GIẢI ĐÚNG, GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. MỤC ĐÍCH

Cho hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1) \qquad \Leftrightarrow \mathrm{Ax} = \mathrm{b} \quad (1.2)$$

Nếu detA $\neq$ 0 thì hệ (1) là hệ Crame có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\det \mathrm{A_i}}{\det \mathrm{A}} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \\ i = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

$$\Delta = (-1)^{i+1} a_{i1}\Delta_i^1 + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}\Delta_i^n$$

trong đó Δ_i^j là định thức cấp *n – 1* bỏ đi hàng *i* cột *j* của Δ

Khi *n* lớn thì khối lượng tính toán sẽ rất lớn. Để giảm nhẹ khối lượng tính toán ta có 2 phương pháp giải: giải đúng và giải gần đúng:

+) Phương pháp giải đúng: là phương pháp cho lời giải sau một số hữu hạn bước. Phương pháp này thường để giải các hệ kích thước nhỏ với (A, b) cho đúng

+) Phương pháp giải gần đúng: là các phương pháp lặp cho nghiệm xấp xỉ $(x)^m$ dần tới nghiệm đúng khi $m \to \infty$. Đối với các hệ có kích thước lớn và các số liệu cho gần đúng thì phương pháp lặp có lợi hơn.

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐÚNG

2.1 Phương pháp khử Gauss

HPT $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases}$ (1.3)

Khử Gauss

$$(1.3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ \qquad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_{nn+1} \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế ngược ta tìm được: $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$

+) Cụ thể: với $n = 4$

Xét hệ pt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} & (3) \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} & (4) \end{cases} \qquad (1.4)$$

- Bước 1: Khử x_1 ở 3 phương trình (2), (3), (4): giả sử $a_{11} \neq 0$ chia 2 vế của (1) cho a_{11} ta có: $x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}$ (1')

  trong đó $b_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad j = \overline{2,5}$

  Lấy phương trình (2) của hệ (1.3) trừ đi pt (1').a_{21}

  Lấy phương trình (3) của hệ (1.3) trừ đi pt (1').a_{31}

  Lấy phương trình (4) của hệ (1.3) trừ đi pt (1').a_{41}

  Ta có hệ:

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + a_{24}^1 x_4 = a_{25}^1 & (1) \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + a_{34}^1 x_4 = a_{35}^1 & (2) \\ a_{42}^1 x_2 + a_{43}^1 x_3 + a_{44}^1 x_4 = a_{45}^1 & (3) \end{cases} \qquad (1.5)$$

trong đó $a_{ij}^1 = a_{ij} - b_{1j}.a_{i1} \qquad i = 2,3,4 \qquad j = 2,3,4,5$

- Bước 2: Khử x_2 trong hệ (1.4). Giả sử $a_{22}^1 \neq 0$ chia 2 vế phương trình (1) của hệ (1.5) cho a_{22}^1 ta được: $x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}$ (1.6)

  Trong đó $b_{2j} = \dfrac{a_{2j}^1}{a_{22}^1} \qquad j = 2,3,4$

  Khử x_2 bằng cách: pt(2) của hệ (1.5) – pt(1.6). a_{32}^1

  pt(3) của hệ (1.5) – pt(1.6). a_{42}^1

  ta được hệ: $\begin{cases} a_{33}^2 x_3 + a_{34}^2 x_4 = a_{34}^2 & (1) \\ a_{43}^2 x_3 + a_{44}^2 x_4 = a_{45}^2 & (2) \end{cases} \qquad (1.7)$

  trong đó: $a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - b_{2j}.a_{i2}^1 \qquad i = 3,4 \qquad j = 3,4,5$

- Bước 3: Khử x_3

  Giả sử $a_{33}^2 \neq 0$. Chia 2 vế phương trình (1) của hệ (1.7) cho a_{33}^2 ta được:

  $x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}$ (1.8) trong đó $b_{3j} = \dfrac{a_{3j}^2}{a_{32}^2} \qquad j = 4,5$

  Lấy phương trình (2) của hệ (1.7) – pt(1.8). a_{43}^2 ta có: $a_{44}^3.x_4 = a_{45}^3$

  trong đó: $a_{4j}^3 = a_{4j}^2 - b_{3j}.a_{43}^2 \qquad j = 4,5$

  $\Rightarrow x_4 = \dfrac{a_{45}^3}{a_{44}^3} = b_{45}$

Vậy ta nhận được hệ:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25} \\ \qquad\qquad x_3 + b_{34}x_4 = b_{35} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = b_{45} \end{cases}$$

*) Nhận xét:

- Vậy đối với hệ n phương trình, ta thực hiện n – 1 bước, khối lượng tính toán là $\frac{n}{3}(n^2 + 6n - 1)$. Giảm nhiều so với giải bằng phương pháp định thức

- Ưu điểm: thuật toán đơn giản, độ phức tạp thấp

- Nhược điểm: không thực hiện được khi trong các phần tử dẫn $a_{11}; a_{22}^1; ...; a_{nn}^{n-1}$ có một phần tử bằng 0 hoặc khi phần tử dẫn xấp xỉ bằng 0 thì sai số rất lớn.

