ B. $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ C. $\frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}$

	D. $\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$ E. $\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}$ F. $\frac{2}{x\sqrt{x^2+1}}$
	Câu 11: Nếu $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ thì $dy =?$ A. $dy = \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ B. $dy = \frac{4}{e^x+e^{-x}}dx$ C. $dy = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ D. $dy = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ E. $dy = \frac{-4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ F. $dy = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx$
	Câu 12: Nếu $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ thì $f'_-(0) =?$; $f'_+(0) =?$ A. 1 và 0 B. 1 và 2 C. -1 và 2 D. 0 và 1 E. -1 và 1 F. 1 và 1

Chương 3	**Tích phân**
	Câu 13: Tích phân $\int \sin(3x)dx =$ A. $\frac{1}{3}\cos(3x) + C$ B. $\cos(3x) + C$ C. $-\frac{1}{3}\cos(3x) + C$ D. $\sin(3x) + C$ E. $-\sin(3x) + C$ F. $3\sin(3x) + C$
	Câu 14: Tích phân $\int e^{2x}dx =$ A. $-\frac{1}{2}e^{2x} + C$ B. $2e^{2x} + C$ C. $-2e^{2x} + C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ E. $e^x + C$ F. $e^{2x} + C$

	Câu 15: Tích phân $\int \frac{dx}{x^2-7x+10} =$ A. $\ln\|(x-2)(x-5)\|+C$ B. $\frac{1}{3}\ln\|(x-2)(x-5)\|+C$ C. $\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{x-2}{x-5}\right\|+C$ D. $\frac{1}{3}\ln\left\|\frac{x-5}{x-2}\right\|+C$ C. $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x-5}\right\|+C$ C. $-\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x-5}\right\|+C$
	Câu 16: Diện tích hình phẳng giữa hai đường cong $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$ là A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{4}$ F. $\frac{1}{5}$
	Câu 17: Tính $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+2x^2)^{3/2}} =$ A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $+\infty$ E. 1 F. 2
	Câu 18: Tính tích phân $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}}$ (đặt $MS=\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}$) A. $2\ln(e^x+1+MS)+C$ B. $\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}+C$ C. $2\arcsin(e^x+1)+C$ D. $2\arctan(e^x+1)+C$ E. $\arctan(e^x+1)+C$ F. $\arcsin(e^x+1)+C$
	Câu 19: Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha+\cos x}{(1+2x)^{3/2}}dx$ hội tụ khi và chỉ khi A. $\alpha<-1$ B. $\alpha=0$ C. α tùy ý D. Không có giá trị α nào E. $\alpha\le -1$ F. $\alpha>-1$

Chương 4	**Chuỗi**
	Câu 20: Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ hội tụ nếu A. $q \geq 1$ B. $q < 1$ C.$\lvert q \rvert < 1$ D. $q > 1$ E. $q \leq 1$ F. $q > -1$
	Câu 21: Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ A. hội tụ và có tổng là 2 B. hội tụ và có tổng là 1 C. Phân kỳ D. hội tụ và có tổng là $\frac{1}{2}$ E. hội tụ và có tổng là 3 F. hội tụ và có tổng là 4
	Câu 22: Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{p-2}} + \frac{1}{n^{1-q}}\right)$ hội tụ nếu và chỉ nếu A. $p > 3;\ q > 0$ B. $p > 3;\ q < 0$ C. $p < 3;\ q > 0$ D. $p < 3;\ q < 0$ E. $p \leq 3;\ q < 0$ F. $p \geq 3;\ q < 0$
	Câu 23: Chuỗi nào trong ba chuỗi sau phân kỳ? (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin 2}{\pi}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$ A. Chuỗi (2) và (3) B. Chuỗi (2) C. Chuỗi (1) và (3) D. Chuỗi (1) và (2) E. Cả ba chuỗi phân kỳ F. Chuỗi (3)
	Câu 24: Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+A^2}$ (A là tham số) hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi A. $A \geq 1$ B. A tùy ý C. $A > 2$ D. $A > 1$ E. $A \geq 1$ F. $A \geq 2$

	Câu 25: Tìm p để chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3}{(n+1)(n^p+1)}$ hội tụ A. Chuỗi trên luôn luôn phân kỳ B. $p > 2$ C. $p \geq 2$ D. $p > 1$ E. $p > 2$ F. $p \geq 1$

Chương 3
TÍCH PHÂN

§ 3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (2 tiết)

3.1.1. Định nghĩa, tính chất

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x), x \in (a, b)$. Ta nói hàm số $F(x), x \in (a, b)$ là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a, b) nếu F(x) khả vi trong khoảng này và

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b). \qquad (3.1)$$

Định lý 3.1. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong khoảng (a, b) thì:

(i) Với C là hằng số tùy ý, $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f(x) trong khoảng (a, b).

(ii) Mọi nguyên hàm của f(x) trong khoảng (a, b) đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số nào đó.

Định nghĩa. Họ các hàm số $F(x) + C$, trong đó C là hằng số tùy ý, F(x) là một nguyên hàm bất kỳ của f(x) trong khoảng (a, b) được được gọi là họ nguyên hàm hay tích phân bất định của f(x) trong khoảng (a, b) và được ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Dễ dàng suy ra nguyên hàm của f(x) trên đoạn [a; b]

Tính chất.

(i) $\int F'(x)dx = F(x) + C;$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Tích phân bất định và đạo hàm là hai phép toán ngược của nhau.

Giả sử f(x) và g(x) là những hàm có nguyên hàm, khi đó:

(ii) $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Gộp lại:

(iii)' $\int [a f(x) + bg(x)]dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Định lý 3.2. Hàm số liên tục trên khoảng suy rộng thì có nguyên hàm trên khoảng này.

Bảng các tích phân cơ bản xem Bảng 3.1 trong [1].

Bàng 3.2. Một số tích phân quan trọng (xem [1])

3.1.2. Phương pháp tính tích phân bất định

a. Biến đổi hàm dưới dấu tích phân, đưa về tích phân cơ bản

Ví dụ 3.1. (i) $I=\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{1/2}+x^{-1/2})\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+3$.

(ii) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int \frac{((x-1)+1)^2}{(x-1)^{100}}dx$.

$=\frac{-1}{97.(x-1)^{97}}+\frac{-2}{98.(x-1)^{98}}+\frac{-1}{99.(x-1)^{99}}+C.$

(iii) $\int \sin 3x \sin 5x\,dx$

$$=\int \frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 8x]\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

Thực ra ta có thể tách thành tổng để tính các tích phân sau

$$\int \sin ax \cos bx\,dx\,;\quad \int \sin ax \sin bx\,dx\,;\quad \int \cos ax \cos bx\,dx\,.$$

b. Đặt biến

Định lý 3.3. Cho $\varphi : I \to K$ là hàm khả vi liên tục, $g : L \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, trong đó I, K, L là những khoảng suy rộng, $K \subset L$.

Giả sử ta tính được $\int g(u)\,du=G(u)+C$. Khi đó

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=G(\varphi(x))+C\,.$$

Một cách hình thức,

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(\varphi(x))\,d\varphi(x)=\left(\int g(u)\,du\right)\Big|_{u=\varphi(x)}\,.$$

Để sử dụng hiệu quả công thức này, khi tính tích phân $\int f(x)\,dx$ ta viết nó dưới dạng $\int f(x)\,dx=\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(\varphi(x))\,d\,\varphi(x)$.

Nói cách khác, ta phải đưa "một thừa số của f(x)" vào trong dấu vi phân d(.) sao cho có thể tính dễ dàng tính tích phân nhận được.

Ví dụ 3.2

(i) $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$

(ii) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C.$

(iii) $\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{a^2+\sin^2 x} = \frac{1}{a}\arctan\frac{\sin x}{a} + C.$

(iv) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x^2}} = \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt[3]{1-3x^2}} = \frac{1}{-6}\int \frac{d(1-3x^2)}{\sqrt[3]{1-3x^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x^2)^2} + C\,.$

(v) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cos x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos x)^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right| + C.$

(vi) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx = \int \frac{d(2^x)}{\ln 2\sqrt{1-(2^x)^2}} = \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x + C\,.$ #

Ví dụ 3.3

(i) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+5)} = \ldots \qquad = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right| + C.$

(ii) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+5/4} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+1/2\right)}{(x+1/2)^2+1}$

$= \frac{1}{4}\arctan\left(x+1/2\right) + C = \frac{1}{4}\arctan\frac{2x+1}{2} + C.$

(iii) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{9}-\frac{2}{3}x-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x+1/3)}{\sqrt{\frac{1}{3}-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}}$

$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{x+1/3}{1/\sqrt{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right) + C.$ #

c. Đổi biến.

Định lý 3.4. Giả sử $x = x(t)$ là hàm khả vi liên tục trên khoảng suy rộng I, tập giá trị K; $y = f(x)$ là hàm liên tục trên khoảng suy rộng L chứa K. Ngoài ra

(i) $x'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

(ii) Tồn tại hàm ngược $t = t(x)$ của hàm x(t).

Khi đó xảy ra đẳng thức

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\, x'(t)\, dt \Big|_{t=t(x)}. \qquad (3.2)$$

Ví dụ 3.4 (i) Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ bằng cách đổi biến $x = \frac{1}{t}$.

Trước hết xét $x > 0$. Ta có $dx = -\frac{1}{t^2}dt,\ t = \frac{1}{x} > 0$. Ta được

$$I = -\int \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{1/t^2 - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\arcsin t + C.$$

Trở về biến cũ, $I = -\arcsin(1/x) + C$. Kết quả tương tự với $x < 0$.

d. Tích phân từng phần

$$I = \int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int udv = uv - \int vdu$$

Muốn áp dụng thành công phương pháp này, điều quan trọng là phải đưa một thừa số của hàm f(x) vào dấu vi phân d(.). Động tác này thực chất là một phép lấy tích phân. Trong trường hợp dễ, ta có thể thực hiện ngay. Trong trường hợp khó khăn hơn, ta phải tính $v(x) = \int v'(x)\,dx$ nghiêm túc.

Ví dụ 3.5

(i) $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\, d(\ln x) = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C$.

(ii) $\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

(iii) $\int x^2e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}.2x\,dx$

$x_i = x_0 + ih,\ i = 1, 2, \dots, 2n.$ #

Có 6 dạng tích phân ở Bảng 3.3 dễ dàng dùng phương pháp từng phần.

Bảng 3.3. Các dạng tích phân dùng phương pháp từng phần thuận lợi

$\int P_n(x)e^{ax}dx$	Đưa e^{ax} vào d(.)	TP từng phần n lần
$\int P_n(x)\sin ax\,dx$	Đưa $\sin ax$ vào d(.)	TP từng phần n lần
$\int P_n(x)\cos ax\,dx$	Đưa $\cos ax$ vào d(.)	TP từng phần n lần
$\int P_n(x)\log_a^m x\,dx$	Đưa $P_n(x)$ vào d(.)	TP từng phần m lần
$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$	Đưa 1 trong 2 thừa số vào d(.)	TP từng phần 2 lần
$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$	Đưa 1 trong 2 thừa số vào d(.)	TP từng phần 2 lần

Ví dụ 3.6. (i) $I = \int e^{4x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int e^{4x}d(\sin 3x)$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{4x}\sin 3x - \int \sin 3x\,d(e^{4x})\right] = \frac{1}{3}\left[e^{4x}\sin 3x - 4\int \sin 3x\,e^{4x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}e^{4x}\sin 3x + \frac{4}{3^2}\int e^{4x}d(\cos 3x)$$

$$= \frac{1}{3}e^{4x}\sin 3x + \frac{4}{9}\left[e^{4x}\cos 3x - 4\int \cos 3x\,e^{4x}\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{16}{9}\right)I = \frac{1}{3}e^{4x}\sin 3x + \frac{4}{9}e^{4x}\cos 3x + C$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{4\cos 3x + 3\sin 3x}{25}e^{4x} + C.$$

(ii) $I = \int \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

$$= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$= x\sqrt{x^2+k} - I + \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C.$$

Ta nhận được công thức quan trọng

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C. \qquad \#$$

3.1.3. Tích phân bất định của một số lớp hàm sơ cấp

a. Tích phân các phân thức hữu tỷ $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

a.1. Dùng các phương pháp thông thường đã biết

Ví dụ 3.7

(i) $$\int \frac{x\,dx}{x^8-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^4-1)(x^4+1)} = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{x^4-1} - \frac{1}{x^4+1}\right]d(x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-1} - \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1}\right] = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\arctan x^2 + C.$$

a.2. Phương pháp hệ số bất định

Bước 1. Khai triển f(x) thành tổng các phân thức đơn giản

Nếu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ có bậc n của tử > bậc m của mẫu, thì phân thức được gọi là không thực sự. Thực hiện phép chia đa thức để được một phần nguyên (đa thức) và một phân thức thực sự có bậc của tử < bậc của mẫu. Vậy ta có thể giả thiết rằng f(x) là phân thức thực sự, tức là $n < m$.

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}. \qquad (3.4)$$

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A(\text{MÉu})'}{x^2+px+q} + \frac{B}{x^2+px+q}. \qquad (3.5)$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3};$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)^2(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+\frac{C}{x-x_2};$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x^2+px+q)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q};$$

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-x_1)^2(x^2+px+q)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+px+q};$$

$$\frac{P_4(x)}{(x-x_1)(x^2+px+q)^2}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}+\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2};$$

$$\ldots\ldots\qquad (p^2-4q<0). \qquad (3.6)$$

Đặc điểm: - Mẫu là luỹ thừa của nhị thức x – a : Tử là hằng.

- Mẫu là lũy thừa của tam thức không nghiệm x^2+px+q : Tử là nhị thức.

Các hằng số A, B, C, … được tính theo phương pháp hệ số bất định.

Bước 2. Tích phân các phân thức đơn giản thu được

* Tích phân các phân thức $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ dễ dàng :

$$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C; \qquad \int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C.$$

* Tích phân các phân thức $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ theo công thức truy hồi.

Ví dụ 3.8. (i). $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+a^2}dx$ (a > 0).

Chia đa thức rồi lấy tích phân ta được

$$F(x)=\int\left[x^2-a^2+\frac{a^4}{x^2+a^2}\right]dx=\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\arctan\frac{x}{a}+C.$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{(2x^2+1)dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$. Ta có

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Sau khi quy đồng mẫu số, hai tử thức ở hai vế phải bằng nhau. Vậy

$$\Rightarrow I=\int\left[\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{-x}{2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

Lưu ý. Ta có thể trình bày gọn hơn, không nêu quá trình tìm hệ số. #

Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:

Làm bài tập theo kế hoạch: **Công thức Taylor (1 tiết)- Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)**

Đọc trước TL[1], tr 184 - 193: Tích phân bất định (tiếp)

Tự đọc TL [1]:

Tóm tắt Chương 2.

VD 3.26; VD 3.27; VD 3.28. VD 3.32; VD 3.38 (a, b); VD 3.39; VD 3.40; VD 3.41; VD 3.42; VD 3.43; VD 3.44(a).

