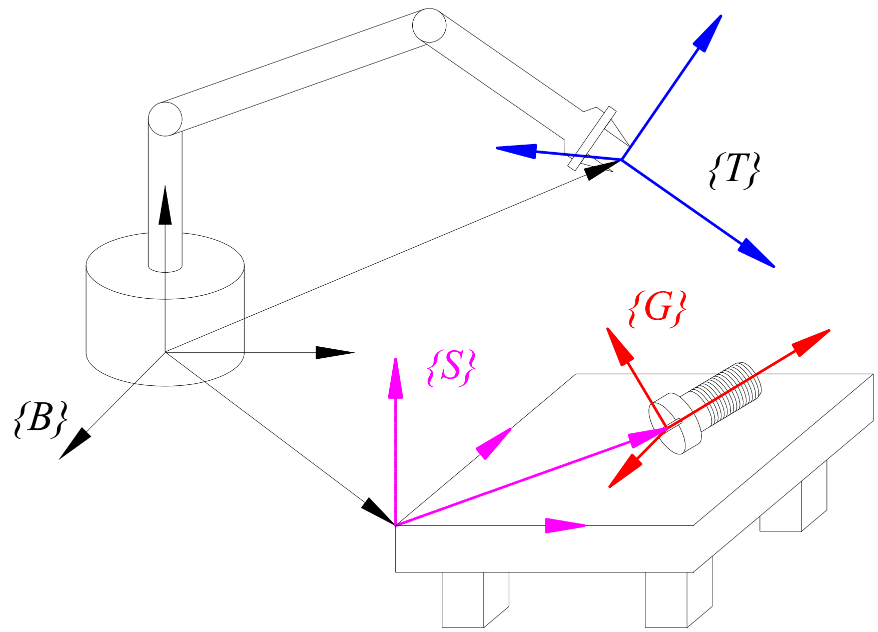
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI
Khoa Cơ Khí-Bộ môn Kỹ thuật máy
----------&&O&&---------

ROBOT CÔNG NGHIỆP

CHƯƠNG 2
BIỂU DIỄN KHÔNG GIAN & CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

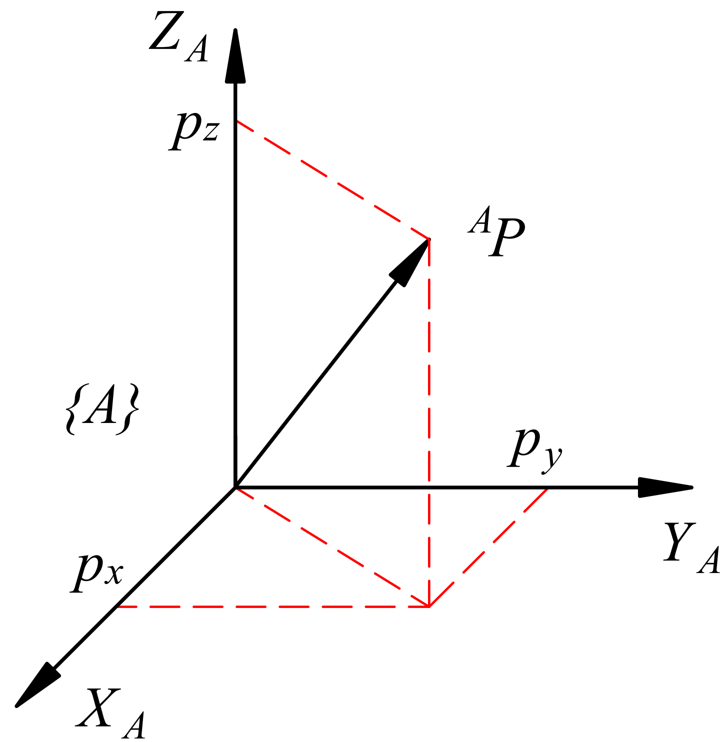
2.1. TỔNG QUAN

- **Khái niệm Robot** hàm ý rằng những khâu thuộc cơ cấu sẽ chuyển động trong không gian bởi một mức độ nào đó của cơ cấu.
- Khi khảo cứu mối quan hệ giữa Robot và các vật thể ta cần quan tâm đến **vị trí tuyệt đối** của điểm, đường, mặt của các khâu so với **điểm tác động cuối** và hướng của **khâu chấp hành cuối**.
- Để mô tả **quan hệ vị trí và hướng** giữa Robot và vật thể ta cần dùng đến các **phép biến đổi thuần nhất**.



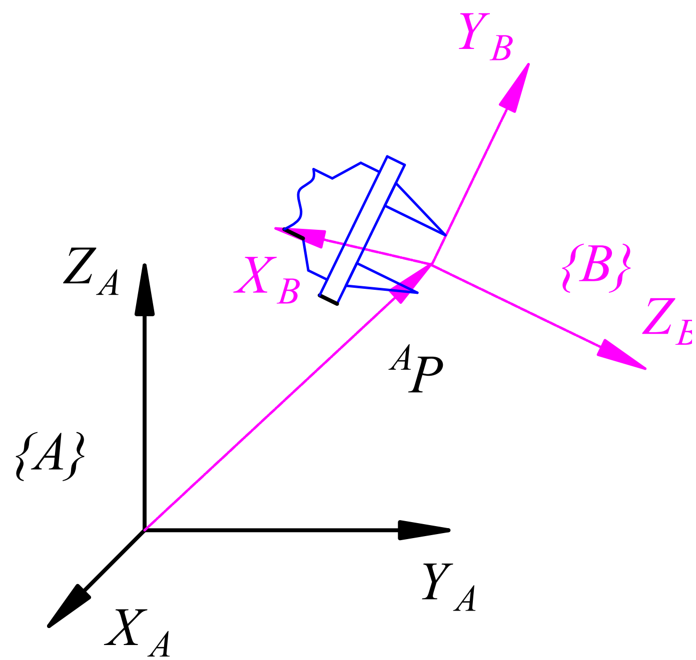
2.2. VỊ TRÍ, HƯỚNG, HỆ QUY CHIẾU

- ***Biểu diễn vị trí:***
  - Trong một hệ tọa độ, chúng ta có thể định vị tất cả các điểm bởi một vector 3x1 gọi là vector vị trí.
  - Trong khi phân tích động lực học, ngoài hệ tọa độ quán tính chúng ta thường định nghĩa nhiều hệ tọa độ khác nên khi biểu diễn một vector vị trí chúng ta luôn gắn vector đó với một hệ tọa độ nào đó.
  - Ví dụ: ${}^{A}P = [p_x, p_y, p_z]^T$ gồm giá trị số biểu thị khoảng cách của điểm đó so với gốc tọa độ của hệ tọa độ $\{A\}$.