*) <u>Ví dụ 1</u>: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

Giải

a)

x_1	x_2	x_3	Hệ số tự do	
1	2	3	1	
2	1	3	2	
3	2	1	3	$- 2d_1 + d_2$
1	2	3	1	$- 3d_1 + d_3$
0	-3	-3	0	
0	-4	-8	0	Chia 2 vế cho -3
1	2	3	1	$4d_2 + d_3$
0	1	1	0	
0	0	-4	0	

Hay ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad -4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;0;0)$

b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Hệ số tự do
1	0	-1	1	-1	-3
2	2	1	-9	0	2
3	-1	1	-8	-4	-2
6	1	1	1-6	-5	-3
1	1	0	4	2	-2
1	0	-1	1	-1	-3

0	2	3	-11	2	8
0	-1	4	-5	-1	7
0	1	7	-22	1	15
0	1	1	3	3	1
1	0	-1	1	-1	-3
0	0	1	-17	-4	6
0	0	5	-2	2	8
0	0	6	-25	-2	14
0	1	1	3	3	1
1	0	-1	1	-1	-3
0	1	1	3	3	1
0	0	1	-17	-4	6
0	0	0	83	22	-22
0	0	0	77	22	-22
1	0	-1	1	-1	-3
0	1	1	3	3	1
0	0	1	-17	-4	6
0	0	0	83	22	-22
0	0	0	77	0	0

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (0; -1; 2; 2; -2)

2.2 Phương pháp Khaletsky

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1) \qquad \Leftrightarrow \mathrm{Ax = b} \quad (1.2)$$

- Bước 1: Tách ma trận A thành tích 2 ma trận: A = B.C trong đó:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & & 1 \end{pmatrix}$$

- Bước 2: Giải hệ Ax = b $\Leftrightarrow$ (B.C)x = b $\Leftrightarrow$ B(Cx) = b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{By = b} \\ \mathrm{Cx = y} \end{cases}$$

- Bước 3: +) By = b $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11}y_1 = b_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n = b_n \end{cases}$$

dùng phép thế thuận $\Rightarrow y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow y_n$

+) Cx = y $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = y_n \end{cases}$$

Theo phép thế ngược $\Rightarrow x_n \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1$

*) Cách tính $b_{ij}; c_{ij}$

+) Tính b_{ij} : ta có A = B.C $\Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \ldots + b_{ij}c_{jj} + b_{ij+1}c_{j+1j} + \ldots + b_{in}c_{nj}$$

Do $c_{ij} = \begin{cases} 0 & (\text{i} > \text{j}) \\ 1 & (\text{i} = \text{j}) \end{cases} \quad \Rightarrow c_{j+1j} = \ldots = c_{nj} = 0$

$$\boxed{\Rightarrow b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}}$$

+) Tính c_{ij} : $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \ldots + b_{ij}c_{jj} + b_{ij+1}c_{j+1j} + \ldots + b_{in}c_{nj}$

Do $b_{ij} = 0$ nếu $j > i \Rightarrow b_{ii+1} = b_{ii+2} = \ldots = b_{in} = 0$

$$\boxed{\Rightarrow c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right)}$$

*) Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Khaletsky

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 \qquad + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = a_{11} = 3$ $\qquad$ $c_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \dfrac{1}{3}$

$b_{21} = a_{21} = -5$ $\qquad$ $c_{13} = -\dfrac{1}{3}$

$b_{31} = a_{31} = 2$ $\qquad$ $c_{14} = \dfrac{2}{3}$

$b_{41} = a_{41} = 1$

$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = \dfrac{8}{3}$ $\qquad$ $c_{23} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \dfrac{1}{2}$

$b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = -\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $c_{24} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = -\dfrac{1}{4}$

$b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = -\dfrac{16}{3}$

$b_{33} = a_{33} - (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23}) = 2$ $\qquad$ $c_{34} = \dfrac{1}{b_{33}}(a_{34} - (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{24})) = -\dfrac{5}{4}$

