多元统计分析

CH1 矩阵代数.

1. 投影矩阵 = 对称矩阵 $(A'=A)$ + 幂等矩阵 $(A^2=A)$.

2. $\operatorname{rank}(AA') = \operatorname{rank}(A'A) = \operatorname{rank}(A)$.

3. $\begin{cases} |A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j. \\ \operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j. \end{cases}$

4. A 对称矩阵 $\Rightarrow A = T\Lambda T'$ (T 为正交矩阵, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$).

5. $\begin{cases} \text{谱分解: } A = T\Lambda T' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i t_i' & (t_i \text{ 是正交单位特征向量. } \lambda_i \text{ 是A的特征值}). \\ \text{奇异值分解: } A = U\Lambda V' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i v_i' \end{cases}$

$\begin{pmatrix} AA'u_i = \lambda_i^2 u_i,\ i=1,2,\cdots,k & u_i \text{ 是 } AA' \text{ 的单位正交向量} \\ A'Av_i = \lambda_i^2 v_i,\ i=1,2,\cdots,k & v_i \text{ 是 } A'A \text{ 的单位正交向量} \end{pmatrix}$

6. Cauchy-Schwarz (柯西-许瓦兹) 不等式:

设 x 和 y 是两个 p 维向量. 则 $(x'y)^2 \le (x'x)(y'y)$.

等号成立当且仅当 $y = cx$ (或 $x = cy$). 这里 c 为一常数.

$\Rightarrow$ 推广: 设 $B>0$. 则 $(x'y)^2 \le (x'Bx)(y'B^{-1}y)$. 等号成立当且仅当 $x = cB^{-1}y$.
或 $y = cBx$.

7. 特征值的极值问题:

- A 对称. $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_p$. 对应 $t_1, t_2, \cdots, t_p$.

$\Rightarrow \max_{x \ne 0} \frac{x'Ax}{x'x} = \lambda_1$ (当 $x = t_1$ 时达到).

$\min_{x \ne 0} \frac{x'Ax}{x'x} = \lambda_p$ (当 $x = t_p$ 时达到).

- A 对称, B 正定, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_p$ 对应 $t_1, t_2, \cdots, t_p$.

$\Rightarrow \max_{x \ne 0} \frac{x'Ax}{x'Bx} = \lambda_1$ (当 $x = t_1$ 时达到).

$\min_{x \ne 0} \frac{x'Ax}{x'Bx} = \lambda_p$ (当 $x = t_p$ 时达到).

8. p 阶方阵 A 为非退化矩阵 $\Leftrightarrow |A| \ne 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ 存在 (必然唯一).

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = p$ (A 满秩) $\Leftrightarrow$ A 的特征值均不为 0.

p 阶方阵 A 为退化矩阵 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ 不存在 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < p$

练习

1. 考虑对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的谱分解.

☆ 首先求A的特征根: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3+8\times2-4\times3(1-\lambda)$
$= -(\lambda-5)(\lambda+1)^2 = 0$

故求得特征根: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$

对应于 $\lambda_1=5$ 的单位特征向量为 $t_1=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})'$

对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的单位特征向量(两向量彼此正交)为

$t_2=(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2})'$, $t_3=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{-2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})'$.

故A的谱分解 $A=T\Lambda T'=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i t_i t_i'$. 为

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3}) + (-1)\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\1/\sqrt2\end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt2},0,\tfrac{1}{\sqrt2}) + (-1)\begin{pmatrix}1/\sqrt6\\-2/\sqrt6\\1/\sqrt6\end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt6},\tfrac{-2}{\sqrt6},\tfrac{1}{\sqrt6}).$$

2. 考虑 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

$AA'=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1\\1&9\end{pmatrix}$

可求得 AA' 的特征值是 $\lambda_1^2=10$, $\lambda_2^2=8$.

相应的单位特征向量为 $u_1=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})'$, $u_2=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})'$

又 $A'A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&8&0\\4&0&8\end{pmatrix}$

可求得 $A'A$ 的非零特征值也为 $\lambda_1^2=10$, $\lambda_2^2=8$.

相应的单位特征向量为 $v_1=(\frac{1}{\sqrt5},0,\frac{2}{\sqrt5})'$, $v_2=(0,1,0)'$.

