BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP
(A COURSE OF HIGHER MATHEMATICS)

CHƯƠNG 7. TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN (INTEGRALS)

7.1. ÔN TẬP VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (ANTIDERIVATIVE or PRIMITIVE FUNCTION & INDEFINITE INTEGRAL)

7.1.1. NHẮC LẠI KHÁI NIỆM

1. **Nguyên hàm**: Hàm số F(x) được gọi là một ***nguyên hàm*** của hàm số f(x) trên tập xác định D nếu đạo hàm của F(x) là f(x), tức là F'(x) = f(x), $\forall x \in D$.
   Nhận xét: Hiển nhiên nếu hàm f(x) có một nguyên hàm thì nó sẽ có vô số nguyên hàm và hai nguyên hàm bất kỳ của f(x) chỉ sai khác nhau một hằng số.
2. **Tích phân bất định**: Tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) được gọi là ***họ nguyên hàm*** hay ***tích phân bất định*** của nó và kí hiệu là $\int f(x)dx$.

Như vậy, nếu f(x) có một nguyên hàm là F(x) thì tích phân bất định của nó là

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

7.1.2. BẢNG CÁC TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH CƠ BẢN

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1); \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0; \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, a > 0$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C \qquad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, a \neq 0$$

$$\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c, a \neq 0 \qquad \int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c, a \neq 0$$

7.1.3. CÁC TÍNH CHẤT

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a = const)$

2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

4. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

7.1.4. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau đây

$$\int\left(x^3 - x^2 + \sqrt{x}\right)dx; \quad \int\left(2^x + 4e^x - \frac{3}{x}\right)dx; \quad \int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}; \quad \int(2\cos 2x - 8\sin 4x)dx$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau đây

a) $\int tgx dx$ b) $\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$ c) $\int\frac{4x+1}{x^2+4}dx$ d) $\int\frac{dx}{e^x+1}$

7.1.5. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Phương pháp tích phân (theo) từng phần

a) **Ý tưởng: Khéo đưa tích phân khó $\int f(x)dx$ về dạng $\int udv$ để chia việc tích phân theo từng phần dễ hơn $v = \int dv$ và $\int vdu$ rồi dùng công thức $\int udv = uv - \int vdu$ để suy ra tích phân gốc.**

b) Áp dụng đối với các tích phân $\int f(x)dx$ **với** f(x) thuộc một trong các dạng

P(x).ln(…); P(x).arcsin(…); P(x).arctan(…); P(x)sin(…); P(x).cos(…); P(x).$e^{(\dots)}$.

c) Cách đặt u hoặc dv theo câu "thần chú":

" ***U*** ơi ***lốc ác*** quá trời
E rằng ***sin cos*** còn mời ***đê vê*** "

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp tích phân từng phần

a) $\int(x^2+1)\arcsin x dx$ b) $\int x^2\ln x dx$ c) $\int(x+1)\cos x dx$

d) $\int xe^{2x}dx$ e) $\int(2x-1)\sin 2x dx$

2. Phương pháp đổi biến

$$\int f(x)dx = \int f[x(t)]x'(t)dt$$

trong đó $x = x(t)$, với t là biến số mới.

Các bước thực hiện:

- ***Chọn biến số mới, tính vi phân của nó.***
- ***Viết tích phân ban đầu theo biến số mới và tính tích phân thu được theo biến số mới.***
- ***Trả kết quả về biến số ban đầu.***

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp đổi biến số

a) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$; b) $\int x\sqrt{2+x^2}dx$

c) $\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ d) $\int x(1-x)^{2008}dx$

7.2. ÔN TẬP VỀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (DEFINITE INTEGRAL)

7.2.1. CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNIZ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

trong đó F(x) là nguyên hàm của f(x).

Ví dụ 5. Tính các tích phân xác định sau đây

$$\int_0^1 \left(3x^2 - 4x + 2\right)dx \qquad \int_1^2 \frac{3x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x + 2}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \qquad \int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}dx$$

7.2.2. CÁC TÍNH CHẤT

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nếu f(x) là hàm số chẵn (nghĩa là $f(-x) = f(x)$) thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Nếu f(x) là hàm số lẻ (nghĩa là $f(-x) = -f(x)$) thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Ví dụ 6. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = 2\arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$; $\qquad \int_{-2}^{2} \frac{x^3 dx}{1 + x^2} = 0$;

Ví dụ 7. $\int_{-1}^{3} |x|dx = \int_{-1}^{0} |x|dx + \int_0^3 |x|dx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_0^3 xdx = 5$

7.2.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Phương pháp tích phân từng phần $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Các dạng áp dụng và cách đặt *u, dv* tương tự trường hợp tích phân bất định.

Ví dụ 8. Tính các tích phân xác định sau đây bằng phương pháp tích phân từng phần

a) $\int_1^e x\ln x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x dx$

c) $\int_0^1 x\arctan x dx$ d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

2. Phương pháp đổi biến số $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)dt$

α, β là các cận mới của tích phân xác định theo biến số t .

