TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

Khoa Cơ Khí-Bộ môn Kỹ thuật máy

----------&&O&&---------

ROBOT CÔNG NGHIỆP

CHƯƠNG 4
ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT

4.1. NHIỆM VỤ & PHƯƠNG PHÁP

- **Nhiệm vụ**:
  - Xác định moment và lực động xuất hiện trong quá trình chuyển động. Khi đó quy luật biến đổi của các biến khớp coi như đã biết. Việc tính toán lực trong cơ cấu tay máy là rất cần thiết để chọn công suất động cơ, kiểm tra bền, độ cứng vững, đảm bảo độ tin cậy của Robot.
  - Xác định sai số động tức là sai lệch so với quy luật chuyển động theo chương trình. Lúc này cần khảo sát phương trình chuyển động của Robot có tính đến đặc tính động lực của động cơ và các khâu.
- **Phương pháp**: Sử dụng phương pháp cơ học Lagrange, cụ thể là phương trình Lagrange-Euler.

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- Hàm Lagrange của một hệ thống năng lượng được định nghĩa:

  $L = K - P$ Trong đó: K: Tổng động năng của hệ thống

  P: Tổng thế năng của hệ thống

  K và P đều là những đại lượng vô hướng nên có thể chọn bất cứ hệ tọa độ thích hợp nào để bài toán được đơn giản.

- Đối với một Robot có n khâu, ta có:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i; \; P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

  K_i, P_i là động năng và thế năng của khâu thứ i xét trong hệ tọa độ chọn.

- Mỗi đại lượng K_i và P_i là hàm số phụ thuộc nhiều biến số:

$$K_i = K\left(q, \dot{q}_i\right); \; P_i = P\left(q, \dot{q}_i\right)$$

  Với q_i là tọa độ suy rộng của khớp thứ i. Nếu khớp thứ i là khớp quay thì q_i là góc quay θ_i, nếu là khớp tịnh tiến thì q_i là độ dài d_i.

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- Định nghĩa: Lực tác dụng lên khâu thứ *i* (*i*=1,2,…,*n*) với quan niệm là ***lực tổng quát***, nó có thể là một lực hoặc một moment (phụ thuộc vào biến khớp là tịnh tiến hay quay), được xác định bởi:

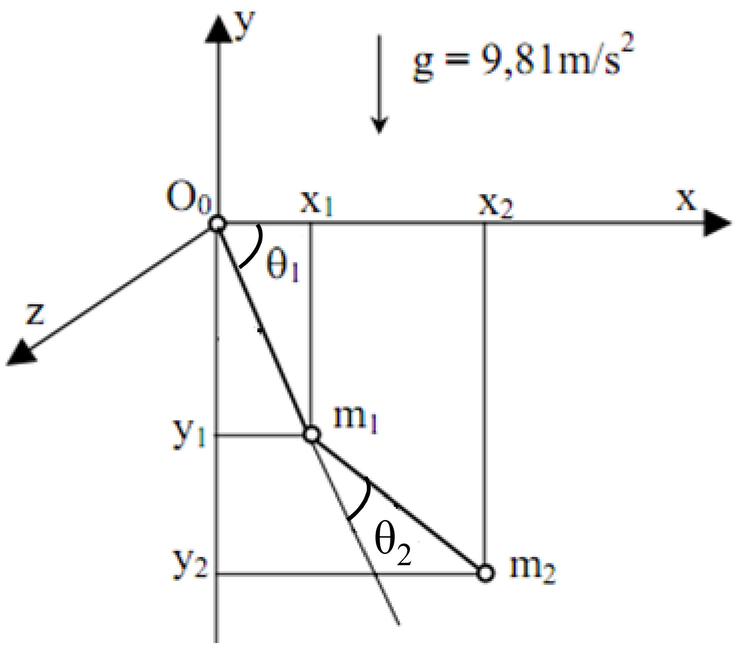
$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- Phương trình trên gọi là phương trình Lagrange-Euler, thường được gọi tắt là phương trình Lagrange.

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- **Ví dụ**: Xét một Robot có hai khâu như hình bên. Các khâu có chiều dài là l_1 và l_2 với các khối lượng tương ứng m_1 và m_2 quy đổi về đầu mút của khâu. Robot được đặt thẳng đứng chịu gia tốc trọng trường *g*. Các khớp chuyển động quay với các biến θ_1 và θ_2.

  Tính lực tổng quát.



