P82.

16. 由题，$\forall v\in G$，有$d(v)=k$，现须证对$\forall S\subseteq G$，有$o(G-S)\le|S|$
设任一$S\subseteq G$，记$G-S$共K个奇分支，分别为$G_1,\cdots,G_k$，且S与G_i间的关联边数为m_i
对任一G_i，有$d(G_i)=2E(G_i)$ 而G_i在G中总度数为$2E(G_i)+m_i$ 又∵k正则 $\Rightarrow 2E(G_i)+m_i=kV(G_i)$
∴$m_i=kV(G_i)-2E(G_i)\Rightarrow m_i$与$k$同奇偶 ∵至少删$k-1$条边才能使$G$连通片增多 ∴$m_i\ge k-1$
∴有$o(G-S)=k=\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}k-1\le\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}m_i\le\frac{1}{k-1}\sum_{v\in S}d(v)=\frac{1}{k-1}\cdot(k-1)|S|=|S|$

由托特定理⇒得证。

17. 树T有完美匹配⇔对$\forall v\subseteq T$，有$o(T-v)=1$

必要性：T有完美匹配⇒对$\forall S\subseteq T$，有$o(T-S)\le|S|$ 于是取S为v，其中v为T的任一顶
∴$o(T-v)\le 1$ 又∵T的每一边均为桥 ∴$o(T-v)\ne 0\Rightarrow o(T-v)=1$ 得证。

充分性：∵$o(T-v)=1$ 又∵$w(T-v)\ge 2$ ∴$T-v$得到一个奇分支
令$e(v)=(u,v)$为v与奇分支关联的边，则$e(v)$关于v唯一确定；遍历$\forall v$，得匹配M；
① 证明M为匹配⇒即证选u和选v得到的e相同 ∵$T-v$得奇分支G_0，偶分支$G_1,\cdots,G_k$，
则$T-u$仍有$o(T-u)=1$⇒得一奇分支$\{v\cup G_1\cdots\cup G_k\}$且唯一 得证；

② 证明M为完美匹配⇒若$o(T-v)=1$，则$\forall v\in T$，有$d(v)$为奇数 ∴$|V(G)|$为偶
∴M中个数为$\frac{1}{2}|V(G)|$个，M为完美匹配

P112

2. 设$G=\langle X,Y,E\rangle$，其中$X=\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}$，$Y=\{y_0,\cdots,y_{m-1}\}$且$n>m$，将G扩充为Δ正则图G^*
由定理：G^*存在完美匹配⇒G^*可划分为Δ个不相交的边组合⇒为每一个组合染不同颜色
之后删去G^*扩充的边和点（边和G），则$\chi'(G)=\Delta$且染色完毕。

14. 证明：设$\chi(G)=k$，则$V(G)$可以划分为k个独立点集$V_1,\cdots,V_k$；记$|V_i|=k_i$
则有$d(G)=2\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}d(v)\le\sum_{i=1}^{k}k_i(V-k_i)=V^2-\sum_{i=1}^{n}k_i^2$

∵$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}k_i^2\ge(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}k_i)^2$ ∴$\sum_{i=1}^{n}k_i^2\ge\frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{k}k_i)^2=\frac{V^2}{k}$

∴$2\varepsilon\le V^2-\sum_{i=1}^{k}k_i^2\le V^2-\frac{V^2}{k}\Rightarrow\chi(G)=k\ge\frac{V^2}{V^2-2\varepsilon}$ 得证.

15. 证明：若$\chi(G)=k>5$；则设G的染色方案$\pi=\{\pi_1,\cdots,\pi_k\}$
取G中染π_1,π_2,π_3的点集的并集的导出子图G_1，则$\chi(G_1)=3$

15. 证明：若 $\chi(G)=k>5$；则设 G 的染色方案 $\pi=\{\pi_1,\cdots,\pi_k\}$

取 G 中染 π_1,π_2,π_3 的点集的并集的导出子图 G_1，则 $\chi(G_1)=3$

由定理 $\Rightarrow G_1$ 为奇圈

同样，取 π_4,π_5,π_6 的点集的并集的导出子图 G_2，则 G_2 为奇圈.

此时两奇圈 G_1,G_2 无公共顶点 $\Rightarrow$ 矛盾。