Các bước thực hiện:

- ***Chọn biến số mới, tính vi phân của nó***
- ***Đổi cận tích phân theo biến số mới***
- ***Viết tích phân ban đầu theo biến số mới và tính tích phân mới.***

Ví dụ 9. Tính các tích phân xác định sau đây bằng phương pháp đổi biến số

a) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} x\sqrt{2+x^2}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$

c) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

7.3. SƠ LƯỢC VỀ TÍCH PHÂN SUY RỘNG (IMPOPER INTERGRALS)

Khi xét tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$, ta đòi hỏi các cận *a, b* là các số hữu hạn và hàm số lấy tích phân *f(x,y)* liên tục trên [a,b]. Dưới đây ta mở rộng khái niệm tích phân cho trường hợp các cận của nó là vô hạn.

7.3.1. Định nghĩa tích phân suy rộng với cận vô hạn

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

trong đó *c* là hằng số bất kì, còn *f(x)* là hàm số liên tục trên khoảng lấy tích phân.

Khi các giới hạn bên các vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng ở vế trái tương ứng ***hội tụ*** và có giá trị bằng giới hạn hữu hạn ở vế phải tương ứng. Trường hợp ngược lại, tức là (một trong) các giới hạn ở vế phải không tồn tại hoặc vô hạn thì ta nói tích phân suy rộng ở vế trái tương ứng ***phân kỳ***.

Ví dụ 10. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$

Ví dụ 11. $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}(\ln x)\Big|_e^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-1)=+\infty.$

Ví dụ 12. $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}(\arctan x)\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(-\arctan a)=\frac{\pi}{2}.$

Ví dụ 13.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(-\arctan a)+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Ví dụ 14. Tính các tích phân suy rộng sau đây

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dx}{x^2+4}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

8.

7.3.2. Vài tích phân suy rộng hội tụ kinh điển và tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng của hàm không âm

1. Vài tích phân suy rộng kinh điển hội tụ

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$)

+ Hội tụ khi (và chỉ khi) $\alpha > 1$; + Phân kỳ khi (và chỉ khi) $\alpha \le 1$.

2. Các tiêu chuẩn so sánh

a) Tiêu chuẩn so sánh thứ nhất

Giả thiết: $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \ge a$.

Kết luận: + ($\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)$ **phân kì**) $\Rightarrow$ ($\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)$ **cũng phân kỳ**).

+ ($\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)$ **hội tụ**) $\Rightarrow$ ($\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)$ **cũng hội tụ**).

b) Tiêu chuẩn so sánh thứ hai

Giả thiết: + $0 \le f(x), \forall x \ge a$ và $f(x) \to 0$ (tức là f(x) VCB) khi $x \to +\infty$.

+ $f(x) \sim \dfrac{k}{x^\alpha}$ ($0 < k < +\infty$) khi $x \to +\infty$.

Kết luận: + ($\int_a^{+\infty} f(x)$ hội tụ) $\Leftrightarrow$ ($\alpha > 1$), ($\int_a^{+\infty} f(x)$ phân kỳ) $\Leftrightarrow$ ($\alpha \leq 1$) .

3. Ví dụ 15. Xét sự hội tụ (hay phân kỳ) của các tích phân dưới đây

a) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+4x+2}dx$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^2\sqrt{x}+3x+1}dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{4x^2+3x+1}{3x^4+5x^2+2}dx$; d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2013}+2x^{2012}+3}{x^{2015}+4x^2+1}dx$.

7.4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG KINH TẾ

7.4.1. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Xác định quỹ vốn theo lượng đầu tư

Giả sử việc đầu tư được tiến hành liên tục theo thời gianK = K(t) là quỹ vốn tại thời điểm t (t là biến thời gian) và I = I(t) là lượng đầug tư tại thời điểm t ($0 \leq t$). Khi đó ta có

$$K(t) = \int I(t)dt$$

Ở đây, hằng số C trong tích phân ở vế phải được xác định nhờ quỹ vốn ban đầu $K(0) = K_0$.

2. Xác định hàm tổng theo giá trị cận biên

Giả sử một biến số kinh tế mang ý nghĩa tổng giá trị (tổng chi phí C, tổng doanh thu R, tổng lợi nhuận π, …). Khi đó nếu biết hàm giá trị cận biên (chi phí cận biên, doanh thu cận biên, lợi nhuận cận biên, …) thì dễ dàng tính được hàm tổng giá trị bằng cách lấy tích phân (bất định).

3. Ví dụ

Ví dụ 16. Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t cho bởi $I = I(t) = 180t^{0,8}$, $t \geq 0$. Hãy xác định quỹ vốn biết rằng vốn ban đầu là 200.

<u>**Giải**</u> + Quỹ vốn xác định bởi $K = K(t) = \int I(t)dt = \int 180t^{0,8}dt = 100t^{1,8} + C$.

+ Vì vốn ban đầu là $K(0) = C = 200$ nên $K = 100t^{1,8} + 200$.

Ví dụ 17. Giả sử chi phí cận biên (**Marginal Cost**) của một doanh nghiệp ở mỗi mức sản lượng Q cho bởi **MC** = $30 - 40Q + 9Q^2$. Hãy xác định tổng chi phí **TC** (**Total Cost**) và chi phí khả biến (**Variable Cost**) **VC** theo Q biết rằng chi phí cố định (**Fixed Cost**) là **VC** = **TC** – **FC** và **FC** = 100.

