Chương 3

PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ

Nội dung:

Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ

3.1 Biến đổi Fourier

3.1.1 Định nghĩa

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$ (Biến đổi thuận)

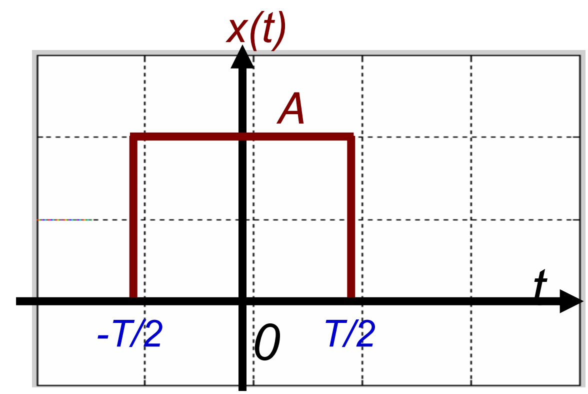
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$ (Biến đổi ngược)

- X(ω) được gọi là phổ của tín hiệu x(t). Ký hiệu: $\boxed{x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)}$
- Tổng quát, phổ X(ω) là một hàm phức→Phân tích thành các phổ thành phần

$$\boxed{X(\omega) = \underbrace{|X(\omega)|}_{\text{Phổ biên độ}} e^{\overbrace{j\varphi(\omega)}^{\text{Phổ pha}}}}$$

$$\boxed{X(\omega) = \underbrace{P(\omega)}_{\text{Phổ thực}} + j\underbrace{Q(\omega)}_{\text{Phổ ảo}}}$$

VD1: Hãy xác định và vẽ phổ của tín hiệu x(t)



Áp dụng công thức biến đổi Fourier:

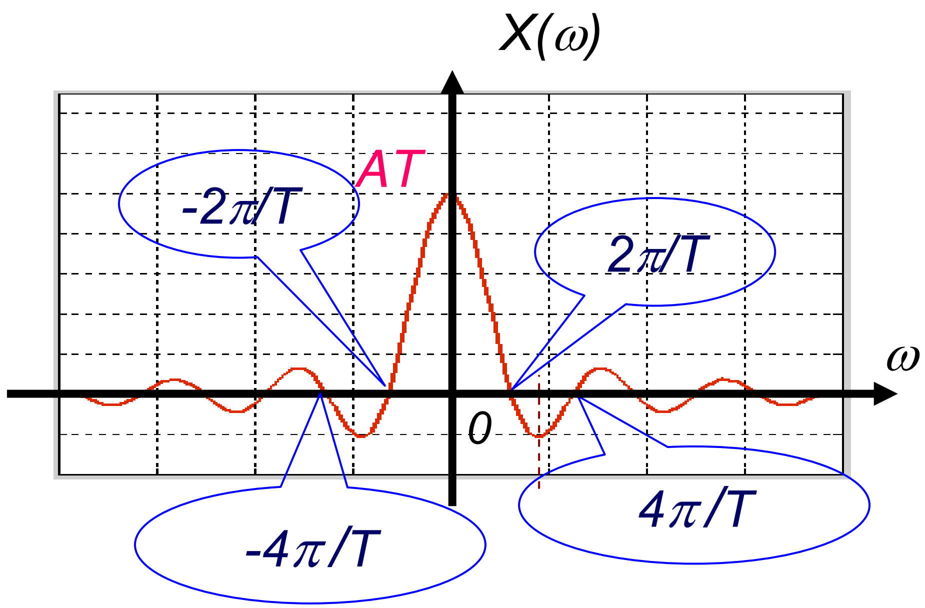
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} A.e^{-j\omega t}dt = A.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= AT.\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$$

$$= ATSa\frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow |X(\omega)| = AT\left|Sa\frac{\omega T}{2}\right|$$



??? Vẽ phổ biên độ và phổ pha

3.1.2 Tính chất

a. Tính chất chẵn lẻ:

- ❖ **Nếu x(t) là hàm thực :** **phổ biên độ** $|X(\omega)|$: **hàm chẵn**
  phổ pha $\varphi(\omega)$: **hàm lẻ**
  phổ thực $Q(\omega)$: **hàm chẵn**
  phổ ảo $P(\omega)$: **hàm lẻ**
- ❖ **Quan hệ:**

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\omega); \\ x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega) \\ x^*(-t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega) \end{cases}$$

VD2:

$$x(t) = e^{-\alpha t}1(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$\Rightarrow x(-t) = e^{\alpha t}1(-t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

3.1.2 Tính chất (tt)

b. Tính chất tuyến tính:

Nếu $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega);\ x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

thì $\boxed{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{F} a_1 X(\omega) + a_2 X_2(\omega), \forall a_1, a_2}$

Ví dụ 3: Xác định phổ của tín hiệu sau: $x(t) = 3e^{-|t|} - 2e^{-3|t|}$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \,\&\, a_2 = 2 \\ x_1(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \\ x_2(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) = \dfrac{6}{9+\omega^2} \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \frac{6}{1+\omega^2} - \frac{12}{9+\omega^2}$$

3.1.2 Tính chất (tt)

c. Tính chất đối ngẫu:

$$\boxed{x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)}$$

d. Tính chất thay đổi thang đo:

$$\boxed{x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(\frac{t}{a}) \leftrightarrow |a| X(a\omega); a \neq 0;}$$

Ví dụ 4:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa(\frac{\omega T}{2})$$

$$\Rightarrow \prod\left(\frac{3t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{3}Sa(\frac{\omega T}{6}); a = 1/3$$

$$\Rightarrow \prod\left(\frac{t}{3T}\right) \leftrightarrow 3TSa(\frac{3\omega T}{2}); a = 3.$$

3.1.2 Tính chất (tt)

e. Tính chất dịch chuyển trong miền thời gian:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

f. Tính chất dịch chuyển trong miền tần số:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0) \\ x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega+\omega_0) \end{cases}$$

→ Tính chất điều chế

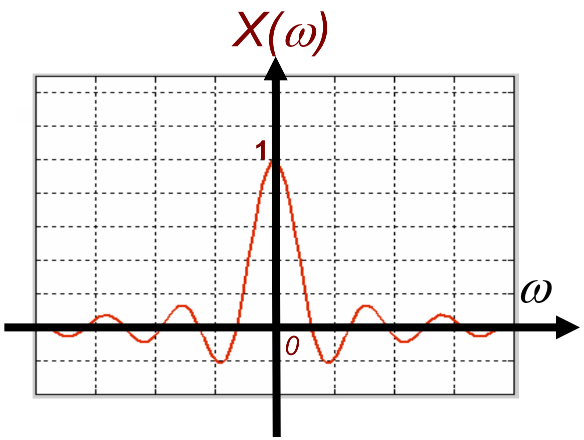
$$x(t)\cos(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_o)+X(\omega+\omega_o)\right]$$