$b_{43} = a_{43} - (b_{41}c_{13} + b_{42}c_{23}) = 6$

$b_{44} = a_{44} - (b_{41}c_{14} + b_{42}c_{24} + b_{43}c_{34}) = \dfrac{5}{2}$

$$\text{Vậy } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{16}{3} & 6 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.C$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} By = b \\ Cx = y \end{cases}$$

$$By = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3y_1 = 6 \\ -5y_1 + \dfrac{8}{3}y_2 = -12 \\ 2y_1 - \dfrac{2}{3}y_2 + 2y_3 = 1 \\ y_1 - \dfrac{16}{3}y_2 + 6y_3 + \dfrac{5}{3}y_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -\dfrac{3}{4} \\ y_3 = -\dfrac{7}{4} \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

$$Cx = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}x_4 = 2 \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{4}x_4 = -\dfrac{3}{4} \\ x_3 - \dfrac{5}{4}x_4 = -\dfrac{7}{4} \\ x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

2.3 Phương pháp Cholesky (Phương pháp căn bậc hai)

Nội dung: giải hệ Ax = b với điều kiện A là ma trận đối xứng ($A^T = A$).

Ta biểu diễn A dưới dạng: $A = S^T.S$

trong đó: $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = \left(s_{ij}\right)_{n\times n}$; s_{ij}= 0 nếu $i > j$

- Bước 1: xác định S sao cho $A = S^T.S$

+) $s_{11} = \sqrt{a_{11}}$; $s_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} = \dfrac{a_{1j}}{s_{11}}$ $\quad (j > 1)$

+) $s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}$ $\quad (2 \le i \le n)$

$$s_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{kj}s_{ki}}{s_{ii}} & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

- Bước 2: giải Ax = b $\Leftrightarrow S^T.S.x = b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^T.y = b \\ S.x = y \end{cases}$$

+) $S^T.y = b \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_{11}y_1 = b_1 \\ s_{12}y_1 + s_{22}y_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{1n}y_1 + s_{2n}y_2 + \dots. + s_{nn}y_n = b_n \end{cases}$$

Giải theo phép thế thuận $\Rightarrow y_1, y_2, ..., y_n$

+) $S.x = y \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \dots + s_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad s_{22}x_2 + \dots + s_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad s_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Theo phép thế ngược $\Rightarrow x_n \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1$

*) Ví dụ 3: Ggiải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ A là ma trận đối xứng

Ta biểu diễn A dưới dạng A = $S^T.S$ $\quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$

+) $s_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow s_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

$$s_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} = \frac{a_{1j}}{s_{11}} \qquad (j > 1) \Rightarrow \begin{cases} s_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \dfrac{2}{1} = 1 \\ s_{13} = \dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

+) $s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \qquad (2 \le i \le n) \quad \Rightarrow s_{22} = \sqrt{a_{22} - s_{12}^2} = 1$

$$s_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{kj} s_{ki}}{s_{ii}} & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} s_{21} = 0 \\ s_{23} = \dfrac{a_{23} - s_{13}s_{12}}{s_{22}} = -1 \end{cases}$$

Tương tự: $\Rightarrow \begin{cases} s_{33} = \sqrt{a_{33} - (s_{13}^2 + s_{23}^2)} = 1 \\ s_{31} = 0 \\ s_{32} = 0 \end{cases}$

Vậy S = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} B^T y = b & (1) \\ Bx = y & (2) \end{cases}$

+) Giải 1: $\begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$

+) Giải 2: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

3. GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐSTT

3.1 Phương pháp lặp đơn

Nội dung: Từ hệ Ax = b (1.2) với A = $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$;x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,b=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = BX + y$ (1.8)

Chọn X$_o$=$\begin{pmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ là xấp xỉ đều tuỳ ý

α là nghiệm thì Aα = b$\Leftrightarrow$ α = Bα + y

Đặt $\begin{matrix} X_1 = BX_o + g \\ X_2 = BX_1 + g \\ \ldots \\ X_{k+1} = BX_k + g \end{matrix}$ với X$_k$=$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$

Thì được gọi là dãy nghiệm xấp xỉ của phương pháp lặp đơn.

Vấn đề là khi nào thì x$_k$$\rightarrow \alpha$ khi k$\rightarrow \infty$?

Định lí hội tụ :

AX=b $\Leftrightarrow$ *x = BX+ g*

Nếu $\|B\|<1$ *thì dãy lặp* (x_k) $\rightarrow \alpha$ *khi* $k\rightarrow \infty$

Sai số: $\|x_k-\alpha\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}.\|x_1-x_o\|$ *hoặc* $\|x_k-\alpha\| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}.\|x_k-x_{k-1}\|$

<u>Chứng minh:</u>

Xét

$$T : R^n \rightarrow R^n$$
$$x \mapsto Tx = BX + g$$

Có $\|TX-TY\| = \|B(X-Y)\| \le \|B\|\|X-Y\|$ do $\|B\|<1$.Suy ra T là ánh xạ co.