<u>**Giải**</u> + **TC = TC(Q)** = $\int MCdQ = \int (30-40Q+9Q^2)dQ = 30Q - 20Q^2 + 3Q^3 + C$.

+ Vì **FC** = 100 = **TC**(0) = C nên C = 100. Tức là **TC** = $100 + 30Q - 20Q^2 + 3Q^3$.

+ Chi phí khả biến là **VC = TC – FC** = $30Q - 20Q^2 + 3Q^3$.

7.4.2. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Thặng dư của người tiêu dùng và thặng dư của nhà sản xuất

Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại hàng hóa theo giá P cho bởi $Q_s = Q_s(P)$ và $Q_d = Q_d(P)$. Khi đó tìm giá P theo lượng cung, cầu ta được các hàm cung ngược $P = P(Q_s)$ và hàm cầu ngược $P = P(Q_d)$.

Giải phương trình cân bằng $Q_s = Q_d$ ta xác định được điểm cân bằng (P_0, Q_0). Khi đó thặng dư của người tiêu dùng **CS** (**Consumers' Surplus**) và thặng dư của nhà sản xuất **PS** (**Producers' Surplus**) được xác định bởi các tích phân xác định theo công thức dưới đây

$$\mathbf{CS} = \int_0^{Q_0} P(Q_d)dQ_d - P_0Q_0 \; ; \quad \mathbf{PS} = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P(Q_s)dQ_s \, .$$

2. Ví dụ

Ví dụ 18. Biết hàm cung, cầu của một loại hàng hóa cho bởi $Q_s = \sqrt{P} - 1$, $Q_d = \sqrt{113 - P}$. Hãy xác định thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất đối với hàng hóa đó.

Giải + Các hàm cung, cầu ngược cho bởi P = $(Qs + 1)^2$, P = 113 – Q_d^2.

+ Điểm cân bằng thị trường cho bởi phương trình $Q_s = Q_d$, tức là

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow \sqrt{P} - 1 = \sqrt{113 - P} \Leftrightarrow (P_0, Q_0) = (64, 7).$$

+ Thặng dư của người tiêu dùng là

$$\int_0^{Q_0} P(Q_d)dQ_d - P_0Q_0 = \int_0^7 (113 - Q_d^2)dQ_d - 64\times 7 = \left[113Q - \frac{1}{3}Q^3\right]\Bigg|_0^7 - 448 = \frac{686}{3}.$$

+ Thặng dư của nhà sản xuất là

$$P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P(Q_s)dQ_s = 64\times 7 - \int_0^7 (Q_s+1)^2 dQ_s = 448 - \left[\frac{(Q_s+1)^3}{3}\right]\Bigg|_0^7 = \frac{833}{3}.$$

Ví dụ 19. Biết hàm cung, cầu của một loại hàng hóa cho bởi $Q_s = \sqrt{P} - 3$, $Q_d = \sqrt{185 - P}$. Hãy xác định thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất đối với hàng hóa đó.

CHƯƠNG 8. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN(DIFFERENTIAL EQUATIONS)

8.0. BỔ TÚC VỀ SỐ PHỨC (COMPLEX NUMBERS) (SV Tự ôn)
8.1.SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1
(FIRST - ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS)

8.2.SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2
(SECOND – ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS)

CHƯƠNG 8: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

8.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

8.1.1. KHÁI NIỆM

1. Phương trình vi phân: là phương trình có chứa đạo hàm của hàm số cần tìm.

Ví dụ 1. a) $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$;

b) $y'' - 4y' + 3y = 2\sin x - 4\cos x$.

Đây là các phương trình vi phân với y là ẩn hàm cần tìm, x là biến số độc lập, y', y'' là các đạo hàm của ẩn hàm.

2. Cấp của phương trình vi phân: là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình đó.

Ví **dụ 2**. a) Phương trình cho ở ví dụ 1a) là phương trình vi phân cấp 1.

b) Phương trình cho ở ví dụ 1b) là phương trình vi phân cấp 2.

3. Nghiệm của phương trình vi phân: là hàm số thoả mãn phương trình đó.

Ví dụ 3. a) Hàm số $y = x^3$ là nghiệm của phương trình cho ở ví dụ 1a), vì thay $y = x^3, y' = 3x^2$ vào phương trình đó ta thấy:

$y' - \frac{1}{x}y = 3x^2 - \frac{1}{x}x^3 = 2x^2$ là đẳng thức đúng với mọi $x \neq 0$.

Tương tự, hàm số $y = x^3 + cx$ (với c là hằng số bất kì) cũng là nghiệm của phương trình cho ở ví dụ 1a), vì: thay $y = x^3 + cx$, $y' = 3x^2 + c$ vào phương trình đã cho ta cũng thấy thoả mãn.

b) Hàm số $y = \sin x$ là nghiệm của phương trình

$$y'' - 4y' + 3y = 2\sin x - 4\cos x$$

4. Phân loại nghiệm:

a) Nghiệm tổng quát: là nghiệm có chứa hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 4. $y = x^3 + cx$ là nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' - \frac{1}{x}y = 2x^2.$$

b) Nghiệm riêng: là nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số c một giá trị cụ thể.