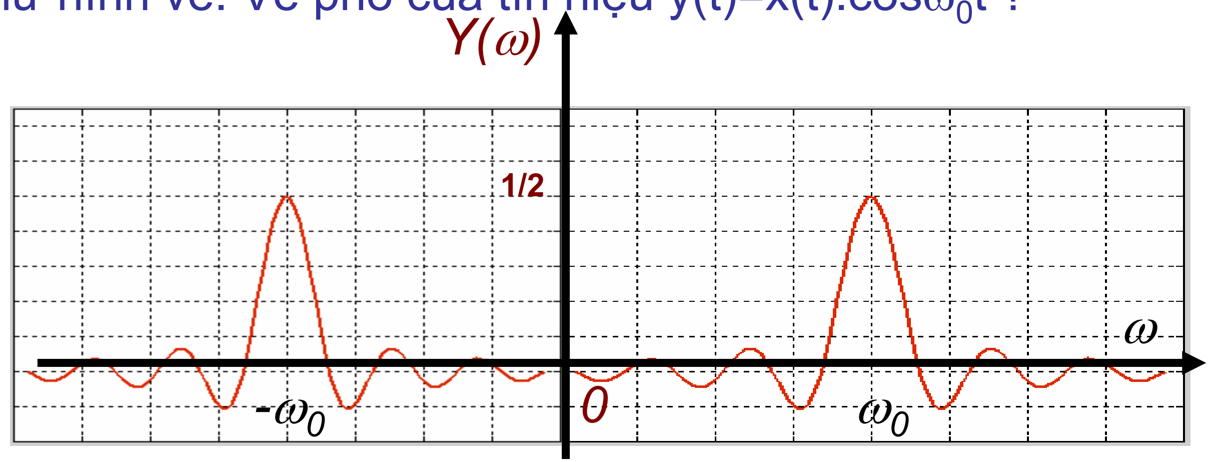
$$x(t)\sin(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[X(\omega-\omega_o)-X(\omega+\omega_o)\right]$$

Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

3.1.2 Tính chất (tt)

Ví dụ 5: Cho x(t) có phổ như hình vẽ. Vẽ phổ của tín hiệu $y(t)=x(t).\cos\omega_0 t$?





g. Tính chất tích chập:

$$\begin{cases} x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \\ x(t)y(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}[X(\omega) * Y(\omega)] \end{cases}$$

Ký hiệu tích chập

***** Định nghĩa tích chập:**

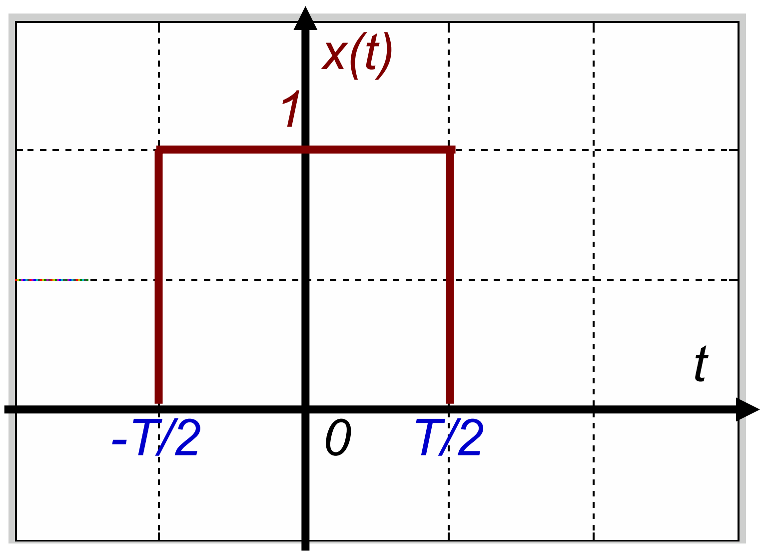
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,y(t-t')\,dt'$$

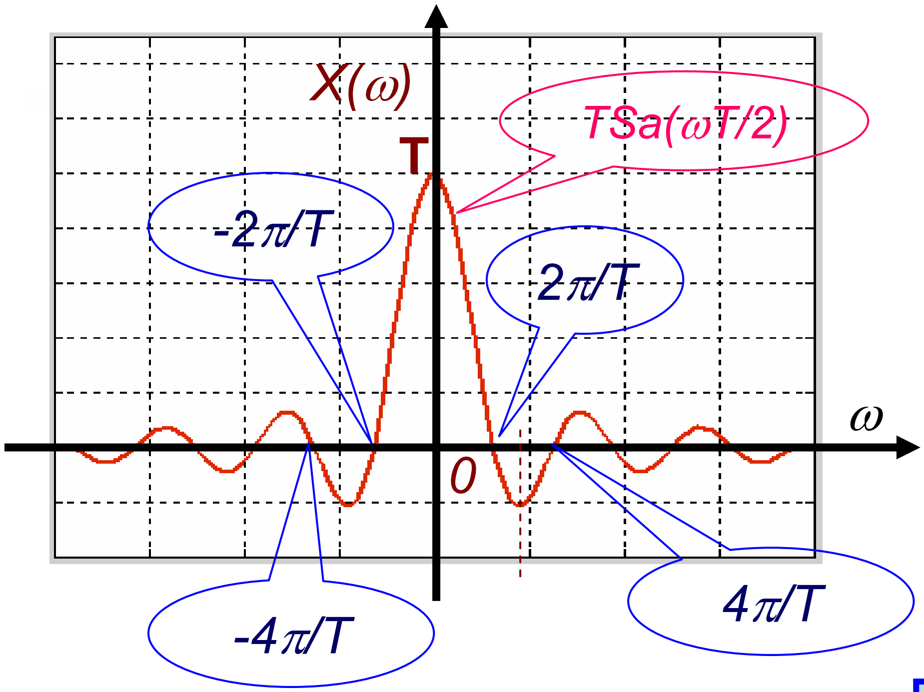
3.2 Phổ của một số tín hiệu thông dụng:

3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng:

a. Xung vuông:

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

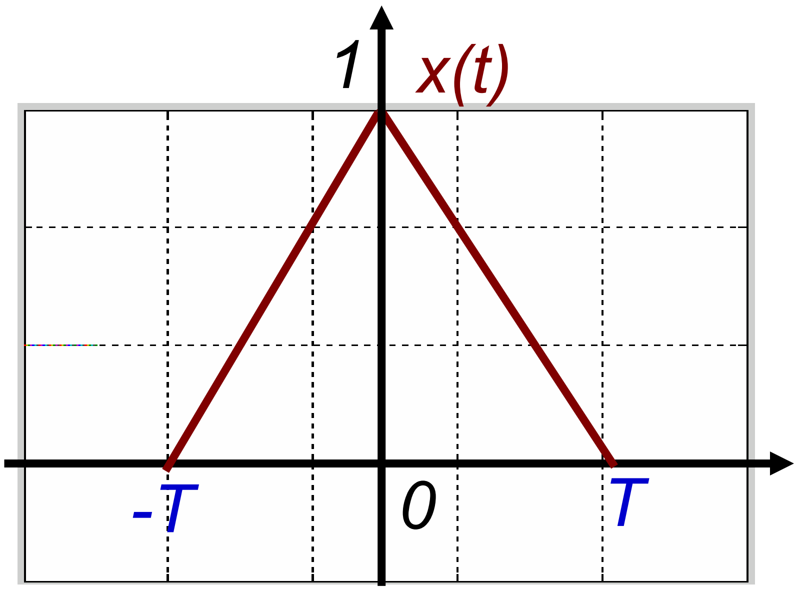


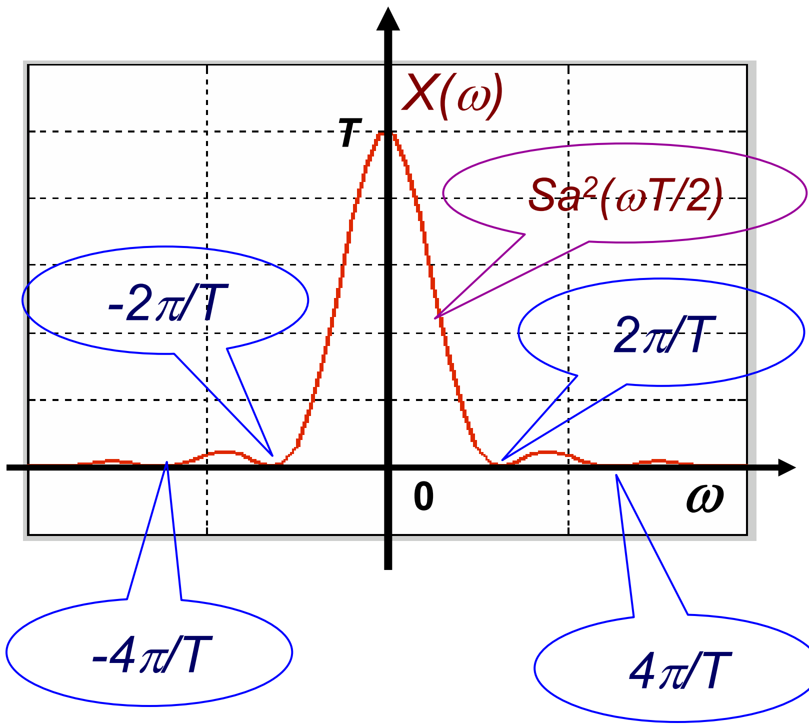


3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng (tt):

b. Xung tam giác:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



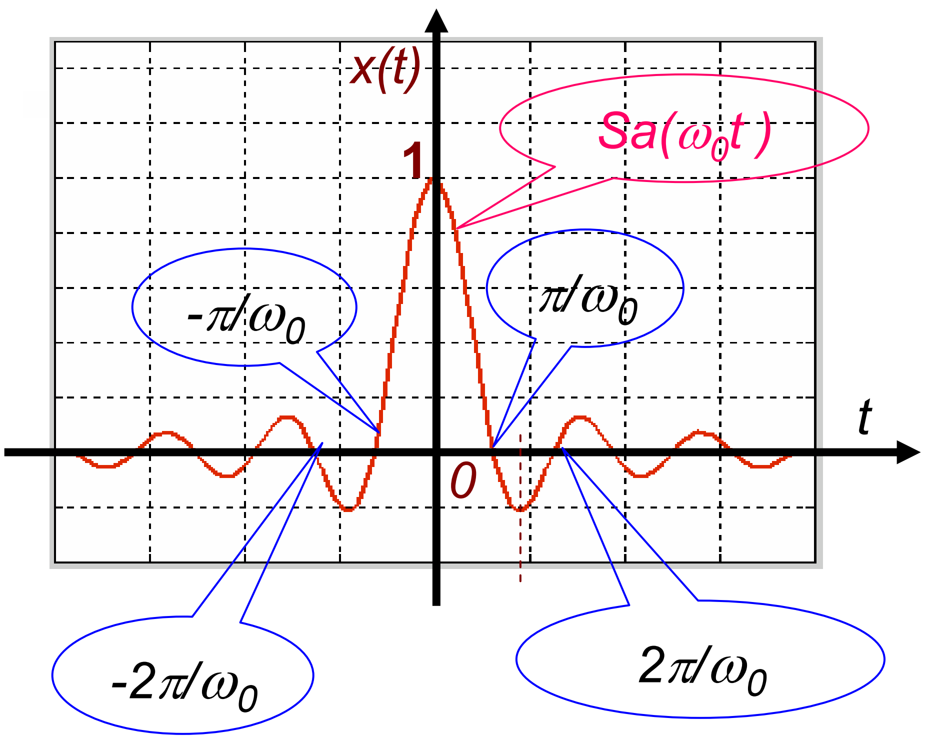


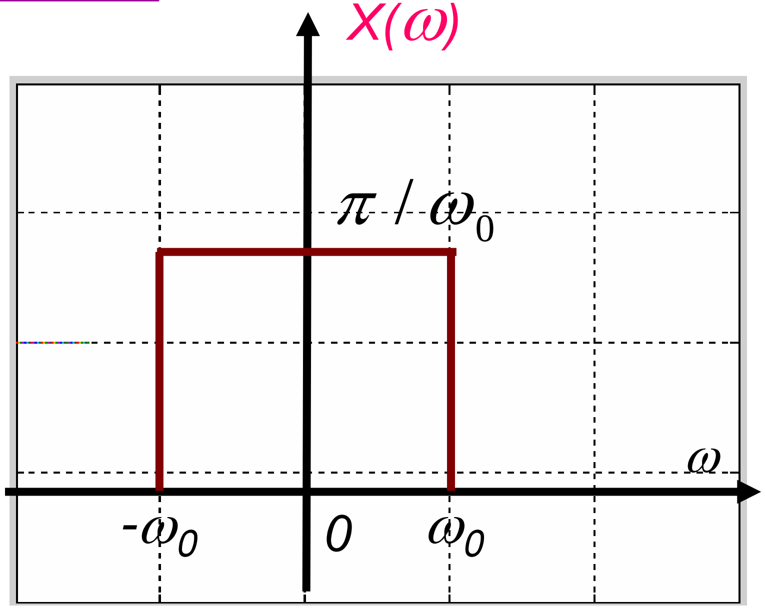
Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng (tt):

c. Hàm Sa:

$$Sa(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$



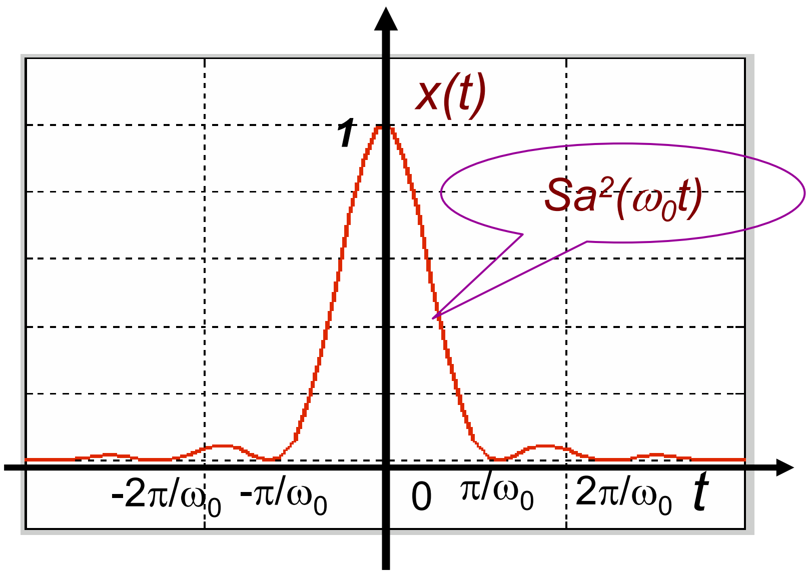


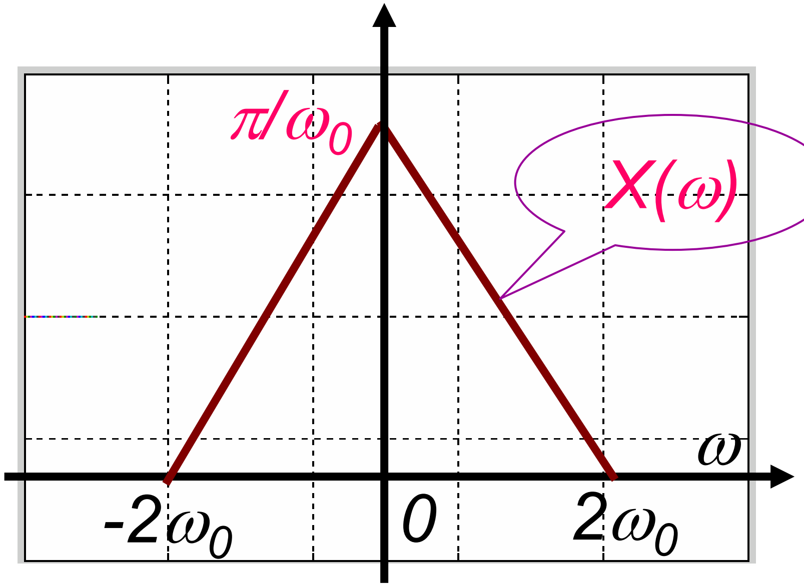
Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng (tt):