Theo nguyên lí của ánh xạ co tồn tại duy nhất α sao cho : T$\alpha=\alpha$

$\Leftrightarrow$ α =Bα + g và mọi dãy lặp $TX_{k+1}=TX_k+$ g (x_o tuỳ ý) hội tụ tới α .

*) Ví dụ 4: Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp lặp đơn với ba bước lặp

$$\begin{cases} 1,02x_1-0,05x_2-0,1x_3=0,795 \\ -0,11x_1+1,03x_2-0,05x_3=0,849 \\ -0,11x_1-o,12x_2+1,04x_3=1,398 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-0,02x_1+0,05x_2+0,1x_3+0,795 \\ x_2=0,11x_1-0,03x_2+0,05x_3+0,849 \\ x_3=0,11x_1+0,12x_2-1,04x_3+1,398 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,05 & 0,1 \\ 0,11 & -0,03 & 0,05 \\ 0,11 & 0,12 & -0,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,795 \\ 0,849 \\ 1,398 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{3}|b_{ij}|=0,17\ ,\ \sum_{j=1}^{3}|b_{ij}|=0,19\ ,\ \sum_{j=1}^{3}|b_{ij}|=0,27\ \|B\|=Max(\|b_{ij}\|=0,17<1$$

Xét dãy lặp $X_{k+1}=BX_k+g$

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=-0,02x_1^k+0,05x_2^k+0,1x_3^k+0,795 \\ x_2^{k+1}=0,11x_1^k-0,03x_2^k+0,05x_3^k+0,849 \\ x_3^{k+1}=0,11x_1^k+0,12x_2^k-1,04x_3^k+1,398 \end{cases} \text{ Chọn } X_o = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,85 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^k=-0,02.0,08+0,05.0,85+0,1.1,4+0,795=0,962 \\ x_2^k=0,11.0,8-0,85.0,03+0,05.1,4+0,849=0,982 \\ x_3^k=0,11.0,8+0,12.0,85-0,04.1,4+1,398=1,532 \end{cases} \text{ tương tự } \begin{cases} x_1^k=0,978 \\ x_2^2=1,002 \\ x_3^2=1,56 \end{cases}$$

$$\text{Và} \begin{cases} x_1^3=0,98 \\ x_2^3=1,004 \\ x_3^3=1,563 \end{cases} \text{ sai số } X_3-X_2=(-0,002;0,002;0,003)$$

$$\|X_3-\alpha\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_3-X_2\| = \frac{0,27}{1-0,27}.0,03 \,\square\, 10^{-3}$$

Vậy nghiệm gần đúng là $\begin{cases} x_1 = 0,89 \pm 10^{-3} \\ x_2 = 1,004 \pm 10^{-3} \\ x_3 = 1,563 \pm 10^{-3} \end{cases}$

*) Ví dụ 5: Giải hệ $\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7 \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76 \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72 \end{cases}$

Giải :

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{20,9}\left(0x_1 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4 + 21,7\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{21,2}\left(-1,2x_1 + 0x_2 - 1,5x_3 - 2,5x_4 + 27,46\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{19,8}\left(-2,1x_1 - 1,5x_2 + 0x_3 - 1,3x_4 + 28,76\right) \\ x_4 = \dfrac{1}{32,1}\left(-0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3 + 49,72\right) \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{4}|b_{ij}| \approx 0,2$, $\sum_{j=1}^{4}|b_{ij}| \approx 0,24$, $\sum_{j=1}^{4}|b_{ij}| \approx 0,25$, $\sum_{j=1}^{4}|b_{ij}| \approx 0,15$

$\Rightarrow \|B\| = 0,25$

Xét dãy lặp $X_{k+1}^{k} = BX_k + g$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k
0	1,04	1,3	1,45	1,55
1	0,75	0,95	1,14	1,36
2	0,8106	1,.118	1,2117	1,4077
3	0,7978	0,9977	1,1975	1,3983
4	0,8004	1,0005	1,2005	1,4003
5	0,7999	0,9999	1,1999	1,3999

Chọn x tuỳ ý

$X_3 - X_4 = (0{,}0006; 0{,}0006; 0{,}0006; 0{,}0006)$

$$\|X_3 - X_4\| = 6.10^{-4}; \|X_5 - \alpha\| \le \frac{0{,}25}{1-0{,}25}.6.10^{-4} = 2.10^{-4}$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}7999 \pm 2.10^{-4} \\ x_2 = 0{,}9999 \pm 2.10^{-4} \\ x_3 = 1{,}1999 \pm 2.10^{-4} \\ x_4 = 1{,}3999 \pm 2.10^{-4} \end{cases}$$

Phương pháp Jacobi:

Ma trận A=$\left(a_{ij}\right)_1^n$ gọi là ma trận đường chéo trội nếu 2 điều kiện dưới đây thỏa mãn :

c_1. $\forall i = \overline{1,n}, \quad \sum_{j \ne i} |a_{ij}| < a_{ii}$ (chéo trội theo hàng)

c_2 . $\forall j = \overline{1,n}, \quad \sum_{i \ne j} |a_{ij}| < a_{jj}$ (chéo trội theo cột)

Hệ (1.1) có dạng: $a_{ii}x_i + \sum_{j \ne i} a_{ij}x_j = b_i \quad \Rightarrow x_i = -\sum_{i \ne j} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}.x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$

Ta được hệ X= BX + g với $g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$

B= (b_{ij}) trong đó $b_{ij} = \begin{cases} 0; i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}; i \ne j \end{cases}$

Do A chéo trội $\sum_{j \ne i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \Rightarrow \sum_{j \ne i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{j \ne i} |b_{ij}| < 1$

$\|B\| = max(\sum |b_{ij}|) < 1$ nếu phép lặp X_{k+1}= BX_k+ g hội tụ

*) Ví dụ 6: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

Giải :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận chéo trội theo hàng

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(0x_1 - x_2 - x_3 + 2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(-x_1 + 0x_2 - x_3 + 3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(-x_1 - x_2 + 0x_3 + 4) \end{cases}$ B= $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|B\| = \frac{2}{5} < 1$

Xét phép lặp X_{k+1}= BX_k +g

n	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	0,4	0,6	0,8
2	0,12	0,36	0,6
3	0,208	0,456	0,704
4	0,168	0,4176	0,6672
……	……	…….	……..

Sai số X_3- X_4 = (-0,04,-0,0384-0,0368)

$\|X_3 - X_4\| = 0,04 = 4.10^{-2}$ $\|X - \alpha\| < \frac{0,4}{1-0,4}.4.10^{-2} \approx o,026667$

Vậy nghiệm của hệ là : $\begin{cases} x_1 = 0,16 \pm 0,026667 \\ x_2 = 0,4176 \pm 0,026667 \\ x_3 = 0,6672 \pm 0,026667 \end{cases}$

3.2 Phương pháp Seidel

Xét hệ AX = b (1.2)

$\Leftrightarrow$ X= BX + g, $\|B\| < 1$

Phân tích B thành tổng hai ma trận B = B_1+ B_2

Trong đó $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ b_{12} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{12} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ X = $B_1X + B_2X + g$ (1.9)

Giải hệ (1.9) bằng phương pháp lặp

$X_{k+1}=B_1X_{k+1}+B_2X_k + g$ $(k \geq 0)$

Hay dưới dạng toạ độ :

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{(k+1)} + g_i \quad (1.10)$$

Định lý: *phương pháp Seidel (1.10) hội tụ nếu* $\|B\| < 1$

<u>Chứng minh:</u>

Do $\|B\| < 1$ nên TX = BX + g là ánh xạ co $\Rightarrow \exists ! \alpha : T\alpha = \alpha$ với $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Theo (1.10): $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j + g_i$; $\left|x_i^{k+1} - \alpha_i\right| \leq \sum_{j<i} b_{ij}\left|x_j^{k+1} - \alpha_j\right| + \sum_{j>i} b_{ij}\left|x_j^k - \alpha_j\right|$

Ta có $\|X_{k+1} - \alpha\| = \underset{j=1,n}{Max}\left|x_j^{k+1} - \alpha_j\right|$; $\quad \|X_k - \alpha\| = \underset{j=1,n}{Max}\left|x_j^k - \alpha_j\right|$

$\Rightarrow \left|x_i^{k+1} - \alpha\right| \leq \sum_{j<i}\left|b_{ij}\right|\|X_{k+1} - \alpha\| + \sum_{j>i}\left|b_{ij}\right|\|X_k - \alpha\|$.

Đặt $\gamma_i = \sum_{j<i}\left|b_{ij}\right|, \beta_j = \sum_{j \geq i}\left|b_{ij}\right|$

$\gamma_i + \beta_i = \sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right| < 1$ (do $\|B\| < 1$) $\Rightarrow \left|X_i^{k+1} - \alpha_i\right| \leq \gamma_i \|X_{k+1} - \alpha\| + \beta_i \|X_k - \alpha\|, \forall i = \overline{1,n}$

Gọi i_o là chỉ số sao cho $\left|X_{i_o}^{k+1} - \alpha_o\right| = \underset{i-1,n}{Max}\left|X_i^{k+1} - \alpha_i\right| = \|X_{k+1} - \alpha\|$