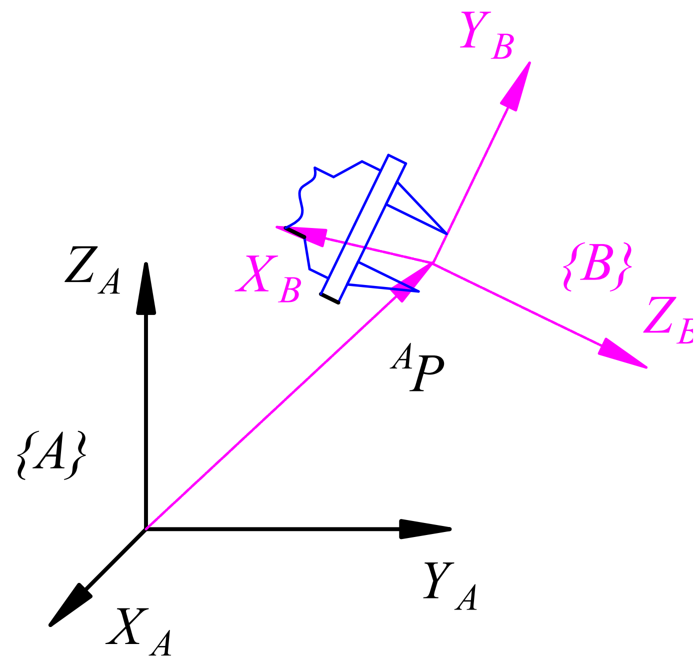
2.2. VỊ TRÍ, HƯỚNG, HỆ QUY CHIẾU

- ***Biểu diễn hướng:***
  - Nếu vector ^{A}P định vị trí của mỏ kẹp thì vị trí của mỏ kẹp chưa hoàn toàn xác định cần phải xác định hướng của nó.
  - Để mô tả hướng của mỏ kẹp, chúng ta gắn một hệ tọa độ $\{B\}$ lên mỏ kẹp và mô tả hệ tọa độ $\{B\}$ theo hệ tọa độ gốc $\{A\}$.
  - Sự mô tả hệ tọa độ $\{B\}$ theo hệ tọa độ $\{A\}$ đủ để có thể mô tả hướng của mỏ kẹp.



2.2. VỊ TRÍ, HƯỚNG, HỆ QUY CHIẾU

- ***Biểu diễn hướng:***
  - Các vector chỉ phương của hệ tọa độ $\{B\}$ là X_B, Y_B, Z_B.
  - Viết các vector chỉ phương của hệ tọa độ $\{B\}$ trong hệ tọa độ $\{A\}$ ta có: ${}^{A}X_B$, ${}^{A}Y_B$, ${}^{A}Z_B$.
  - Xếp 3 vector này vào một ma trận ta thu được một ma trận quay:



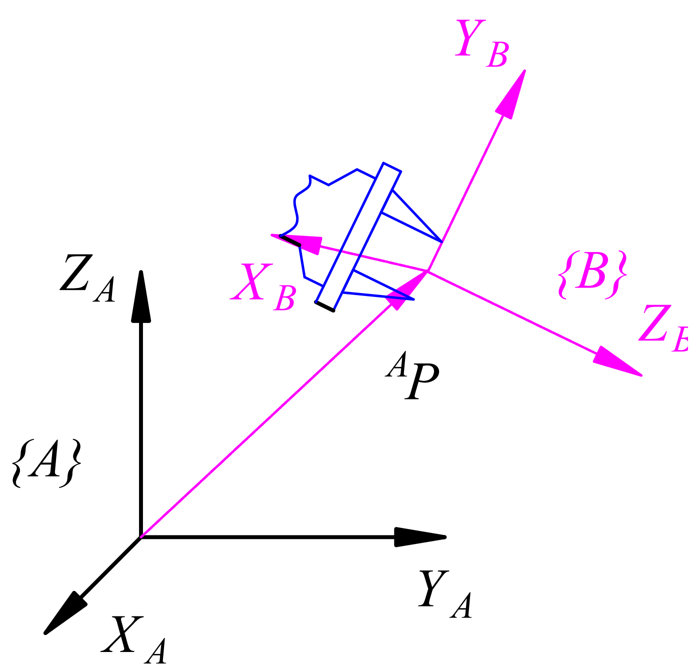
$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}X_B & {}^{A}Y_B & {}^{A}Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B.X_A & Y_B.X_A & Z_B.X_A \\ X_B.Y_A & Y_B.Y_A & Z_B.Y_A \\ X_B.Z_A & Y_B.Z_A & Z_B.Z_A \end{bmatrix} $$

  - Ma trận quay dùng để mô tả hướng của hướng của vật thể.

2.2. VỊ TRÍ, HƯỚNG, HỆ QUY CHIẾU

- ***Hệ quy chiếu:***
  - Một vật thể trong không gian được định rõ bởi một điểm biểu diễn bởi vector vị trí và một hướng biểu diễn bởi ma trận quay.
  - Để thuận tiện cho việc biểu diễn, điểm này thường được chọn là gốc của hệ tọa độ gắn trên vật thể.
  - Hệ quy chiếu: Một cặp bao gồm một vector vị trí và một ma trận quay.
  - Ví dụ: Hệ quy chiếu $\{B\}$ được biểu diễn bởi

$$\{B\} = \{ {}^{A}_{B}R,\ {}^{A}P_{Borg} \}$$

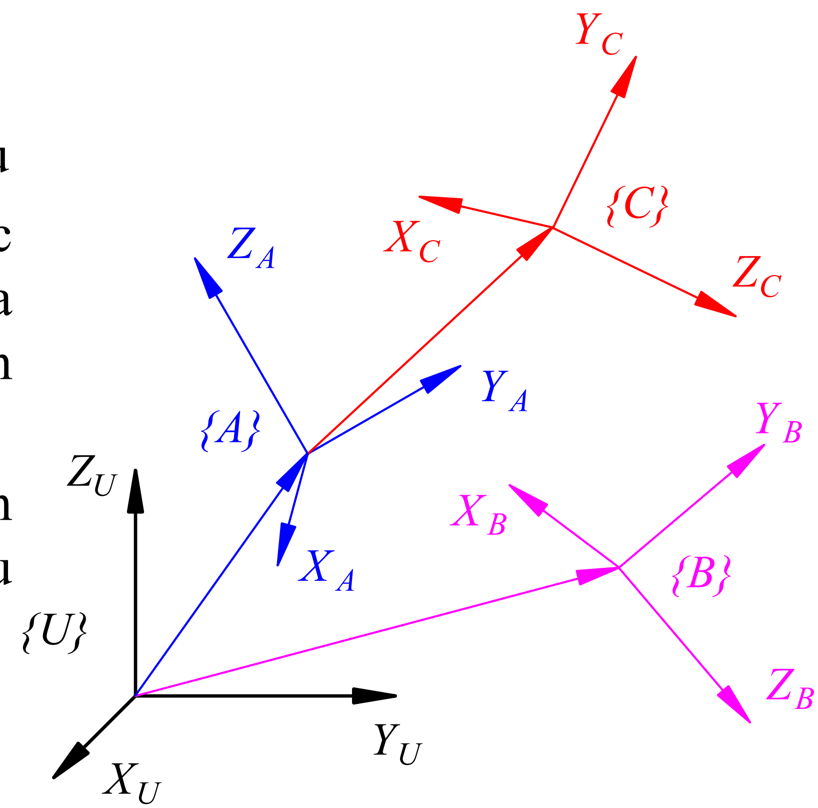


2.2. VỊ TRÍ, HƯỚNG, HỆ QUY CHIẾU

- ***Hệ quy chiếu:***

  Ví dụ: Quan hệ giữa các hệ quy chiếu

  - Hệ quy chiếu $\{A\}$ và $\{B\}$ được xác định trực tiếp thông qua quan hệ với hệ quy chiếu quán tính $\{U\}$,
  - Hệ quy chiếu $\{C\}$ được xác định gián tiếp thông qua hệ quy chiếu $\{A\}$.