Ví dụ 5. $y = x^3$ là nghiệm riêng của phương trình $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$ vì nó được suy từ nghiệm tổng quát khi $c = 0$.

c) Nghiệm kì dị: là nghiệm không suy được từ nghiệm tổng quát. Nghiệm kì dị thường xuất hiện khi xét các trường hợp đặc biệt của phương trình vi phân.

Nhận xét. Ứng với mỗi nghiệm tổng quát sẽ có vô số nghiệm riêng. Do đó, muốn tìm một nghiệm riêng nào đó, ta cần biết trước điều kiện của nghiệm. Ta gọi đó là điều kiện ban đầu của phương trình vi phân. Điều kiện này thường được viết ở dạng :

$y(x_0) = y_0$ hoặc $y\Big|_{x=x_0} = y_0$.

Khi đó, chỉ cần thay điều kiện ban đầu vào nghiệm tổng quát, ta sẽ tìm được giá trị cần có của hằng số. Từ đó suy ra nghiệm riêng.

Ví dụ 6. Hãy tìm nghiệm riêng của phương trình $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$ thoả mãn điều kiện: $y(1) = 0.$

Ta đã có nghiệm tổng quát của phương trình đó là $y = x^3 + cx$. Muốn thoả mãn điều kiện đã cho thì $0 = 1^3 + c1 \Leftrightarrow c = -1$. Vậy, nghiệm riêng cần tìm là hàm số $y = x^3 - x.$

8.1.2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Phương trình có biến số phân li

a) Khái niệm. Phương trình có biến số phân li (còn gọi là phương trình tách biến) là phương trình vi phân cấp một có dạng

$$f(x)dx = g(y)dy$$

Ví dụ 1. a) $\sin x dx = \ln y dy$ là phương trình phân li.

b) $\sin x \cos y dx = tgy dy$ không là phương trình phân li, nhưng có thể biến đổi để đưa về phương trình phân li. Chẳng hạn, nếu chia hai vế cho $\cos y$, với điều kiện $\cos y \neq 0$, ta được phương trình phân li

$$\sin xdx = \frac{tgy}{\cos y}dy \quad hay \quad \sin xdx = \frac{\sin y}{\cos^2 y}dy.$$

b) **Cách giải.** Lấy tích phân bất định hai vế của phương trình phân li sẽ được nghiệm tổng quát ở dạng "hàm ẩn".

Ví dụ 2. Giải phương trình cho ở ví dụ 1a), ta có

$$\sin xdx = \ln ydy \Leftrightarrow \int \sin xdx = \int \ln ydy$$

$$\Leftrightarrow -\cos x + c = y(\ln y - 1)$$

Chú ý: Chỉ cần cộng hằng số vào một trong hai vế ở công thức nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin x \cos ydx = tgydy$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $tgydx - x\ln xdy = 0.$

Ví dụ 5. Tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y(\sqrt{8}) = 1$ của phương trình $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

2. Phương trình đẳng cấp

a) Khái niệm. Phương trình đẳng cấp là phương trình vi phân cấp một có dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ví dụ 6. a) $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$ là phương trình đẳng cấp.

b) $xy' = y + 2x$ không là phương trình đẳng cấp, nhưng có thể biến đổi để đưa về phương trình đẳng cấp. Chẳng hạn, nếu chia hai vế cho x, với điều kiện $x \neq 0$, ta được phương trình đẳng cấp

$$y' = \frac{y}{x} + 2.$$

b) Cách giải. Đặt ẩn hàm mới $z = \frac{y}{x}$ hay $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z.$

Thay vào phương trình đẳng cấp sẽ được phương trình phân li theo $z, x.$ Giải phương trình này sẽ tìm được z, từ đó suy ra $y.$

Ví dụ 7. Giải phương trình cho ở ví dụ 6a). Đặt ẩn hàm

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z.$$

Thay vào phương trình đẳng cấp ta được

$$z'x + z = z + \cos z \quad \Leftrightarrow z'x = \cos z$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx}x = \cos z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{\cos z} = \frac{dx}{x}$$

Đây là phương trình phân li với điều kiện $\cos z \neq 0$. Lấy tích phân bất định hai vế ta có

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|tg\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = cx \quad \Leftrightarrow \quad tg\left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4}\right) = cx$$

Xét trường hợp $\cos z = 0 \ \ hay \ \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ta có $z' = 0$, thay vào phương trình $z'x = \cos z$, ta thấy thoả mãn. Vậy đây là nghiệm kì dị của phương trình. Khi đó $y = zx = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$.

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm tổng quát và một nghiệm kì dị.

Chú ý: Có thể cộng $\ln c$ vào một trong hai vế ở công thức nghiệm để khử $\ln$ ra khỏi nghiệm, khi đó công thức nghiệm sẽ gọn hơn.

Ví dụ 8. Giải phương trình $xy' = y + 2x$.

Ví dụ 9. Tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y(1) = 1$ của phương trình $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

3. Phương trình tuyến tính

a) Khái niệm: là phương trình vi phân có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số của biến số độc lập x.