$\Rightarrow \|X_{k+1} - \alpha\| = \left|X_{i_o}^{k+1} - \alpha\right| \leq \gamma_{i_o}\|X_{k+1} - \alpha\| + \beta_{i_o}\|X_k - \alpha\|$

$\Rightarrow \left(1 - \gamma_{i_o}\right)\|X_{k+1} - \alpha\| \leq \beta_{i_o}\|X_k - \alpha\| \Rightarrow \frac{B_{i_o}}{1 - \gamma_{i_o}}\|X_{k+1} - \alpha\| \leq \nu\|X_k - \alpha\|$

Với $v = \underset{i=1,n}{Max}\frac{B_i}{1-\gamma_i}$

Xét $\beta_i + \gamma_i - \frac{\beta_i}{1-\gamma_i} = \frac{\beta_i - \beta_i.\gamma_i + \gamma_i - \gamma_i^2 - \beta_i}{1-\gamma_i} = \frac{\gamma_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\gamma_i}$

Do $o < \beta_i, 0 < \gamma_i < 1 \Rightarrow 1-\gamma_i > 0; \gamma_i + \beta_i < 1$ $\Rightarrow \beta_i + \gamma_i - \frac{\beta_i}{1-\beta_i} > 0$

$\Rightarrow \frac{\beta_i}{1-\beta_i} < \beta_i + \gamma_i < 1, \forall i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow v = \underset{i=1,n}{Max}\frac{\beta_i}{1-\gamma_i} < 1$

Vậy $\|X_{k+1} - \alpha\| \le v\|X_k - \alpha\| \le v^2\|X_{k-1} - \alpha\| \le \ldots \le v^k\|X_o - \alpha\|$

Do $v < 1$ nên $v^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Vậy $X_k \to \alpha$ khi $k \to \infty$

*) Nhận xét

- Phương pháp Seidel có độ chính xác cao hơn phương pháp lặp đơn, tốc độ hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn (vì $v < \|B\| < 1$)

- Phương pháp Seidel tiết kiệm bộ nhớ hơn phương pháp lặp đơn vì :

+ Phương pháp lặp đơn sử dụng 2n ô nhớ cho X_{k+1}và X_k

+ Phương pháp Saidel chỉ cần n ô nhớ của $X_k \to X_{k+1}$ vì sau khi tính x_1^{k+1} thì không cần sử dụng x_1^k, lúc đó bỏ số x_1^{k+1} vào ô nhớ của x_1^k để tính x_2^{k+1}

…

*) Ví dụ 7: Giải hệ (VD5 dùng phương pháp lặp đơn)

$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,1x_3 = 0,795 \\ -0,11x_1 + 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849 \\ -0,11x_1 - o,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398 \end{cases}$ bằng phương pháp Seidel

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0,02x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_3 + 0,795 \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,03x_2 + 0,05x_3 + 0,849 \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,04x_3 + 1,398 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,05 & 0,1 \\ 0,11 & -0,03 & 0,05 \\ 0,11 & 0,12 & -0,04 \end{pmatrix}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,11 & 0 & 0 \\ 0,11 & 0,12 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & -0,03 & 0,05 \\ 0 & 0 & -0,04 \end{pmatrix}$$

Xét phép lặp $X_{k+1} = B_1X_{k+1} + B_2X_k + g$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = (-0,02x_1^k + 0,05x_2^k 0,1x_1^k) + 0,795 \\ x_2^{k+1} = 0,11x_1^{k+1} + (-0,03x_2^k + 0,05x_3^k) + 0,849 \\ x_3^{k+1} = 0,11x_1^{k+1} + 0,12x_2^{k+1} - 0,04x_3^{k+1} + 1,389 \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,8	0,85	1,4
1	0,9615	0,9999265	1,56767
2	0,9825	1,00548	1,564025

....

3.3 Phương pháp Gauss-Seidei

Là phương pháp Seidel áp dụng cho hệ phương trình với ma trận đường chéo trội

*) Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 10x_3 = 14 \end{cases}$

Giải :

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = 0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}$

Ta có B $\begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$ $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Xét dãy lặp $X_{k+1} = B_1X_{k+1} + BX_k + g$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = -0,1x_2^k - 0,1x_3^k + 1,2 \\ x_2^{k+1} = -0,2x_1^{k+1} - 0,1x_3^k + 1,3 \\ x_3^{k+1} = -0,2x_1^{k+1} - 0,2x_2^{k+1} + 1,4 \end{cases}$$

k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}
0	1,2	0	0
1	1,2	1,06	0,984
2	0,9992	1,00536	0,999088
3	0,9995552	1,00018	1,000052928
4	1,0000	1,000	1,000