Bảng các tích phân cơ bản xem Bảng 3.1 trong [1].

Một số tích phân quan trọng (xem [1])

Các dạng tích phân dùng phương pháp từng phần thuận lợi

<u>Bài tập về nhà cho Chương 3:</u>

Bổ trợ: 1(2, 3, 4, 10, 14, 15, 25, 34, 38) ; 14 (a); 15(a); 18; 25(a, c)

Chính: 1(7, 19, 21, 22, 24, 27, 29, 30); 3(g); 2(c,d); 4(a, b); 10(c); 18. 19(c, d, e, f); 20(b, c); 21 (a, b); 22; 34(h, i, j, k, l); 35(a $\to$ f, Chữa: a, b, c));

36(a $\to$i, Chữa: a, b, d, h, i).

BS. Xét sự hội tụ $\int_0^{\infty}\frac{x^5}{e^x}dx$, $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$; $\int_2^{+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^6}}dx$;

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$; $\int_0^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$; $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^5}}dx$; $\int_0^{1}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Bài giảng 8: Tích phân bất định (tiếp) – tích phân xác đinh

Chương 3: Tích phân

Mục §3.1 Tích phân bất định (tiếp – 1t)

§3.2 Tích phân xác định (2t)

Bài tập: Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)

Tích phân bất định (1 tiết)

Tiết thứ: 36 - 40, Tuần thứ: 8

- Mục đích, yêu cầu:

Tính được các tích phân của các biểu thức vô tỷ khá đơn giản, của các hàm lượng giác không quá khó

Nắm được ĐN của TP xác định qua tổng tích phân, một vài tính chất ban đầu của tích phân xác định

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian: Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- Địa điểm: Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

§ 3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (tiếp - 1 tiết)

b. Tích phân các biểu thức vô tỷ

b.1. $f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\ell}\right)$

trong đó $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$; $r_1, \dots, r_\ell \in \mathbb{Q}$ là các số hữu tỷ: $r_i = \frac{k_i}{m_i}$; $R(x_1, \dots, x_n)$ là biểu thức hữu tỷ của các biến.

Gọi $m = \text{BCNN}(m_1, \dots, m_\ell)$. Đặt $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}$.

Đặc biệt,

$f(x) = R(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_\ell})$: Đặt $t = (ax+b)^{1/m}$.

$f(x) = (x, x^{r_1}, \dots, x^{r_\ell})$: Đặt $t = x^{1/m}$.

Ví dụ 3.10. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. Đặt $t = \sqrt[6]{x} > 0 \Leftrightarrow x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$.

$$I = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3 + t^2} = \dots = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

(ii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$

Trước hết, biến đổi hàm dưới dấu tích phân về dạng quen biết ta được:

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.$$

Đặt $t = \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}} \Leftrightarrow x = 2\dfrac{1-t^3}{1+t^3}$; $dx = -\dfrac{12t^2dt}{(1+t^3)^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = -\int \frac{(1+t^3)^2}{(4t^3)^2}.t.\frac{12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$= -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$ #

b.2. Đặt biến lượng giác

Trước hết, các biểu thức có chứa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dễ dàng được đưa về các biểu thức có chứa $\sqrt{t^2-A^2}$ hay $\sqrt{t^2+A^2}$.

$f(t) = R(t, \sqrt{A^2-t^2})$: Đặt $t = A\sin u$ hay $t = A\cos u$

$f(t) = R(t, \sqrt{A^2+t^2})$: Đặt $t = A\tan u$ hay $t = A\sinh u$.

Ví dụ 3.11. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$

Đặt $x+1 = 2\sin u \Leftrightarrow u = \arcsin\dfrac{x+1}{2}$

$dx = 2\cos u\,du$; $\sqrt{4-(x+1)^2} = 2\cos u$;

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(2\sin u - 1)^2 2\cos u}{2\cos u}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int (4\sin^2 u - 4\sin u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int (3 - 2\cos 2u - 4\sin u)du = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[3u - \sin 2u + 4\cos u\right] + C.$$

Vì $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}$;

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{4}\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(3-x)\sqrt{3-2x-x^2} + C. \qquad \#$$

c. Tích phân các hàm lượng giác

* Ba dạng sau có thể tách hàm dưới dấu tích phân thành tổng

$$\int \cos ax\cos bx\,dx;\ \int \sin ax\sin bx\,dx;\ \int \sin ax\cos bx\,dx.$$

* $\int \cos^n x dx;\ \int \sin^n x dx;\ n \le 6:$ Hạ bậc; $n \ge 6$: Đưa ra công thức truy hồi.

* $\int \tan^n x\,dx:$ Viết $\tan^n x = \tan^{n-2} x[(\tan^2 x+1)-1]$.

* $\int \cot^n x dx:$ Viết $\cot^n x = \cot^{n-2} x[(\cot^2 x+1)-1]$.

* $\int R(\sin x,\cos x)dx$ (R(u, v) là biểu thức hữu tỷ của 2 biến u, v)

- $R(\sin x,\cos x)$ là hàm lẻ với sinx : Đặt t = cosx ;
- $R(\sin x,\cos x)$ là hàm lẻ với cos x : Đặt t = sinx;
- $R(\sin x,\cos x)$ chẵn với sinx và cosx : Đặt $t = \tan x$.
- Trường hợp tổng quát : Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

Ví dụ 3.12. (i) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}d(\sin x)$

$$= \dots = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int \frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{1}{\tan^3 x\cos^6 x}d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3}dt \quad (t = \tan x)$$

$$\Rightarrow I = ... = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{3}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C.$$

(iii) $\int \cot^6 x\,dx = \int \cot^4 x((\cot^2 x + 1) - 1))\,dx$

$$= \int \cot^4 x \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \cot^4 x\,dx$$

$$= -\int \cot^4 x\,d(\cot x) - \int \cot^2 x((\cot^2 x + 1) - 1))\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\cot^5 x + \int \cot^2 x\,d(\cot x) + \int (\cot^2 x + 1) - 1))\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + C.$$

d. Sử dụng bảng tích phân và phần mềm

Người ta đã lập ra những bảng tích phân bất định để tiện dùng trong thực tế. Các bảng này có thể là vài chục hàm thông dụng nhất, cho đến hàng trăm, thậm chí cả ngàn hàm.

Nhiều phần mềm tính toán khoa học như MAPLE cũng có thể tính được rất nhiều nguyên hàm của các hàm sơ cấp. Ví dụ, theo MAPLE thì (xem [1])

d. Tích phân eliptic

$$\int \frac{e^x}{x}dx;\ \int \frac{\sin x}{x}dx;\ \int \frac{1}{\ln x}dx;\ \int \frac{dx}{\ln x};\ \int \sqrt{x^3+1}\,dx;$$

$$\int e^{-x^2}dx;\ \int \cos x^2 dx;\ \int \sin x^2\,dx...$$

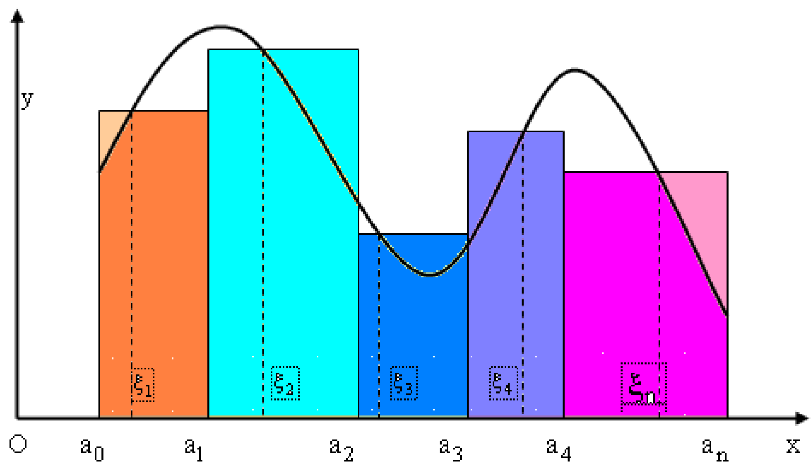
§ 3.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (2 tiết)

3.2.1. Định nghĩa và các tính chất mở đầu

Định nghĩa. Cho f(x) xác định trên đoạn [a, b]. Xét phép phân hoạch đoạn [a, b] xác định bởi các điểm chia liên tiếp $x_0, x_1, ..., x_n$ với

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ là độ dài của đoạn con thứ i $[x_{i-1}, x_i]$. Trên mỗi đoạn con này lấy một điểm ξ_i tùy ý. Tổng



Hình 3.2. *Một tổng tích phân*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

được gọi là một tổng tích phân của hàm f(x) ứng với phép phân hoạch và cách chọn các điểm trung gian (ξ_i) đã nêu.

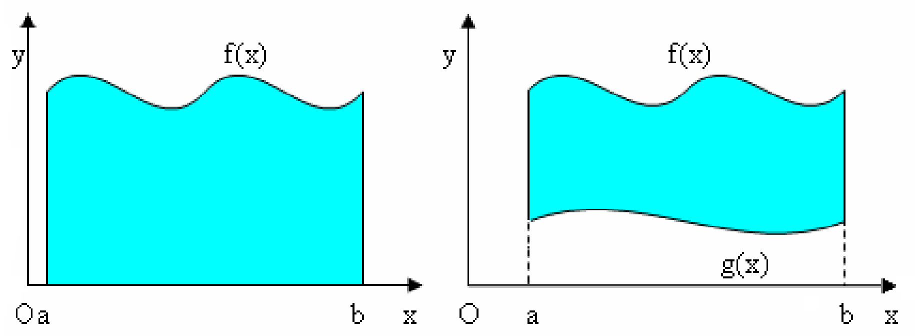
Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\lambda_n = \underset{1\le i\le n}{\mathrm{Max}}\,\Delta x_i \to 0$ mà S_n có giới hạn I hữu hạn, không phụ thuộc vào phép phân hoạch đoạn [a, b] và cách chọn các điểm (ξ_i) thì giới hạn I được gọi là tích phân (xác định) của hàm f(x) trên [a, b] và được kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Khi đó hàm f(x) được gọi là khả tích (Riemann) trên đoạn [a, b]; f(x) là hàm dưới dấu tích phân, x là biến lấy tích phân, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân.

* Quy ước $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Ý nghĩa hình học. $f(x) \ge 0$ liên tục: $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục Ox và 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Tổng quát, diện tích miền cho bởi $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



Hình 3.3. *Diện tích hình thang cong*

Tính chất sơ bộ

Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] thì bị chặn trên đó.

3.2.2. Các lớp hàm khả tích

Định lý 3.5. Hàm số f(x) liên tục trên [a, b] thì khả tích trên đó.

Định lý 3.6. Hàm số f(x) bị chặn trên [a, b] và có không quá một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đoạn này thì khả tích trên đó.

Hàm số f(x) được gọi là liên tục từng khúc trên [a, b] nếu nó liên tục tại tất cả các điểm trên [a, b] có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm, tại đó hàm có gián đoạn loại I.

Hệ quả. Hàm liên tục từng khúc trên [a, b] thì khả tích trên đó.

Chú ý. Điều kiện rộng rãi nhất của khả tích là:

Hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] khi và chỉ khi nó bị chặn, tập các điểm gián đoạn của nó có độ đo Lesbegue bằng không.

Ví dụ 3.13. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Hàm này bị chặn, chỉ có một điểm gián đoạn (loại II) tại $x = 0$. Vậy hàm này khả tích trên đoạn [a, b] bất kỳ. Đồ thị hàm này đã cho ở Hình 1.22. #

Định lý 3.7. Hai hàm số f(x) và g(x) trên đoạn [a, b] chỉ khác nhau một số hữu hạn điểm thì chúng cùng khả tích hoặc không trên đoạn $[a, b]$. Nếu chúng khả tích thì tích phân của chúng bằng nhau:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Hệ quả. Tính khả tích và giá trị của tích phân (nếu có) của hàm số không thay đổi nếu ta thay đổi giá trị của hàm số tại một số hữu hạn điểm.

Định lý 3.8 (Tính khả tích của hàm hợp). Giả sử

(i) $y = f(u)$ là hàm khả tích trên đoạn [A, B].

(ii) $u = u(x),\ x \in [a, b]$ là hàm liên tục và có tập giá trị chứa trong [A, B].

Khi đó hàm hợp $y = f(u(x)),\ x \in [a, b]$ khả tích.

Hệ quả. Nếu f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a, b] thì tích $f(x)g(x)$ và hàm trị tuyệt đối $|f(x)|$ cũng khả tích trên [a, b].

Định lý 3.9. Hàm đơn điệu và giới nội trên đoạn [a, b] thì khả tích trên đó.

Ví dụ 3.14. $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq \pm 1 \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$

Hàm này gián đoạn chỉ tại hai điểm ± 1, bị chặn trên đoạn hữu hạn [a, b] bất kỳ. Vậy nó khả tích trên [a, b]. Ta có

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx = 0. \qquad \#$$

Ví dụ 3.15. Tính tích phân $\int_1^2 e^x dx$ theo phương pháp tổng tích phân.

Giải. Hàm số e^x liên tục nên tích phân tồn tại. Ta hãy chọn cách chia đặc biệt, đó là chia đều đoạn [1, 2] thành n đoạn bởi các điểm chia

$$1 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 2; \quad x_i = 1 + i/n.$$

Chọn ξ_i là mút trái x_{i-1} của đoạn $[x_{i-1}, x_i]$. Lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{x_{i-1}} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} e^{1+\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} e \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{e}{n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$$

Khi $n \to \infty$ thì rõ ràng là $\lambda = \operatorname{Max} \Delta x_i = 1/n \to 0$. Vậy

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = e(1-e) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1-e^{1/n}}{1/n}} = e^2 - e. \qquad \#$$

Dùng tích phân xác định chúng ta có thể tính được giới hạn của một số tổng. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 3.16. Cho hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ xác định bởi

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1+\sin\frac{2\pi}{2n}} + ... + \frac{1}{1+\sin\frac{n\pi}{2n}} \right);$$

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)^{-1/4}.$$

Mô tả các dãy này như là tổng tích phân rồi tìm giới hạn của dãy.

Giải. * a_n là tổng tích phân của hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}$ trên $[0,1]$ với phép chia đều $[0,1]$ thành n đoạn và chọn điểm ξ_i tại đầu mút phải của đoạn $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. Bởi vì độ dài các đoạn con bằng nhau và bằng $\frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$, hàm f(x) liên tục, vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin\frac{\pi x}{2}} = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\left(\tan\frac{\pi x}{4}+1\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{4}} dx = -\frac{4}{\pi}\, \frac{1}{\tan\frac{\pi x}{4}+1}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

* b_n là tổng tích phân của hàm $f(x) = (1+x)^{-1/4}$ trên đoạn [0, 2] với phép chia đều đoạn [0, 2] thành n đoạn con $\left[0, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n}\right]$, điểm trung

gian ξ_i là trung điểm của đoạn $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$.