d. Hàm Sa²:

$$Sa^2(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$





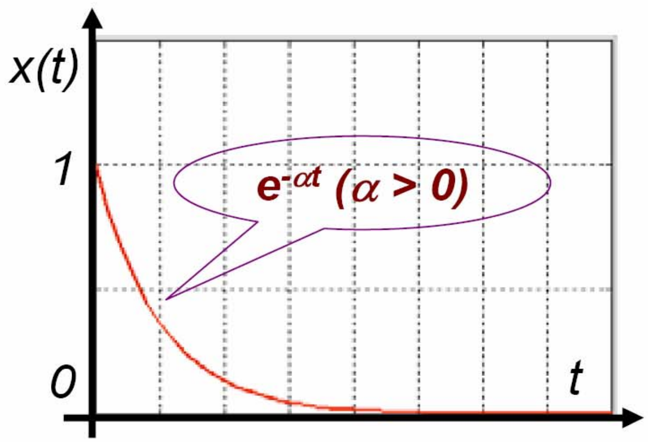
3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng (tt):

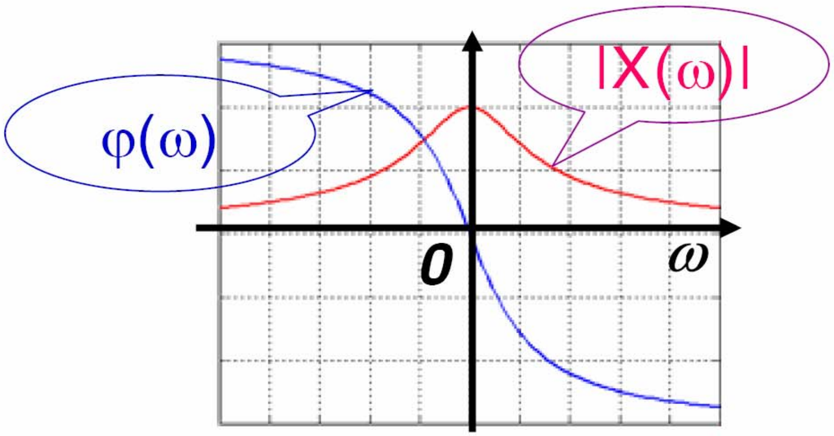
e. Hàm mũ:

$$\boxed{e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}, \alpha > 0}$$

Hàm x(t) không chẵn → phổ X(ω) hàm phức

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \ \varphi(\omega) = -arctg\frac{\omega}{\alpha}$$

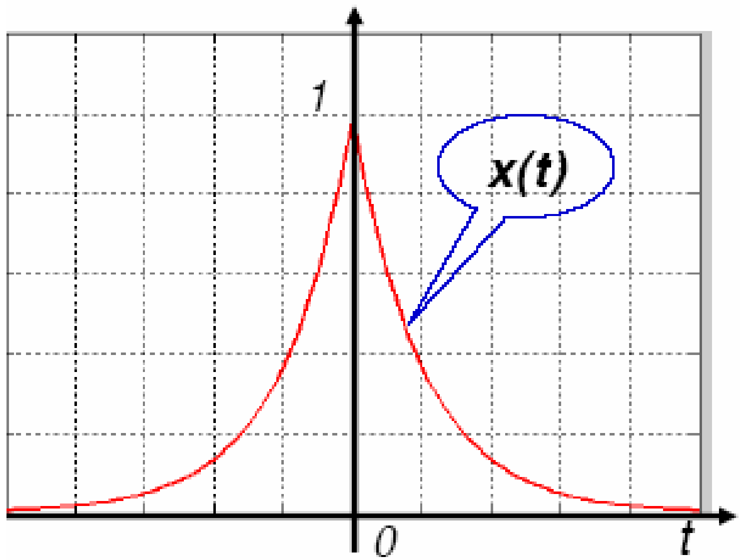


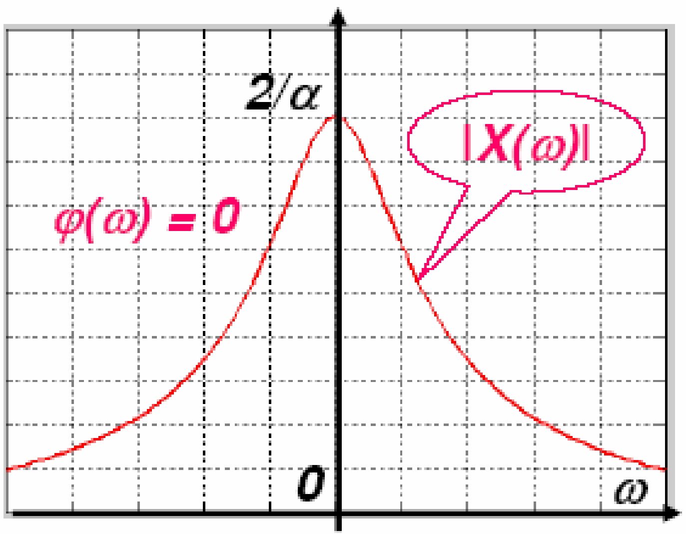


3.2.1 Phổ của tín hiệu năng lượng (tt):

f. Hàm $e^{-\alpha|t|}$:

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$



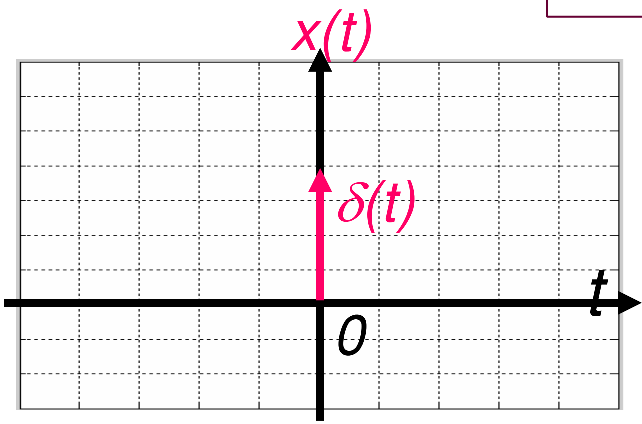


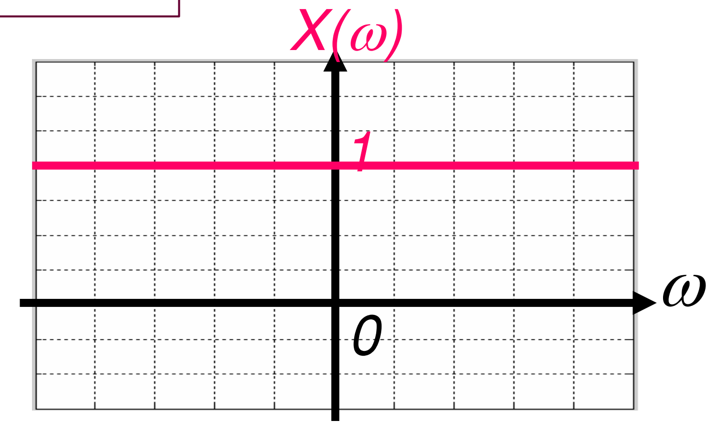
Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