4. GIẢI HỆ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH BẰNG MAPLE 12 VÀ LẬP TRÌNH PASCAL

4.1. Chương trình Pascal giải hệ đại số tuyến tính

```
Program giaihdstt;
 var
  n,i,j,k: integer;   s:real;
  b,p,x:array[1..50] of real;
  a:array[1..50,1..50] of real;
procedure nhap;
 var f:text;
   begin
      assign(f,'C.PAS');
      reset(f);
      readln(f,n);
      for i:=1 to n do
          for j:= 1 to n do
          read(f,a[i,j]);
          for i:= 1 to n do
          read(f,b[i]);
      close(f);
   end;
Begin
  nhap;
  for k:=1 to n do
   for i:= k+1 to n do
        begin
           if a[k,k] <> 0 then
           p[i] := a[i,k]/a[k,k];
           for j:=k+ 1 to n do
               a[i,j]:= a[i,j] - p[i]*a[k,j];
               b[i]:= b[i]-p[i]*b[k];
        end;
   if a[n,n] <> 0 then
```

```
    x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n-1 downto 1 do
     begin
        s:=b[i];
        for j:=i+1 to n do
        s:=s-a[i,j]*x[j];
        if a[i,i] <> 0 then
             x[i]:=s/a[i,i];
     end;
 for i:=1 to n do
     write(x[i]:10:3);
 readln;
end.
```

(lưu vào B.PAS)

*) Ví dụ 9: Giải hệ đại số tuyến tính $A\,x = u$ trong đó

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Giải:

1.Dùng Maple 12

[> $A := array([[2,3,1,2],[4,6,3,4],[6,9,5,6],[8,12,7,1]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

[> $u := vector([3,5,7,9]);$

$$u := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

[> $with(linalg):$

[> $linsolve(A, u);$

$$\left[2 - \frac{3}{2}\_t_1 \quad \_t_1 \quad -1 \quad 0 \right]$$

2.Sử dụng LT Pascal

Nhập ma trận lưu vào C.PAS

4

2 3 1 2

4 6 3 4

6 9 5 6

8 12 7 1

3 5 7 9

Sau đó chạy B.PAS trên màn hình hiện nghiệm của hệ là

2.000 0.000 -1.000 0.000

) Nhận xét:

Như vậy khi sử dụng Pascal trong Ví dụ này chỉ cho ta 1 nghiệm riêng của hệ. Còn sử dụng Maple 12 ta biết được nghiệm tổng quát của hệ.

Tuy nhiên đối với hệ có nghiệm cụ thể thì sử dụng Pascal việc nhập ma trận chính xác hơn và cho kết quả nhanh hơn sử dụng Maple 12. Ta xét tiếp ví dụ 10 sau đây.

*) Ví dụ 10: Giải hệ đại số tuyến tính $A\,x = u$ trong đó

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} 4 & -14 & -19 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải:

1.Dùng Maple 12

[>

$A := array([[1, 1, -1, 1, -1], [2, 2, 1, -9, 1], [3, -1, 1, -8, -4], [6, 1, 1, 1, -5], [1, 1, 1, 1, 2]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[> $u := vector([4,-14,-19,3,5]);$

$$u := \begin{bmatrix} 4 & -14 & -19 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

[> $with(linalg):$

[> $linsolve(A, u);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.Sử dụng LT Pascal

```
Nhập ma trận luu vào C.PAS
5
1 1 -1 1 -1
2 2 1 -9 1
3 -1 1 -8 -4
6 1 1 1 -5
1 1 1 1 2
Sau đó chạy B.PAS trên màn hình hiện nghiệm của hệ
là
1.000    1.000    -1.000   2.000    1.000
```

*) Ví dụ 11: Giải hệ đại số tuyến tính $A\,x = u$ trong đó

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -12 & -6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

1.Dùng Maple 12

[> $A := array([[1,-6,-2,1,1,1],[3,-12,-6,1,1,3],[1,4,0,-1,1,-1],[0,3,0,-1,-1,0]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -12 & -6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[> $u := vector([0,0,0,0]);$

$$u := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[> $with(linalg):$

[> $linsolve(A,u);$

$$\begin{bmatrix} -\_t_1 + \_t_3 - 2\_t_2 & \_t_1 & -2\_t_1 + \_t_3 - \_t_2 & 3\_t_1 - \_t_2 & \_t_2 & \_t_3 \end{bmatrix}$$

2.Sử dụng LT Pascal

Nhập ma trận lưu vào C.PAS

6

1 -6 -2 1 1 1

3 -12 -6 1 1 3

1 4 0 -1 1 -1

0 3 0 -1 -1 0

0 0 0 0

Sau đó chạy B.PAS trên màn hình hiện nghiệm của hệ là

0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

(Đây là nghiệm tầm thường của hệ)

Trong thực tế, đặc biệt là trong kĩ thuật nhiều khi ta phải giải các hệ đại số tuyến tính mà số liệu không phải là các số nguyên mà là các số thập phân. Khi đó nếu giải hệ bằng tay thì việc tính toán sẽ gặp nhiều vất vả. Các ví dụ sau cho thấy tính ưu việt của lập trình Pascal và Maple 12.