Vì $h = \frac{2}{n} \to 0\ (n \to \infty)$, hàm f(x) liên tục, vậy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^2 (1+x)^{-1/4} dx = \frac{4}{3}\left(3^{3/4}-1\right). \qquad \#$$

3.2.3. Các tính chất của tích phân xác định

Định lý 3.10 *(Tính chất tuyến tính).* Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên đoạn [a, b] còn α và β là hai số thực tùy ý. Khi đó hàm $\alpha f(x) + \beta g(x)$ cũng khả tích trên [a, b] và

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \;. \qquad (3.7)$$

Hệ quả. Giả sử f(x) và g(x) là những hàm khả tích trên đoạn [a, b] còn C là một số thực. Khi đó:

$$\int_a^b dx = b - a,$$

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx;$$

$f(x) \pm g(x)$ khả tích và

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,. \qquad (3.8)$$

Định lý 3.11** (Hệ thức Chasles).** Hàm f(x) khả tích trên [a, b] khi và chỉ khi nó khả tích trên mỗi đoạn con bất kì. Khi đó

$$\forall c \in [a, b],\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ . \qquad (3.9)$$

Mở rộng. Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] còn $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là các điểm trên [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx\,. \qquad (3.10)$$

***Định lý 3.12** (Tính dương của tích phân)*

Nếu f(x) không âm và khả tích trên đoạn [a, b] thì $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Hệ quả. (i) Cho f(x) và g(x) khả tích trên [a; b], ngoài ra $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(ii) Cho f(x) khả tích [a, b]. Đặt $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a,\,b]} f(x)$; $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,\,b]} f(x)$. Khi đó

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\,. \qquad (3.11)$$

***Định lý 3.13*.** Cho f(x) không âm và khả tích trên [a, b]. Giả sử có $x_0 \in [a, b]$ sao cho f(x) liên tục tại x_0 và $f(x_0) > 0$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Định lý 3.14. Nếu hàm số f(x) khả tích trên [a, b] thì hàm số |f(x)| cũng khả tích trên đó và

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3.12}$$

Định lý 3.15 *(Định lý trung bình thứ nhất của tích phân)*

Cho hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] và m, M là hai số thực sao cho $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a, b]$. Khi đó tồn tại $\mu \in [m, M]$ để

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\,. \tag{3.13}$$

Đặc biệt, nếu hàm f(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì $\exists c \in (a, b)$ để

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad \left(\Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right). \tag{3.14}$$

Chứng minh. Theo tính chất của tích phân,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Leftrightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,.$$

Chọn $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sẽ thỏa mãn tính chất đòi hỏi.

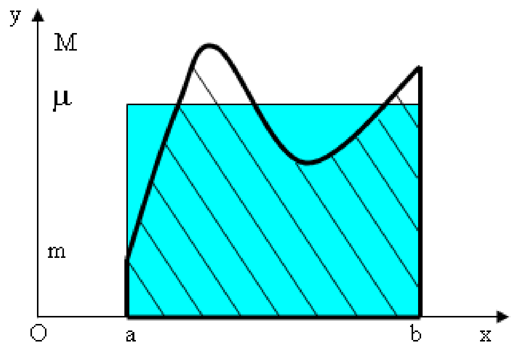
Nếu bây giờ hàm f(x) liên tục, tồn tại hai giá trị $m = \underset{x\in[a,\,b]}{\text{Min}}\ f(x)$; $M = \underset{x\in[a,\,b]}{\text{Max}}\ f(x)$. Vì $\mu \in (m, M)$, từ Định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $c \in (a, b) : f(c) = \mu$. □

Ý nghĩa hình học

Diện tích hình thang cong = Diện tích hình chữ nhật trung gian. Vậy:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

và được gọi là giá trị trung bình của hàm f(x) trên đoạn [a, b].



Hình 3.4. *Giá trị trung bình của hàm f(x) trên đoạn [a; b]*

Định lý 3.16 *(Định lý trung bình thứ hai của tích phân)*

Nếu f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên đoạn [a, b], còn g(x) giữ dấu trên [a, b] thì có điểm $\mu \in [m, M]$ với $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a,\,b]} f(x)$; $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,\,b]} f(x)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx \; . \qquad (3.15)$$

Đặc biệt, nếu f(x) và g(x) liên tục trên [a; b], $g(x)\geq 0$ thì có $c\in(a, b)$

để
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \, . \qquad (3.16)$$

Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:

Làm bài tập theo kế hoạch: **Các ứng dụng của ĐH (1 tiết)**
Tích phân bất định (1 tiết)

Đọc trước TL[1], tr 199-203: Tích phân xác định (tiếp)

Tự đọc TL [1]: Sử dụng bảng tích phân và phần mềm
Tích phân eliptic

Bài giảng 9: Tích phân xác định (tiếp) - ứng dụng

Chương 3: Tích phân

Mục: § 3.2 TP xác định (tiếp – 2t)
§ 3.3 Ứng dụng của TP XĐ (1t)
Bài tập: Tích phân bất định (1 tiết)
Tích phân XĐ (1 tiết)

Tiết thứ: 41 - 45, Tuần thứ: 9

- Mục đích, yêu cầu:

Nắm được cách tính TPXĐ chủ yếu như sử dụng công thức N-L, đặt, đổi biến, TP từng phần.

Nắm được cách tính diện tích hình phẳng, độ dài đường cong, diện tích mặt cong, thể tích vật thể. Một vài ứng dụng cơ học, và ứng dụng khác.

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t
- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
- **Nội dung chính:**

§ 3.2. TP XÁC ĐỊNH (tiếp - 2 tiết)

3.2.4. Cách tính tích phân xác định

a. Công thức Newton-Leibniz

a.1. Tích phân xác định với cận trên biến thiên

Cho hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b]. Khi đó, với mọi x trên đoạn này, f(x) khả tích trên [a, x]. Đặt

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \ x \in [a, b], \tag{3.17}$$

và gọi là tích phân xác định với cận trên biến thiên.

Chúng ta dễ dàng hiểu khái niệm tích phân xác định với cận dưới biến thiên $\int_x^b f(t)dt$.

Định lý 3.17

(i) Nếu hàm f(x) khả tích trên [a, b] thì $\Phi(x)$ liên tục trên [a, b].

(ii) Nếu f(x) khả tích trên [a; b] và liên tục tại $x_0 \in [a, b]$ thì $\Phi(x)$ khả vi tại x_0 và $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Chứng minh. (i) Xét h đủ nhỏ sao cho $x_0 + h \in [a, b]$. Để đơn giản trình bày ta giả sử $x_0 \in (a; b)$ và $h > 0$. Ta có

$$\Delta\Phi = \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Theo định lý trung bình thứ nhất thì

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \mu h \tag{*}$$

trong đó $\mu \in [m', M']$ với $m' = \inf\limits_{x\in[x_0, x_0+h]} f(x);\ M' = \sup\limits_{x\in[x_0, x_0+h]} f(x)$.

Do $[m', M'] \subset [m, M]$ với $m = \inf\limits_{x\in[a, b]} f(x);\ M = \sup\limits_{x\in[a, b]} f(x)$ nên μ bị chặn. Cho qua giới hạn ta được

$$\lim_{h\to 0}[\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] = \lim_{h\to 0} \mu h = 0.$$

Vậy $\Phi(x)$ liên tục tại x_0.

(ii) □

Hệ quả *(Định lý cơ bản của giải tích)*

(i) Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a, b] thì $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b]:

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x),\ \forall x\in[a,b]. \tag{3.18}$$

(ii) Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và F(x) là một nguyên hàm của nó trên đoạn này thì

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \tag{3.19}$$

(Công thức Newton - Leibniz).

Chứng minh. (i) Trực tiếp áp dụng phần (ii) của Định lý.

(ii) Theo (i), $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ là một nguyên hàm của f(x) trên [a, b]. Mặt khác, F(x) cũng là một nguyên hàm của f(x). Theo Định lý 3.1, tồn tại hằng số C để $\Phi(x)=F(x)+C,\ \forall x\in[a,b]$.

Vậy $0=\Phi(a)=F(a)+C\Rightarrow C=-F(a)$. Ta nhận được

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)=F(b)+C=F(b)-F(a).$$ □

Lưu ý: Phải kiểm tra tính liên tục của hàm f(x).

Ví dụ 3.17. (i). $I=\int_a^b x^\alpha\,dx\quad(a,b>0;\ \alpha\neq-1)$.

$$I=\int_a^b x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b=\frac{1}{\alpha+1}\left[b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}\right].$$

(ii) $$\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}=\int_2^4\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+6}}$$

$$= \ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}\right)\Big|_2^4 = \ln\frac{6 + \sqrt{42}}{4 + \sqrt{22}}.$$

$$\text{(iii)}\ \ I = \int_{-3}^{2}\left|\frac{x}{x+4}\right|dx = -\int_{-3}^{0}\frac{x}{x+4}dx + \int_{0}^{2}\frac{x}{x+4}dx.$$

Vì $\int\frac{x}{x+4}dx = \int\left(1 - \frac{4}{x+4}\right)dx = x - 4\ln|x+4| + C$ nên

$$I = -\left(x - 4\ln|x+4|\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(x - 4\ln|x+4|\right)\Big|_0^2 = 2\ln 4 - \ln 6 - 1.\ \ \#$$

Ví dụ 3.18. Chỉ ra sai lầm trong trính toán sau đây:

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}\Big|_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Dùng đạo hàm theo cận trên và quy tắc đạo hàm hàm hợp ta nhận được

Hệ quả. Nếu f(x) là hàm liên tục trên đoạn [a, b], còn g(x) và h(x) là những hàm khả vi liên tục và nhận giá trị trên đoạn [a, b] thì

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{k(x)} f(t)\,dt\right] = f(k(x))\,k'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{h(x)}^{b} f(t)\,dt\right] = -f(h(x))\,h'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{h(x)}^{k(x)} f(t)\,dt\right] = f(k(x))\,k'(x) - f(h(x))\,h'(x). \tag{3.20}$$

Ví dụ 3.19. Áp dụng (3.20) chúng ta có thể tính các đạo hàm

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b \sin^2 x\,dx\right);\quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x \sin^2 t\,dt\right);\quad \frac{d}{dx}\left(\int_x^b \sin^2 t^2\,dt\right);$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{x^2} \sin t^2\,dt\right);\quad \frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} \sin^2 t\,dt\right)$$

và kết quả là $0;\ \sin^2 x;\ -\sin^2 x^2;\ 2x\sin x^4;\ 2x\sin^2 x^2 - \sin^2 x.$ #

Ví dụ 3.20. Tính các giới hạn

(i) $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x-2}\displaystyle\int_2^x \ln t\,dt$. (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin^3 x \;/\; \displaystyle\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.

b. Phương pháp đổi biến

Định lý 3.18. Giả sử :

(i) Hàm số f(x) liên tục trên khoảng suy rộng J chứa hai điểm a, b.

(ii) Hàm số x(t), $t\in[\alpha,\beta]$ có đạo hàm $x'(t)$ liên tục và giữ dấu (hoặc có thể đổi dấu hữu hạn lần) trên $[\alpha,\beta]$, tập giá trị $x([\alpha,\beta])$ của nó nằm trong J và $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt. \tag{3.21}$$

Như vậy, khi cần tính tích phân ở vế trái, ta tìm phép đổi biến $x = x(t)$ phù hợp sao cho tích phân ở vế phải (3.21) tính thuận lợi.

Chúng ta sử dụng tất cả các phép đổi biến như khi tìm nguyên hàm; ngoài ra ta có phép đổi biến "đảo cận" rất hiệu quả sau đây:

$$\int_0^a f(x)dx: \quad \text{Đặt} \quad x = a - t \;(\Leftrightarrow t = a - x);$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx: \qquad x = -t \;(\Leftrightarrow t = -x);$$

$$\int_a^b f(x)dx: \qquad x = (a+b) - t \;(\Leftrightarrow t = (a+b) - x);$$

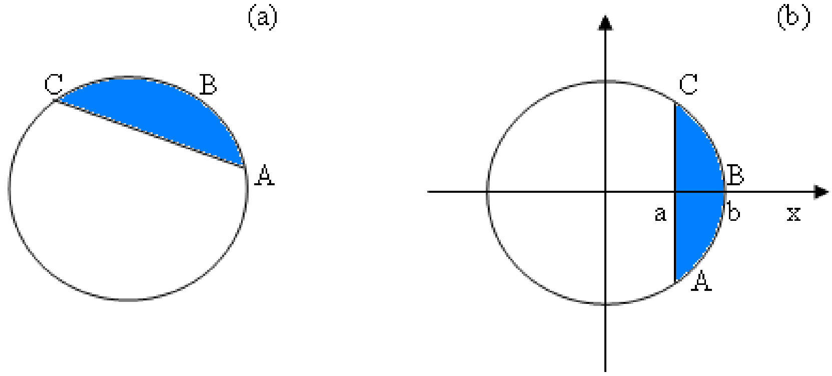
$$\int_0^\infty f(x)dx: \qquad x = \frac{1}{t}.$$

Ví dụ 3.21. Cho hàm f(x) khả tích trên đoạn $[-a, a]$. Khi đó

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nÕu f(x) lÎ,} \\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & \text{nÕu f(x) ch½n.} \end{cases} \tag{3.22}$$

Ví dụ 3.22 Tính diện tích hình viên phân ABC ở Hình 3.5 a.

Giải. Lập hệ trục như Hình 3.5b. Cung $\overset{\frown}{BC}$ có phương trình $y = \sqrt{b^2 - x^2}$. Từ tính đối xứng, ta có $S = 2S_1 = 2\int_a^b \sqrt{b^2 - x^2}\,dx$.



Hình 3.5. *Hình viên phân ở Ví dụ 3.22*

Đặt $x = b\sin t \Leftrightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{b}$; $t : \alpha \to \pi/2$ $(\alpha = \arcsin\dfrac{a}{b})$; $dx = b\cos t\,dt$.

$$S = 2\int_{\alpha}^{\pi/2} b^2\cos^2 t\,dt = b^2(t + \sin t\cos t)_{\alpha}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}b^2 - b^2\arcsin\frac{a}{b} - a\sqrt{b^2 - a^2}\ .\#$$

Ví dụ 3.23 (i) Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

(ii) Tính tích phân $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}dx$.

Giải. (i) Chỉ việc đặt $x = \pi/2 - t$.

(ii) Đặt $t = 6 - x \Leftrightarrow x = 6 - t;\ dx = -dt$

$$I = \int_4^2 \ldots = \int_2^4 \ldots \Rightarrow 2I = \int_2^4 1dt = 2 \Leftrightarrow I = 1.$$

Nhận xét. Thực ra theo quy nạp có thể thấy rằng

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}.\dfrac{\pi}{2} & \text{khi n ch½n} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{khi n lÎ.} \end{cases} \qquad (3.23) \qquad \#$$

c. Phương pháp đặt biến

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(u(x))u'(x)dx = \int_a^b g(u(x))d(u(x)) = G(\varphi(x))\Big|_a^b$$

trong đó G(u) là một nguyên hàm của hàm g(u).