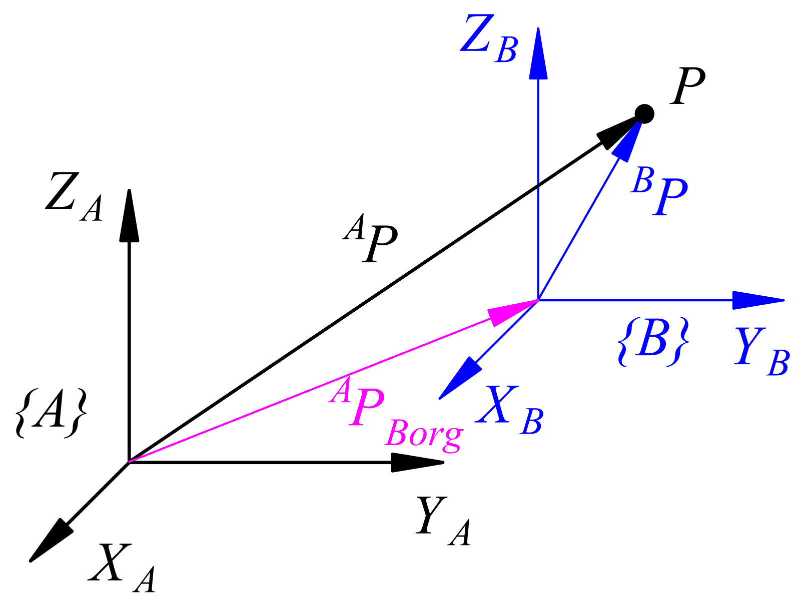


2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tịnh tiến:***
  - Xét hai hệ quy chiếu $\{A\}$ và $\{B\}$ có các trục tọa độ cùng hướng với nhau,
  - ${}^{A}P_{Borg}$: Gốc của hệ quy chiếu $\{B\}$
  - ${}^{B}P$: Biểu diễn vetor vị trí của điểm P trong hệ quy chiếu $\{B\}$
  - Bởi vì hai hệ quy chiếu $\{A\}$ và $\{B\}$ có cùng hướng nên ta có:

$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{Borg} $$

  - <u>*Chú ý*</u>: Chỉ trong trường hợp này ta mới có thể cộng hai vector mà chúng được định nghĩa trên các hệ quy chiếu khác nhau.

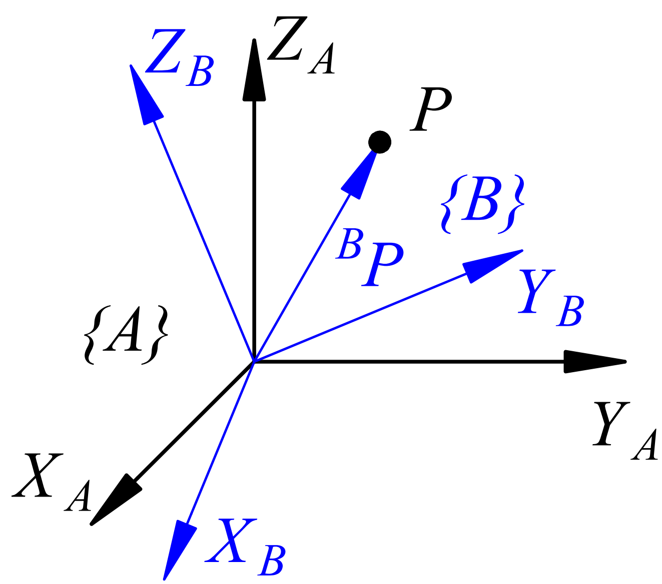


2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ quay:***
  - Ma trận quay biểu diễn hướng của hệ quy chiếu $\{B\}$ so với hệ quy chiếu $\{A\}$ có tính chất như sau:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{B} & {}^{A}Y_{B} & {}^{A}Z_{B} \end{bmatrix} = {}^{B}_{A}R^{T} = \begin{bmatrix} {}^{B}X_{A}^{T} \\ {}^{B}Y_{A}^{T} \\ {}^{B}Z_{A}^{T} \end{bmatrix} = {}^{B}_{A}R^{-1} $$

  - Xét hai hệ quy chiếu $\{A\}$ và $\{B\}$ có cùng gốc tọa độ nhưng khác hướng và một điểm P biểu diễn bởi vector vị trí ${}^{B}P$ trong hệ quy chiếu $\{B\}$. Cần xác định vector vị trí ${}^{A}P$ trong hệ quy chiếu $\{A\}$:



2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

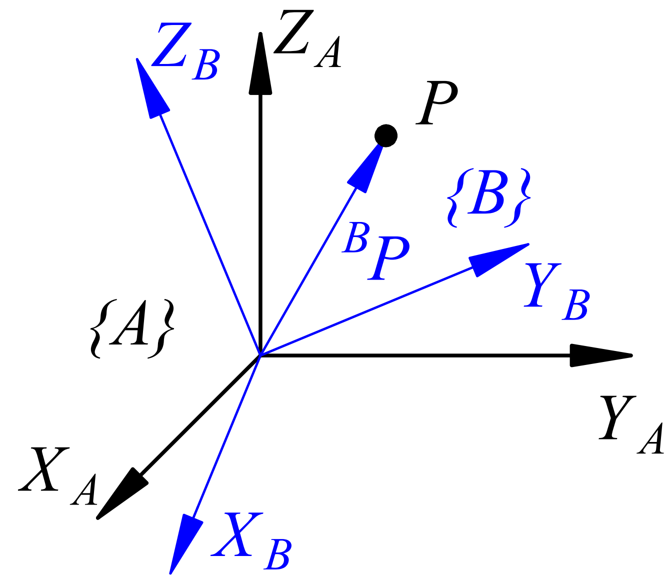
- ***Ánh xạ quay:***
  - Để xác định ${}^{A}P$ trong $\{A\}$, ta chiếu ${}^{B}P$ lên 3 trục của $\{A\}$ với các thành phần thu được như sau:

$$\begin{cases} {}^{A}p_x = {}^{B}X_A . {}^{B}P \\ {}^{A}p_y = {}^{B}Y_A . {}^{B}P \\ {}^{A}p_z = {}^{B}Z_A . {}^{B}P \end{cases}$$

$$\Rightarrow {}^{A}P = \begin{bmatrix} {}^{B}X_A^T \\ {}^{B}Y_A^T \\ {}^{B}Z_A^T \end{bmatrix} . {}^{B}P$$

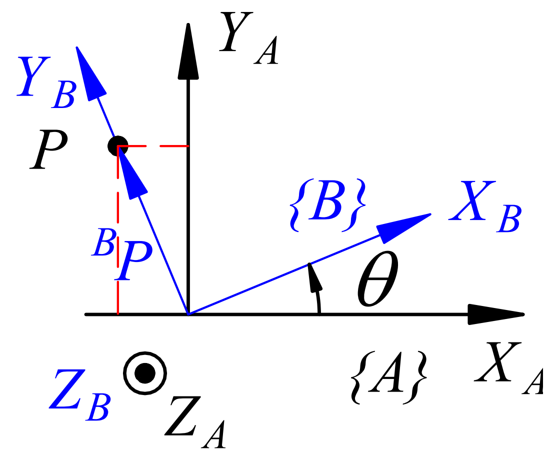
$$= {}^{B}_{A}R^T . {}^{B}P = {}^{A}_{B}R . {}^{B}P$$

$$\Rightarrow {}^{A}P = {}^{A}_{B}R . {}^{B}P$$



2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ quay:***
  - **Ví dụ**: Cho hệ quy chiếu $\{B\}$ quay tương đối so với hệ quy chiếu $\{A\}$ quanh trục Z_A một góc $\theta = 30^0$ và điểm P được biểu diễn bởi ${}^BP$ trong hệ quy chiếu $\{B\}$: ${}^BP = [0 \quad 2 \quad 0]^T$. Xác định vector vị trí ${}^AP$ trong hệ quy chiếu $\{A\}$.