*) Ví dụ 12: Giải hệ đại số tuyến tính $A\,x = u$ trong đó

$$A := \begin{bmatrix} 3.233 & -2.121 & -5.354 & 1.002 \\ 2.133 & -3.032 & 1.121 & 5.114 \\ 1.002 & 2.332 & 0.005 & -4.243 \\ 1.534 & -1.203 & -4.132 & 9.005 \end{bmatrix} \qquad u := \begin{bmatrix} 3.021 & -3.142 & -3.354 & 22.136 \end{bmatrix}$$

Giải:

1.Dùng Maple 12

[>

$A := array([[3.233, -2.121, -5.354, 1.002], [2.133, -3.032, 1.121, 5.114], [1.002, 2.332, 0.005, -4.243], [1.534, -1.203, -4.132, 9.005]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 3.233 & -2.121 & -5.354 & 1.002 \\ 2.133 & -3.032 & 1.121 & 5.114 \\ 1.002 & 2.332 & 0.005 & -4.243 \\ 1.534 & -1.203 & -4.132 & 9.005 \end{bmatrix}$$

[> $u := vector([3.021, -3.142, -3.354, 22.136]);$

$$u := \begin{bmatrix} 3.021 & -3.142 & -3.354 & 22.136 \end{bmatrix}$$

[> $with(linalg):$

[> $linsolve(A, u);$

$$\begin{bmatrix} -1.251668657 & 2.934167098 & -2.088479817 & 2.105082081 \end{bmatrix}$$

2.Sử dụng LT Pascal

Nhập ma trận lưu vào C.PAS

4

3.233 -2.121 -5.354 1.002

2.133 -3.032 1.121 5.114

1.002 2.332 0.005 -4.243

1.534 -1.203 -4.132 9.005

3.021 -3.142 -3.354 22.136

Sau đó chạy B.PAS trên màn hình hiện nghiệm của hệ là

-1.252 2.934 -2.088 2.105

*) Ví dụ 13: Giải hệ đại số tuyến tính $A\,x = u$ trong đó

$$A := \begin{bmatrix} 1.002 & 1.232 & -1.311 & 1.221 & -1.002 \\ 2.231 & 2.131 & 1.222 & -9.012 & 1.111 \\ 3.203 & -1.125 & 1.104 & -8.235 & -4.321 \\ 6.534 & 1.147 & 1.333 & 1.203 & -5.461 \\ 1.135 & 1.162 & 1.412 & 1.327 & 2.315 \end{bmatrix}$$

$$u := \begin{bmatrix} 4.211 & -14.003 & -19.133 & 3.016 & 5.114 \end{bmatrix}$$

Giải:

1.Dùng Maple 12

```
[> A := array([[1.002, 1.232, -1.311, 1.221, -1.002], [2.231, 2.131, 1.222,
   -9.012, 1.111], [3.203, -1.125, 1.104, -8.235, -4.321]. [6.534,
   1.147, 1.333, 1.203, -5.461], [1.135, 1.162, 1.412, 1.327, 2.315]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1.002 & 1.232 & -1.311 & 1.221 & -1.002 \\ 2.231 & 2.131 & 1.222 & -9.012 & 1.111 \\ 3.203 & -1.125 & 1.104 & -8.235 & -4.321 \\ 6.534 & 1.147 & 1.333 & 1.203 & -5.461 \\ 1.135 & 1.162 & 1.412 & 1.327 & 2.315 \end{bmatrix}$$

```
[> u := vector([4.211, -14.003, -19.133, 3.016, 5.114]);
```

$$u := \begin{bmatrix} 4.211 & -14.003 & -19.133 & 3.016 & 5.114 \end{bmatrix}$$

```
[> with(linalg) :
[> linsolve(A, u);
```

[0.0212702590 1.636622369 -0.0087912749 01.975710453
0.2499993837]

2.Sử dụng LT Pascal

Nhập ma trận lưu vào C.PAS

5

1.002 1.232 -1.311 1.221 -1.002

2.231 2.131 1.222 -9.012 1.111

3.203 -1.125 1.104 -8.235 -4.321

6.534 1.147 1.333 1.203 -5.461

1.135 1.162 1.412 1.327 2.315

Sau đó chạy B.PAS trên màn hình hiện nghiệm của hệ là

0.021 1.636 -0.009 1.976 0.250