P24

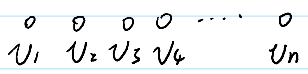
24.

K_n^c：含有n个顶点的无向完全图的补图

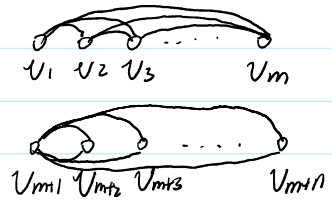
$K_{m,n}^c$：两个顶点集分别含有m和n个顶点的二部图的补图.

图示：

K_n^c：



$K_{m,n}^c$：



27. 设n阶零图为 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$ 其中 $V_1=\{v_1,\cdots,v_n\}$ $E_1=\emptyset$

$\because K_n=\langle V_2,E_2\rangle$，其中 $V_2=\{u_1,\cdots,u_n\}$，$E_2=\{e_1,\cdots,e_{\frac{n(n-1)}{2}}\}$

取 $G_2=\langle V_2,E_1\rangle$，则 G_2 为 K_n 的一子图.

现定义映射 $f: V_1\to V_2$ 则 $\forall (v_1,v_2)\in E_1$ 有 $(f(v_1),f(v_2))\in E_2$

且重数相同均为0 $\Rightarrow G_1$与G_2同构得证.

28. 设G_k为k阶完全图：

$k=1$时，$G_1=K_1=\langle V_1,E_1\rangle$ 其中 $V_1=\{v_1\}$，$E_1=\Phi$ 易证.

假设$k=n-1$时命题成立$\Rightarrow$对$G_k=K_{n-1}=\langle V_{n-1},E_{n-1}\rangle$，其以任何顶点集导出的子图仍为完全图

现令$k=n\Rightarrow G_n=K_n$为完全图，不妨令$G_n=\langle V_n,E_n\rangle$，其中 $V_n=\{V_{n-1},v_n\}$，

$E_n=\{E_{n-1},e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}$，　$e_1,\cdots,e_{n-1}$分别为v_n与V_{n-1}中所有定点之间的边，

现考虑G_n的任一顶点集导出的子图：记导出的子图为$G'=\langle V',E'\rangle$

① 若$v_n\notin V'$，由假设，已得证.

② 若$v_n\in V'$，则 $V'=\{V'-v_n, v_n\}$，对于加入v_n的部分，根据子图定义，

有 $e_i=v_iv_n\in E'$，其中 $v_i\in\{V'-v_n\}$ 因此得证.

综上，G'为完全图 ∴由数学归纳法，原命题得证.

29. 记二分图为 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 记其子图为G'

假设G'不是二分图，则有 $G'=\langle V_3,E'\rangle$，对于将V_3分为两个顶点集 V_{31},V_{32}

的所有分法，均有 $e^*=v_iv_j\in E'$ s.t. $v_i,v_j\in V_{31}$ 或 $v_i,v_j\in V_{32}$.

而对V_3，恒有一种分法 $V_3=\{V_{41},V_{42}\}$ s.t. $V_{41}\subseteq V_1$，$V_{42}\subseteq V_2$，

此时因为G为二分图，必不存在上述的e^*，与假设矛盾，原命题得证.

而对V_3，恒有一种分法$V_3=\{V_{41},V_{42}\}$ s.t. $V_{41}\subseteq V_1$，$V_{42}\subseteq V_2$，
此时因为G为二分图，必不存在上述的e^*，与假设矛盾，原命题得证。