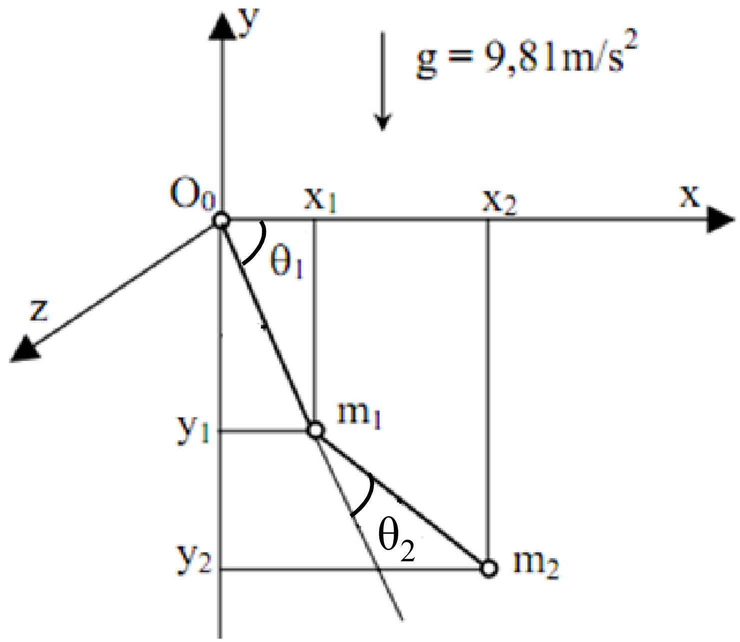
4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- **Giải**:
  - Xác định vị trí, vận tốc của các khâu:

$$\vec{r}_1 = l_1 c\theta_1 \vec{i} - l_1 s\theta_1 \vec{j}$$
$$\dot{\vec{r}}_1 = -\dot{\theta}_1 l_1 s\theta_1 \vec{i} - \dot{\theta}_1 l_1 c\theta_1 \vec{j}$$
$$\vec{r}_2 = [l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 - \theta_2)]\vec{i} - [l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 - \theta_2)]\vec{j}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = -[\dot{\theta}_1 l_1 s\theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)s(\theta_1 - \theta_2)]\vec{i}$$
$$-[\dot{\theta}_1 l_1 c\theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)c(\theta_1 - \theta_2)]\vec{j}$$

  - Tính động năng và thế năng khâu 1:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^T \dot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2$$
$$P_1 = -m_1 g l_1 s\theta_1$$



4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- **Giải**:
  - Tính động năng và thế năng khâu 2:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,T} \dot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + l_2^2 \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \right)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \right) c\theta_2 \right]$$

$$P_2 = -m_2 g \left[l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

  - Hàm Lagrange:

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + l_2^2 \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \right)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \right) c\theta_2 \right] \\ &+ m_1 g l_1 s\theta_1 + m_2 g \left[l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1 - \theta_2) \right] \end{aligned}$$

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- **Giải**:
  - Tính lực tổng quát:

$$F_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$= \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)c\theta_2\right)$$
$$-\left((m_1 + m_2)gl_1 c\theta_1 + m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$
$$= \left((m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2\left(2\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2\right)c\theta_2 - m_2 l_1 l_2\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2 s\theta_2\right)$$
$$-\left((m_1 + m_2)gl_1 c\theta_1 + m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$
$$= \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_1 - \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 s\theta_2\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2$$
$$-\left((m_1 + m_2)gl_1 c\theta_1 + m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

$$F_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_2 l_2^2\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1 c\theta_2\right) - \left(-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)s\theta_2 - m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$
$$= \left(m_2 l_2^2\left(\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1\right) - m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 s\theta_2\right)$$
$$-\left(m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)s\theta_2 - m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$
$$= -\left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2\right]\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 s\theta_2\dot{\theta}_1^2 + m_2 gl_2 c(\theta_1 - \theta_2)$$

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- **Giải**:
  - Viết lại phương trình trên:

$$F_1 = \left[(m_1+m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_1 - \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 s\theta_2\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2$$
$$- \left((m_1+m_2)gl_1 c\theta_1 + m_2 g l_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right)$$
$$F_2 = -\left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2\right]\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 c(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c\theta_2 & -\left(m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right) \\ -\left(m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2\right) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta}_2 & m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -\left((m_1+m_2)gl_1 c\theta_1 + m_2 g l_2 c(\theta_1 - \theta_2)\right) \\ m_2 g l_2 c(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow F = J(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Với:

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$
$$J(q) \in R^{2x2},\ C(q,\dot{q}) \in R^{2x2},\ G(q) \in R^2$$

4.2. CƠ HỌC LAGRANGE

- Để phân tích ý nghĩa các thành phần trong biểu thức tính lực F_1 và F_2, ta viết lại hai biểu thức trên dưới dạng như sau:

$$F_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_1$$

$$F_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_2$$

  - Các hệ số D_{ii} hoặc D_{ij} thể hiện hiệu ứng quán tính tại khớp i hoặc j gây ra bởi gia tốc tại khớp i hoặc j.
  - Các số hạng có dạng $D_{ijj}\dot{\theta}_j^2$ là lực ly tâm tác động lên khớp i gây ra bởi vận tốc tại khớp j.
  - Các số hạng dạng $D_{ijk}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k + D_{ikj}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_j$ là lực Coriolit tác động lên khớp thứ i gây ra do vận tốc tại khớp j và k.
  - Số hạng D_i là lực trọng trường tác dụng lên khớp i.

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Vận tốc của một điểm trên Robot**
  - Một điểm trên khâu thứ i được mô tả trong hệ quy chiếu gốc:

    $\vec{r} = {}^0_i T . {}^i\vec{r}$

  Trong đó:

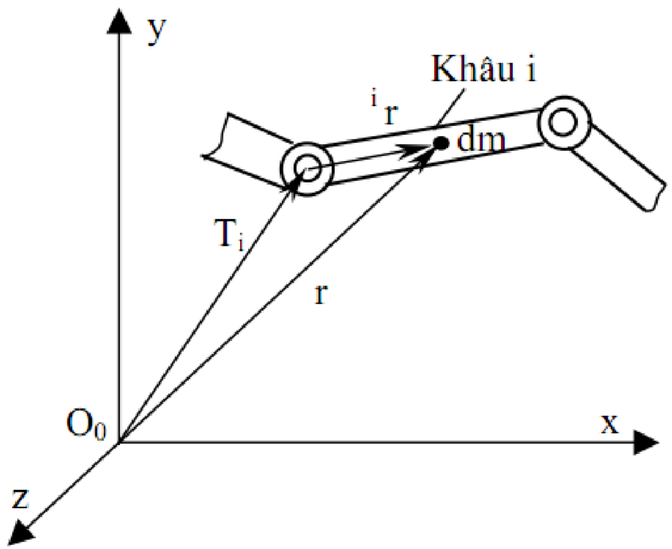
  ${}^i\vec{r}$: Tọa độ của điểm xét trong hệ quy chiếu i, không thay đổi theo t

  ${}^0_i T$: Ma trận chuyển đổi từ hệ quy chiếu i về hệ quy chiếu gốc.

  $\vec{r}$: Hàm của thời gian t.

  - Vận tốc của một vi khối lượng dm:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left({}^0_i T . {}^i\vec{r}\right) = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right){}^i\vec{r}$$



4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Vận tốc của một điểm trên Robot**
  - Tính bình phương của vận tốc:

$$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = Tr\left(\dot{\vec{r}}.\dot{\vec{r}}^T\right)$$

Tr: Viết tắt của *Trace* (vết của ma trận):

$$Trace\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix}$$

  - Thế vào phương trình trên, ta có:

$$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = Tr\left(\dot{\vec{r}}.\dot{\vec{r}}^T\right) = Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\,{}^i\vec{r}.\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\dot{q}_k\,{}^i\vec{r}^T\right]$$

$$= Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}{}^i\vec{r}.{}^i\vec{r}^T\frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Gọi K_i là động năng khâu thứ *i*, dK_i là động năng của vi khối lượng *dm* đặt tại vị trí ${}^i\vec{r}$ trên khâu thứ *i*:

$$dK_i = \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}{}^i\vec{r}.{}^i\vec{r}^T\frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]dm$$

$$= \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}{}^i\vec{r}.dm.{}^i\vec{r}^T\frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

  - Khi đó động năng của khâu thứ *i* sẽ là:

$$K_i = \int_{khau\ i} dK_i = \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\left(\int_{khau\ i} {}^i\vec{r}.{}^i\vec{r}^T dm\right)\frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Đặt: $J_i = \int\limits_{khau\ i} {}^i\vec{r}.{}^i\vec{r}^T dm$ Gọi là ma trận giả quán tính. Theo định nghĩa ta có:

$$J_i = \int\limits_{khau\ i} {}^i\vec{r}.{}^i\vec{r}^T dm = \begin{bmatrix} \int {}^ix^2dm & \int {}^ix.{}^iydm & \int {}^ix.{}^izdm & \int {}^ixdm \\ \int {}^ix.{}^iydm & \int {}^iy^2dm & \int {}^iy.{}^izdm & \int {}^iydm \\ \int {}^ix.{}^izdm & \int {}^iy.{}^izdm & \int {}^iz^2dm & \int {}^izdm \\ \int {}^ixdm & \int {}^iydm & \int {}^izdm & \int dm \end{bmatrix}$$