取 $\lambda_1=\sqrt{\lambda_1^2}=\sqrt{10}$, $\lambda_2=\sqrt{\lambda_2^2}=2\sqrt2$

得到 A 的奇异值分解 $A=U\Lambda V'=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i v_i'$. 为

$$A=\sqrt{10}\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt5},0,\tfrac{2}{\sqrt5}) + 2\sqrt2\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\-1/\sqrt2\end{pmatrix}(0,1,0).$$

CH2 随机向量.

1. 多元分布:

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)'$ 的分布函数: $F(a_1,a_2,\cdots,a_p)=P(x_1\le a_1,x_2\le a_2,\cdots,x_p\le a_p)$.

概率密度函数: $F(a_1,\cdots,a_p)=\int_{-\infty}^{a_1}\cdots\int_{-\infty}^{a_p}f(x_1,\cdots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p$.

$f(x_1,\cdots,x_p)=\frac{\partial^p}{\partial x_1\cdots\partial x_p}F(x_1,\cdots,x_p)$.

边缘分布: $f_{(1)}(X_{(1)})=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_p)\,dx_{q+1}\cdots dx_p$.

条件分布: $f(X_{(1)}|X_{(2)})=\dfrac{f(X_{(1)},X_{(2)})}{f_{(2)}(X_{(2)})}=\dfrac{f(x)}{f_{(2)}(X_{(2)})}$.

独立性: $f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)\cdots\cdots f_n(x_n)$.

2. 随机向量的协方差阵:

$E(AXB+C)=AE(X)B+C$. (A.B.C 均为常数矩阵)

$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)']$.

$\Sigma=V(X)=Cov(X,X)=E[(X-EX)(X-EX)'] = \begin{pmatrix}V(x_1)&Cov(x_1,x_2)&\cdots&Cov(x_1,x_p)\\Cov(x_2,x_1)&V(x_2)&\cdots&Cov(x_2,x_p)\\\cdots&\cdots&&\cdots\\Cov(x_n,x_1)&Cov(x_n,x_2)&\cdots&V(x_n)\end{pmatrix}$

$V(Ax+b)=AV(x)A'$.

$Cov(Ax,By)=A\,Cov(x,y)B'$.

$V(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2V(x_i)$.

$x=(x_1,\cdots,x_p)'$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_q)'$ 的相关阵: $\rho(x,y)=\begin{pmatrix}\rho(x_1,y_1)&\rho(x_1,y_2)&\cdots&\rho(x_1,y_q)\\\rho(x_2,y_1)&\rho(x_2,y_2)&\cdots&\rho(x_2,y_q)\\\cdots&\cdots&&\cdots\\\rho(x_p,y_1)&\rho(x_p,y_2)&\cdots&\rho(x_p,y_q)\end{pmatrix}$

相关阵 $\boxed{R=D^{-1}\Sigma D^{-1}.}$

其中 $D=diag(\sqrt{\sigma_{11}},\cdots,\sqrt{\sigma_{pp}})$

⇒ 推广: $\rho(x,y)=D_x^{-1}Cov(x,y)D_y^{-1}$ $\left(\begin{array}{l}D_x=diag(\sqrt{V(x_1)},\cdots,\sqrt{V(x_p)}):p\times p.\\D_y=diag(\sqrt{V(y_1)},\cdots,\sqrt{V(y_q)}):q\times q.\end{array}\right)$

3. 标准化变换的三种形式:

(1) $x^*=D^{-1}(x-\mu)$. ⇒ $V(x^*)=R=\begin{pmatrix}1&\rho_{12}&\cdots&\rho_{1p}\\\rho_{21}&1&\cdots&\rho_{2p}\\\cdots&&\cdots&\\\rho_{p1}&\rho_{p2}&\cdots&1\end{pmatrix}$

(2) $x^*=T'(x-\mu)$ ⇒ $V(x^*)=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$

(3) $x^*=\Sigma^{-1/2}(x-\mu)$ ⇒ $V(x^*)=I_p$.

4. 总变异性：

$\begin{cases} \text{总方差：} & tr(\Sigma) = \sum\limits_{i=1}^{p} \sigma_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i. \\ \text{广义方差：} & |\Sigma| = \prod\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \end{cases}$

含义：$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) = c^2$.

5. 欧氏距离：$d^2(x,y) = (x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_p-y_p)^2 = (x-y)'(x-y)$.

