Chương II: KỸ THUẬT ĐẾM

Các bài toán đếm các phần tử xuất hiện trong toán học, trong tin học.

Ví dụ:

- Mật khẩu máy tính gồm 6 ký tự. Mỗi ký tự có thể là chữ cái, hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. Nguyên lý Cộng

Giả sử có hai công việc, việc 1 có thể làm bằng n_1 cách, việc 2 bằng n_2 cách và hai việc này không thể làm đồng thời, khi có n_1+n_2 cách làm một trong hai việc đó.

Ví dụ 1:

Cần chọn một đại biểu tham dự một hội nghị có thể là một cán bộ của Khoa, hoặc là một sinh viên của Khoa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khoa có 50 cán bộ và 2000 sinh viên?

Giải:

Cách 1: chọn một cán bộ của khoa: có 50 cách chọn

Cách 2: chọn một sinh viên của khoa: 2000 cách chọn

Theo quy tắc cộng sẽ có 50+2000= 2050 cách chọn

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. Nguyên lý Cộng

Mở rộng quy tắc cộng:

Giả sử có các việc T_1, T_2, T_3... T_m có thể làm tương ứng n_1, n_2, n_3,...n_m cách và giả sử *không thể làm hai việc đồng thời*. Khi đó số cách để làm 1 trong m việc đó là $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m$.

Ví dụ 2:

Có 23 cái kẹo lạc, 15 cái kẹo vừng, 19 cái kẹo sữa.

Số cách lấy 1 cái kẹo nào đó: 23+15+19=57 cách.

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. Nguyên lý Cộng

Ví dụ 3: Cho biết giá trị của biến k sau khi đoạn chương trình sau kết thúc?

```
k:=0;
For i1 :=1 to n1 do    k:=k+1;
For i2 :=1 to n2 do    k:=k+1;
For i3 :=1 to n3 do    k:=k+1;
```

Khởi tạo k=0.

Ở mỗi bước lặp của vòng lặp k=k+1 (k tăng lên 1)

Gọi T_i là số việc thực hiện vòng lặp i → $T_i = n_i$ (vì có n_i bước lặp).

Do các vòng lặp không thực hiện đồng thời suy ra giá trị k bằng số cách thực hiện 1 trong số tổng các T_i tức là $k=n_1+n_2+n_3$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. Nguyên lý Cộng

Phát biểu với ngôn ngữ tập hợp: Cho $A_1, A_2, \ldots A_m$ là các tập rời nhau. Số cách chọn 1 phần tử nào đó trong m tập hợp đã cho bằng $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Nguyên lý Nhân

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách thành 2 công việc.

Công việc 1 có thể làm bằng n_1 cách.

Công việc 2 có thể được làm bằng n_2 cách sau khi công việc 1 đã được hoàn thành.

Khi đó sẽ có n_1*n_2 cách thực hiện nhiệm vụ.

Ví dụ 1: Cần ghi nhãn cho các hàng ghế bằng một chữ cái in hoa và một số nguyên dương không quá 100. Hỏi có bao nhiêu ghế được gán nhãn?

Việc 1 gán một trong 26 chữ cái

Việc 2 gán một trong 100 số nguyên dương, được làm sau khi đã thực hiện việc 1

Theo quy tắc nhân số ghế được gán nhãn: 26.100=2600

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Nguyên lý Nhân

Mở rộng:

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được thi hành bằng cách thực hiện lần lượt các việc T_1, T_2,...T_m, Nếu việc T_i được làm bằng n_i cách sau khi các việc T_1, T_2,...T_{i-1} đã được làm.

Khi đó có $n_1*n_2*\ldots*n_m$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

Ví dụ 2: Bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7 bit?

Mỗi bít có thể được chọn bằng 2 cách hoặc 0 hoặc 1
Theo quy tắc nhân mở rộng số xâu nhị phân sẽ là 2.2.2.2.2.2.2= 2^7 cách

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Nguyên lý Nhân

Ví dụ 3: Giá trị của biến k sau khi thực hiện đoạn chương trình sau ?

```
K:=0;
For i1 :=1 to n1 do
    For i2 :=1 to n2  do
        For i3 :=1 to n3 do    k:=k+1;
```

Mỗi khi thực hiện 1 lệnh thì giá trị k được tăng lên 1.

Vòng lặp i_3 thực hiện đầu tiên. Sau khi hoàn thành thì vòng lặp i_2 thực hiện 1 lần lặp. Sau khi vòng lặp i_2 hoàn thành thì vòng lặp i_1 thực hiện 1 lần lặp.