Ví dụ 3.24. Tính các tích phân

$$\text{(a)}\ \int_{-1}^{2} x\cos(x^2)\,dx\,; \qquad \text{(b)}\ I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}\quad (0<\alpha<\pi).$$

Giải. (a) Cách I. $\int_{-1}^{2} x e^{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x e^{x^2}\,dx + \int_{1}^{2} x e^{x^2}\,dx$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{1}^{2} e^{x^2}\,d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{e^4-e}{2}.$$

Cách II. $\int_{-1}^{2} x e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2} e^{x^2}\,d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{-1}^{2}=\frac{e^4-e}{2}.$

(b) Do $\alpha\in(0;\pi)$ nên $x^2-2x\cos\alpha+1>0$. Vậy hàm dưới dấu tích phân liên tục trên [-1; 1].

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.\ \#$$

d. Tích phân từng phần

Khi cần tính tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$, ta cố gắng viết hàm f(x) dưới dạng $f(x)=u(x)v'(x)$ trong đó u(x), v(x) là những hàm khả vi liên tục. Khi đó

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=(u(b)v(b)-u(a)v(a))-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

hay viết gọn lại dưới dạng

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \qquad (3.24)$$

Ví dụ 3.25. Tính các tích phân sau

(i) $\int_1^e x^{999}\ln x\,dx=\frac{1}{1000}\int_1^e \ln x\,dx^{1000}$

$$=\frac{1}{1000}\left(x^{1000}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^{999}\,dx\right)=\frac{999e^{1\,000}+1}{1\,000\,000}.$$

(ii) $\int_0^{\pi/3} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} (x+\sin x) d(\tan x)$

$$= (x+\sin x)\tan x \Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x(1+\cos x) dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx - \int_0^{\pi/3} \sin x\, dx = ... = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1 - \ln 2.$$

(iii) $I = \int_{3\pi/4}^{\pi} (\tan^2 x - \tan x) e^{-x} dx$.

$$I = \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan^2 x\, e^{-x} dx - \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x\, e^{-x} dx = I_1 - I_2.$$

$$I_2 = \int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x\, e^{-x} dx = -\int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x\, d(e^{-x})$$

$$= \tan x\, e^{-x} \Big|_{3\pi/4}^{\pi} + \int_{3\pi/4}^{\pi} e^{-x}(1+\tan^2 x) dx$$

$$= -e^{-\pi} + I_1 \Rightarrow I = I_1 - (-e^{-\pi} + I_1) = e^{-\pi}.$$ #

Lưu ý. (i) Với tích phân bất định chúng ta có 6 dạng có thể tính tích phân từng phần thuận lợi (xem Bảng 3.3). Với tích phân xác định 6 dạng đã nêu cũng có thể tính theo phương pháp tích phân từng phần.

(ii) Có thể ta không phải đưa bất kì thừa số nào vào dấu d(.), nói cách khác, ta đặt $u = f(x)$, $v = x$; đôi khi điều này rất hiệu quả.

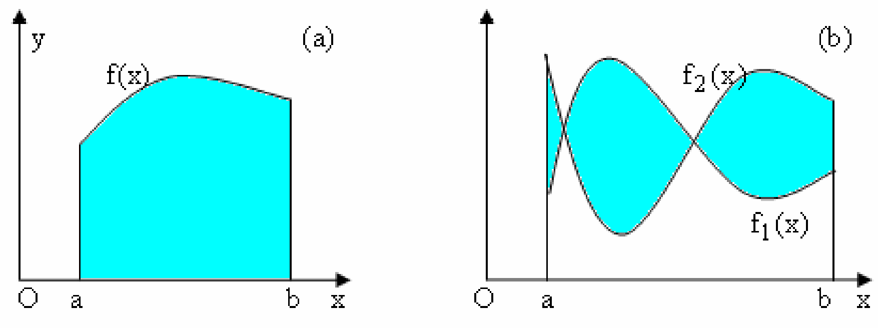
3.2.5. Tính gần đúng tích phân xác định (xem [1])

§ 3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (1 tiết)

3.3.1. Tính diện tích hình phẳng

a. Trong tọa độ Descartes

Khi các hàm $f(x), f_1(x), f_2(x)$ liên tục, diện tích hình phẳng ở các Hình 3.9a, 3.9b cho bởi công thức



Hình 3.9. *Hình phẳng trong tọa độ Descartes*

$$S_{(a)} = \int_a^b f(x)\,dx; \qquad S_{(b)} = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx. \qquad (3.31)$$

b. Đường cong dưới dạng tham số

Khi cần tính diện tích hình phẳng ở Hình 3.9a mà đường cong (L) cho dưới dạng tham số $(L): x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, còn các hàm $y(t), x'(t)$ liên tục, $x'(t)$ **giữ dấu**.

- Nếu điểm $(x(\alpha), y(\alpha))$ là đầu mút trái của (L) $(\Leftrightarrow x'(t) \ge 0)$ thì:

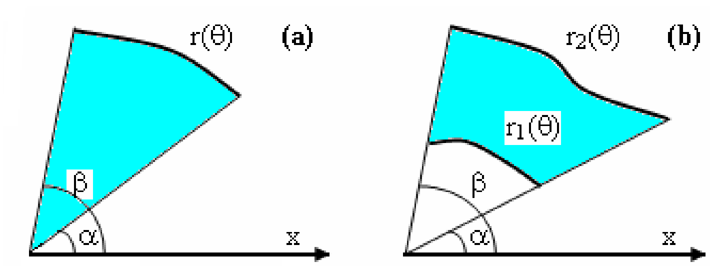
$$S = \int_\alpha^\beta |y(t)|\, x'(t)\,dt$$

- Nếu điểm $(x(\alpha), y(\alpha))$ là đầu mút phải của (L) $(\Leftrightarrow x'(t) \le 0)$ thì:

$$S = -\int_\alpha^\beta |y(t)|\, x'(t)\,dt \qquad (3.32)$$

Có cách tính cho trường hợp tổng quát hơn.

c. Đường cong cho dưới dạng tọa độ cực



Hình 3.10. *Hình cong phẳng cho trong tọa độ cực*

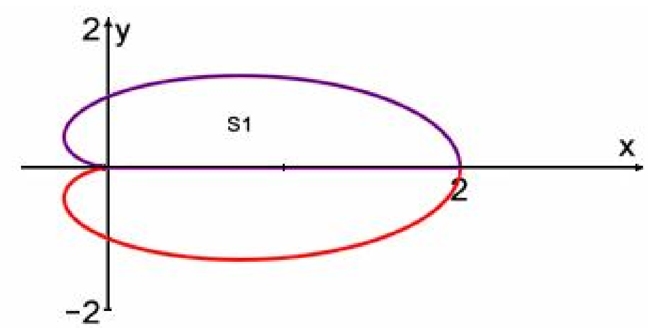
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta. \qquad (3.33)$$

Trường hợp tổng quát hơn ở Hình 3.10 (b) thì

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)\right] d\theta. \tag{3.34}$$

Ví dụ 3.26. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi cung hình tim (cardioid) $r = a(1+\cos\varphi)$.

Giải. Do tính đối xứng, $S = 2S_1 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = ... = \frac{3}{2}\pi a^2$. #



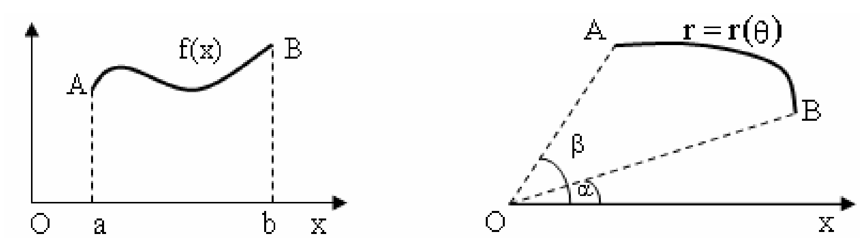
Hình 3.11. *Cardioid khi a = 1*

3.3.2. Tính độ dài đường cong

a. Đường cong cho dưới dạng tọa độ Descartes

Nếu đường cong (L) là đồ thị của hàm số $y = f(x),\ x \in [a, b]$ thì

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{3.35}$$



Hình 3.12. *Đường cong dạng tọa độ Decates (a) và dạng tọa độ cực (b)*

b. Đường cong cho dưới dạng tham số

$$(L): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

thì $$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

(3.36)

Trường hợp đường cong trong không gian cho dưới dạng tham số

$$(L):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t), \quad \alpha\le t\le\beta\end{cases} \Rightarrow s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

c. Đường cong dưới dạng tọa độ cực

$r=r(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta.$

Chuyển sang dạng tham số ta được

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=r(\theta)\cos\theta\\ y=r\sin\theta=r(\theta)\sin\theta,\ \alpha\le\theta\le\beta.\end{cases}$$

Áp dụng công thức (3.36) thì

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta. \qquad (3.37)$$

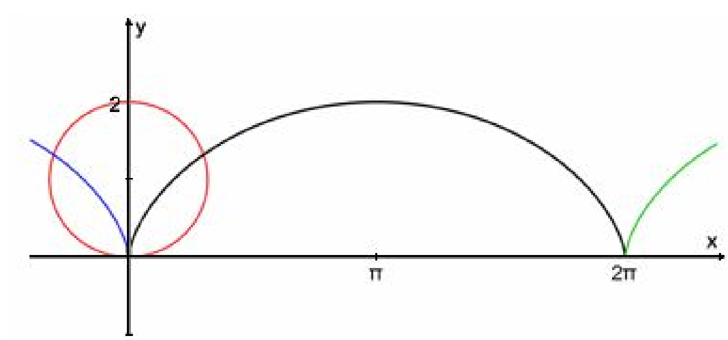
Ví dụ 3.27. Tính độ dài một chu kỳ của đường cycloide

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t), \quad (a>0).\end{cases}$$

Đây là tọa độ của điểm trên biên của bánh xe bán kính a lăn không trượt trên mặt phẳng (xem Hình 3.13).

Ta xét chu kỳ đầu, khi ấy $0\le t\le 2\pi$. Vậy

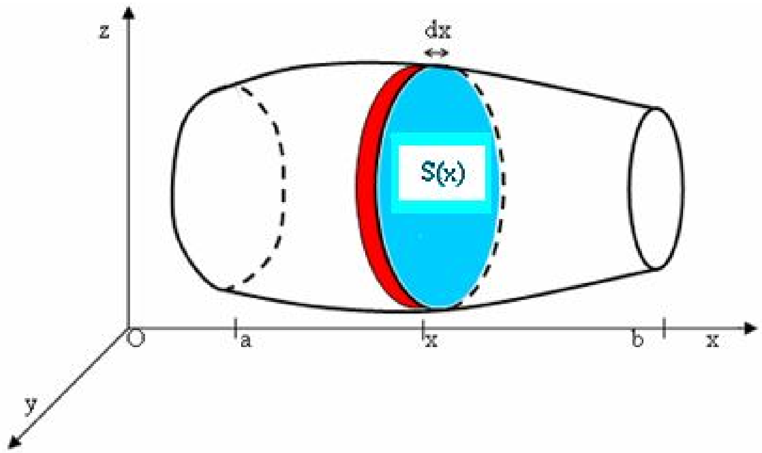
$$s=\int_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}a\sin\frac{t}{2}dt=8a. \qquad \#$$



Hình 3.13. *Đường cycloide với a = 1*

3.3.3. Tính thể tích vật thể

a. Trường hợp tổng quát.



Hình 3.14. *Vật thể trong không gian với vi phân thể tích*

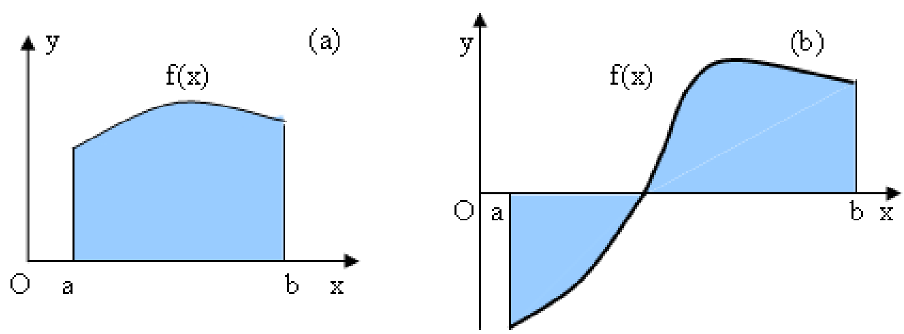
$$V = \int_a^b dV = \int_a^b S(x)dx.$$

(3.38)

b. Thể tích vật thể tròn xoay

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

(3.39)



Hình 3.15. *Hình thang cong tạo ra vật thể tròn xoay*

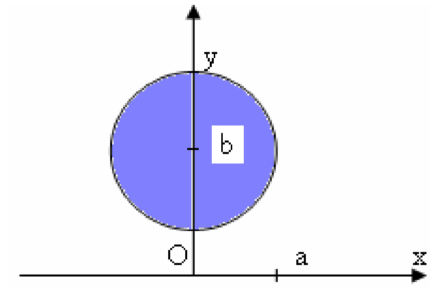
3.3.4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Giả sử (L) là đồ thị hàm số $y = f(x),\ a \le x \le b,$ với $f(x), f'(x)$ là những hàm liên tục trên đoạn [a, b]. Cho (L) quay xung quanh trục Ox ta được mặt tròn xoay.

Dùng lược đồ vi phân ta thu được công thức tính diện tích mặt tròn xoay:

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (3.40)$$

Ví dụ 3.28. Tính diện tích hình xuyến (hình vòng khuyên) sinh ra bởi đường tròn $x^2+(y-b)^2=a^2$, $(b>a)$ quay quanh trục Ox.



Ta có

$S = S_1 + S_2$

$(S_1):\quad y = b+\sqrt{a^2-x^2},$

$(S_2):\quad y = b-\sqrt{a^2-x^2}.$

Trong cả hai trường hợp thì $y'^2 = \dfrac{x^2}{a^2-x^2}$. Vậy

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$+2\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 8\pi^2 ab. \qquad \#$$

Lưu ý. Nếu khối tròn xoay, mặt cong, ... nhận được do quay hình phẳng, đường cong ... quanh trục Oy thì cần chuyển sang biến y, hàm là $x = x(y)$.

3.3.5. Các áp dụng khác của tích phân (☼)

Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:

Làm bài tập theo kế hoạch: **Tích phân bất định (1 tiết)**

Tích phân XĐ (1 tiết)

Đọc trước TL[1], tr 236-232: Tích phân suy rộng

Tự đọc TL [1]: 212-214: Tính gần đúng tích phân xác định.

Bài giảng 10: Tích phân suy rộng

Chương 3: Tích phân

Mục: § 3.4. Tích phân suy rộng (2t)

Ôn tập (1 tiết)

Bài tập: Cách tính TPXĐ (1 tiết)

Ứng dụng của TP (1tiết)

Tiết thứ: 46 - 50, Tuần thứ: 10

- **Mục đích, yêu cầu**:

Nắm chắc định nghĩa 2 loại TP suy rộng

Một số tiêu chuẩn hội tụ

Hệ thống hóa chương III

- **Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.