  - **Giải**:
    - Biểu diễn các vector đơn vị của $\{B\}$ theo $\{A\}$, ta có:

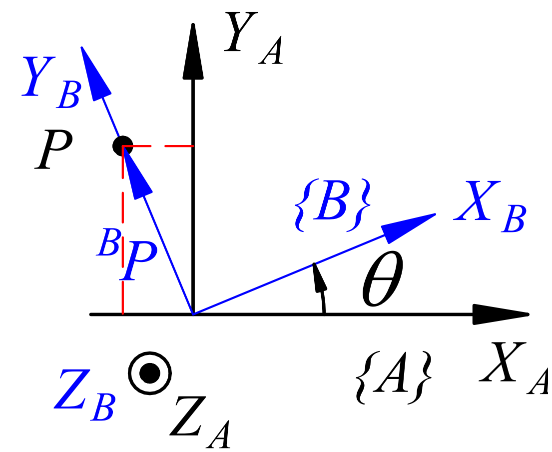
$$ {}^AX_B = \cos\theta X_A + \sin\theta Y_A $$

$$ {}^AY_B = -\sin\theta X_A + \cos\theta Y_A $$

$$ {}^AZ_B = Z_A $$

2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ quay:***



  - **Giải**:
  - Sắp xếp dưới dạng ma trận, ta có:

$$\begin{bmatrix} {}^AX_B & {}^AY_B & {}^AZ_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A^T \\ Y_A^T \\ Z_A^T \end{bmatrix}$$

  - Trong đó:

$$\begin{bmatrix} X_A^T \\ Y_A^T \\ Z_A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Nên

$$ {}^A_BR = \begin{bmatrix} {}^AX_B & {}^AY_B & {}^AZ_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Từ đó ta có:

$${}^AP = {}^A_BR.{}^BP$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

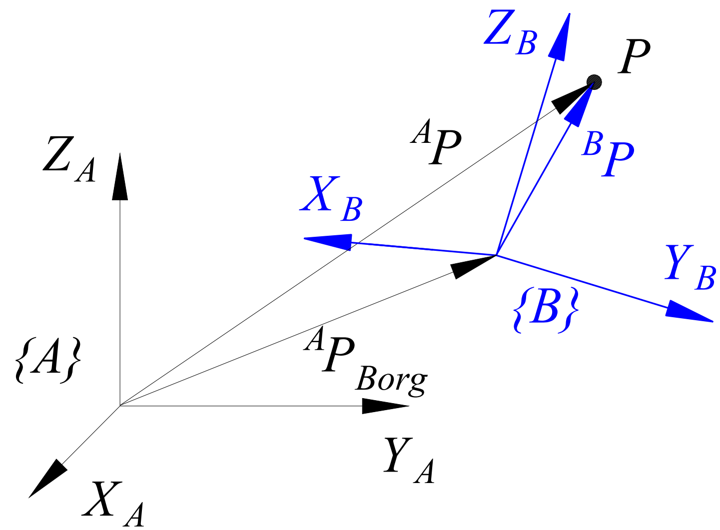
2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tổng quát:***
  - Xét $\{B\}$ có gốc không trùng với $\{A\}$ và được định vị bởi ${}^{A}P_{Borg}$. $\{B\}$ quay tương đối so với $\{A\}$ được biểu diễn bởi ma trận quay. Điểm P biểu diễn bởi ${}^{B}P$ trong hệ quy chiếu $\{B\}$.
  - Để xác định ${}^{A}P$, sử dụng ánh xạ quay xác định ${}^{A'}P$ trong $\{A'\}$ cùng hướng với $\{A\}$ và có điểm gốc trùng với gốc của $\{B\}$, ta có:

$$ {}^{A'}P = {}^{A}_{B}R.{}^{B}P $$

  - Do $\{A'\}$ là tịnh tiến của $\{A\}$ với ${}^{A}P_{Borg}$ nên ta có ${}^{A}P$ trong $\{A\}$:

$$ {}^{A}P = {}^{A'}P + {}^{A}P_{Borg} = {}^{A}_{B}R.{}^{B}P + {}^{A}P_{Borg} $$



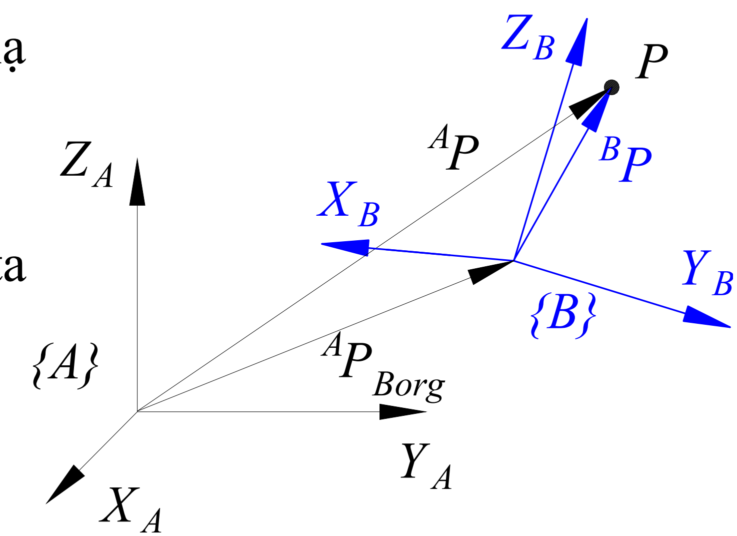
2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tổng quát:***
  - Chúng ta mong muốn biểu diễn ánh xạ tổng quát này chỉ bằng một ma trận:

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R.{}^{B}P + {}^{A}P_{Borg}$$

  - Để thực hiện được điều này, chúng ta biến đổi phương trình trên như sau:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & \vdots & {}^{A}P_{Borg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



  - Đặt

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & \vdots & {}^{A}P_{Borg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

là **ma trận biến đổi thuần nhất**

- Ta có phương trình biểu diễn ánh xạ tổng quát trong không gian 4 chiều:

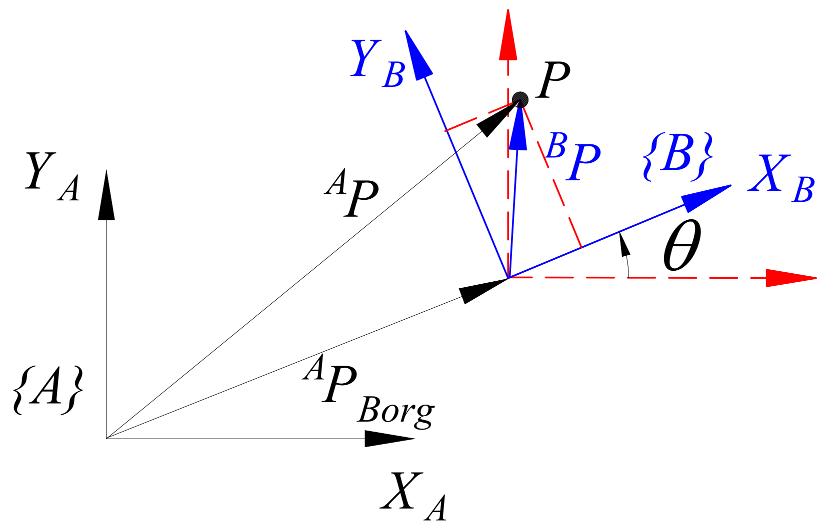
$${}^{A}P = {}^{A}_{B}T.{}^{B}P$$

2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tổng quát:***
  - Chú ý khi biểu diễn các điểm với 3 tọa độ trong không gian 4 chiều:
    - $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ là vector không xác định,
    - $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & n\end{bmatrix}^T$ $(n \neq 0)$ là vector không, trùng với gốc hệ quy chiếu,
    - $\begin{bmatrix}x & y & z & 0\end{bmatrix}^T$ là vector chỉ hướng,
    - $\begin{bmatrix}x & y & z & w\end{bmatrix}^T$ $(w \neq 0)$ là vector vị trí, khi w=1 hệ quy chiếu biểu diễn được gọi là hệ quy chiếu thuần nhất.