  - Với 1 vật rắn bất kỳ trong hệ quy chiếu Decac, ta có moment quán tính độc cực:

$$I_{xx} = \int \left({}^iy^2 + {}^iz^2 \right) dm; I_{yy} = \int \left({}^iz^2 + {}^ix^2 \right) dm; I_{zz} = \int \left({}^ix^2 + {}^iy^2 \right) dm;$$

và các moment quán tính tích:

$$I_{xy} = \int \left({}^ix.{}^iy \right) dm; I_{yz} = \int \left({}^iy.{}^iz \right) dm; I_{xz} = \int \left({}^ix.{}^iz \right) dm;$$

  - Đặt:

$$m_x = \int {}^ixdm; m_y = \int {}^iydm; m_z = \int {}^izdm;$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Thực hiện một số phép biến đổi, ta có:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_x \\ I_{xy} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_y \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & m_z \\ m_x & m_y & m_z & m \end{bmatrix}$$

  - Vì vậy ta có:

$$K_i = \frac{1}{2} Tr\left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k$$

  - Cuối cùng ta có động năng của một Robot *n* khâu như sau:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Chú ý:
    - Khi tính ma trận giả quán tính mà hệ quy chiếu trùng với hệ quy chiếu quán tính trung tâm thì

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Chú ý:
    - Khi tính ma trận giả quán tính mà hệ quy chiếu không trùng với hệ quy chiếu quán tính trung tâm mà được tịnh tiến so với hệ quy chiếu quán tính trung tâm với các lượng tương ứng d_x, d_y, d_z thì

$$J_i = \begin{bmatrix} \dfrac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2}+md_x^2 & I_{xy}+md_xd_y & I_{xz}+md_xd_z & m_x-md_x \\ I_{xy}+md_xd_y & \dfrac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2}+md_y^2 & I_{yz}+md_yd_z & m_y-md_y \\ I_{xz}+md_xd_z & I_{yz}+md_yd_z & \dfrac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2}+md_z^2 & m_z-md_z \\ m_x-md_x & m_y-md_y & m_z-md_z & m \end{bmatrix}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Động năng của Robot**
  - Chú ý:
    - Khi tính ma trận giả quán tính mà hệ quy chiếu không trùng với hệ quy chiếu quán tính trung tâm mà được tịnh tiến so với hệ quy chiếu quán tính trung tâm với các lượng tương ứng d_x, d_y, d_z thì

$$J_i = \begin{bmatrix} \dfrac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2}+md_x^2 & I_{xy}+md_xd_y & I_{xz}+md_xd_z & m_x-md_x \\ I_{xy}+md_xd_y & \dfrac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2}+md_y^2 & I_{yz}+md_yd_z & m_y-md_y \\ I_{xz}+md_xd_z & I_{yz}+md_yd_z & \dfrac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2}+md_z^2 & m_z-md_z \\ m_x-md_x & m_y-md_y & m_z-md_z & m \end{bmatrix}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Thế năng của Robot**
  - Thế năng của khâu i có khối lượng m_i, trọng tâm được xác định bởi vector $\vec{r}_{G_i}$ (biểu diễn trọng tâm của khâu i trong hệ quy chiếu gốc):

$$P_i = -m_i \vec{g}.\vec{r}_{G_i} = -m_i \vec{g}.{}^0T_i.{}^i\vec{r}_{G_i}$$

Trong đó: $\vec{g} = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z & 0 \end{bmatrix}^T$ là vector gia tốc trọng trường

  - Thế năng của toàn cơ cấu Robot n khâu sẽ là:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g}.{}^0T_i.{}^i\vec{r}_{G_i}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Hàm Lagrange**
  - Sau khi xác định động năng và thế năng của toàn cơ cấu, ta có hàm Lagrange của Robot n khâu:

$$L = K - P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right]\dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g}.{}^0T_i.{}^i\vec{r}_{G_i}$$

  - *Chú ý*: Trong hàm Lagrange vẫn chưa đề cập đến ảnh hưởng của nguồn truyền động gồm các phần tĩnh (Stato) và phần động (Roto) của động cơ điện.