3.2.2 Phổ của tín hiệu công suất trung bình hữu hạn:

a. Hàm $\delta(t)$:

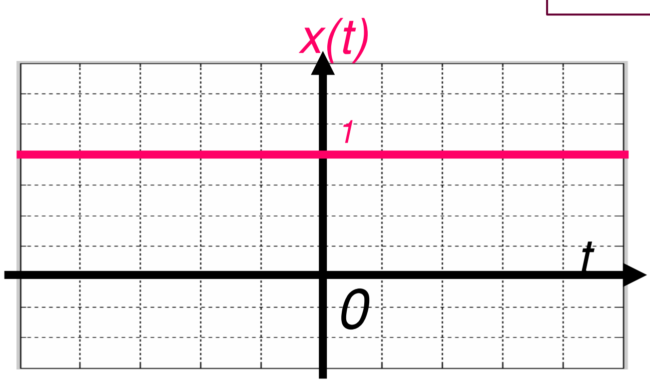
$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

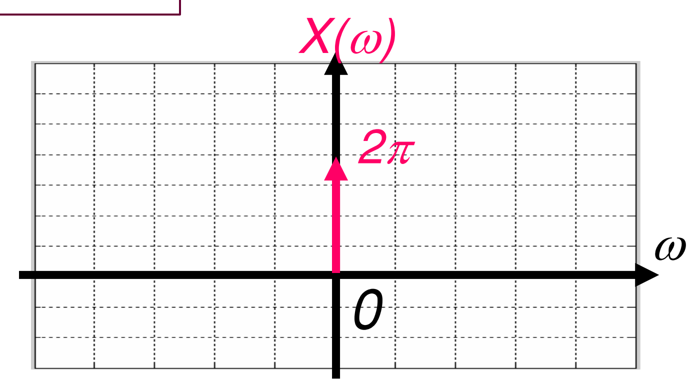




b. Hàm x(t)=1:

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

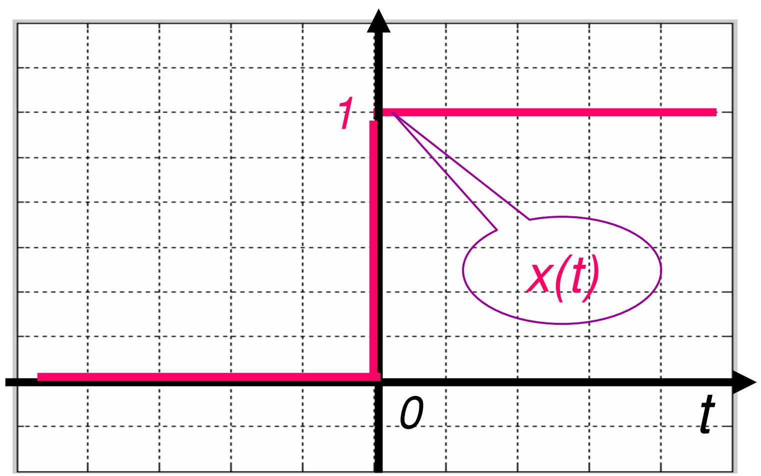


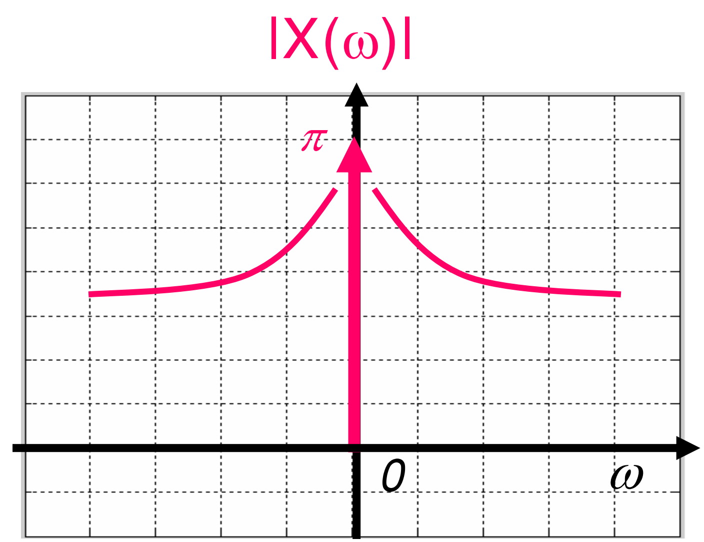


3.2.2 Phổ của tín hiệu công suất trung bình hữu hạn:

a. Hàm u(t):

$$\boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$





3.2.2 Phổ của tín hiệu công suất trung bình hữu hạn (tt):

d. Hàm $e^{j\omega 0t}$:

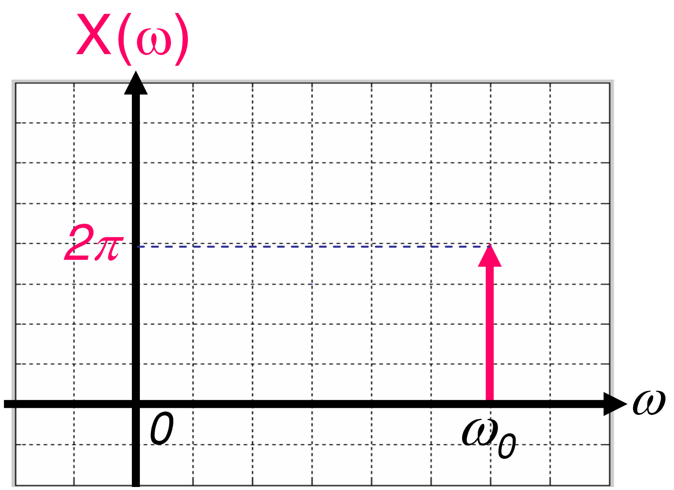
$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi(\omega - \omega_0)}$$

Chứng minh:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow 1 \times e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