2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tổng quát:***
  - **Ví dụ**: Cho hệ quy chiếu $\{B\}$ quay tương đối so với hệ quy chiếu $\{A\}$ quanh trục Z_A một góc $\theta = 30^0$, tịnh tiến dọc theo trục X_A 4 đơn và tịnh tiến dọc theo trục Y_A 2 đơn vị. Xác định vector vị trí của điểm P, ${}^AP$ trong hệ quy chiếu $\{A\}$ khi điểm P được biểu diễn bởi vector vị trí ${}^BP$ trong hệ quy chiếu $\{B\}$: ${}^BP = [1 \quad 2 \quad 0]^T$.



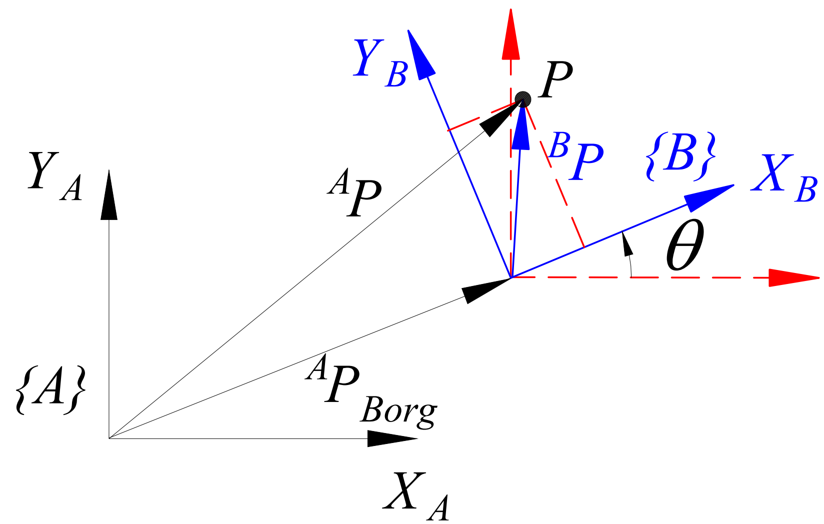
2.3. ÁNH XẠ GIỮA CÁC HỆ QUY CHIẾU

- ***Ánh xạ tổng quát:***
  - **Giải**:
    - Xác định ma trận biến đổi thuần nhất:

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 4 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

    - Viết ${}^{B}P$ trong hệ quy chiếu thuần nhất:

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} $$



    - Ta có ${}^{A}P$ trong $\{A\}$:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}P $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 4 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+6)/2 \\ (2\sqrt{3}+5)/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

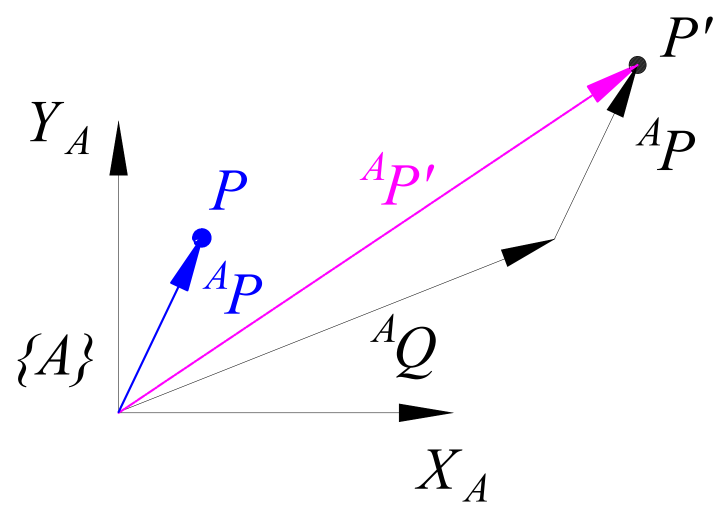
2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép tịnh tiến:***
  - Giả sử cần tịnh tiến một điểm P hoặc một vật thể theo một vector dẫn ${}^{A}Q = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$. Trước hết ta biểu diễn điểm P bởi vector ${}^{A}P = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$.
  - Sau khi tịnh tiến ta thu được một điểm P' có vector biểu diễn ${}^{A}P' = [p'_x \quad p'_y \quad p'_z]^T$. Từ đó ta có mối quan hệ như sau:

$$^{A}P' = {}^{A}P + {}^{A}Q$$

hay

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + q_x \\ p_y + q_y \\ p_z + q_z \end{bmatrix}$$

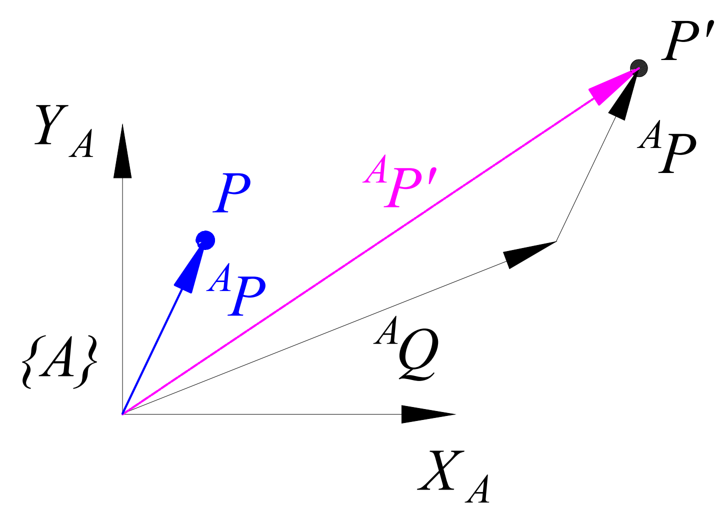


2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- Biến đổi và viết lại trong hệ quy chiếu thuần nhất:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + q_x \\ p_y + q_y \\ p_z + q_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^{A}P' = L_Q \, {}^{A}P$$



- Trong đó

$$L_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận chuyển của phép tịnh tiến theo vector ${}^{A}Q$