Ví dụ 10. a) $y' - \frac{1}{x}y = x^2 \sin x$ là phương trình tuyến tính với $p(x) = -\frac{1}{x}, q(x) = x^2 \sin x.$

b) $(2xy+3)dx - x^2dy = 0$ không là phương trình tuyến tính nhưng có thể đưa về phương trình tuyến tính sau một vài phép biến đổi.

b) Cách giải: Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính là hàm số

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$$

trong đó

hay y = u(x). v(x) với $u(x) = e^{-\int p(x)dx}, \quad v(x) = \int \frac{q(x)}{u(x)}dx.$

Khi tính $e^{\int p(x)dx}$ hay $u(x)$ không lấy hằng số C tuỳ ý, khi tính $v(x)$ cần lấy hằng số đó.

Ví dụ 11. Giải phương trình ở ví dụ 10a). Ta có

$$u(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x,$$
$$v(x) = \int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + c,$$
$$y = x(-x\cos x + \sin x + c).$$

Ví dụ 12. Giải phương trình $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 0.$

Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình. Ta có

$$p(x) = \cos x, q(x) = \sin x \cos x,$$
$$u(x) = e^{-\int \cos x dx} = e^{-\sin x},$$
$$v(x) = \int e^{\sin x}\sin x \cos x dx =$$
$$= \int te^t dt = e^t(t-1) + c = e^{\sin x}(\sin x - 1) + c,$$
$$y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}.$$

Để tìm nghiệm riêng ta cần thay điều kiện $y(0) = 0$ vào nghiệm tổng quát, khi đó ta được

$$0 = \sin 0 - 1 + ce^{-\sin 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.$$

Vậy nghiệm riêng cần tìm là hàm số $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$.

Ví dụ 13. Giải phương trình $(2xy+3)dx - x^2dy = 0.$

Ví dụ 14. Giải phương trình $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0.$

4. Phương trình Bernoulli

a) Khái niệm: là phương trình vi phân có dạng

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số của biến số độc lập x, còn α là số thực bất kì. Với $\alpha=0, \alpha=1$, phương trình Bernoulli chính là phương trình tuyến tính đã xét, do đó ta chỉ đưa ra cách giải phương trình trên khi $\alpha\neq 0, \alpha\neq 1.$

Ví dụ 15. $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^4$ là phương trình Bernoulli với $\alpha=4.$

b) Cách giải: Đặt ẩn hàm mới $z=y^{1-\alpha} \Rightarrow z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$.
Thay vào phương trình Bernoulli đã cho sẽ được phương trình tuyến tính theo $z, x.$ Giải phương trình này ta tìm được z, từ đó suy ra $y.$
Ví dụ 16. Giải phương trình ở ví dụ 15.
Ta thấy ngay $y=0$ là một nghiệm kì dị của phương trình đã cho.
Xét trường hợp $y\neq 0$, đặt

$$z=y^{-3} \Rightarrow z'=-3y^{-4}y' \quad hay \quad y'=-\frac{1}{3}y^4z'.$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$-\frac{1}{3}y^4z'+\frac{y}{x}=x^2y^4 \quad\Leftrightarrow\quad z'-\frac{3}{x}z=-3x^2.$$

Đây là phương trình tuyến tính với $p(x)=-\dfrac{3}{x}, q(x)=-3x^2$ nên

$$u(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3,$$

$$v(x)=-\int\frac{3}{x}dx=-3\ln x+c,$$

$$z=x^3(-3\ln x+c).$$

Dođó nghiệm của phương trình đã cho là

$$y^{-3}=x^3(-3\ln x+c).$$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm tổng quát và một nghiệm kì dị.
Ví dụ 17. Giải các phương trình sau

a) $y'+\dfrac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0)=1.$

b) $3dy+(1+3y^3)y\sin x dx=0, \quad y(\frac{\pi}{2})=1.$

5. Phương trình vi phân toàn phần

a) Khái niệm: là phương trình vi phân có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm hai biến có các đạo hàm riêng thoả mãn điều kiện $Q_x^{'} = P_y^{'}$.

Ví dụ 18. a) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$,

b) $\left(y + \dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \dfrac{3}{y^2}\right)dy = 0$

là các phương trình vi phân toàn phần.

b) Cách giải: Chọn điểm (x_0, y_0) bất kì mà tại đó các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân toàn phần được tính bởi công thức

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

Ví dụ 19. Giải các phương trình cho ở ví dụ 18.

a) Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$, ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\int_{0}^{x} (0 - 3x^2)dx - \int_{0}^{y} (4y - x)dy = C \Leftrightarrow -x^3 - 2y^2 + xy = C$$

hoặc

$$\int_{0}^{x} (y - 3x^2)dx - \int_{0}^{y} (4y - 0)dy = C \Leftrightarrow -x^3 - 2y^2 + xy = C.$$

b) Chọn $(x_0, y_0) = (1,1)$, ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\int_1^x \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)dx + \int_1^y \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{x}\right)\Bigg|_1^x + \left(xy + \frac{3}{y}\right)\Bigg|_1^y = C \Leftrightarrow -\frac{2}{x} + xy + \frac{3}{y} = C_1$$

Ví dụ 20. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0,$

b) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0.$

8.2.PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

8.2.1. KHÁI NIỆM

1. Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có chứa đạo hàm cấp hai của hàm số cần tìm.

Ví dụ 1. $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ là phương trình vi phân cấp hai với x là biến số độc lập, y là ẩn hàm cần tìm.

2. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là nghiệm có chứa hai hằng số bất kì.

Ví dụ 2. Hàm số $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cho ở ví dụ 1, vì

$y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 1, \quad y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x}.$

Thay vào phương trình đã cho ta thấy

$$y'' - 3y' + 2y = (c_1e^x + 4c_2e^{2x}) - 3(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 1) +$$

$$+2(c_1e^x + c_2e^{2x} + x) = 2x - 3$$

là đẳng thức đúng.

3. Nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp hai được suy từ nghiệm tổng quát khi các hằng số nhận giá trị cụ thể. Để tìm một nghiệm riêng nào đó ta cần biết điều kiện mà nó thoả mãn. Ta gọi đó là điều kiện ban đầu của phương trình vi phân. Điều kiện này thường được cho ở dạng:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0'.$$

Ví dụ 3. Từ nghiệm tổng quát ở ví dụ 2, hãy tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y(0) = 3, y'(0) = 5.$

Thay điều kiện đã cho vào y, y', ta có

$$\begin{cases} c_1e^0 + c_2e^0 + 0 = 3 \\ c_1e^0 + 2c_2e^0 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm riêng cần tìm là hàm số $y = 2e^x + e^{2x} + x.$

8.2.2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Phương trình giảm cấp được

a) Khái niệm. Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được là phương trình có thể đưa được về phương trình vi phân cấp một bằng cách đặt ẩn hàm mới.

Sau đây ta xét một số phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được.

b) Phương trình vi phân cấp hai thiếu y, y'

Khi đó phương trình có dạng $y'' = f(x).$

Muốn giải phương trình này, ta lấy tích phân bất định hai lần, sẽ được nghiệm tổng quát.

Ví dụ 1. $y'' = \sin x$ là phương trình vi phân cấp hai thiếu y, y'.

- Lấy tích phân bất định lần thứ nhất, ta được

$$y' = -\cos x + c_1.$$

- Lấy tích phân bất định lần thứ hai, ta được

$$y = -\sin x + c_1x + c_2.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình $y'' = xe^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

- Trước hết, ta tìm nghiệm tổng quát.

Lấy tích phân bất định hai lần ta được

$$y' = \int xe^x dx = (x-1)e^x + c_1,$$

$$y = \int \left((x-1)e^x + c_1\right)dx = (x-2)e^x + c_1x + c_2.$$

- Thay điều kiện ban đầu vào y, y'**,** ta được

$$\begin{cases} 1 = (0-1)e^0 + c_1 \\ 2 = (0-2)e^0 + c_1 0 + c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

- Vậy, nghiệm riêng cần tìm là hàm số $y = (x-2)e^x + 2x + 4.$

Ví dụ 3. Giải phương trình $y'' = 3x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

c) Phương trình vi phân cấp hai thiếu y

Khi đó phương trình có dạng $y'' = f(x, y')$.

Muốn giải phương trình này, ta đặt ẩn hàm $z = y' \Rightarrow z' = y''$.

Thay vào phương trình đã cho, sẽ được phương trình mới có dạng $z' = f(x, z)$.

Đây là phương trình vi phân cấp một đối với ẩn hàm z, biến số độc lập x. Giải phương trình này, sẽ tìm được z, tức là tìm được y'. Từ đó, lấy tích phân bất định, sẽ tìm được ẩn hàm y.

Ví dụ 4. Giải phương trình $xy'' = y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

Đặt $z = y' \Rightarrow z' = y''$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right) \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x}\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

Đây là phương trình đẳng cấp theo z, x.

Đặt $t = \dfrac{z}{x} \Rightarrow z = tx \Rightarrow z' = t'x + t$. Thay vào phương trình đẳng cấp, ta có

$$t'x + t = t\ln t \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}x = t\ln t - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \qquad (\ln t - 1 \neq 0)$$

Đây là phương trình phân li, lấy tích phân bất định hai vế, ta được

$$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln t - 1 = c_1 x$$

$$\ln\frac{z}{x} = c_1 x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = xe^{c_1 x + 1}$$

Thay $z = y'$ và lấy tích phân bất định, ta có

$$y = \int xe^{c_1 x+1}dx = \frac{x}{c_1}e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1 x+1} + c_2$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Xét trường hợp

$$\ln t = 1 \quad hay \quad t = e \quad \Leftrightarrow z = ex \quad \Rightarrow z' = e$$

Thay vào phương trình đẳng cấp, ta thấy thoả mãn. Vậy, đây là nghiệm kì dị của phương trình. Khi đó $y' = ex \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{e}{2}x^2$.

Như vậy, phương trình đã cho có một nghiệm tổng quát và một nghiệm kì dị.

Ví dụ 5. Giải phương trình $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1),\ y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $y''-\dfrac{y'}{x}=0.$

d) Phương trình vi phân cấp hai thiếu x

Khi đó phương trình có dạng $y''=f(y,y').$

Muốn giải phương trình này, ta đặt ẩn hàm $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$ và xem p là hàm số của y. Khi đó

$$p'=\frac{dp}{dy}\Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p'.p$$

Thay vào phương trình đã cho, sẽ được phương trình mới có dạng $pp'=f(y,p)$. Đây là phương trình vi phân cấp một đối với ẩn hàm p, biến số độc lập y. Giải phương trình này, sẽ tìm được p, tức là tìm được y'. Từ đó, giải phương trình phân li tương ứng, sẽ tìm được ẩn hàm y.