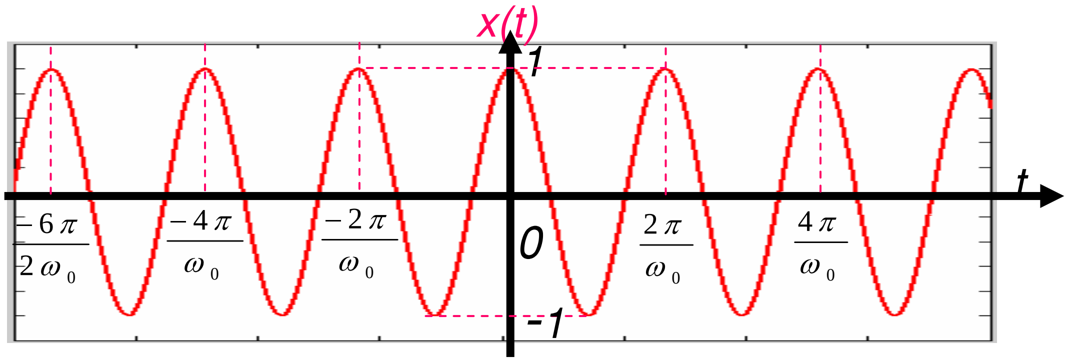
Tính chất dịch trong miền tần số

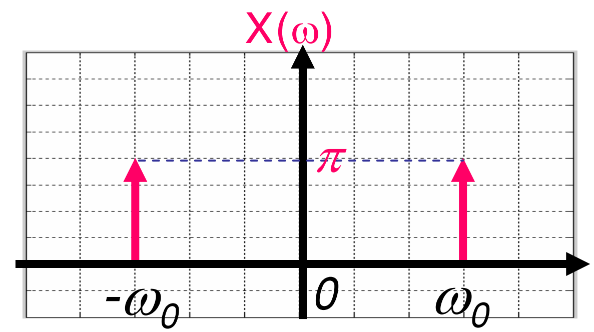


Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

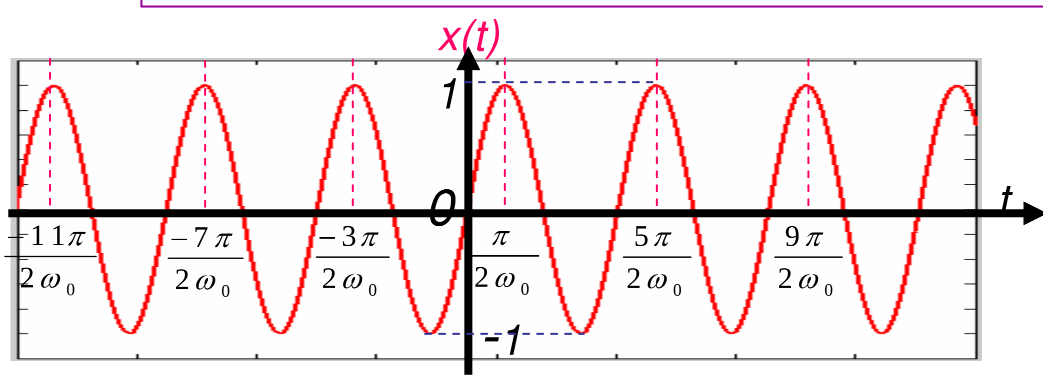
d. Hàm $e^{j\omega 0t}$ (tt):

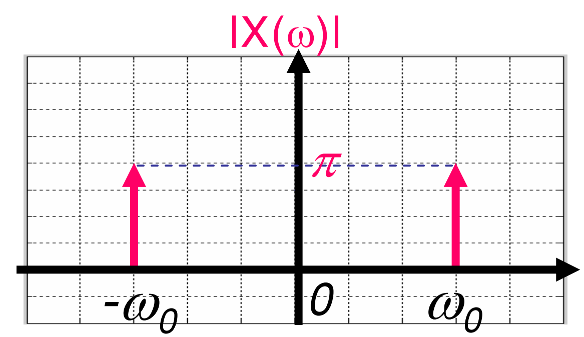
$$Cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\}$$





$$Sin(\omega_0 t) \leftrightarrow -j\pi\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\}$$





3.2.3 Phổ của tín hiệu tuần hoàn:

Cho x(t) là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T.

Dùng khai triển Fourier dạng phức:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (*)$$

trong đó:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (**)$$

3.2.3 Phổ của tín hiệu tuần hoàn (tt):

- *Phổ của tín hiệu tuần hoàn có dạng:*

$$\boxed{X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)}$$

***Chứng minh**: Áp dụng công thức:* $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi(\omega - \omega_0)$ *cho biểu thức (*) ở trên.*

- *Cách xác định hệ số X_n:*
  - *Cách 1: sử dụng công thức (**)*
  - *Cách 2: i. Xét tín hiệu $x_T(t)$ trong một chu kỳ T, t€[t_0,t_0+T].*

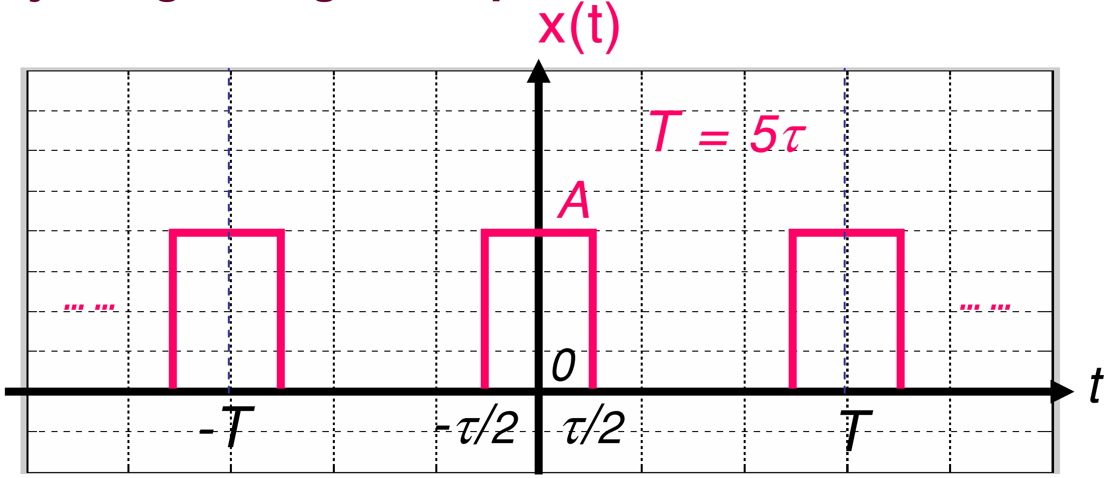
    ii. Xác định $X_T(\omega)$ dùng biến đổi Fourier cho $x_T(t)$.

    iii. $X_n = X_T(n\omega_0)/T$.

Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

3.2.3 Phổ của tín hiệu tuần hoàn (tt):

a. Phổ của dãy xung vuông đơn cực:



- Vì x(t) là tín hiệu tuần hoàn, nên phổ có dạng:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

- Xác định hệ số phổ X_n:

a. Phổ của dãy xung vuông đơn cực (tt):

- **Cách 1: sử dụng công thức (**)**

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= A\frac{\tau}{T}San\omega_0\frac{\tau}{2} = A\frac{\tau}{T}San\pi\frac{\tau}{T}$$

- **Cách 2:**

$$Ta\,có: x_T(t) = A\prod\left(\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow X_T(\omega) = A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T} = \frac{A\tau Sa(\frac{n\omega_0\tau}{2})}{T}$$