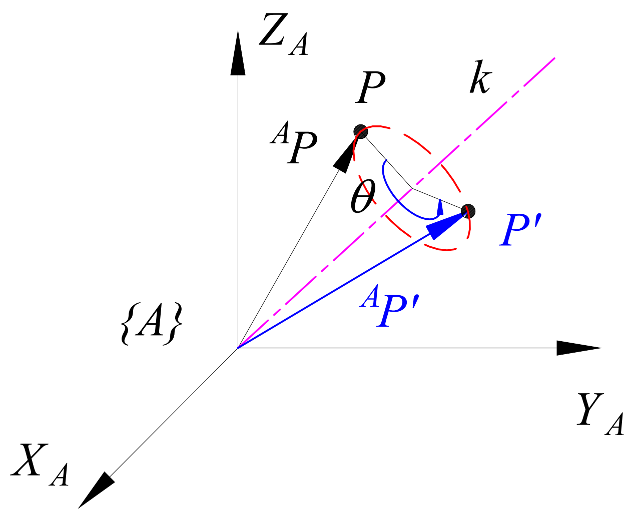
2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép quay:***
  - Khi quay một điểm P biểu diễn bởi ${}^{A}P$ trong $\{A\}$ quanh một trục bất kỳ k với một góc θ ta sẽ thu được một điểm mới P' biểu diễn bởi ${}^{A}P'$ như sau:

$$ {}^{A}P' = R_k(\theta)\, {}^{A}P $$

  - Biến đổi và viết lại trong hệ quy chiếu thuần nhất, ta được:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P' \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_k(\theta) & & \vdots & 0_{3x1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



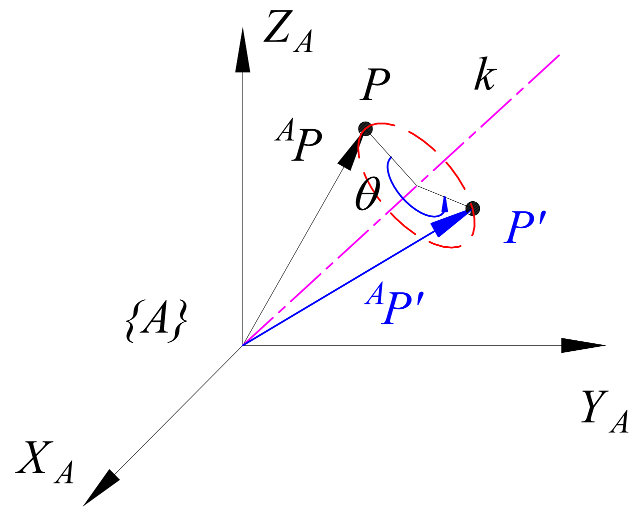
- Đặt

$$C_k(\theta) = \begin{bmatrix} & R_k(\theta) & & \vdots & 0_{3x1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển của phép quay một góc θ quanh trục k.

2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép quay:***
  - Khi k lần lượt trùng với các trục của hệ quy chiếu đang xét $\{A\}$, ta có:



- Quay một góc α quanh trục X:

$$C_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Quay một góc β quanh trục Y:

$$C_Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Quay một góc γ quanh trục Z:

$$C_Z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

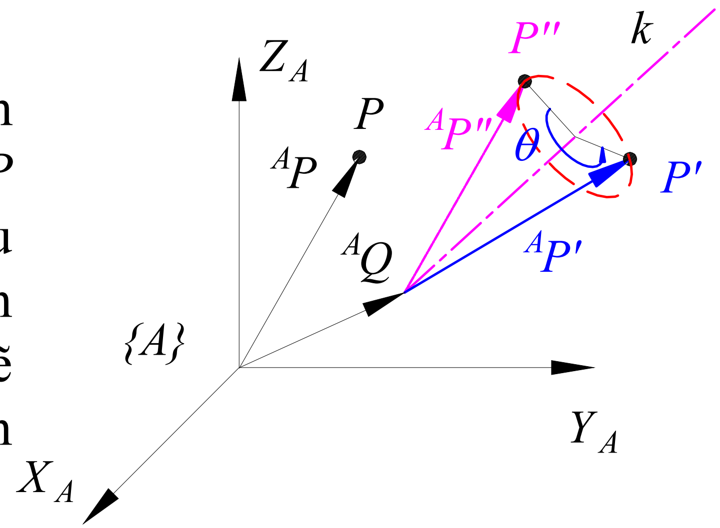
2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép biến đổi tổng quát:***
  - Khi thực hiện phép biến đổi bao gồm tịnh tiến một điểm P biểu diễn bởi ${}^{A}P$ trong $\{A\}$ theo một vector dẫn ${}^{A}Q$ sau đó quay điểm vừa thu được quanh một trục bất kỳ k với một góc θ ta sẽ thu được một điểm mới P' biểu diễn bởi vector ${}^{A}P'$ như sau:

$$ {}^{A}P' = {}^{A}Q + R_k(\theta)\,{}^{A}P $$

  - Biến đổi và viết lại trong hệ quy chiếu thuần nhất, ta được:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P' \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_k(\theta) & & \vdots & {}^{A}Q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



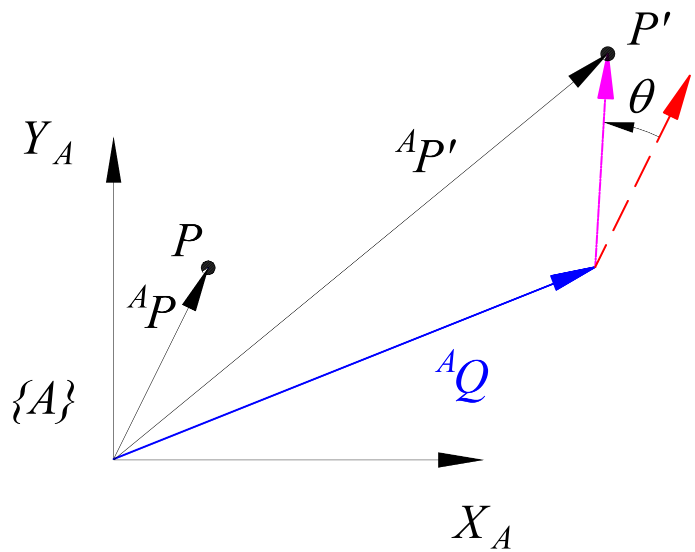
- Đặt

$$T = \begin{bmatrix} & R_k(\theta) & & \vdots & {}^{A}Q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển của phép biến đổi tổng quát.

2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép biến đổi tổng quát:***
  - **Ví dụ**: Xét hệ quy chiếu $\{A\}$ và vector ${}^{A}P = [1 \quad 2 \quad 0]^T$. Xác định ${}^{A}P'$ là kết quả của phép biến đổi tổng quát bao gồm: Tịnh tiến dọc theo trục X_A 4 đơn và tịnh tiến dọc theo trục Y_A 2 đơn vị sau đó quay quanh trục Z_A một góc $\theta = 30^0$.