- **Nội dung chính:**

§ 3.4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG (2 tiết)

3.4.1. Tích phân với cận vô hạn (Tích phân suy rộng loại I)

a. Định nghĩa

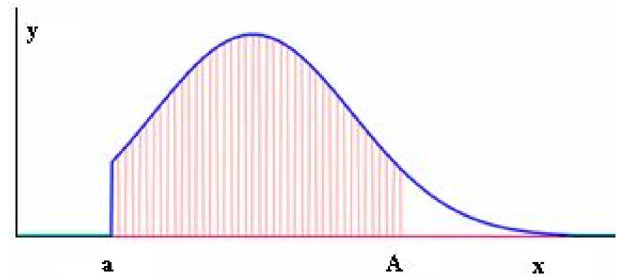
* Cho hàm số $f(x),\ x \in [a, +\infty)$. Biểu thức hình thức $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là tích phân suy rộng (loại I) của hàm f(x) trên $[a, +\infty)$.

Giả sử hàm f(x) khả tích trên [a, A], $\forall A > a$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, có giá trị bằng I, và ta viết $\int_a^{+\infty} f(x)dx = I$.

Trái lại, khi không tồn tại giới hạn hoặc giới hạn vô hạn, ta nói tích phân suy rộng phân kì.



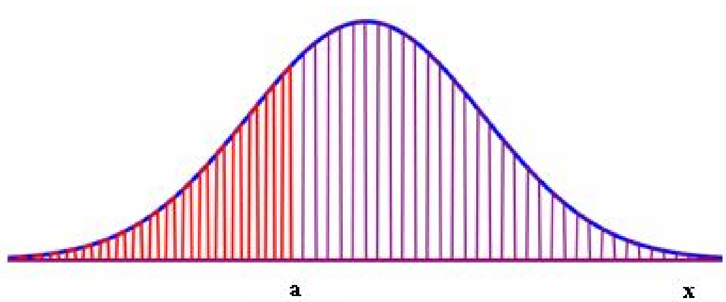
Hình 3.16. *Hình thang cong vô hạn như là giới hạn của hình thang cong hữu hạn*

Chúng ta dễ dàng hiểu ý nghĩa của tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

* Nếu với $a \in \mathbb{R}$ nào đó, cả hai tích phân suy rộng $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, ta nói tích phân $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ hội tụ và giá trị của nó được tính bởi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx. \tag{3.42}$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hoặc $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kì, ta nói tích phân $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ phân kì. Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian a.



Hình 3.17. *Hình thang cong vô hạn 2 phía*

b. Công thức Newton-Leibniz.

Nếu f(x) liên tục trên $[a, +\infty)$ và F(x) là một nguyên hàm của nó thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (3.43)$$

trong đó $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Ví dụ 3.32. Tính tích phân $I = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

Giải. Ta có $\int_0^A xe^{-x}dx = -\int_0^A x\,d(e^{-x}) = -x\,e^{-x}\Big|_0^A + \int_0^A e^{-x}\,dx$

$$= -Ae^{-A} + 0 - e^{-A} + 1 \to 1 \text{ (khi } A \to \infty)$$

Trình bày lại:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{\infty} x\,d(e^{-x}) = -x\,e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 0 + 0 - e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1. \ \#$$

Ví dụ 3.33. Khảo sát sự hội tụ và tính giá trị (nếu có) của p-tích phân

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0).$$

Giải. Với $p = 1$, tích phân trở thành $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\,\Big|_a^{\infty} = \infty$.

Với $p \neq 1$, $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$

Tóm lại,

$p \le 1$: Tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ phân kỳ

$p > 1$: Tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$. #

c. Tiêu chuẩn hội tụ

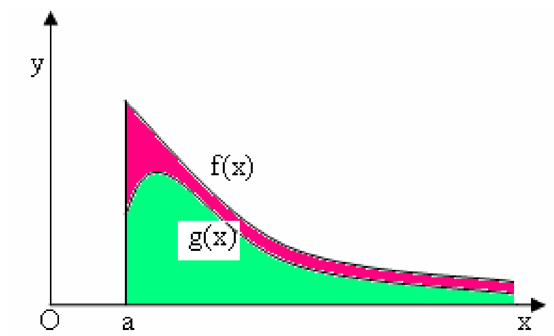
Định lý 3.20. Cho hàm f(x) không âm và khả tích trên đoạn [a, A] bất kỳ, $a < A$. Khi đó:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_a^{A} f(x)dx$ bị chặn (theo A).

Định lý 3.21 *(Tiêu chuẩn so sánh).* Cho f(x) và g(x) là hai hàm khả tích trên [a, A], $(a < A)$, ngoài ra $0 \le f(x) \le g(x)$.

+ Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ ;

+ Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.



Hình 3.18. *So sánh diện tích 2 miền*

Hệ quả. Nếu f(x), g(x) liên tục, không âm và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\quad 0 < k < \infty$$

thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

(iii) Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow p > 1$, người ta hay so sánh f(x) với $\frac{1}{x^p}$:

Nếu khi $x \to +\infty$, f(x) ~ $\frac{A}{x^p}$ $(A \ne 0)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow p > 1$.

Ví dụ 3.35. Xét sự hội tụ của tích phân (i) $\int_a^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$, (ii) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Giải. (i) Khi $x \to \infty$ thì $\dfrac{x^{3/2}}{1+x^2} = \dfrac{1}{(1/x^2+1)}\dfrac{1}{x^{1/2}} \sim \dfrac{1}{2x^{1/2}}$.

Vì $p = 1/2 < 1$ nên tích phân phân kỳ.

(ii) Khi $x \to \infty$ thì $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$.

Vì $p = 3/2 > 1$ nên tích phân hội tụ. #

d. Hội tụ tuyệt đối

Định lý 3.23. Giả sử f(x) khả tích trên đoạn [a, A], $\forall$A > a.

Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Chẳng hạn, để xét sự hội tụ của tích phân $\int_2^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}dx$ ta thấy

$0 \le \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$, $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ hội tụ (vì p = 2 > 1).

Theo tiêu chuẩn so sánh tích phân $\int_2^{+\infty} \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|dx$ hội tụ, từ đó tích phân $\int_a^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ.

Định nghĩa. Đối với hàm f(x) khả tích trên đoạn [a, A] tùy ý, nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ, ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Trái lại, nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ còn tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ không hội tụ, ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là bán hội tụ hay hội tụ không tuyệt đối, hay hội tụ có điều kiện.

3.4.2. Tích phân của hàm không bị chặn (Tích phân suy rộng loại II)

Cho hàm số f(x) xác định trên [a; b), không giới nội lại lân cận điểm b. Biểu thức hình thức $\int_a^b f(x)dx$ gọi là tích phân suy rộng (loại II) của hàm f(x) trên [a, b).

Giả sử f(x) khả tích trên $[a, b-\eta]$, $\forall \eta > 0$ đủ nhỏ. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx,$$

thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ, có giá trị bằng I, và ta viết

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Trái lại, nếu giới hạn đó vô hạn hay không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng phân kì.

* Nếu f(x) khả tích thông thường trên đoạn [a, b] thì theo Định lý cơ bản,

$$\lim_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Trong trường hợp này, tích phân suy rộng (chúng ta đã lạm dụng từ này) chính là tích phân thông thường.

* Tương tự, ta có thể định nghĩa tích phân suy rộng (loại II) cho hàm f(x) không bị chặn tại mút trái a của đoạn [a, b].

* Cho hàm f(x) xác định trên khoảng (a; b), không giới nội tại lân cận điểm a cũng như lân cận điểm b. Nếu có điểm $c \in (a, b)$ sao cho cả hai tích phân $\int_a^c f(x)\,dx$ và $\int_c^b f(x)\,dx$ hội tụ, ta nói tích phân suy rộng (loại II) $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ và giá trị của nó bằng

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3.44}$$

Trái lại, nếu ít nhất một trong hai tích phân $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ phân kì, ta nói tích phân suy rộng (loại II) $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kì.

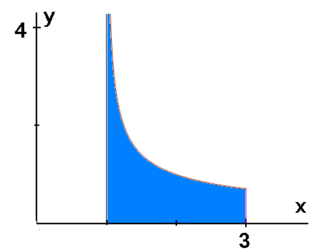
Định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn điểm trung gian c.

Ta còn có thể định nghĩa tích phân suy rộng cho trường hợp điểm bất thường trong khoảng (a, b), hay trường hợp có một số điểm bất thường cũng như tích phân suy rộng hỗn hợp cả loại I và II.

Ví dụ 3.36. Tính diện tích miền nằm dưới đường $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $1 < x \le 3$.

Giải. $S = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1}\Big|_1^3$

$= 2\sqrt{2} = 2.83$ (đvdt).



Ví dụ 3.37. Khảo sát sự hội tụ của p-tích phân $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ (a > 0).

Giải. Tương tự như đã làm ở Ví dụ 3.33, ta thu được kết quả sau

$p < 1$: Tích phân $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ hội tụ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}$.

$p \ge 1$: Tích phân $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ phân kỳ. #

Nhận xét. Tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ phân kỳ với mọi giá trị của p. Thực vậy,

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = I_1 + I_2,$$

trong đó $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$. Khi $p \ge 1$ thì I_1 phân kỳ nên I phân kỳ. Khi $p < 1$ thì I_2 phân kỳ nên I phân kỳ. Như vậy với mọi p, tích phân I phân kỳ.

Định lý 3.24 *(Tiêu chuẩn so sánh).* Giả sử rằng f(x) và g(x) là hai hàm xác định trên $(a;b]$, không giới nội tại lân cận điểm a và khả tích trên $[a+\eta, b]$, $\forall \eta > 0$ đủ nhỏ.

Giả sử $\forall x \in (a; b]$, $0 \le f(x) \le g(x)$. Khi đó:

Tích phân $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kỳ.

Hệ quả. Nếu f(x) và g(x) là hai hàm liên tục, không âm và

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < \infty)$$

thì hai tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả. Nếu f(x) liên tục trên (0; b] và $f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$ (khi $x \to 0^+$) thì

$\int_0^b f(x)\,dx$ hội tụ với p < 1 và phân kì với $p \ge 1$.

Nếu f(x) liên tục trên (a; b] và $f(x) = O\left(\frac{1}{x-a}\right)^p$ (khi $x \to a^+$) thì

$\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ với p < 1 và phân kì với $p \ge 1$.

Ví dụ 3.38. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

a. $\int_1^\infty \sin x^2\,dx$; b. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\frac{x}{x+2}\,dx$.

Đặt biến $x^2 = t$ $(x = \sqrt{t} > 0)$ ta được $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = -\int_1^\infty \frac{d(\cos t)}{2\sqrt{t}} = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\cos t\,dt}{2(-2)t^{3/2}} = \frac{\cos 1}{2} + \frac{-1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{3/2}}.$$

Ta thấy

$0 \le \left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}}$, $p = 3/2 > 1$ nên $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$ hội tụ.

Vậy $\int_1^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{3/2}}$ hội tụ, từ đó tích phân I hội tụ.

Cách 2. Dùng tiêu chuẩn Diriclet.

(b) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\frac{x}{x+2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\frac{x}{x+2}dx = I_1 + I_2$.

* I_1 hữu hạn vì $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\frac{x}{x+2} = 0$.

* $\frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\frac{x}{x+2} \sim \frac{\pi}{4}.\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x \to \infty)$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ phân kỳ. Vậy I_2 phân kỳ.

Do đó tích phân đã cho phân kỳ. #

ÔN TẬP (1 tiết)

TÓM TẮT CHƯƠNG 3 (tự đọc)

TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

- **Bảng các tích phân cơ bản:** Bảng 3.1.
- **Phương pháp tính tích phân bất định**: Biến đổi tương đương, đưa về tích phân cơ bản - Đặt biến - Đổi biến - Tích phân từng phần (có 6 dạng hàm dùng dùng PP tích phân từng phần thuận lợi).
- **Tích phân bất định một số lớp hàm**

Tích phân các phân thức hữu tỷ: + PP thông thường + PP hệ số bất định: Đưa về phân thức thực sự; khai triển f(x) thành tổng các phân thức đơn giản; tích phân các phân thức thu được. (Mẫu là luỹ thừa của nhị thức $x-a$: Tử là hằng ; mẫu là luỹ thừa của tam thức không có nghiệm x^2+px+q: Tử là nhị thức).

Tích phân các biểu thức vô tỷ: Đặt biến căn thức hay lượng giác.

Tích phân các hàm lượng giác.

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

- Nếu hàm số f(x) khả tích trên đoạn [a, b] thì bị chặn trên đó.
- Các lớp hàm khả tích trên đoạn kín: hàm liên tục - hàm đơn điệu, bị chặn - hàm bị chặn, chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn…
- Giới hạn của dãy cho dưới dạng tổng. Viết dãy dưới dạng tổng tích phân: Xác định hàm và kiểm tra tính liên tục, cách chia (thường là chia đều), cách chọn điểm trung gian (mút trái, phải …). Khi đó, giới hạn của tổng là tích phân thích hợp.
- f(x) liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $\exists c \in (a, b)$ để

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

- Hàm f(x) liên tục trên [a, b] thì $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên

hàm của nó trên [a, b]: $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Cách tính tích phân xác định

- **Sử dụng công thức Newton-Leibniz.** $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, $F(x)$ là nguyên hàm trên đó thì $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \triangleq F(b) - F(a)$.
- **Phương pháp đổi biến** **Phương pháp đặt biến**
- **Sử dụng tích phân từng phần**

Diện tích hình phẳng

- ĐC cho trong toạ độ Descates: $S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$.
- ĐC cho dưới dạng tham số: $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

  \+ $x'(t) \ge 0$ (từ trái sang phải), $y(t) \ge 0$: $S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt$;

  \+ $x'(t) \le 0$ (từ phải sang trái), $y(t) \ge 0$: $S = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt$.
- ĐC cho dưới dạng toạ độ cực: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$.

Độ dài đường cong

- ĐC cho trong toạ độ Descates : $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$.
- ĐC cho dưới dạng tham số: $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$.
- **Thể tích:** $V = \int_a^b S(x)\,dx$; **vật thể tròn xoay:** $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.
- **Diện tích mặt tròn xoay:** $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$.

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Các hàm nói đến khả tích trên $[a,\ A],\ \forall A > a$.

- Nếu $I = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ hữu hạn thì TPSR $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ, có giá trị bằng I, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = I$. Trái lại, tích phân suy rộng phân kỳ.
- $0 \le f(x) \le g(x)$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.

- VCB $f(x), g(x) \ge 0$, $f(x) \sim Cg(x)$ $(0 < C < \infty)$ khi $x \to \infty$ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và

$\int_a^{\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- $f(x) \ge 0, \sim \frac{1}{x^p}$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ với $p > 1$, phân kỳ với $p \le 1$.

- $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

- Tương tự với TPSR loại II $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$.

