#高等数学#

ch1 函数与极限

{ 必要条件：necessary condition.
充分条件：sufficient condition.
充要条件：necessary and sufficient condition.

1. 狄利克雷函数 (Dirichlet function)

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q(\text{有理数}) \\ 0, & x \in \text{无理数} \end{cases} \quad \text{定义域 } D = (-\infty, +\infty)$$

2. 函数的性质

(1) 函数的有界性. $f(x) \le K_1$ (上界) / $f(x) \ge K_2$ (下界) / $|f(x)| \le M$ (有界).

(2) 函数的奇偶性 $f(-x) = -f(x)$ (奇函数) / $f(-x) = f(x)$ (偶函数)

(3) 函数的单调性. $x_1 < x_2$. $f(x_1) \le f(x_2)$ (单增) / $f(x_1) \ge f(x_2)$ (单减)

(4) 函数的周期性. $f(x+T) = f(x)$. (T为周期/最小正周期)

3. 反函数 (Inverse function)

4. 以e为底的指数函数 (exponential function) 出发的几个常用函数：

双曲正弦 (Hyperbolic sine function)：$sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

双曲余弦 (Hyperbolic cosine function)：$ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

双曲正切 (Hyperbolic tangent function)：$th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

⇒ 公式：

$$\begin{cases} sh(x+y) = shx\,chy + chx\,shy. \\ sh(x-y) = shx\,chy - chx\,shy. \\ ch(x+y) = chx\,chy + shx\,shy. \\ ch(x-y) = chx\,chy - shx\,shy. \end{cases} \qquad \begin{cases} ch^2x - sh^2x = 1. \\ sh2x = 2shx\,chx. \\ ch2x = ch^2x + sh^2x. \end{cases}$$

5. 数列的极限 (limit)

▲ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. A称为数列$\{a_n\}$的极限. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

{ 极限存在的数列为收敛数列 (convergent sequence).
极限不存在的数列为发散数列 (divergent sequence).

▲ (ε-N定义) $\forall \varepsilon > 0$. ∃正整数N. 当 $n > N$ 时 有 $|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

⇒ 只要证明N存在. 即使N取法不唯一，即可证明收敛.