2.4. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép biến đổi tổng quát:***
  - **Giải**:
  - Ta có vector dẫn của phép tịnh tiến:

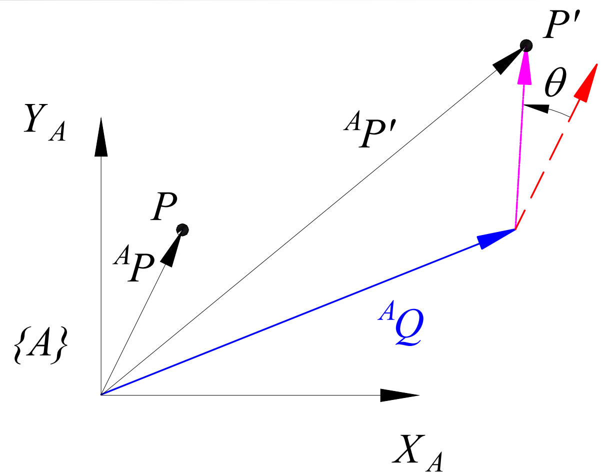
    $${}^{A}Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{T}$$

  - Ma trận quay quanh trục Z_A một góc $\theta = 30^0$:

    $$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Từ đó ta có ma trận phép biến đổi tổng quát:

    $$T = \begin{bmatrix} & R_k(\theta) & & \vdots & {}^{A}Q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 4 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



  - ${}^{A}P'$ được xác định như sau:

    $${}^{A}P' = T\,{}^{A}P$$

    $$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 4 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

    $$= \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+6)/2 \\ (2\sqrt{3}+5)/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

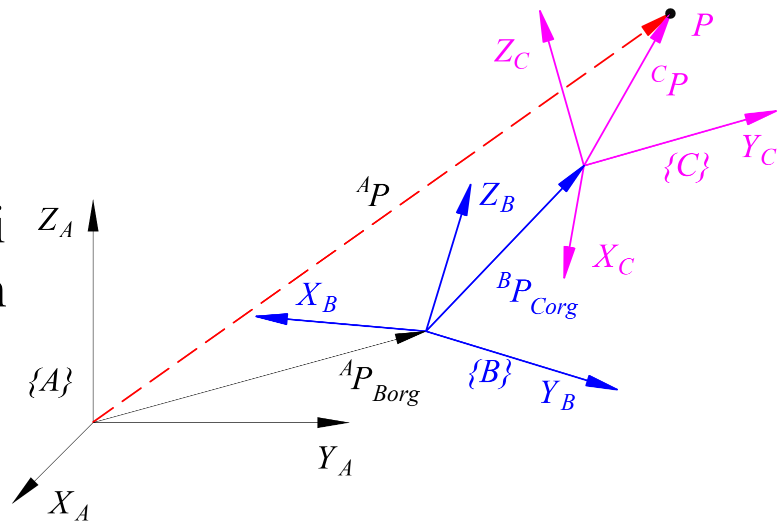
2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép biến đổi thuần nhất kết hợp***
  - Xét 3 hệ quy chiếu $\{A\}$, $\{B\}$ và $\{C\}$ và một điểm P được biểu diễn bởi vector vị trí ${}^{C}P$. Mong muốn tìm vector vị trí ${}^{A}P$.
  - Giả sử ta đã biết

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & \vdots & {}^{A}P_{Borg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$

và

$$ {}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} & {}^{B}_{C}R & & \vdots & {}^{B}P_{Corg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$



- Ta có thể biến đổi ${}^{C}P$ thành ${}^{B}P$:

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P $$

và biến đổi ${}^{B}P$ thành ${}^{A}P$:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P $$

- Kết hợp 2 biểu thức trên, ta có:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P $$

2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phép biến đổi thuần nhất kết hợp***
  - Đặt là ma trận biến đổi của phép biến đổi thuần nhất để biến đổi trực tiếp vector ${}^{C}P$ thành ${}^{A}P$ và được xác định như sau:

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & \vdots & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{Corg} + {}^{A}P_{Borg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$

  - Biểu thức trên thể hiện phép biến đổi thuần nhất kết hợp của hai phép biến đổi thuần nhất, từ đó ta có phép biến đổi thuần nhất kết hợp của N+1 phép biến đổi thuần nhất:

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T \ldots {}^{N-2}_{N-1}T\,{}^{N-1}_{N}T = \begin{bmatrix} & {}^{0}_{N}R & & \vdots & {}^{0}P_{1org} + {}^{0}_{1}R\,{}^{1}P_{2org} + .. + {}^{0}_{N-1}R\,{}^{N-1}P_{Norg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$

Trong đó: ${}^{0}_{i}R = {}^{0}_{1}R\,{}^{1}_{2}R \ldots {}^{i-2}_{i-1}R\,{}^{i-1}_{i}R \; (i = 1 \div N)$

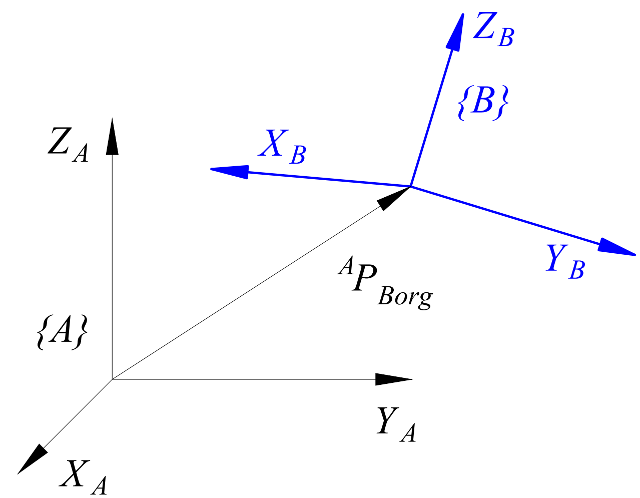
2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Nghịch đảo của phép biến đổi thuần nhất***
  - Giả sử ta đã biết ${}^{A}_{B}T$ cần xác định mối biểu diễn ngược ${}^{B}_{A}T$
  - Để xác định ${}^{B}_{A}T$ ta có thể xác định trực tiếp phép nghịch đảo ma trận ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$
  - Với phương pháp này khối lượng tính toán lớn
  - Để giảm khối lượng tính toán ta lợi dụng tính chất của ma trận biến đổi thuần nhất như sau:
    - Biểu diễn ${}^{A}P_{Aorg}$ trong $\{A\}$:

$${}^{A}P_{Aorg} = {}^{A}_{B}R.{}^{B}P_{Aorg} + {}^{A}P_{Borg} = 0$$

$$\rightarrow {}^{A}_{B}R.{}^{B}P_{Aorg} = -{}^{A}P_{Borg}$$

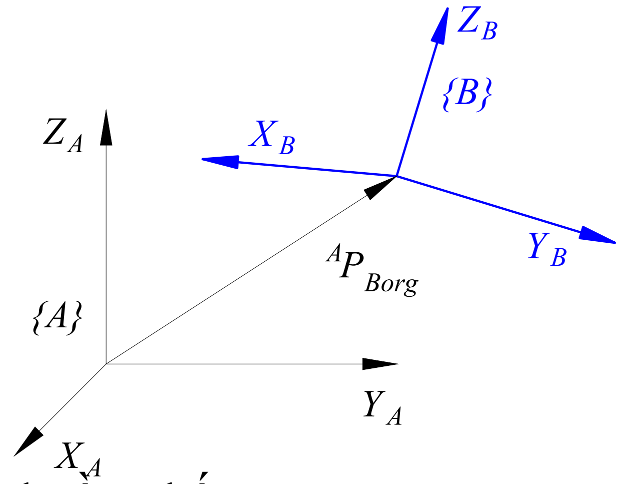
$$\rightarrow {}^{B}P_{Aorg} = -{}^{A}_{B}R^{-1}.{}^{A}P_{Borg} = -{}^{A}_{B}R^{T}.{}^{A}P_{Borg}$$



2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Nghịch đảo của phép biến đổi thuần nhất***
  - Chú ý tính chất của ma trận quay

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} = {}^{A}_{B}R^{-1} $$



  - Từ đó xác định được vector biểu diễn gốc tọa độ của $\{A\}$ trong $\{B\}$

$$ {}^{B}P_{Aorg} = -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{Borg} $$