- $f(x) \ge 0$, liên tục trên (a, b] và $f(x) \sim \frac{1}{(x-a)^p}$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ với $p < 1$ và

phân kỳ với $p \ge 1$. Lưu ý trường hợp $a = 0$.

- *Yêu cầu SV chuẩn bị:*

làm bài tập theo kế hoạch: **Cách tính TPXĐ (1 tiết)**

Ứng dụng của TP (1tiết)

Đọc trước TL[1], tr 263 – 268: Chuỗi số

Bài giảng 11: Chuỗi số – Chuỗi số dương

Chương 4: Chuỗi

Mục: Bài tập: Tích phân suy rộng (2t)

Kiểm tra (1t)

§4.1 Chuỗi số (1t)

§4.2 Chuỗi số dương (1t)

Tiết thứ: 51 – 55 Tuần thứ: 11

- Mục đích, yêu cầu:

Nắm chắc khái niệm hội tụ của chuỗi số, các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian: Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- Địa điểm: Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

Chương 4: CHUỖI

§ 4.1. CHUỖI SỐ (1 tiết)

4.1.1. Định nghĩa

* Cho $\{u_n\}$ là một dãy số. Tổng hình thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots \qquad (4.1)$$

được gọi là một chuỗi số.

$u_1, u_2, \ldots$: các số hạng; u_n: số hạng thứ n hay số hạng tổng quát.

Đặt $S_1 = u_1$

$S_2 = u_1 + u_2$

. . . .

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

. . . .

S_n gọi là tổng riêng thứ n. Dãy $\{S_n\}$ gọi là dãy tổng riêng.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ta nói chuỗi hội tụ, có tổng S (số S gọi là tổng của chuỗi) và viết $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ hay $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Trái lại, ta nói chuỗi phân kì.

Nhận xét. * Sự hội tụ hay phân kì của chuỗi không thay đổi khi ta thêm, hoặc bớt, hoặc thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi.

* Đôi khi cần thiết hoặc thuận lợi nếu chuỗi bắt đầu tại một chỉ số khác 1:

* $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi. Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi chuỗi phần dư $\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ hội tụ. Rõ ràng khi đó $R_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Ví dụ 4.1. Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và tính tổng của nó.

Giải. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$. Vậy chuỗi hội tụ, có tổng bằng 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. #

Ví dụ 4.2 *(Chuỗi hình học (chuỗi "cấp số nhân")).*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... \qquad (4.2)$$

Với $q \neq 1$: $S_n = 1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$|q| < 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

$|q| > 1$: $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

$q = 1$: $S_n = n \to \infty\ (n \to \infty)$.

$q = -1$: $S_{2n} = 1, S_{2n+1} = 0$. Vậy không tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$, chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ hội tụ khi $|q| < 1$,

phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

Các tổng riêng S_6 và S_{15} của chuỗi (4.2) thể hiện ở Hình 4.1. #

4.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 4.1. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chứng minh. Từ chỗ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ suy ra tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Từ đó $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

□

Nhận xét. Mệnh đề phản đảo của Định lý trên cho ta một phương pháp rất tốt để chứng minh một chuỗi phân kỳ. Xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.4. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.

Từ Ví dụ 1.8 ta biết rằng, không tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \sin n$. Vậy chuỗi đã cho không hội tụ. #

4.1.3. Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 4.2 *(Tiêu chuẩn Cauchy).* Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n > N, p > 0 : \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon. \qquad (4.3)$$

Ví dụ 4.5. Xét chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

Ta thấy với $\varepsilon = 1/2$, với n nguyên dương bất kỳ thì

$$\left|S_{2n} - S_n\right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Vậy chuỗi điều hòa không hội tụ.

Lưu ý. Có thể chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n \qquad (4.4)$$

với $C = 0,5772\ldots$ là hằng số Euler, $\varepsilon_n \to 0\ (n \to \infty)$. #

4.1.4. Các tính chất về phép toán

Định lý 4.3. Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ còn a là số thực bất kỳ thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(a u_n), \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a u_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

§ 4.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG (1 tiết)

4.2.1. Các tính chất mở đầu

Khi $u_n \geq 0 \ \forall n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương.

Với chuỗi số dương, dãy tổng riêng không giảm, thực vậy:

$$S_{n+1} = a_1 + ... + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n ,$$

Ta có ngay định lý:

Định lý 4.4. Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng $\{S_n\}$ bị chặn, tức là tồn tại một số $M > 0$ sao cho với mỗi $n \geq 1$,

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \leq M .$$

Hệ quả. Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ khi và chỉ khi nó phân kỳ tới vô cùng, tức là $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Định lý 4.5 *(Định lý so sánh)*. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sao cho $0 \leq u_n \leq v_n$. Khi đó

(i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

(ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì;

(iii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k,\ (0<k<\infty)$ thì hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ 4.6. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$\text{(i) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}; \qquad \text{(ii) } \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}; \qquad \text{(iii) } \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Giải.

(i) $\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{1}{n}$ khi $n\geq 3$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

(ii) $\sin\dfrac{\pi}{2^n}\sim\dfrac{\pi}{2^n}\ (n\to\infty)$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

(iii) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Lưu ý. Nếu bỏ đi điều kiện chuỗi dương thì hệ quả trên không còn đúng. Ví dụ ở [1].

4.2.2. Các quy tắc khảo sát sự hội tụ

Định lý 4.6 *(Tiêu chuẩn D'Alembert (Kiểm định tỷ số)).* Giả sử đối với chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ với $u_n>0$, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$.

Nếu $\ell<1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ;

Nếu $\ell>1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kì.

Chứng minh.

Ví dụ 4.7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$.

Giải. Đây là chuỗi số dương. Lại có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2}<1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ. #

Định lý 4.7 *(Tiêu chuẩn Cauchy (Kiểm định căn)).* Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Nếu $\ell < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

Nếu $\ell > 1$ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Chứng minh. □

Nhận xét. * Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy mà ta nhận được $\ell > 1$ thì số hạng tổng quát của chuỗi dần ra vô hạn: $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$; từ đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

* Trường hợp $\ell = 1$, cả hai tiêu chuẩn D'Alembert và Cauchy đều chưa có kết luận: Thực tế, chuỗi có thể hội tụ, có thể phân kỳ.

Ví dụ 4.8. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Giải. Đây là chuỗi số dương với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$. Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. #

Ví dụ 4.9. Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{2[(n+1)/2]} = q^2 + q^2 + q^4 + q^4 + q^6 + q^6 + \ldots$$

trong đó $0 < q < 1$ và $[(n+1)/2]$ là phần nguyên của số (n + 1)/2.

Giải. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} q^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\frac{1}{n}} = q < 1$.

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Lưu ý rằng nếu ta áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert thì chưa có kết luận. #

Định lý 4.8 *(Tiêu chuẩn (so sánh với) tích phân).* Cho hàm f(x) liên tục, không âm, đơn điệu giảm trên $[a,+\infty)$. Khi đó tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và tổng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n = f(n)$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Chứng minh.

Lưu ý. Thực ra chỉ cần đẳng thức $u_n = f(n)$ xảy ra với n đủ lớn.

Ví dụ 4.10. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p \in \mathbb{R}$

(Chuỗi Riemann hay p-chuỗi).

Với $p \le 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} > 0$ nên chuỗi không hội tụ.

Với $p > 0$, xét hàm số $f(x) = 1/x^p$. Hàm này đơn điệu giảm đến 0 khi $n \to \infty$, $f(n) = 1/n^p$.

Hơn nữa $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \le 1$. Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\begin{array}{ll} \text{héi tô khi} & p > 1 \\ \text{ph©n kú khi} & p \le 1 \end{array}\right.$$

Đặc biệt, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. (L. Euler chỉ ra rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, xem Ví dụ 4.29). #

Ví dụ 4.11. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n}\beta$, $\left(0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải. (i) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^\alpha} = (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$.

* $\alpha > 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$: Chuỗi phân kỳ.

* $\alpha = 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$: Chuỗi hội tụ.

* $\alpha < 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$: Chuỗi hội tụ.

Tóm lại, chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow \alpha \le 1$.

(ii) Ta có $\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{2/n}}\sin^2\beta \to 2\sin^2\beta \ (n\to\infty)$.

* $\sin^2\beta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$: Chuỗi phân kỳ

* $\sin^2\beta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le \beta < \frac{\pi}{4}$: Chuỗi hội tụ.

* $\sin^2\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$. Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}.\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, là chuỗi hội tụ (p-chuỗi với $p = 2 > 1$).

Tóm lại, chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$. #

- ***Yêu cầu SV chuẩn bị:***

Đọc trước TL[1], tr 275 – 277: Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

Tự đọc TL [1]: VD 4.19 (b); VD 4.23(b); VD 4.24 (b, c, d); VD 4.25(a, b, c, d)); 4.5.7 (Ví dụ khác) (a, b, c); VD 4.27; VD4.29 (b).

Bài tập về nhà cho cả Chương 4

Trợ: 1(2, 5, 11, 12, 13, 18, 26); 2, 3(1, 5, 9, 12); 5(b, f).

Chính: 1(28, 29, 30); 11(f); 12(c); 14 (c $\to$ l, Chữa: c, e, f, i, j, l); 15(a, b, c); 16(a, b); 18(d, e); 21; 23 (c, e); 24(a, b); 26(a $\to$i, Chữa: a, c, e, h) 27(a $\to$ f, Chữa: a, c, d, f); 33(a, c); 34(a, b, c).

• BS 1. $f(x) = \ln(1+2x)$. Tính đạo hàm $f^{(2000)}(0)$.

• BS 2. Xét sự hội tụ $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \ldots$

• BS 3. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n$

Tính tổng riêng thứ 5 tại x = 0. b) Tìm miền hội tụ của chuỗi.

Bài giảng 12: Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ - Chuỗi hàm số

Chương 4: Chuỗi

Mục: § 4.3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ (1t)

§ 4.4. Chuỗi hàm số (1t)

Bài tập: Chuỗi số dương (2 tiết)

Chuỗi có dấu tuỳ ý (1 tiết)

Tiết thứ: 56 – 60 Tuần thứ: 12

- **Mục đích, yêu cầu**:

- Vận dụng được tiêu chuẩn Leibniz
- Thấy mối quan hệ giữa hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ
- Nắm được khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm số
- Nắm được sự hội tụ của các chuỗi quen thuộc: Chuỗi điều hòa, điều hòa đan dấu, chuỗi hình học, p-chuỗi

- **Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t
- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
- **Nội dung chính:**

§ 4.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ (1 tiết)

4.3.1. Chuỗi đan dấu

Định nghĩa. Với $u_n > 0$, các chuỗi

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \qquad (4.5)$$

gọi là các chuỗi đan dấu.

Định lý 4.9 *(Định lý Leibniz)*

Cho chuỗi đan dấu $u_1 - u_2 + u_3 - ... \quad (u_n > 0)$.

Nếu $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm đến 0 thì chuỗi hội tụ đến tổng S. Ngoài ra

$$|S_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} u_n\right| < u_1; \quad |S| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_n\right| < u_1. \qquad (4.6)$$

Chứng minh. $S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2k-1} - u_{2k}) > 0$.

Vậy $\{S_{2n}, n = 1, 2, ...\}$ là dãy tăng, dương.

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - ... - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2n} < u_1 \qquad (4.7)$$

Vậy $\{S_{2k}\}$ là dãy bị chặn trên. Từ đó nó hội tụ. Đặt $S = \lim_{k\to\infty} S_{2k}$.

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} + u_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = S.$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Bây giờ từ (4.7) ta thấy (4.6) đúng với n chẵn. Với n lẻ thì

$$S_{2k+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k} - u_{2k+1}) < u_1 .$$
$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1} \ge 0 \ge -u_1.$$

Vậy (4.6) cũng xảy ra với n lẻ. □

Ví dụ 4.13 *(Chuỗi điều hòa đan dấu)*. Đó là chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Tất nhiên, đây là chuỗi đan dấu. Lại có $\frac{1}{n} \downarrow 0 \ (n \to \infty)$; theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi hội tụ.

Số hạng tổng quát $a_n = (-1)^{n-1}/n$ và các tổng riêng S_n của chuỗi thể hiện ở Hình 4.3. [1]. Dãy $\{S_n\}$ có dạng zig - zag dần đến giới hạn khoảng 0.7. Sau này ta biết (xem mục 4.5.4c) tổng chính xác của chuỗi là $\ln 2 = 0.693$.

Tương tự, ta thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{\lambda}}$ hội tụ với $\lambda > 0$. #

4.3.2. Hội tụ tuyệt đối

Định lý 4.10. Nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Chứng minh. Theo tiêu chuẩn Cauchy với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ thì

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_n\right| \le \sum_{i=n+1}^{n+p}|u_n| \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Lại theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ. □

Ví dụ 4.14. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$**.**

Ta có $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ hội tụ. Từ đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ. #

Định nghĩa. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ, được gọi là hội tụ không tuyệt đối hay bán hội tụ (hay hội tụ điều kiện) nếu nó hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ.

Từ Định lý (4.10), hội tụ tuyệt đối là tính chất mạnh hơn: Một chuỗi hội tụ tuyệt đối sẽ hội tụ; trái lại, có những chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Như đã thấy ở Ví dụ 1.14, chuỗi điều hòa đan dấu hội tụ. Mặt khác, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ. Vậy chuỗi điều hòa đan dấu bán hội tụ.

Từ tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi số dương, ta nhận được định lý sau đây để khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi.

Định lý 4.11. Giả sử rằng $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$.

Nếu $\ell < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối,

Nếu $\ell > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

(Lưu ý rằng, với $\ell = 1$ thì chưa có kết luận).

Về sự hội tụ tuyệt đối, ta có định lý đặc sắc sau đây:

Định lý 4.12 *(Định lý Riemann).* Nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S thì khi thay đổi thứ tự các số hạng của nó một cách tùy ý, và (hoặc) nhóm một cách tùy ý các số hạng của chuỗi ta sẽ luôn luôn nhận được chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S.

Nếu chuỗi đã cho bán hội tụ thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để nhận được chuỗi hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước; hay được một chuỗi phân kỳ; thậm chí, được một chuỗi phân kỳ ra vô hạn.

Như vậy, chuỗi hội tụ tuyệt đối có tính chất giống với tổng hữu hạn: Có thể hoán vị thứ tự các số hạng. Tính hội tụ tuyệt đối còn đảm bảo một số tính chất khác nữa giống với tổng hữu hạn như tính tích 2 chuỗi, thương 2 chuỗi ...

§ 4.4. CHUỖI HÀM SỐ (1 tiết)

4.4.1. Sự hội tụ, miền hội tụ

Định nghĩa. Cho dãy hàm số $\{u_n(x)\}: u_1(x); u_2(x); \ldots$ xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$. Tổng hình thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots \qquad (4.8)$$

được gọi là chuỗi hàm số,

X: tập xác định,

$u_1(x)$: số hạng thứ nhất, $u_2(x)$: số hạng thứ hai, ... ,

$u_n(x)$: số hạng thứ n hay số hạng tổng quát.