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Phương trình động lực học Robot**
  - Ta đã biết lực tổng quát đặt lên khâu thứ i của Robot có n khâu (Phương trình Lagrange):

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

  - Sau khi thiết lập hàm Lagrange, với p = 1, 2,…, n (p là chỉ số lần lượt theo j và k), ta tính được:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_p} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right]\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\dot{q}_j$$

  - Thay đổi chỉ số giả j thành k trong số hạng thứ 2, với chú ý:

$$Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right] = Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_p} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_j}\right]^T = Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_p} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right]$$

  - Ta có:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_k} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\dot{q}_k$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Phương trình động lực học Robot**
  - Chú ý rằng: Trong $T_i(q_1,q_2,\ldots,q_i)$, với q_i là các biến khớp của i khớp đầu tiên. Do vậy, nếu $i < p$ thì $\frac{\partial T_i}{\partial q_p} = 0$. Ta có:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_k} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\dot{q}_k$$

  - Lấy vi phân theo thời gian t, ta có:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_k} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\dot{q}_k$$

$$= \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial T_i}{\partial q_k} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\ddot{q}_k + \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_m} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$+ \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{m=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_m} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Phương trình động lực học Robot**
  - Số hạng cuối cùng của phương trình Lagrange là:

$$\frac{\partial L}{\partial q_p} = \frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_p} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr\left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_p} J_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right]\dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=p}^{n} m_i \vec{g}.\frac{\partial T_i}{\partial q_p}{}^{i}\vec{r}_{G_i}$$

  - Thay thế các chỉ số *p* và *i* thành *i* và *j*, ta có lực tổng quát của khâu *i*:

$$F_i = \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j} Tr\left[\frac{\partial T_j}{\partial q_k} J_j \frac{\partial T_j^T}{\partial q_i}\right]\ddot{q}_k + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{j} Tr\left[\frac{\partial^2 T_j}{\partial q_k \partial q_m} J_j \frac{\partial T_j^T}{\partial q_i}\right]\dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^{n} m_j \vec{g}.\frac{\partial T_j}{\partial q_i}.{}^{j}\vec{r}_{G_j}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Phương trình động lực học Robot**
  - Với Robot *n* bậc tự do:

$$q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T ; \dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]^T ; F = [F_1, F_2, \ldots, F_n]^T$$

phương trình trên luôn được biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$F = J(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Trong đó:

J: Thể hiện lực tác dụng của quán tính, là ma trận đối xứng (nxn);

C: Thể hiện tác dụng của lực ly tâm và Cariolis, ma trận (nxn);

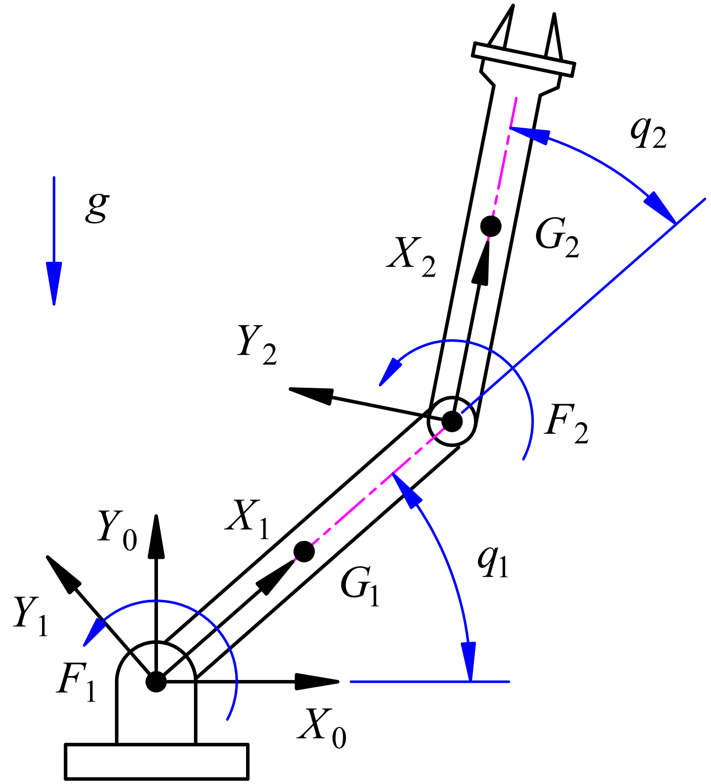
G: Thể hiện tác dụng của trọng trường, là vector (nx1).