  - Ta có nghịch đảo của phép biến đổi thuần nhất

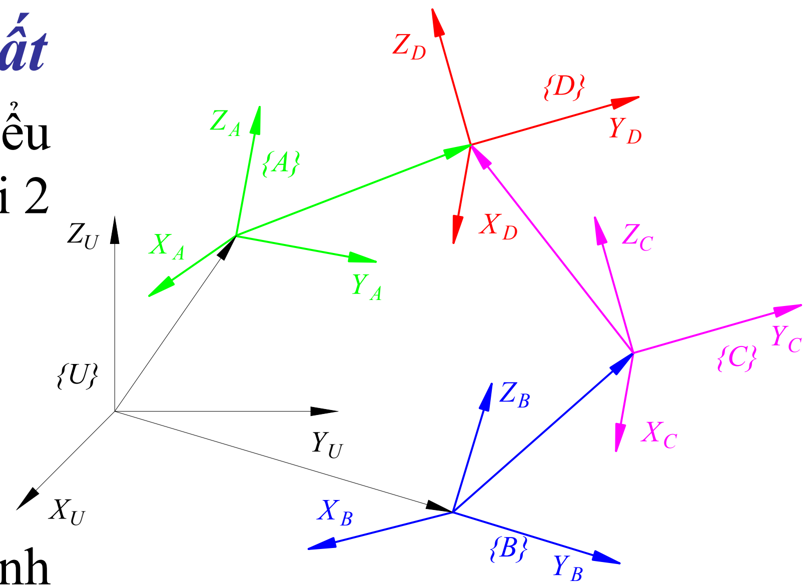
$$ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} = \begin{bmatrix} & {}^{B}_{A}R & & \vdots & {}^{B}P_{Aorg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R^{T} & & \vdots & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{Borg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$

2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phương trình biến đổi thuần nhất***
  - Hệ quy chiếu $\{D\}$ có thể được biểu diễn trong hệ quy chiếu gốc $\{U\}$ với 2 cách như sau:

    $^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T$ và $^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$
  - Từ đó ta có mối quan hệ sau:

    $^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$
  - Biểu thức trên gọi là phương trình biến đổi thuần nhất.
  - Các phương trình biến đổi thuần nhất có thể được sử dụng để xác định *n* phép biến đổi chưa biết khi đã biết *n* phương trình biến đổi thuần nhất.

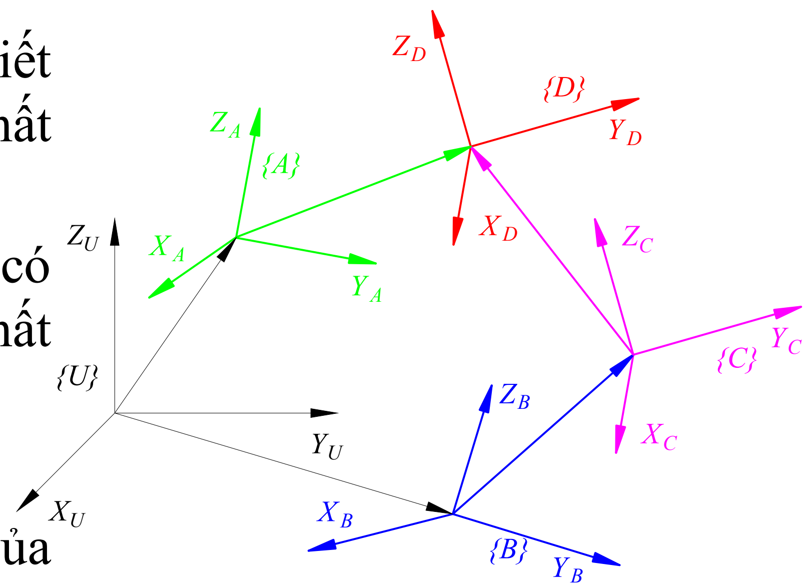


2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phương trình biến đổi thuần nhất***
  - Khảo sát hình vẽ bên, giả sử ta đã biết tất các các ma trận biến đổi thuần nhất ngoại trừ ${}^{B}_{C}T$
  - Trong trường hợp này, chúng ta có một phương trình biến đổi thuần nhất và một ẩn

    ${}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T$
  - Lần lượt nhân trái và phải 2 vế của phương trình lần lượt với ${}^{B}_{U}T^{-1}$ và ${}^{D}_{C}T^{-1}$, ta có thể xác định được ${}^{B}_{C}T$ như sau:

    ${}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T\,{}^{C}_{D}T^{-1}$



2.5. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI

- ***Phương trình biến đổi thuần nhất***
  - **Ví dụ 2.4**: Giả sử đã biết ${}^{B}_{T}T$, ${}^{B}_{S}T$ và ${}^{S}_{G}T$. Xác định vị trí và hướng của bulông so với mỏ kẹp của tay máy Robot ${}^{T}_{G}T$.
    - Biểu diễn $\{G\}$ trong $\{B\}$ theo 2 cách:

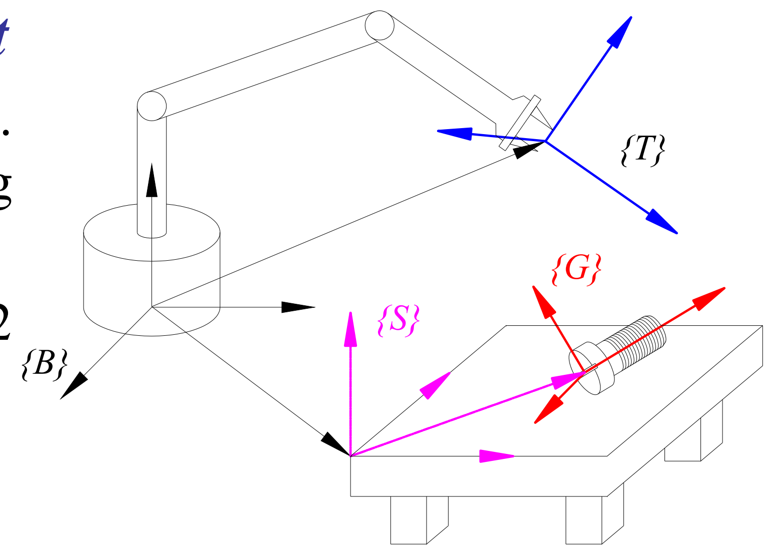
      $${}^{B}_{G}T = {}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T \text{ và } {}^{B}_{G}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$

    - Từ đó ta có:

      $${}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$

    - Nhân trái hai vế với ${}^{B}_{T}T^{-1}$, ta có thể xác định được ${}^{T}_{G}T$:

      $${}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$



2.6. KẾT LUẬN

- Các phép biến đổi thuần nhất dùng để biểu diễn vị trí và hướng của các hệ quy chiếu trong không gian.
- Nếu hệ quy chiếu gắn liền với đối tượng thì vị trí và hướng của chính đối tượng được biểu diễn.
- Khi biểu diễn đối tượng *A* trong mối quan hệ với đối tượng *B* bằng các phép biến đổi thuần nhất thì ta cũng có thể dựa vào đó biểu diễn ngược lại mối quan hệ của đối tượng *B* đối với đối tượng *A*.
- Một chuyển vị có thể là các kết quả liên tiếp của nhiều phép biến đổi quay và tịnh tiến.
- Cần lưu ý đến thứ tự của các phép biến đổi, nếu thay đổi thứ tự thực hiện có thể dẫn đến các kết quả khác nhau.

2.7. BÀI TẬP NỘP

Bài 2.1.

Bài 2.3.

Bài 2.5.