Nếu không cho trước tập xác định, ta hiểu tập xác định X của chuỗi (4.8) là giao của tất cả các tập xác định của các số hạng $u_n(x)$.

Nếu $x_0 \in X$ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ thì x_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (4.8). Tập các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ (hay tập hội tụ) của nó. Trái lại, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kỳ thì x_0 được gọi là điểm phân kỳ.

Giá trị của tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ với x nằm trên miền hội tụ được gọi là tổng của chuỗi.

Ví dụ 4.15. Xét chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$

Nếu $|x| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$: Chuỗi hội tụ

$|x| \geq 1$: Chuỗi phân kỳ.

Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1, 1)$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. #

Ví dụ 4.16. Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Chúng ta nhớ lại rằng khi dùng tiêu chuẩn tích phân ở Ví dụ 4.10 ta đã thấy với $x > 1$ thì chuỗi hội tụ, với $x \leq 1$ thì chuỗi phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $x > 1$. Khi ấy, chuỗi hội tụ đến hàm $\zeta(x)$, gọi là hàm Riemann. #

4.4.2. Hội tụ đều

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X$ được gọi là hội tụ đều trên tập $D \subset X$ đến hàm số S(x) nếu

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ \forall n > N : \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon,\ \forall x \in D. \qquad (4.9)$$

Như vậy, nếu chuỗi hội tụ đều thì dù ε cho trước có bé thế nào chăng nữa, tổng riêng $S_n(x)$ sẽ gần tổng S(x) của chuỗi một cách tùy ý, tại tất cả mọi điểm của D, nếu chỉ số n đủ lớn.

Ví dụ 4.17. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$.

Đây là chuỗi đan dấu. Hơn nữa $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \downarrow 0,\ (n \to \infty)\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy nó hội tụ. Chuỗi phần dư $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2+k}$ của chuỗi này cũng là chuỗi đan dấu, lại có, $1/(x^2+k) \downarrow 0$ (khi $k \to \infty$). Theo Định lý 4.9,

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2+k}\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{x^2+(n+1)} < \frac{1}{n}.$$

Nếu $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ thì $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$: Chuỗi hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. #

***Định lý 4.13** (Tiêu chuẩn Weierstrass)*

Nếu $\left|u_n(x)\right| \le a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên D.

Ví dụ 4.18. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$.

Ta có $\left|\frac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. #

4.4.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Định lý 4.14. Giả sử với mọi n nguyên dương thì hàm $u_n(x)$ liên tục trên khoảng suy rộng D và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên D. Khi đó tổng S(x) của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là hàm số liên tục trên D.

Định lý 4.15. Giả sử với mọi n thì hàm $u_n(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên [a, b]. Khi đó tổng S(x) của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là hàm số khả tích trên [a, b] và ta có

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx . \qquad (4.10)$$

Nói ngắn gọn, nếu chuỗi của các hàm số liên tục là hội tụ đều thì ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi.

Định lý 4.16. Cho $u_n(x), n = 1, 2, ...$ là các hàm liên tục cùng các đạo hàm $u'_n(x)$ của chúng trên khoảng (a, b). Hơn nữa, giả sử rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ và có tổng bằng S(x) trên (a, b), còn chuỗi đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên (a, b). Khi đó S(x) là hàm khả vi và

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in (a, b). \qquad (4.11)$$

Yêu cầu SV chuẩn bị:

Làm bài tập theo kế hoạch: **Chuỗi số dương (2 tiết)**

Chuỗi có dấu tuỳ ý (1 tiết)

Đọc trước TL[1], tr 279-282: Chuỗi hàm số

Tự đọc TL [1]: Định lý Riemann

Bài giảng 13: Chuỗi lũy thừa

Chương 4: Chuỗi

Mục: § 4.5. Chuỗi luỹ thừa (2t)

Bài tập: Chuỗi có dấu tuỳ ý (2 tiết)

Chuỗi hàm (1 tiết)

Tiết thứ: 61 - 65, Tuần thứ: 13

- **Mục đích, yêu cầu**:

Tìm được bán kính hội tụ - miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Một số cách tìm MHT của các chuỗi hàm khác

- **Hình thức tổ chức dạy học:**

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- **Thời gian:** Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t
- **Địa điểm:** Giảng đường do P2 phân công.
- **Nội dung chính:**

§ 4.5. CHUỖI LŨY THỪA (2 tiết)

4.5.1. Khái niệm chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,\ a_n \in \mathbb{R} \qquad (4.12)$$

trong đó x là biến, hằng số a_n là hệ số của x^n.

Tổng quát, cho trước $x_0, a_n \in \mathbb{R}$, chuỗi hàm số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \qquad (4.13)$$

được gọi là chuỗi lũy thừa của $x - x_0$ (hay chuỗi lũy thừa tại $x = x_0$).

Đặt $X = x - x_0$, chuỗi (4.13) trở thành $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, lại có dạng (4.12). Vì thế chúng ta chỉ cần xét chuỗi lũy thừa dạng (4.12).

Chuỗi (4.12) luôn hội tụ tại $x = 0$. Về sự hội tụ của nó, chúng ta có:

***Định lý 4.17** (Abel).* Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x mà $|x| < |x_0|$.

Chứng minh. Do chuỗi (4.12) hội tụ tại x = x_0 nên số hạng tổng quát của nó có giới hạn 0. Vậy tồn tại số dương M sao cho $\left|a_n x_0^n\right| < M, \forall n$. Từ đó

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,\ \forall n.$$

Lại thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ với $|x| < |x_0|$. Áp dụng tiêu chuẩn so sánh, nhận được đpcm. □

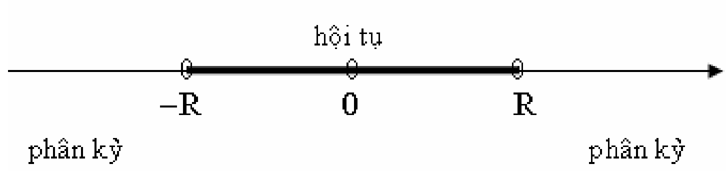
Hệ quả. Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1 thì nó cũng phân kỳ tại x mà $|x| > |x_1|$.

Hệ quả. Tồn tại số $R \geq 0$ để chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong khoảng (-R, R); phân kỳ trong $(-\infty, -R)$ và $(R, +\infty)$.

R như thế được gọi là bán kính hội tụ; khoảng (-R, R) gọi là khoảng hội tụ.

Nhận xét. Từ Hệ quả, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa có một trong 4 dạng

(-R, R); (-R, R]; [-R, R); [-R, R].



4.5.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

Định lý 4.18. Nếu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho \tag{4.14}$$

thì bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ xác định bởi

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Phương pháp tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Tìm bán kính hội tụ theo quy tắc trên;

Xét sự hội tụ của chuỗi tại đầu mút –R và R;

Kết luận.

Tính chất sau cũng rất có ích khi tìm miền hội tụ.

Tính chất. Hai chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots , \tag{4.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \ldots \qquad m \in \mathbb{Z} \qquad (4.17)$$

cùng hội tụ hay phân kỳ, có thể trừ ra tại điểm x = 0.

(Nhân hay chia chuỗi lũy thừa với lũy thừa của biến x được chuỗi có cùng miền hội tụ, có thể trừ ra tại x = 0).

Phương pháp tìm miền hội tụ của chuỗi tùy ý

Cách I: "Lũy thừa hóa", đưa chuỗi đã cho về chuỗi lũy thừa.

Cách II: Coi x là tham số, x cố định thuộc tập xác định, chuỗi hàm trở thành chuỗi số. Dùng các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn D'Alembert, Cauchy ... với chuỗi số để xét sự hội tụ (phải biện luận).

Nhận xét. Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ (x là tham số) mà ta nhận được $\ell > 1$ thì $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = \infty$. Từ đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ phân kỳ.

Ví dụ 4.19. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

(i) Đây là chuỗi lũy thừa, hơn nữa $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n}{n+1} \to 2$ $(n \to \infty)$.

Vậy $R = 1/2$ và khoảng hội tụ của chuỗi là $(-1/2; 1/2)$.

Tại $x = -1/2$, chuỗi trở thành $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$ Đây là chuỗi điều hòa đan dấu nên nó hội tụ.

Tại $x = 1/2$, chuỗi trở thành $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, là chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi đã cho là $[-1/2, 1/2)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}} = \frac{(x-2)^2}{2}$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi phân kỳ khi $\frac{(x-2)^2}{2} > 1$, hội tụ khi

$$\frac{(x-2)^2}{2}<1, \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x-2<\sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}.$$

* Tại $x=2\pm\sqrt{2}$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n 2^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n.$$

Ta không thể dùng tiêu chuẩn D'Alembert cũng như Cauchy cho chuỗi này vì đều nhận được $\ell=1$, song nhận thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{n}{2n+1}}=e^{1/2}\neq 0\text{: Chuỗi phân kỳ.}$$

ĐS: $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$.

Cách II. Đặt $t=(x-2)^2\geq 0$ được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n t^n$ và khảo sát như thông thường. (Tuy nhiên với chuỗi lũy thừa này, ta không cần xét tại mút trái $t=-2$ của khoảng hội tụ (-2, 2) vì $t\geq 0$).

(iii) Rõ ràng không thể lũy thừa hóa được chuỗi này. Ta có

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right|=\begin{cases}|x| & \text{khi } |x|<1\\ 1/|x| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$$

Vậy với $x\neq\pm 1$ thì $\ell<1$: Chuỗi hội tụ.

* Xét tại $x=\pm 1$ được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{2}$, chuỗi phân kì vì $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$.

ĐS: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. #

4.5.3. Tính chất của chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa (4.12) với khoảng hội tụ (-R, R) và tổng của chuỗi là hàm S(x) trên (-R, R).

Định lý 4.19. Chuỗi (4.12) hội tụ tuyệt đối trên khoảng hội tụ (-R, R).

Định lý 4.20. Với $[a, b]\subset(-R, R)$ tùy ý, chuỗi (4.12) hội tụ đều trên $[a, b]$.

(Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên đoạn tùy ý nằm trong khoảng hội tụ của nó).

Định lý 4.21. Tổng S(x) của chuỗi lũy thừa (4.12) là hàm số liên tục trên khoảng hội tụ $(-R, R)$ của nó. Nếu chuỗi hội tụ tại mút trái (phải) của khoảng hội tụ thì tổng S(x) liên tục phía phải (trái) tại mút ấy.

Định lý 4.22. Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa (4.12) trên mọi đoạn [a; b] nằm trong khoảng hội tụ (-R, R) của nó:

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b x^n dx\,. \qquad (4.18)$$

Đặc biệt, $\forall x\in(-R,R)$,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+... \qquad (4.19)$$

Một cách tương đương,

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+... \qquad (4.20)$$

Chuỗi ở vế phải của (4.19), (4.20) cũng có khoảng hội tụ là (-R, R).

Định lý 4.23. Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa (4.12) tại mọi điểm trong khoảng hội tụ của nó: $\forall x\in(-R,\,R)$ thì

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+... \qquad (4.21)$$

Chuỗi ở vế phải của (4.21) cũng có khoảng hội tụ là (-R, R).

Hệ quả. Có thể lấy đạo hàm (hoặc lấy nguyên hàm) một số tùy ý lần chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó; các chuỗi thu được có cùng khoảng hội tụ với khoảng hội tụ của chuỗi đã cho.

4.5.4. Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa

***a. Vấn đề khải triển hàm thành chuỗi lũy thừa* (xem [1])**

Định nghĩa. * Cho hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 và lân cận và có đạo hàm mọi cấp tại x_0. Chuỗi hàm

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \qquad (4.24)$$

được gọi là chuỗi Taylor của hàm f(x) tại x_0.

* Nếu $x_0=0$, chuỗi Taylor trở thành

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (4.25)$$

được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm f(x).

* Nếu chuỗi Taylor (4.24) hội tụ tại một lân cận $I=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ của điểm x_0 và hội tụ đến f(x) trong lân cận này:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...\,,\ x\in I$$

thì ta nói hàm f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận đã nêu của x_0.

Từ phân tích trên ta nhận được định lý sau đây:

Định lý 4.24 *(Tính duy nhất của khai triển).* Nếu f(x) có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong một lân cận nào đó của điểm x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

thì f(x) khả vi vô hạn tại lân cận này và chuỗi ở vế phải chính là chuỗi (4.24).

b. Điều kiện để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor **(☼)**

c. Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad x \in [-1, 1].$$

Dùng các khai triển Maclaurin ở trên, đôi khi ta nhanh chóng nhận được khai triển của hàm số. Xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.21. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3+x}$.

Giải. $y = \dfrac{x^3}{3}\dfrac{1}{(1+(x/3))} = \dfrac{x^3}{3}\left(1 - (x/3) + (x/3)^2 + \ldots\right)$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3^2}x^4 + \frac{1}{3^3}x^5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(-1)^{n+1}x^{n+2}. \qquad \#$$

4.5.5. Ứng dụng

a. Tính gần đúng giá trị biểu thức. Xem mục 2.4.3.

b. Tính đạo hàm tại điểm cho trước. Dùng các khai triển quen biết có thể ta tìm được khai triển Taylor của hàm f(x):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Khi đó tìm các đạo hàm của hàm này tại x_0 như sau:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(x_0)=a_n n! \tag{4.28}$$

Ví dụ 4.22. Cho hàm số $f(x)=\sin x^2$. Tính đạo hàm $f^{(2000)}(0)$.

Giải. $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}\Rightarrow \sin x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{4n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

$4n-2=2000\Leftrightarrow n=500.5$ không nguyên. Vậy $f^{(2000)}(0)=0$.

Ngoài ra ta có

$$\begin{cases} a_{2k+1}=a_{4k}=0\\ a_{8k+2}=\dfrac{1}{(4k+1)!}\\ a_{8k+6}=\dfrac{-1}{(4k+3)!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^{(2k+1)}(0)=y^{(4k)}(0)=0\\ y^{(8k+2)}(0)=\dfrac{1}{(4k+1)!}(8k+2)!\\ y^{(8k+6)}(0)=\dfrac{-1}{(4k+3)!}(8k+6)!\end{cases}\qquad \#$$

4.5.6. Tính tổng một số chuỗi (☼)

a. Sử dụng trực tiếp các chuỗi quen biết

Ba chỗi thông dụng nhất là

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1)\ :$$

“chuỗi hình học” hay “chuỗi cấp số nhân”

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad x\in(-\infty,+\infty)$$: “chuỗi e – mũ”

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\ x\in(-1,1)\ldots$$: “chuỗi loga”.

b. Đạo hàm hay tích phân chuỗi quen biết hay chuỗi đã cho

Bước 1: Đưa ra một khai triển quen biết, ví dụ

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\qquad x\in(-1,1).$$

Bước 2 (nếu cần): Đạo hàm hay tích phân 2 vế trên khoảng hội tụ, ví dụ

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots\qquad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=2+2.3x+3.4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots\qquad x\in(-1,1),$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x \in (-1, 1).$$

Bước 3 (nếu cần): Biểu diễn chuỗi đã cho thông qua những chuỗi này.

