

P26.52.

证明: 记该闭行迹为  $W$ , 记  $e = v_i v_{i+1}$  则  $W = v_1 \cdots v_i e v_{i+1} \cdots v_k (v_1, v_k)$

若  $e$  不在圈上, 那么有  $s \neq i$  且  $v_s = v_i$  s.t.  $v_s \in W$ , 分两种情况讨论:

①  $v_{s+1} = v_{i+1}$ , 此时有  $(v_s, v_{s+1}) = e \in W$ , 则不符合行迹定义, 矛盾.

②  $v_{s+1} \neq v_{i+1}$ , 记  $(v_s, v_{s+1})$  为  $e' \in W$ , 则有  $\gamma = v_i e v_{i+1} \cdots v_{s+1} e' (v_s)$

此时  $\gamma$  中的边为  $W$  的子集, 则  $\gamma$  为闭行迹; 又  $\gamma$  中没有相同的顶点,

$\therefore \gamma$  为圈

综上, 得证.

补充: 1.

证明: 假设  $\psi, \varphi$  分别为两条图  $G$  的最长轨且顶点不相同, 即有  $v_k \in \psi$  且  $v_k \notin \varphi$ ,

$\therefore G$  中各个点与其余顶点均连通  $\therefore$  在  $\varphi$  中加入  $v_k$  得到  $\varphi'$  则  $L(\varphi') > L(\varphi)$

与  $\varphi$  为最长轨矛盾  $\therefore$  得证.