  - Phương trình trên là phương trình ĐLH của Robot. Nếu thêm vào phương trình trên các tác dụng khác: F_{ex} đặc trưng cho các ngoại lực tác dụng lên các khớp, F_f đặc trưng cho hiệu ứng ma sát, ta có:

$$F = J(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_f(\dot{q}) + F_{ex}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Ví dụ:** Sử dụng phương trình ĐLH Robot viết hệ phương trình vi phân chuyển động (VPCĐ) của Robot 2 bậc tự do RR. Robot được đặt thẳng đứng chịu gia tốc trọng trường g. Các khâu có chiều dài, khối lượng tương ứng là l_i, m_i và moment quán tính độc cực của các khâu $I_{xxi} = 0; I_{yyi} = I_{zzi} = m_i l_i^2 / 12$.

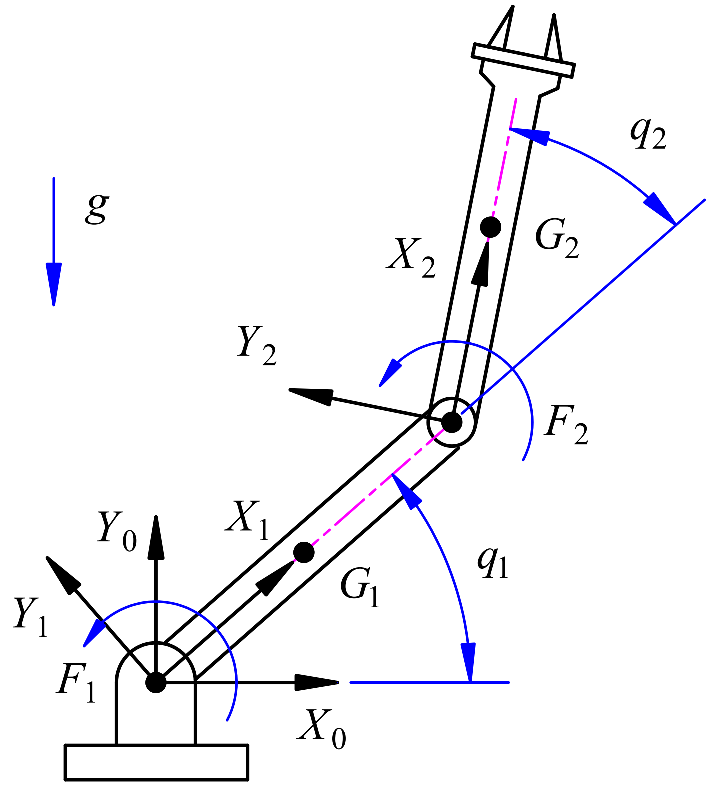


4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**
  - Chọn và gắn các hệ quy chiếu lên các khâu như hình vẽ.
  - Lập bảng thông số DH của Robot:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2

  - Xác định các MTBĐTN:



$$T_1 = {}^0_1T = \begin{bmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 & 0 \\ sq_1 & cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 & l_1 \\ sq_2 & cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2 = {}^0_2T = {}^0_1T\,{}^1_2T = \begin{bmatrix} c(q_1+q_2) & -s(q_1+q_2) & 0 & l_1cq_1 \\ s(q_1+q_2) & c(q_1+q_2) & 0 & l_1sq_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

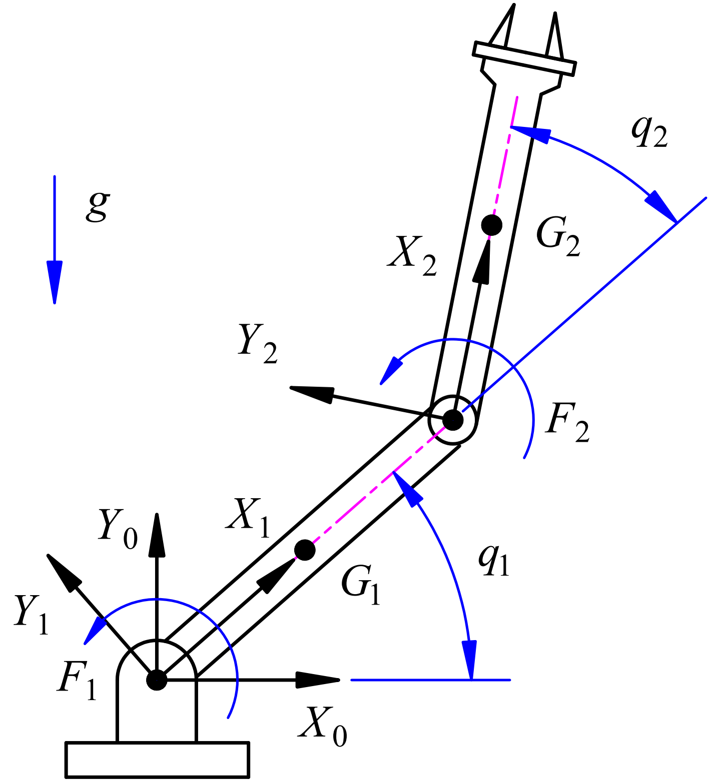
- **Giải:**
  - Vector biểu diễn khối tâm của từng khâu trong hệ quy chiếu của nó:

$$ {}^{1}\vec{r}_{G_1} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T ; \ {}^{2}\vec{r}_{G_2} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T $$

  - Vector gia tốc trọng trường:

$$ \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 1 \end{bmatrix}^T $$

  - Với hệ quy chiếu của từng khâu đã chọn như trên thì $d_{xi} = -l_i / 2$. Ta có ma trận giả quán tính của các khâu như sau:



$$ J_1 = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 / 3 & 0 & 0 & m_1 l_1 / 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 l_1 / 2 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} ; J_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_2^2 / 3 & 0 & 0 & m_2 l_2 / 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 l_2 / 2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} $$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**
  - Áp dụng phương trình ĐLH cho Robot 2 bậc tự do (n=2) và khai triển chi tiết ta được:

$$Tr\left[\frac{\partial T_1}{\partial q_1}J_1\frac{\partial T_1^T}{\partial q_1}\right]\ddot{q}_1+Tr\left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_1}\right]\ddot{q}_1+Tr\left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_1}\right]\ddot{q}_2+Tr\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial q_1\partial q_1}J_1\frac{\partial T_1^T}{\partial q_1}\right]\dot{q}_1\dot{q}_1$$

$$+Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_1}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_1}\right]\dot{q}_1\dot{q}_1+2Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_1}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2+Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_2\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_1}\right]\dot{q}_2\dot{q}_2$$

$$-m_1\vec{g}.\frac{\partial T_1}{\partial q_1}.{}^1\vec{r}_{G_1}-m_2\vec{g}.\frac{\partial T_2}{\partial q_1}.{}^2\vec{r}_{G_2}=F_1$$

$$Tr\left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_2}\right]\ddot{q}_1+Tr\left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_2}\right]\ddot{q}_2+Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_1}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_2}\right]\dot{q}_1\dot{q}_1$$

$$+2Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_2}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2+Tr\left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_2\partial q_2}J_2\frac{\partial T_2^T}{\partial q_2}\right]\dot{q}_2\dot{q}_2-m_2\vec{g}.\frac{\partial T_2}{\partial q_2}.{}^2\vec{r}_{G_2}=F_2$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**

Trong đó:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1}=\begin{bmatrix} -sq_1 & -cq_1 & 0 & 0 \\ cq_1 & -sq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \frac{\partial T_2}{\partial q_1}=\begin{bmatrix} -s(q_1+q_2) & -c(q_1+q_2) & 0 & -l_1sq_1 \\ c(q_1+q_2) & -s(q_1+q_2) & 0 & l_1cq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial q_1\partial q_1}=\begin{bmatrix} -cq_1 & sq_1 & 0 & 0 \\ -sq_1 & -cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_1}=\begin{bmatrix} -c(q_1+q_2) & s(q_1+q_2) & 0 & -l_1cq_1 \\ -s(q_1+q_2) & -c(q_1+q_2) & 0 & -l_1sq_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_2}=\begin{bmatrix} -s(q_1+q_2) & -c(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ c(q_1+q_2) & -s(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 T_2}{\partial q_2\partial q_2}=\begin{bmatrix} -c(q_1+q_2) & s(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ -s(q_1+q_2) & -c(q_1+q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**
  - Sau khi thực hiện các phép tính và rút gọn ta có hệ phương trình VPCĐ của Robot 2R:

$$\left(\frac{m_1l_1^2+m_2l_2^2}{3}+m_2l_1^2+m_2l_1l_2cq_2\right)\ddot{q}_1+\left(\frac{m_2l_2^2}{3}+\frac{m_2l_1l_2cq_2}{2}\right)\ddot{q}_2-m_2l_1l_2sq_2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$-\frac{m_2l_1l_2sq_2}{2}\dot{q}_2^2+\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)l_1gcq_1+\frac{m_2l_2}{2}gc(q_1+q_2)=F_1$$