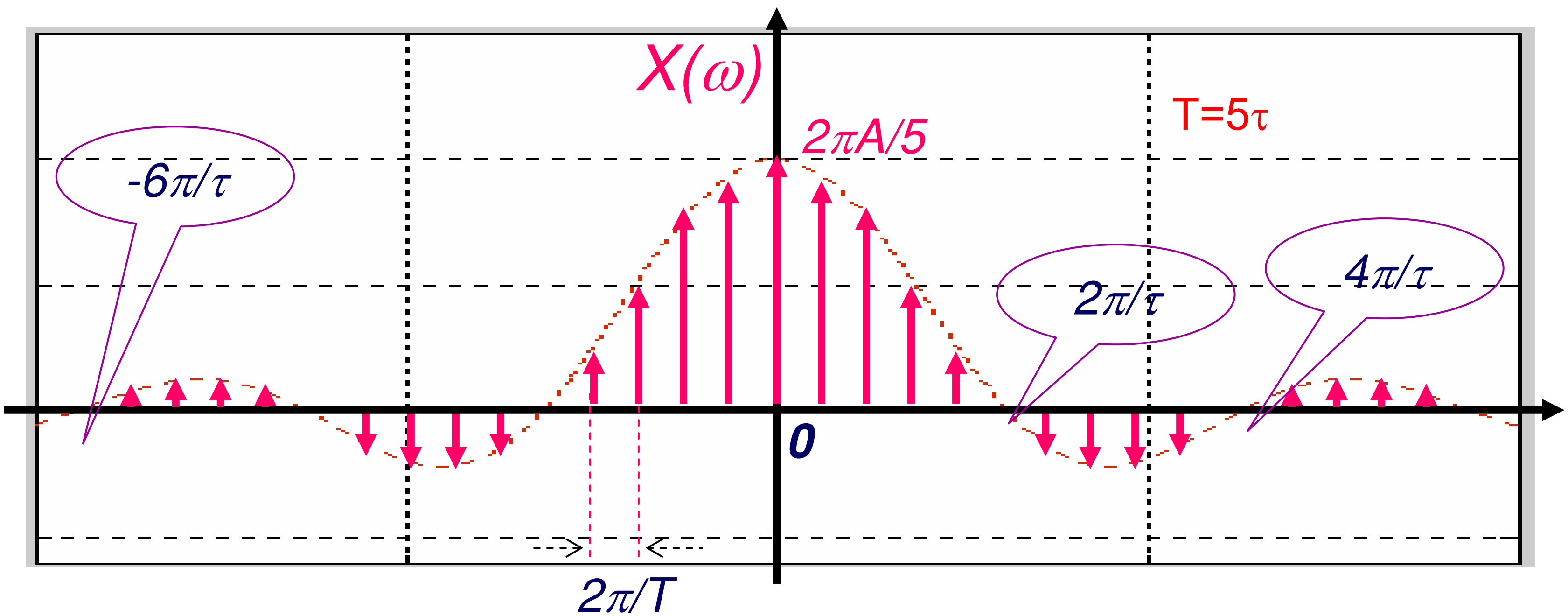
$$= \frac{A\tau}{T}Sa(\frac{n2\pi\tau}{2T}) = A\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})$$

Chương 3 PHÂN TÍCH TÍN HIỆU MIỀN TẦN SỐ (tt)

a. Phổ của dãy xung vuông đơn cực (tt):

❖ *Suy ra, biểu thức phổ:*

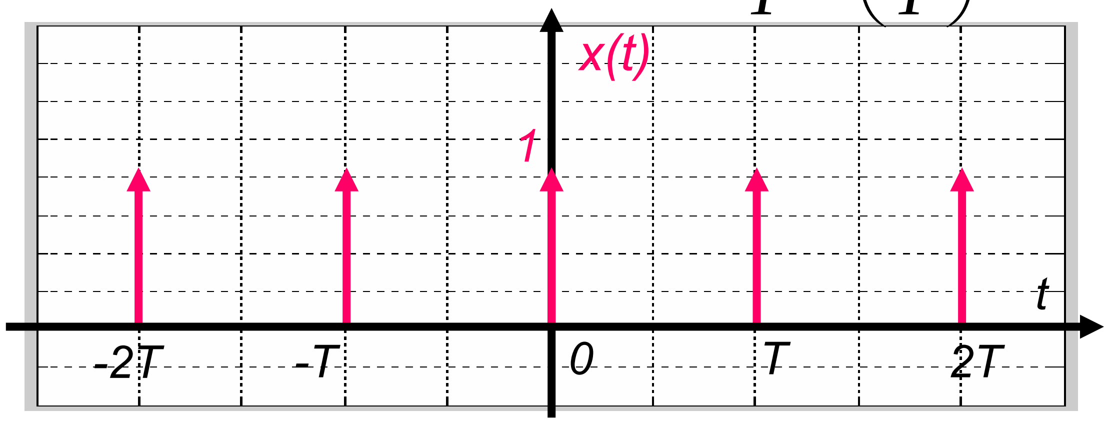
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\frac{\tau}{T} Sa(n\pi\frac{\tau}{T})\delta(\omega - n\omega_0)$$



3.2.3 Phổ của tín hiệu tuần hoàn (tt):

b. Phổ của phân bố lược:

$$x(t) = \frac{1}{T} \text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)$$



- *Vì x(t) là tín hiệu tuần hoàn, nên phổ có dạng:*

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

- *Xác định hệ số phổ X_n:*

b. Phổ của phân bố lược (tt):

❖ **Cách 1: sử dụng công thức (**)**

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T}\text{III}\left(\frac{t}{T}\right)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}$$

❖ **Cách 2:**

$$Ta\,có: x_T(t) = \delta(t) \Rightarrow X_T(\omega) = 1$$

$$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T} = \frac{1}{T}$$

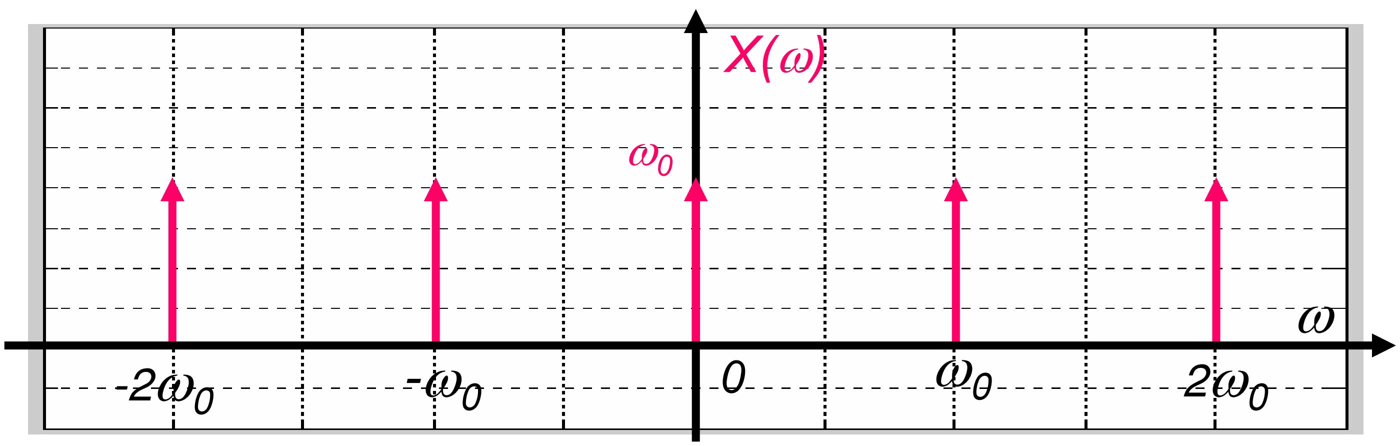
b. Phổ của phân bố lược (tt):