Ví dụ 7. Giải phương trình $y''-y'^2=0$.

Đặt $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$ và xem p là hàm số của y. Khi đó $y''=pp'$.

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$pp'-p^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad p(p'-p)=0 \quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} p=0\ \ (1)\\ p'=p\ \ (2)\end{array}\right.$$

Ta có

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad y'=0\quad\Leftrightarrow\quad y=c.$$

$$(2)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{dp}{dy}=p\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dp}{p}=dy\quad\Leftrightarrow\quad \ln p=y+c_1$$

$$\Leftrightarrow\quad p=e^{y+c_1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dy}{dx}=e^{y+c_1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dy}{e^{y+c_1}}=dx$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{-y-c_1}dy=dx\quad\Leftrightarrow\quad -e^{-y-c_1}=x+c_2.$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $yy''=1+y'^2$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $yy''-y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

2. Phương trình tuyến tính hệ số hằng thuần nhất

a) Khái niệm. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng thuần nhất là phương trình vi phân có dạng

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

b) Cách giải. Xét phương trình đặc trưng

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

- Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép k_0 thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = e^{k_0 x}(c_1 x + c_2).$$

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

$$a) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$b) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$c) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau

$$a) \quad y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$b) \quad y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$c) \quad y'' - 2y' = 0$$

$$d) \quad y'' + 4y = 0$$

3. Phương trình tuyến tính hệ số hằng không thuần nhất

a) Khái niệm. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng không thuần nhất là phương trình vi phân có dạng

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

b) Cách giải. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất có dạng $y = \overline{y} + y_r$, trong đó $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, y_r là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho.

- Cách tìm $\overline{y}$ như ở mục 2.
- Cách tìm y_r**:** Tuỳ thuộc vào dạng của hàm số $f(x)$ ở vế phải của phương trình đã cho.

* Trường hợp $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x có các hệ số cho trước. Khi đó

- Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì

$$y_r = e^{ax}Q_n(x)$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x có các hệ số chưa biết. Để tìm các hệ số này, ta thay y_r và các đạo hàm của nó vào phương trình đã cho rồi đồng nhất hai vế.

- Nếu a là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì

$$y_r = xe^{ax}Q_n(x)$$

- Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì

$$y_r = x^2e^{ax}Q_n(x)$$

* Trường hợp $f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$, trong đó $P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m của x có các hệ số cho trước.
Khi đó

- Nếu $a \pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì

$$y_r = e^{ax}\left(H_k(x)\cos bx + L_k(x)\sin bx\right)$$

trong đó $H_k(x), L_k(x)$ là các đa thức bậc $k = \max(n, m)$ của x có các hệ số chưa biết. Để tìm các hệ số này, ta thay y_r và các đạo hàm của nó vào phương trình đã cho rồi đồng nhất hai vế.

- Nếu $a \pm ib$ là nghiệm phức của phương trình đặc trưng thì

$$y_r = xe^{ax}\left(H_k(x)\cos bx + L_k(x)\sin bx\right)$$

Ví dụ 12. Giải phương trình $y''-3y'+2y=(6x+7)\mathrm{e}^{-x}$

Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y=\overline{y}+y_r.$$

- Ta tìm $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y''-3y'+2y=0$$

Xét phương trình đặc trưng $k^2-3k+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=1,\ k=2$.

Do đó $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

- Ta tìm y_r là nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Ta nhận thấy vế phải của phương trình đã cho là $f(x)=e^{-x}P_1(x)$ có $a=-1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên

$$y_r=e^{-x}Q_1(x)=e^{-x}(Ax+B)$$

Suy ra $y_r'=e^{-x}(-Ax+A-B), \quad y_r''=e^{-x}(Ax-2A+B)$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$y_r''-3y_r'+2y_r=(6x+7)e^{-x}$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}(Ax-2A+B)-3e^{-x}(-Ax+A-B)+$

$+2e^{-x}(Ax+B)=(6x+7)\mathrm{e}^{-x}$

$\Leftrightarrow \quad (6Ax-5A+6B)e^{-x}=(6x+7)e^{-x}$

Đồng nhất hai vế, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6A=6 \\ -5A+6B=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

Do đó nghiệm riêng là $y_r=e^{-x}(x+2)$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{-x}(x+2).$$

Ví dụ 13. Giải phương trình $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{x}$

Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y=\overline{y}+y_r.$$

- Ta tìm $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1,\ k = 2$.

Do đó $\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

- Ta tìm y_r là nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Ta nhận thấy vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^x P_0(x)$
có $a = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên

$$y_r = xe^x Q_0(x) = Axe^x$$

Suy ra $y_r' = Ae^x(x+1), \quad y_r'' = Ae^x(x+2)$
Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$y_r'' - 3y_r' + 2y_r = 2e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad Ae^x(x+2) - 3Ae^x(x+1) + 2Ae^x = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Ae^x = 2e^x \quad \Leftrightarrow \quad A = 2$$

Do đó nghiệm riêng là $y_r = 2xe^x$.
Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2xe^x.$$

Ví dụ 14. Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$
Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y = \overline{y} + y_r.$$

- Ta tìm $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$.