马氏距离：$\begin{cases} \text{两样本之间：} & d^2(x,y) = (x-y)'\Sigma^{-1}(x-y). \\ \text{样本到总体：} & d^2(x,\pi) = (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu). \end{cases}$

CH3 多元正态分布

1. 多元正态分布的概率密度函数：$f(y) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)\}$.
2. $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$，$y = Cx+b$

   $\Rightarrow y \sim N_r(C\mu+b, C\Sigma C')$ 表明（多元）正态变量的任何线性变换仍为（多元）正态变量.（ci）.
3. $x \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow x_1 \sim N_k(\mu_1, \Sigma_{11})$.

   表明多元正态分布的任何边缘分布仍为（多元）正态分布.

   注意：随机向量的任何边缘分布皆为（多元）正态分布 $\nRightarrow$ 该随机变量服从多元正态分布.

   还需注意：正态变量的线性组合未必就是正态变量.

   因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为一元正态变量.

   $\Leftarrow$（$\nRightarrow$）$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的联合分布为多元正态分布.

   $\Leftrightarrow$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一切线性组合是一元正态变量.

$$
\begin{tikzcd}
x=(x_1,\cdots,x_p)' \sim \text{正态} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \forall i,\ x_i \sim \text{正态} \arrow[l, bend right, "\times"'] \arrow[d, bend left, "\times"] \\
 & \forall a,\ a'x \sim \text{正态} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

另外：独立的多元正态变量（维数相同）的任意线性组合仍为多元正态变量.

$\Rightarrow$ 推广：对多元正态变量而言，其子向量之间互不相关和相互独立等价.

4. 重要的经典变换形式：$y = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu) \sim N_p(0, I)$. $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) = y'y$.

   $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$，$\Sigma > 0$ 则 $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \sim \chi^2(p)$.
5. 给定 x_2 时 x_1 的条件分布 $N_k(\mu_{1\cdot2}, \Sigma_{11\cdot2})$ 即 $x_1 | x_2 \sim N_k(\mu_{1\cdot2}, \Sigma_{11\cdot2})$

   其中 $\mu_{1\cdot2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)$. 条件数学期望.

   $\Sigma_{11\cdot2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$. 条件协方差矩阵.
6. 极大似然估计 (MLE)

   $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 无偏

   $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})' = \frac{1}{n}A = \frac{n-1}{n}S$ 有偏.

   $\hat{r}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}}\cdot\sqrt{\hat{\sigma}_{jj}}} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}$

   $\hat{R} = D^{-\frac{1}{2}} S D^{-\frac{1}{2}}$

7. 简单相关系数(pearson 相关系数)：$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$

复相关系数：$\begin{cases} r.v.\ y. \\ r.\ vector.\ x. \end{cases}$ $\rho_{y\cdot x} = \sqrt{\rho_{xy}' R_{xx}^{-1} \rho_{xy}}$ 其中 $R_{xx}^{-1} = \frac{\Sigma_{xx}^{-1}}{\sigma_{yy}}$.

偏相关系数：$\begin{cases} r.\ vector.\ x_1 \\ r.\ vector\ x_2 \end{cases}$ $\rho_{ij\cdot k+1,\cdots,p} = \frac{\sigma_{ij\cdot k+1,\cdots,p}}{\sqrt{\sigma_{ii\cdot k+1,\cdots,p}}\sqrt{\sigma_{jj\cdot k+1,\cdots,p}}}$ $i,j=1,\cdots,k$

☆ 其中一阶偏相关系数可直接由相关系数求得：

$$\rho_{12\cdot 3} = \frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho_{13}^2}\sqrt{1-\rho_{23}^2}},\quad \rho_{13\cdot 2} = \frac{\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}\sqrt{1-\rho_{23}^2}},\quad \rho_{23\cdot 1} = \frac{\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}\sqrt{1-\rho_{13}^2}}.$$

8. $\bar{x}$ 的抽样分布：$\bar{x} \sim N_p(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$ (正态总体)

$\sqrt{n}(\bar{x}-\mu) \overset{\text{近似}}{\sim} N(0, \Sigma)$ (非正态总体)

CH5 判别分析

1. 距离判别：

两组

$\underline{\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma>0}$：令 $W(x) = a'(x-\bar{\mu})$.

$a' = \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$. $\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$.