$$\left(\frac{m_2l_2^2}{3}+\frac{m_2l_1l_2cq_2}{2}\right)\ddot{q}_1+\frac{m_2l_2^2}{3}\ddot{q}_2+\frac{m_2l_1l_2sq_2}{2}\dot{q}_1^2+\frac{m_2l_2}{2}gc(q_1+q_2)=F_2$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**
  - Tham khảo Code Matlab thiết lập hệ phương trình vi phân chuyển động của Robot 2R:

```
clc; clear all;
syms q1 q2 qd1 qd2 qdd1 qdd2 m1 m2 L1 L2 g
% Vector gia toc trong truong
Vg=[0; -g; 0; 1];
% Vector toa do khoi tam trong he quy cua khau
rRG1=[L1/2; 0; 0; 1];
rRG2=[L2/2; 0; 0; 1];
% Ma tran gia quan tinh
Ixx1=0; Iyy1=m1*L1^2/12; Izz1=m1*L1^2/12;
Ixx2=0; Iyy2=m2*L2^2/12; Izz2=m2*L2^2/12;
J1=[      (-Ixx1+Iyy1+Izz1)/2+m1*L1^2/4  0                    0                    m1*L1/2
          0                    (Ixx1-Iyy1+Izz1)/2      0                    0
          0                    0                    (Ixx1+Iyy1-Izz1)/2      0
          m1*L1/2                            0                    0                    m1];
```

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**

```
J2=[     (-Ixx2+Iyy2+Izz2)/2+m2*L2^2/4   0             0              m2*L2/2
         0              (Ixx2-Iyy2+Izz2)/2  0                 0
         0              0                  (Ixx2+Iyy2-Izz2)/2  0
         m2*L2/2    0              0              m2];
% Ma tran bien doi thuan nhat
T01=[cos(q1) -sin(q1) 0 0;  sin(q1) cos(q1) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T12=[cos(q2) -sin(q2) 0 L1; sin(q2) cos(q2) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
T02=T01*T12;
% He phuong trinh vi phan chuyen dong
F1= trace(diff(T01,q1)*J1*transpose(diff(T01,q1)))*qdd1+...
   trace(diff(T02,q1)*J2*transpose(diff(T02,q1)))*qdd1+...
   trace(diff(T02,q2)*J2*transpose(diff(T02,q1)))*qdd2+...
   trace(diff(diff(T01,q1),q1)*J1*transpose(diff(T01,q1)))*qd1*qd1+...
   trace(diff(diff(T02,q1),q1)*J2*transpose(diff(T02,q1)))*qd1*qd1+...
   2*trace(diff(diff(T02,q1),q2)*J2*transpose(diff(T02,q1)))*qd1*qd2+...
   trace(diff(diff(T02,q2),q2)*J2*transpose(diff(T02,q1)))*qd2*qd2-...
   m1*transpose(Vg)*diff(T01,q1)*rRG1-m2*transpose(Vg)*diff(T02,q1)*rRG2;
```

4.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐLH ROBOT

- **Giải:**

```
F2= trace(diff(T02,q1)*J2*transpose(diff(T02,q2)))*qdd1+...
    trace(diff(T02,q2)*J2*transpose(diff(T02,q2)))*qdd2+...
    trace(diff(diff(T02,q1),q1)*J2*transpose(diff(T02,q2)))*qd1*qd1+...
    2*trace(diff(diff(T02,q1),q2)*J2*transpose(diff(T02,q2)))*qd1*qd2+...
    trace(diff(diff(T02,q2),q2)*J2*transpose(diff(T02,q2)))*qd2*qd2-...
    m2*transpose(Vg)*diff(T02,q2)*rRG2;
% Don gian hoa he phuong trinh vi phan chuyen dong
F1=simplify(F1)
F2=simplify(F2)
```

4.4. BÀI TẬP

- **Bài 4.2:** Thiết lập hệ phương trình VPCĐ của Robot RT. Robot được đặt thẳng đứng chịu gia tốc trọng trường *g*. Các khâu có chiều dài, khối lượng tương ứng là l_i, m_i và moment quán tính độc cực của các khâu $I_{xxi} = 0; I_{yyi} = I_{zzi} = m_i l_i^2 / 12$.