❖ **Suy ra, biểu thức phổ:**

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

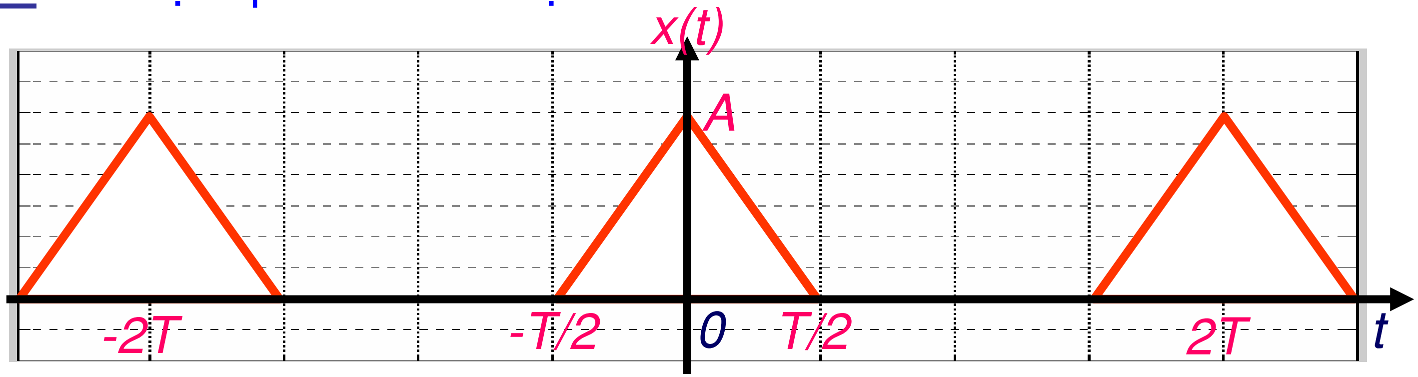
Như vậy:

$$\boxed{\frac{1}{T} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \text{III}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$



3.2.3 Phổ của tín hiệu tuần hoàn (tt):

Ví dụ 6: Xác định phổ của tín hiệu tuần hoàn sau:



Hướng dẫn:

$$x_T(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{T/2}\right)$$

$$\Rightarrow X_T(\omega) = \frac{AT}{2} Sa^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

$$\Rightarrow X_n = \frac{\frac{AT}{2} Sa^2\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right)}{2T} = \frac{A}{4} Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{\pi A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\delta(\omega - n\omega_0)$$

3.3 Mật độ phổ:

3.3.1 Mật độ phổ năng lượng ESD (Energy Spectrum Density)

- *Đặc trưng cho phân bố năng lượng tín hiệu trong miền tần số*

$$\boxed{\Phi(\omega) = \left|X(\omega)\right|^2}$$

- *Quan hệ giữa ESD và hàm tự tương quan:*

$$\boxed{\varphi(\tau) \xleftrightarrow{F} \Phi(\omega)}$$

,nghĩa là:

$$\begin{cases} \Phi(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \varphi(\tau) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

- *Định lý Parseval về năng lượng:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega}$$

3.3.1 Mật độ phổ năng lượng ESD (tt)

➢ *Các cách tính năng lượng của một tín hiệu:*

- *Từ định nghĩa:*

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

- *Từ hàm tự tương quan:*

$$\boxed{E_x = \varphi(0)}$$

- *Từ định lý Parseval :*

$$\boxed{E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega}$$

3.3.1 Mật độ phổ năng lượng ESD (tt)

Ví dụ 7: Cho tín hiệu sau. Hãy xác định $\Phi(\omega)$ và E_x ?

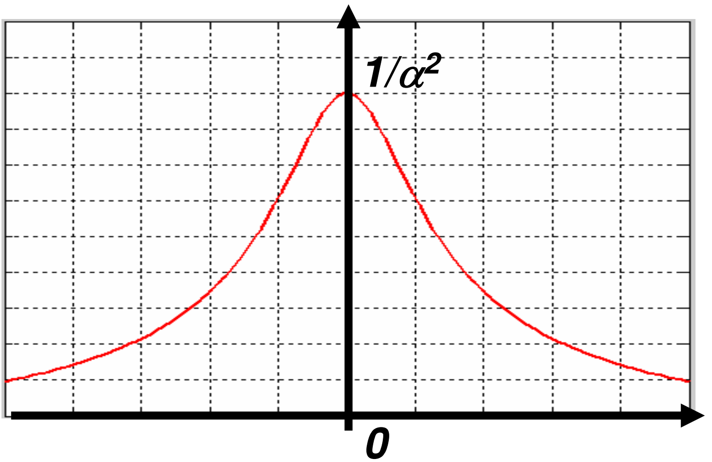
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$\Phi(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{\alpha + j\omega}\right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

- Tính năng lượng:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}d\omega = \frac{1}{2\alpha}$$



??? Cách khác

3.3 Mật độ phổ:

3.3.2 Mật độ phổ công suất PSD (Power Spectrum Density)

➢ *Đặc trưng cho phân bố công suất tín hiệu trong miền tần số*

$$\Psi(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{\Phi_T(\omega)}{T}$$

,trong đó:

$$\begin{cases} x_T(t) = x(t)\prod\left(\dfrac{t}{T}\right) \\ \Phi_T(\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} x_T(t) \end{cases}$$

➢ *Quan hệ giữa PSD và hàm tự tương quan:*

$$\varphi(\tau) \xleftrightarrow{F} \Psi(\omega)$$

➢ *Định lý Parseval về công suất:*

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega$$

3.3.2 Mật độ phổ công suất PSD (tt)

➢ *Các cách tính công suất của một tín hiệu:*

❖ *Từ định nghĩa:*

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt$$

❖ *Từ hàm tự tương quan:*

$$P_x = \varphi(0)$$

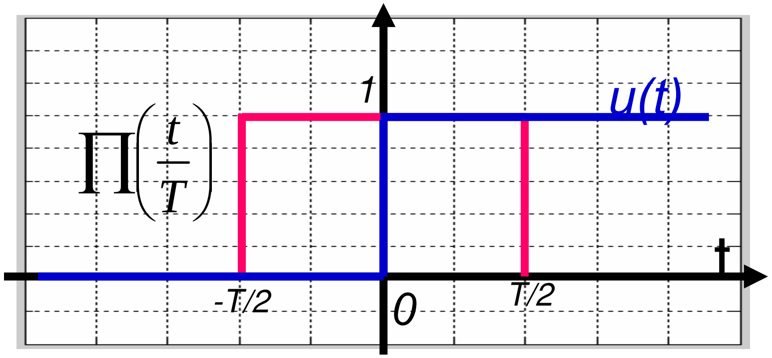
❖ *Từ định lý Parseval :*

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega$$

3.3.2 Mật độ phổ công suất PSD (tt)

Ví dụ 8: Cho tín hiệu sau. Hãy xác định PSD và P_x ?

- $$x_T(t) = u(t)\prod\left(\frac{t}{T}\right) = \prod\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right)$$



$$\Rightarrow X_T(\omega) = \frac{T}{2} Sa\left(\frac{\omega T}{4}\right) e^{-j\omega T/4}$$

- $$\Phi_T(\omega) = \left|X(\omega)\right|^2 = \frac{T^2}{4} Sa^2 \frac{\omega T}{4}$$

- $$\Psi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\Phi_T(\omega)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{4} Sa^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \pi\delta(\omega)$$

- *Tính công suất:*

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega) d\omega = \frac{1}{2}$$

3.3.3 Mật độ phổ công suất của tín hiệu tuần hoàn:

➢ Phổ của tín hiệu tuần hoàn:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

→ PSD của nó có dạng:

$$\Psi(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|X_n\right|^2 \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

➢ Định lý Parseval đối với tín hiệu tuần hoàn:

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$

➢ Cách tính công suất P_x: (tương tự phần 3.3.2)

3.3.3 Mật độ phổ công suất của tín hiệu tuần hoàn (tt)

Ví dụ 9: Cho tín hiệu sau x(t)=cosω_0t. Hãy xác định PSD và P_x ?

$$X(\omega) = A\left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$= 2\pi\left[\frac{A}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A}{2}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\Rightarrow \Psi(\omega) = 2\pi\left[\frac{A^2}{4}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A^2}{4}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

- *Tính công suất:*

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi_n = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

hoặc:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2\omega_0 t dt = \frac{A^2}{2}$$