$\begin{cases} x\in\pi_1 \text{ 若 } W(x)\geq 0. \\ x\in\pi_2 \text{ 若 } W(x)<0. \end{cases}$

$\underline{\Sigma_1 \neq \Sigma_2}$：$W(x) = (x-\mu_1)'\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) - (x-\mu_2)'\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)$.

$\begin{cases} x\in\pi_1 \text{ 若 } W(x)\leq 0. \\ x\in\pi_2 \text{ 若 } W(x)>0. \end{cases}$

多组

$\underline{\Sigma_1=\Sigma_2=\cdots=\Sigma_k=\Sigma}$：$d^2(x,\pi_i) = x'\Sigma^{-1}x - 2(I_i'x + C_i)$.

$\min d^2(x,\pi_i) \Leftrightarrow \max(I_i'x + C_i)$.

$I_i' = S_p^{-1}\bar{x}_i$, $C_i = -\frac{1}{2}\bar{x}_i' S_p^{-1}\bar{x}_i$.

$\underline{\Sigma_1,\cdots,\Sigma_k \text{ 不全相等}}$：

$d^2(x,\pi_i) = (x-\bar{x}_i)'S_i^{-1}(x-\bar{x}_i)$.

$\min d^2(x,\pi_i)$.

当 $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$. 则 $W(x) \sim N(\frac{1}{2}\Delta^2, \Delta^2)$. 其中 $\Delta^2 = (\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$.

$P(1|2) = P(2|1) = \Phi(-\frac{\Delta}{2})$ 误判概率.

2. 贝叶斯判别：

最大后验概率法：$x\in\pi_i$. 若 $p(\pi_l|x) = \max\limits_{1\leq i\leq k} p(\pi_i|x) \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq k} p_i f_i(x)$.

其中 $p(\pi_i|x) = \frac{p_i f_i(x)}{\sum\limits_{j=1,\cdots,k} p_j f_j(x)}$.

最小期望误判代价法(ECM)：

$\underline{\text{一般}}$. 误判概率：$P(2|1) = P(x\in R_2|x\in\pi_1) = \int_{R_2} f_1(x)dx$.

$p(1|2) = p(x\in R_1|x\in\pi_2) = \int_{R_1} f_2(x)dx$.

期望误判代价：$ECM = E[c(l|i)] = c(2|1)p(2|1)p_1 + c(1|2)P(1|2)p_2$.

判别规则：$\begin{cases} x\in\pi_1, \text{ 若 } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \frac{c(1|2)p_2}{c(2|1)p_1} \\ x\in\pi_2. \text{ 若 } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \frac{c(1|2)p_2}{c(2|1)p_1}. \end{cases}$

$\underline{\underline{\text{两个正态组情形.}}}$

$\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$ 时：$\begin{cases} x_1\in\pi_1, \text{ 若 } a'(x-\bar{\mu}) \geq \ln\left[\frac{c(1|2)p_2}{c(2|1)p_1}\right]. \\ x\in\pi_2, \text{ 若 } a'(x-\bar{\mu}) < \ln\left[\frac{c(1|2)p_2}{c(2|1)p_1}\right]. \end{cases}$ 其中 $a' = \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$. $\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$.

$\Rightarrow p_1=p_2$, $c(1|2)=c(2|1)$ 时 $\begin{cases} x\in\pi_1. \text{ 若 } d^2(x,\pi_1)-d^2(x,\pi_2) \leq 2\ln\left(\frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}}\right). \\ x\in\pi_2. \text{ 若 } d^2(x,\pi_1)-d^2(x,\pi_2) > 2\ln\left(\frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}}\right). \end{cases}$

$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ 时：
$$\begin{cases} x \in \pi_1, \text{ 若 } d^2(x,\pi_1) - d^2(x,\pi_2) \le 2\ln\left[\dfrac{c(2|1)p_1|\Sigma_2|^{1/2}}{c(1|2)p_2|\Sigma_1|^{1/2}}\right] \\ x \in \pi_2, \text{ 若 } d^2(x,\pi_1) - d^2(x,\pi_2) > 2\ln\left[\dfrac{c(2|1)p_1|\Sigma_2|^{1/2}}{c(1|2)p_2|\Sigma_1|^{1/2}}\right]. \end{cases}$$

多组： $ECM = \sum_{i=1}^{k} p_i \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{k} p(l|i)\, c(l|i).$

$x \in \pi_i$. 若 $\sum_{l=1,\, j=1}^{k} p_j\, c(l|j) f_j(x) = \min_{1\le j\le k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} p_j\, c(i|j) f_j(x).$

3. Fisher 判别（费希尔判别）.

需假定：$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_k = \Sigma.$

$y_1 = t_1' x$ Fisher 第一（线性）判别函数.