Bước 4 (nếu cần): Thay $x = x_0$ thích hợp.

Cũng có thể ta làm các bước ở trên nhưng với chuỗi đã cho. Nhớ rằng việc lấy đạo hàm thường dễ hơn lấy tích phân.

Đạo hàm chuỗi đã cho $\Leftrightarrow$ Tích phân chuỗi quen biết.

Đạo hàm chuỗi quen biết $\Leftrightarrow$ Tích phân chuỗi đã cho.

c. Tách chuỗi đã cho thành tổng

Yêu cầu sinh viên chuẩn bị:

Làm bài tập theo kế hoạch: **Chuỗi có dấu tuỳ ý (2 tiết)**
Chuỗi hàm (1 tiết)

Đọc trước TL[1], tr 302-306: Chuỗi Fourier

Tự đọc TL [1]: Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Tính tổng một số chuỗi

Bài giảng 14: Chuỗi Fourier

Chương 4: Chuỗi

Mục: Bài tập: Chuỗi luỹ thừa (1 tiết)

§ 4.6. Chuỗi Fourier (2t)

Bài tập: Chuỗi Fourier (1t)

Tiết thứ: 66 - 70, Tuần thứ: 14

- Mục đích, yêu cầu:

Khai triển hàm thành chuỗi lượng giác

Khai triển hàm theo các hàm sin hoặc cosin

- Hình thức tổ chức dạy học:

Hình thức chủ yếu: Lý thuyết, thảo luận - tự học, tự nghiên cứu

- Thời gian: Lý thuyết, thảo luận: 5t - Tự học, tự nghiên cứu: 7t

- Địa điểm: Giảng đường do P2 phân công.

- Nội dung chính:

BÀI TẬP: Chuỗi hàm, Chuỗi luỹ thừa (2 tiết)

§ 4.6. CHUỖI FUORIER (2 tiết)

4.6.1. Chuỗi lượng giác

Định nghĩa. Chuỗi hàm

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (4.31)$$

trong đó $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ được gọi là chuỗi lượng giác.

Hai định lý sau đây nêu lên những tính chất khởi đầu của chuỗi lượng giác.

Định lý 4.26. Nếu hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ thì chuỗi lượng giác (4.31) hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta có

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|.$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass ta thu được đpcm. □

Định lý 4.27. Nếu $a_n \downarrow 0$ và $b_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ thì chuỗi lượng giác (4.31) hội tụ tại $x \ne 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4.6.2. Chuỗi Fourier

a. Chuỗi Fourier của hàm số

Bổ đề. Cho p, q là những số nguyên bất kỳ. Khi đó ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px\, dx = 0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos px\, dx = 0 \quad (p \ne 0);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin qx\, dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx\, dx = \begin{cases} 0, & p \ne q \\ \pi, & p = q \ne 0 \\ 2\pi, & p = q = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx\, dx = \begin{cases} 0, & p \ne q \\ 0, & p = q = 0 \\ \pi, & p = q \ne 0. \end{cases} \qquad (4.32)$$

Bây giờ giả sử rằng hàm số f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π và có thể khai triển được thành chuỗi lượng giác dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \ x \in \mathbb{R}. \qquad (4.33)$$

Giả sử có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi ở vế phải thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx \right) = a_0\pi.$$

Vậy $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

Nhân hai vế của (4.33) với $\cos kx$, $k = 1, 2, ...$ và giả sử rằng chuỗi thu được ở vế phải có thể lấy tích phân từng số hạng, ta đi đến:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos kx\,dx \right)$$

$$= 0 + a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos kx\,dx + 0 = a_k\,\pi \Rightarrow a_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Lại nhân hai vế của (4.33) với $\sin kx$, $k = 1, 2, ...$ và giả sử rằng chuỗi thu được ở vế phải có thể lấy tích phân từng số hạng, ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\sin kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin kx\,dx \right)$$

$$= 0 + 0 + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\sin kx\,dx = b_k\,\pi.$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Tóm lại, các hệ số a_i, b_i phải thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \; n = 1, 2, ... \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \; n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{4.34}$$

Định nghĩa. Cho hàm f(x) tuần hoàn, khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Các hệ số a_n, b_n xác định theo (4.34) được gọi là hệ số Fourier của hàm f(x). Chuỗi lượng giác tương ứng

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm f(x).

Nhận xét. Nếu hàm f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx,\ \forall a\in\mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Vậy, khi tính hệ số Fourier, ta có thể lấy tích phân trên đoạn bất kỳ có độ dài 2π.

Tính chất.

Nếu thêm điều kiện f(x) là hàm chẵn thì:

$$\begin{cases} b_n=0, & n=1,2,\dots \\ a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, & n=0,1,2,\dots \end{cases} \tag{4.36}$$

Nếu thêm điều kiện f(x) là hàm lẻ thì:

$$\begin{cases} a_n=0, \\ b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, & n=1,2,\dots \end{cases} \tag{4.37}$$

Chứng minh. Nếu hàm f(x) chẵn thì hàm $f(x)\cos nx$ chẵn, hàm $f(x)\sin nx$ lẻ. Trái lại, nếu f(x) lẻ thì hàm $f(x)\cos nx$ lẻ, hàm $f(x)\sin nx$ chẵn. Sử dụng Ví dụ 3.22 ta nhận được đpcm. □

b. Điều kiện đủ để có khai triển Fourier

Định nghĩa. Hàm số f(x) được gọi là đơn điệu từng khúc trên đoạn [a, b] nếu có một số hữu hạn điểm $a_0=a<a_1<\dots<a_n=b$ sao cho trên mỗi khoảng $(a_0, a_1); \dots; (a_{n-1}, a_n)$ hàm f(x) là đơn điệu.

Tính chất. Hàm bị chặn và đơn điệu từng khúc chỉ có thể có các điểm gián đoạn loại một.

Định lý 4.28 *(Định lý Diriclet)*

Nếu hàm f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$ đến tổng S(x):

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \tag{4.38}$$

Hơn nữa,

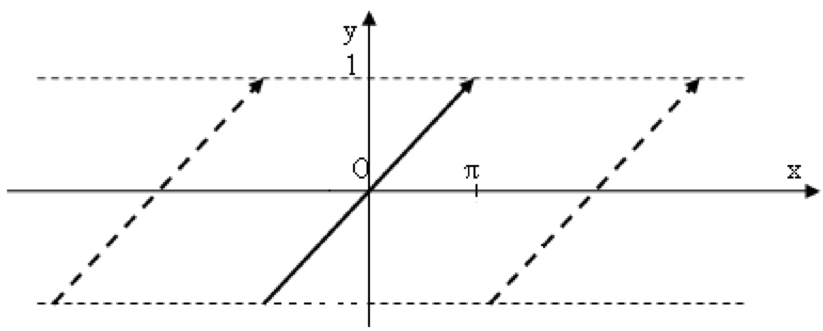
$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x_0 \text{ là điểm liên tục của } f(x), \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{nếu } x_0 \text{ là điểm gián đoạn của } f(x). \end{cases}$$

Lưu ý. Để đơn giản, ta vẫn viết công thức (4.38) dưới dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.39}$$

với chú ý như đã nêu.

Ví dụ 4.26. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π biết rằng trên khoảng $[-\pi, \pi)$ thì f(x) = x.



Hình 4.6. *Hàm* $y = x,\ x \in [-\pi, \pi)$ *và thác triển tuần hoàn của nó*

Ta nhận thấy rằng hàm này thỏa mãn mọi điều kiện của Định lý Diriclet, vậy có thể khai triển nó thành chuỗi Fourier. Ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \ldots = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Lưu ý rằng tại $x = \pi$ tổng của chuỗi bằng

$$S(\pi) = \frac{1}{2}\left[f(\pi+0) + f(\pi-0)\right] = 0.$$

Tương tự, $S(-\pi) = 0$. #

c. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2ℓ

Giả sử hàm f(x) tuần hoàn chu kỳ 2ℓ, đơn điệu từng khúc, bị chặn. Bằng phép đổi biến

$$x' = \frac{\pi}{\ell}x \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{\pi}x' \ (x : -\ell \to \ell \Rightarrow x' : -\pi \to \pi)$$

ta được $f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}x'\right) = F(x')$.

Thế thì $F(x')$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc, bị chặn. Vậy ta có thể khai triển nó thành chuỗi Fourier:

$$F(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx')$$

hay

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (4.40)$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x')dx' = ... \qquad = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x')\cos nx' dx' = ... = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x')\cos nx' dx' = ... = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (4.41)$$

Ví dụ 4.27. Khai triển hàm $f(x) = |\cos x|$ thành chuỗi Fourier.

Giải. Hàm f(x) tuần hoàn chu kỳ π. Hơn nữa, nó là hàm chẵn nên $b_n = 0, \ \forall n = 1, 2, ...$ Theo (4.41),

$$a_0 = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2nx\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi.2}\int_0^{\pi/2} [\cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x]dx = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \ n = 1, 2, ...$$

Vậy $$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

Vì hàm $f(x) = |\cos x|$ liên tục nên công thức trên đúng với mọi x. #

d. Khai triển hàm số bất kỳ thành chuỗi Fourier

Giả sử f(x) là hàm đơn điệu từng khúc, bị chặn trên [a, b]. Ta xây dựng một hàm số g(x):

- Tuần hoàn chu kỳ $T = 2\ell \geq b - a$;
- Đơn điệu từng khúc, bị chặn;
- $g(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$.

Rõ ràng có nhiều hàm như vậy. Ta gọi việc làm trên là thác triển tuần hoàn hàm f(x) đã cho.

Khi đó hàm g(x) khai triển được thành chuỗi Fourier, tổng của chuỗi bằng g(x), và do đó bằng f(x) tại những điểm liên tục của hàm f(x).

Đặc điểm của chuỗi thu được là:

- Nếu hàm g(x) chẵn: Chuỗi chỉ gồm toàn hàm số cosin;
- Nếu hàm g(x) lẻ: Chuỗi chỉ gồm toàn hàm số sin.

Ví dụ 4.28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Hãy khai triển hàm này thành chuỗi Fourier sao cho chuỗi thu được

(a) chỉ chứa hàm số sin; (b) chỉ chứa hàm số cosin.

Giải. (a) Xét hàm g(x) trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ 4 và

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2] \\ -f(-x), & x \in [-2, 0] \end{cases}$$

Hàm này đơn điệu từng khúc, bị chặn, tuần hoàn chu ký $2\ell = 4$ nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. Hơn nữa, hàm g(x) lẻ nên chuỗi chỉ chứa hàm số sin.

$$a_n = 0,\ n = 0, 1, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2 - x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \ldots = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} - \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{1}{(2k-1)^2}(-1)^{k-1}, & n = 2k - 1 \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n = 2k \end{cases}$$

Vậy $$g(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.\ (*)$$

Trên đoạn [0, 2], tổng của chuỗi bằng f(x).

(b) Bây giờ đặt $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ f(-x), & -2 \leq x < 0. \end{cases}$

Hàm g(x) chẵn, vậy $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ Ta cũng tính được a_n.

Từ đó ta được

$$g(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}\right.$$
$$\left. - \frac{2}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{2}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{2} \ldots\right]. \quad (**)$$

Vì g(x) liên tục nên đồng nhất thức xảy ra với mọi x. Từ đó khai triển trên cũng chính là khai triển của f(x) trên [0, 2]. #

Nhận xét. (i) Chuỗi hàm số (*) có các hệ số cỡ $\frac{1}{n}$, trong khi đó chuỗi hàm số (**) có các hệ số cỡ $\frac{1}{n^2}$. Chuỗi (**) hội tụ nhanh hơn.

(ii) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm f(x) liên tục thì các hệ số Fourier của nó có cấp VCB $\frac{1}{n^\alpha}, \alpha \ge 2$. Từ đó chuỗi Fourier hội tụ đều. Trái lại, các hệ số Fourier của hàm gián đoạn có cấp VCB 1/n.

e. Áp dụng để tính tổng của một số chuỗi

Ví dụ 4.29. Cho hàm số f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π, và $f(x) = x^2$ với $x \in [-\pi, \pi]$. Hãy khai triển hàm f(x) thành chuỗi Fourier. Dựa vào đó tính

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}; \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Giải. Hàm f(x) thỏa mãn các điều kiện khai triển thành chuỗi Fourier. Nó là hàm chẵn, vậy $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \ldots = 4(-1)^n\frac{1}{n^2}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Các tổng riêng S_2 và S_5 của chuỗi thể hiện ở Hình 4.7.

$$* \ x = 0:\ 0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \Rightarrow S_a = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$* \ x = \pi:\ f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S_b = \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$* \ S_c = \frac{1}{2}(S_a + S_b) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ta ghi lại kết quả đẹp đẽ trên để sử dụng sau này.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}, \qquad (4.42) \quad \#$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

TÓM TẮT CHƯƠNG 4

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots$: Chuỗi hình học, hội tụ $\Leftrightarrow |q|<1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$: Chuỗi điều hoà, phân kỳ
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$: Chuỗi điều hoà đan dấu, hội tụ.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1^p+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$: p – chuỗi, hội tụ $\Leftrightarrow p>1$.
- Chuỗi số dương phân kỳ thì phân kỳ tới vô cùng.
- **Tiêu chuẩn so sánh**

  $v_n \sim u_n,\ u_n, v_n > 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

- **Tiêu chuẩn D'Alembert.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi số dương, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

  $\ell < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ; $\ell > 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

- **Tiêu chuẩn Cauchy.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi số dương, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

  $\ell < 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ; $\ell > 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

- **Tiêu chuẩn tích phân.** $f(x) \ge 0$ liên tục, đơn điệu giảm trên $[a, +\infty)$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \ (u_n = f(n)) \text{ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.}$$

- **Tiêu chuẩn Leibniz.** $u_n \downarrow 0$ thì chuỗi đan dấu $u_1 - u_2 + u_3 - ...$ hội tụ.

- **Hội tụ tuyệt đối**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ; } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ được gọi là hội tụ tuyệt đối.}$$

- **Hội tụ đều.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X$ hội tụ đều trên $D \subset X$ đến S(x) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N : \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

- Tiêu chuẩn Weierstrass

$\left|u_n(x)\right| \le a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối, đều trên D.

- **Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.** Một trong 4 dạng $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$; R: bán kính hội tụ, $(-R, R)$: khoảng hội tụ.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow R = \dfrac{1}{\rho}$.

- Có thể lấy đạo hàm (hoặc lấy nguyên hàm) một số tùy ý lần chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó; các chuỗi thu được có cùng khoảng hội tụ với khoảng hội tụ của chuỗi đã cho.

- **Khai triển Taylor**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

- **Tính đạo hàm tại 1 điểm.** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = a_n n!$

- **Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp**

- **Tính tổng của chuỗi hàm:** Dùng các chuỗi quen biết - Đạo hàm hay TP chuỗi quen biết hay chuỗi đã cho - Tách chuỗi đã cho thành tổng.

- **Chuỗi Fourier.**

* f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc, bị chặn:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$