6

2020年5月4日 10:23

P_{48}.

1. 证明：反证法：考虑其最长轨 P 终点，(起点同理) 若终点 v 不是叶，则 $d(v)\geq 2$，不妨设 $d(v)=2$；
∴与 v 相邻的顶点 u, s 中有 $u\in P$，∵ T 连通且无圈，∴ $S\notin P$
于是将 s 也加入 P 中，则 $l(P)=l(P)+1$，矛盾 因此最长轨起止顶均为叶。

设 T 为 n 阶树，对 n 用数学归纳法：
$n=2$ 时，显然成立；假设 $n\leq k$ 时，有 T_K 中最长轨 $P_k=u_k\cdots v_K$，其中 u_K, v_K 为叶；
考虑 $n=k+1$ 时，删去 T_{k+1} 的任一个叶 r，则 $T_{k+1}-r$ 为 k 阶树，由假设，有 $P_k'=u_{k+1}\cdots v_{k+1}$
现将 r 加回 $T_{k+1}-r$，考虑2种情况：
① $P_{k+1}=P_k' \Rightarrow$ 得证．
② $P_{k+1}\neq P_k' \Rightarrow$ 则 P_{k+1} 终点必为 r；又将 P_{k+1} 的起点删去 起点怎么考虑？

2. 假设 T 为 n 阶树：$n=2$ 时，显然成立；
若 $k=n$ 时结论成立，即 T_n 满足其仅有2片叶 则 T_n 为轨
考虑 $k=n+1$ 时，则 T_{n+1} 仅有2个叶，取其中一个叶 u，则考虑 $T_{n+1}-u$
∵ $T_{n+1}-u$ 为 n 阶树，于是 $T_{n+1}-u$ 为轨
① 若 u 与 $T_{n+1}-u$ 的叶相邻，则得证．
② 若 u 不与 $T_{n+1}-u$ 的叶相邻，则 T_{n+1} 有至少3个叶，矛盾．

∴得证．

3. 对 n 做数学归纳：$n=1$ 时，显然成立 (o—o)
假设 $n=k$ 时成立，即 T_k 满足 $\Delta(T)\geq k$，其有至少 k 片叶；
考虑 $n=k+1$ 时，则 $\Delta(T_{k+1})\geq k+1$，那么取 $S\in V(T_{k+1})$，有 $d(s)=\Delta(T_{k+1})$，
分两种情况：① 与 S 相邻的顶均不是叶，则取 T_{k+1} 任一叶 u，令 $T=T_{k+1}-u$
则 $\Delta(T_{k+1}-u)=k+1$，由假设，则 $T_{k+1}-u$ 至少有 $k+1$ 个叶，那么，
T_{k+1} 也至少有 $k+1$ 个叶，得证。

② 与 S 相邻的顶中有叶，则取任一与 s 相邻的叶 v，令 $T=T_{k+1}-v$
则 $\Delta(T_{k+1}-v)=k$，由假设，$T_{k+1}-v$ 中至少有 k 个叶，那么
T_{k+1} 中，由于新加入 v，且 v 为叶，则 $\Delta(T_{k+1})=k+1$，且 T_{k+1} 中至少有 $k+1$ 个叶。

4. 必要性：G 为林，且 G 有 w 个连通分支，每一个连通分支 G_i 为树，则 $|E(G_i)|=|V(G_i)|-1$
∴ $|E(G)|=\sum|E(G_i)|=\varepsilon=v-w$

充分性：$\varepsilon=v-w$ 若 G 连通，且 $\varepsilon=v-1$，则 G 为树，得证．
若 G 不连通，有 $w=k$，若 G 不是林，即 $\exists G_i\subseteq G$ 为其一个连通分支．G_i 中有圈
那么有 $|E(G_i)|>|V(G_i)|-1$ 于是 $\varepsilon=\sum|E(G_i)|>v-w$ 矛盾．

$\therefore$ 得证.

8. 对 k 做数学归纳法: $k=1$ 时, 显然成立.
假设 $k \leq n$ 时结论成立, 即若 G_n 满足 $\delta(G_n) \geq n$, 则有 $T_n \subseteq G_n$ 且 $|V(T_n)|=n+1$.
考虑 $k=n+1$ 时, G_{n+1} 为 $\delta(G_{n+1}) \geq n+1$ 的图, T 为 $n+2$ 个顶点的树. 考虑 T 的叶 u, 和与 u 相邻的 v,
记 $T'=T-u$, 则 $|V(T')|=n+1$ 又 $\because \delta(G_{n+1}) \geq n+1 > n \Rightarrow$ 有 T' 与 G_{n+1} 的子图 G' 同构, 考虑 G' 中与 v 对应的顶 s.
$\because G' \subseteq G_{n+1}$ $\therefore \delta(G') \geq n+1 \Rightarrow d(s) \geq n+1$ 又 $\because |V(G')|=n+1$ $\therefore s$ 必与 w 相邻, $w \notin G'$, 且 $w \in G$.
由此, $G''=G' \cup \{(s,w), w\}$, 那么 $G'' \subseteq G$ 且 $G'' \cong T' \cup \{(v,w), u\}$
即 $G'' \cong T$, 得证.