▲ 两组情形的 Fisher 判别"等价于"协方差矩阵相等的距离判别.

对两个正态组的 Fisher 判别 等价于 协方差矩阵相等且先验概率和误判代价也相同的贝叶斯判别.

CH6 聚类分析

1. 明氏距离（Minkowski distance. 明考夫斯基距离）

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^q\right)^{1/q}. \quad \text{其中 } q \ge 1.$$

三种特殊距离：

$q=1.$ $d(x,y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$ 绝对值距离.

$q=2.$ $d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2} = \sqrt{(x-y)'(x-y)}$ 欧氏距离.

$q=\infty.$ $d(x,y) = \max_{1\le i\le p} |x_i - y_i|$ 切比雪夫距离.

2. 兰氏距离（Canberra distance）

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \frac{|x_i - y_i|}{x_i + y_i} \quad \text{（所有数据皆为正时）}$$

3. 马氏距离（Mahalanobis distance）

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)' S^{-1} (x-y)}. \quad \text{（S 为样本协差阵）.}$$

4. 夹角余弦：
$$c_{ij}(1) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj}}{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^2\right)\right]^{1/2}}. \qquad c_{ij}(1) = \cos\theta_{ij}.$$

相关系数
$$c_{ij}(2) = r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)^2\right]\left[\sum_{k=1}^{n} (x_{kj} - \bar{x}_j)^2\right]\right\}^{1/2}}.$$

IT	submit 完成日期
×	11.12
×	11.09 (12.09面试)
×	10.31 (11.08 简拒) 11.17
×	12.12
	10.27
×	11.12
	~~11.05~~ (拒)
	11.17(拒)
×	11.12 (12.10 offer)
×	11.12 (12.05 拒)
×	11.17
×	11.12 (12.12 offer) ✓
×	
×	11.19

CH7 主成分分析 (PCA, Principal Component Analysis).

$X=(x_1, x_2, \cdots, x_p)'$. $E(X)=\mu$. $V(X)=\Sigma>0$.

$y_1 = a_1'X = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{p1}x_p$. $a_1'=(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{p1})'$.

$V(y_1) = a_1'\Sigma a_1$. 在约束条件 $\|a_1\|=1$ 下, $V(y_1)$ 达到max. 则 y_1 —— 第一主成分.

X 的第 i 个主成分: $y_i = a_i'X$, $V(y_i)=\lambda_i$. $i=1,2,\cdots,p$ 且 $y_1 \cdots y_p$ 互不相关

主成分的总方差: $\sum_{i=1}^{p} V(x_i) = \sum_{i=1}^{p} V(y_i)$. $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

主成分 y_i 的贡献率: $\lambda_i \big/ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

原始变量 x_i 与主成分 y_k 之间的相关系数: $\rho(x_i, y_k) = \dfrac{Cov(x_i, y_k)}{\sqrt{V(x_i)}\sqrt{V(y_k)}} = \dfrac{t_{ik}\lambda_k}{\sqrt{\sigma_{ii}\lambda_k}} = \sqrt{\dfrac{\lambda_k}{\sigma_{ii}}} \cdot t_{ik}$

作业 10% 考勤 10%
实验报告 20% $\Rightarrow$ DDL: 12月6日
期末考试 60%

回归分析 REVIEW NOTE

0. 矩阵论复习

$r(A)$ —— $m\times n$ 矩阵A的秩.

A^{-1} —— 逆矩阵. $det(A) \neq$

$det(A)$ ——

$adj(A)$ ——

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(2) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

(3) 若A和C均为p阶非

(4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(5) 若A是正交矩阵, 则

(6) 若 $A = diag(a_{11}, a$

$A^{-1} = diag$

(7) 若A和B为非退化方阵.

对于A. 存在逆矩阵 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$

$tr(A)$ —— n阶方阵 $A=($

(1) $tr(AB) = tr(BA)$

(2) $tr(A) = tr(A')$

(3) $tr(A+B) = tr(A)+$

(4) $tr(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k}$

(5) 设 $A=(a_{ij})$ 为 $p\times q$

(6) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 为

λ为特征值——