Do đó $\overline{y} = e^x(c_1 x + c_2)$.

- Ta tìm y_r là nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Ta nhận thấy vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^x P_0(x)$
có $a = 1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên

$$y_r = x^2 e^x Q_0(x) = Ax^2 e^x$$

Suy ra $y_r' = Ae^x(x^2 + 2x),\quad y_r'' = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$y_r'' - 2y_r' + y_r = 2e^x$

$\Leftrightarrow\quad Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Ae^x(x^2 + 2x) + Ax^2e^x = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

$\Leftrightarrow\quad 2Ae^x = 2e^x \quad\Leftrightarrow\quad A = 1$

Do đó nghiệm riêng là $y_r = x^2 e^x$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^x(c_1 x + c_2) + x^2 e^x.$$

Ví dụ 15. Giải phương trình $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$

Ví dụ 16. Giải phương trình $y'' + y = \sin x$

Ví dụ 17. Giải các phương trình sau

$a)\quad y'' + 3y' - 4y = e^x$

$b)\quad y'' + 2y' + y = e^{-x}$

$c)\quad y'' + 5y' + 6y = e^{2x}(x - 1)$

$d)\quad y'' + 2y' + 10y = x^2 + x - 2$

$e)\quad y'' + 4y = \cos 2x$

- Trường hợp $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, trong đó $f_1(x), f_2(x)$ có dạng như ở các trường hợp trên. Khi đó $y_r = y_{r_1} + y_{r_2}$,

với y_{r_1} là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

y_{r_1} là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x).$$

Ví dụ 18. Giải phương trình $y'' + y = e^x + 5x$.

BÀI TẬP TP VÀ PTVP

1. Tính các tích phân bất định

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int (\sin 5x - \sin 7x)dx$; c) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; d) $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; f) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$; g) $\int x^3 e^{2x}dx$; h) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

i) $\int \frac{2-\sin x}{2-\cos x}dx$; k) $\int \frac{\tan x}{(\cos x - \sin x).\cos x}dx$.

2. Tính tích phân bất định của các hàm hữu tỉ sau

a) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; b) $\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$; c) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

d) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; e) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$; f) $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

3. Tính các tích phân lượng giác và vô tỷ sau

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$; b) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; c) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; d) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

e) $\int_1^{64} \frac{dx}{(4+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; f) $\int_0^{1+\sqrt{3}} \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; g) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^8 x}$; h) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

4. Xét sự hội tụ và tính giá trị (nếu hội tụ) của các tích phân suy rộng dưới đây

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx$; c) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$; d) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx$;

i) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$; k) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

5. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+2x+1}dx$; b) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x\sqrt{x}}$; d) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2\cos^2 x}$;

e) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$; f) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$; g) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}.dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

6. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly sau đây

a) lncosydx + xtgydy = 0;

b) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

c) $(1 + e^{2x})y^2dy = e^xdx$ với điều kiện y(0) = 0;

d) $\frac{y}{y'} = \ln y$ với điều kiện y(2) = 1.

7. Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau đây

a) $xy' - y = x^2\cos x$;

b) $(1 + x^2)y' + y = \arctan x$;

c) $y'\sin x - y\cos x = 1$ với điều kiện $y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

d) $y' - y\tan x = \frac{1}{\cos x}$ với điều kiện y(0) = 0;

e) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ với điều kiện y(0) = 0;

f) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$.

8. Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau đây:

$a) y'' + 3y' - 4y = e^x$; $b) y'' + 2y' + y = e^{-x}$;

$c) y'' + 5y' + 6y = e^{2x}(x-1)$; $d) y'' + 2y' + 10y = x^2 + x - 2$;

$e) y'' + 4y = \cos 2x$; $f) y'' - y = -2(\cos x + \sin x)$.

Bài tập ứng dụng

9.

a) Tìm hàm tổng chi phí theo sản lương Q biết chi phí cố định là 100 (triệu đồng) và hàm chi phí cận biên MC = $3Q^2 + 4Q$ (triệu đồng).

b) Tìm quỹ vốn theo thời gian t biết vốn ban đầu là 5 tỉ và lượng đầu tư là I = I(t) = $4t^3 + 3t^2 + 2t$ (tỉ đồng).

c) Cho biết hàm cầu và hàm cung đối với một loại hàng hóa nào đó là

$$Q_d = \sqrt{113 - p}; \quad Q_s = \sqrt{p} - 1.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng đối với loại hàng hóa đó.

10.

a) Tìm hàm tổng chi phí theo sản lương Q biết chi phí cố định là 100 (triệu đồng) và hàm chi phí cận biên MC = $9Q^2 + 8Q - 6$ (triệu đồng).

b) Tìm quỹ vốn theo thời gian t biết vốn ban đầu là 8 tỉ và lượng đầu tư là I = $I(t) = 8t^3 + 9t^2 + 4t - 3$(tỉ đồng).

c) Cho biết hàm cầu và hàm cung đối với một loại hàng hóa nào đó là

$$Q_d = \sqrt{100 - p}\,; \quad Q_s = \sqrt{p} - 2.$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng đối với loại hàng hóa đó.