4

2020年4月16日 13:35

P_{25}.

42. 证明：假设G不连通，不妨设G有2个连通分支，若有更多，将其视作某一分支的2个不连通分支，则同理。
设两个分支的顶点数分别为$x, n-x$，则

$$m \le \frac{x(x-1)}{2}+\frac{(n-x)(n-x-1)}{2}=\frac{x^2-x+(n-x)^2-n+x}{2}=\frac{x^2-n+n^2+x^2-2nx}{2}=\frac{2x^2-2nx+n^2-n}{2}$$ 记为m_0

又 $\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+2}{2}$ 则有

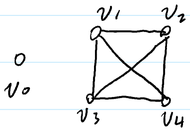
$$\frac{2x^2-2nx+n^2-n}{2}-\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{2x^2-2nx+2n-2}{2}=x^2-nx+n-1=(x-(1-n))(x-1)$$ 记为$\varphi(x)$

∴ $\varphi(x)$在$x\in[1,n-1]$，$x\in N^+$时均有$\varphi(x)\le 0$

又∵ $m>\binom{n-1}{2}$ 而现有 $m\le m_0\le\binom{n-1}{2}$ 在$x\in[1,n-1]$时恒成立 而在$x=0$，$x=n$时并不存在连通分支

∴矛盾，G连通得证。

43. 解：G：



$v(G)=5$ $e(G)=6=\frac{4\times3}{2}=\binom{4}{2}$

44. 证明：假设G不连通，则有2个及以上的连通分支，考虑连通分支中顶点数小于等于$[\frac{n}{2}]$的一支，记为$w=<V',E'>$
考虑 $v\in V'$，则有v至多与w中$V'-v$的顶点相邻，即$\Delta(v)=[\frac{n}{2}]-1<[\frac{n}{2}]$，
∴与题设$\delta\ge[\frac{n}{2}]$矛盾，则G连通得证。

46. 证明：易知，$\delta_G\ge 2$ 对于$G-v$的每一个连通分量，其必与v有偶数边连接
否则若仅有奇数边相接，则由G的各顶度数均为偶，去掉v后该连通分量
有奇数个点的度数为奇数，其余点度数均为偶，则该分量度数为奇，与握手定理矛盾
∴每个连通分量至少有2条边与v相连 即$2w(G-v)\le d(v)$
得证

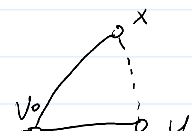
51. 证明：G不是完全图 $\Rightarrow d(G)>1$ 假设对$\forall u,v,w\in V$，在$uv,vw\in V$时恒有$uw\in E$
此时有$d(uw)=d(u,v)=d(v,w)=1$ 矛盾
∴必$\exists u,v,w\in V$, s.t. 在$uv,vw\in E$时 $uw\notin E$

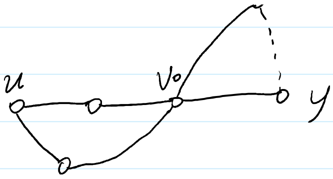
补充：

证明：考虑两种情况：记G为$<V,E>$，$w_1=P(u,x)$，$w_2=P(u,y)$

① w_1,w_2中除u外没有相同顶点，
∵$(x,y)\in E$ 又∵$l(w_1)$与$l(w_2)$同奇或同偶
∴$l(w_1)+l(w_2)$一定为偶数 又(x,y)相邻⇒得圈$u\to x\to y\to u$，记为φ
则 $l(\varphi)$=偶数+1 为奇数 且φ中没有相同顶点，则φ为奇圈。

② w_1,w_2中有相同顶点，



② w_1, w_2 中有相同顶点，
首先仍有 φ 为回路，　　　　　　　　　　说明图为 

$\because l(\varphi)$ 为奇数 $\therefore$ 对于 φ 中的回路，一定有边数为奇数的回路，记为 ξ.
则 ξ 为所求奇圈。

综上，得证.