Theo quy tắc nhân vòng lặp kép được duyệt qua n_3, n_2, n_1 lần

Vậy $k=n_1.n_2.n_3$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Nguyên lý Nhân

Phát biểu dưới ngôn ngữ tập hợp

Cho A_1, A_2...A_m là các tập hợp. Số phần tử của tích đề các của tập hợp này bằng tích số các phần tử của mọi tập hợp thành phần

$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1|.|A_2|...|A_m|$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

2. Nguyên lý Nhân

Ví dụ 4: Một mật khẩu có 6 ký tự, các ký tự có thể là chữ cái, chữ số, biết trong đó phải có cả chữ cái và chữ số. Hỏi có thể tạo được tất cả bao nhiêu mật khẩu?

Hướng dẫn:

Vì có 52 chữ cái (thường và hoa), 10 chữ số, nên Số xâu có 6 ký tự chứa chữ cái và chữ số là 62^6 = **56.800.235.584**

Số xâu 6 ký tự chỉ chứa chữ cái là 52^6**: 19.700.609.664**

Số xâu 6 ký tự chỉ chứa chữ số là 10^6**: 10.000.000**

Vậy số xâu có 6 ký tự chứa cả chữ cái và chứa chữ số:

$62^6 – 52^6 – 10^6$ **= 37.019.625.920**

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

Nhiều bài toán đếm phức tạp không thể giải được nếu chỉ sử dụng quy tắc cộng hoặc nhân, nhưng ta có thể giải được nếu sử dụng cả hai quy tắc.

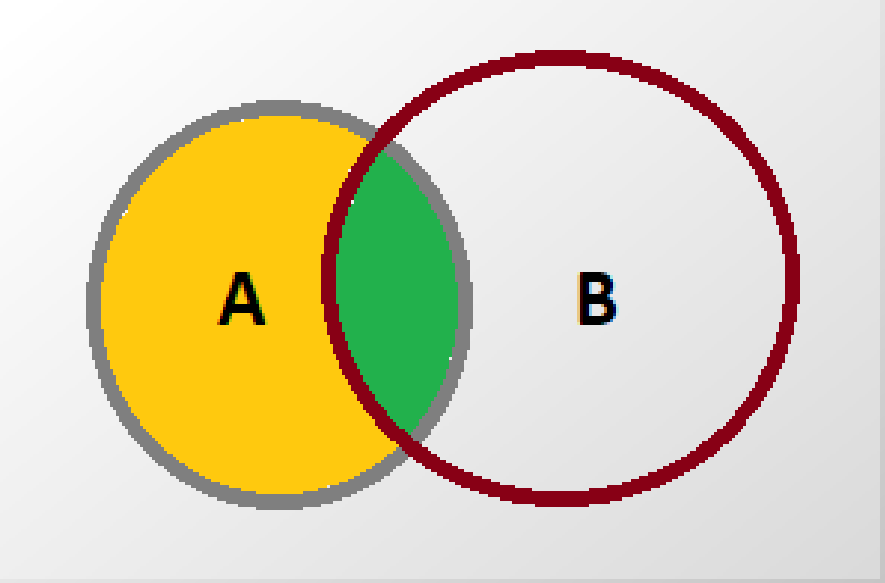
Khi hai công việc có thể được làm đồng thời chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai công việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính 2 lần.

Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta <u>cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời hai việc.</u>

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

Hình ảnh tập hợp: các phần tử của A∪B sẽ thuộc A hoặc B, trong đó phần giao bị tính 2 lần



Do đó: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

Ví dụ 1: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 8 bit hoặc bắt đầu bằng 1 hoặc kết thúc bằng 00?

Hướng dẫn:

Gọi A là những xâu nhị phân có dạng 1xxxxxxx

Và B là những xâu nhị phân có dạng xxxxxx00

Khi đó những xâu bắt đầu bằng 1 hoặc kết thúc bằng 00 là $A \cup B$

$A \cap B$ sẽ là những xâu có dạng:1xxxxx00

Ta có: $|A|=2^7=128$; $|B|=2^6=64$ và $|A \cap B|=2^5=32$ xâu.

Vậy $|A \cup B|=128+64-32=160$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

<u>Tổng quát</u>:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = (|A|+|B|+|C|) - (|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

…..

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap Aj| + \Sigma|A_i \cap Aj \cap Ak| - \cdots + (-1)^{n-1} \cap Ai$$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

Ví dụ 2 : Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 10000 mà số đó không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3,5,7?

Hướng dẫn:

Gọi A ={các số chia hết cho 3} → |A|= $\lfloor 10000/3 \rfloor$=3333

Gọi B ={các số chia hết cho 5} → |B|=$\lfloor 10000/5 \rfloor$=2000

Gọi C ={các số chia hết cho 7} → |C|=$\lfloor 10000/7 \rfloor$=1428

S là các số cần tìm. Khi đó: |S|=10000- $|A \cup B \cup C|$

Đi tìm $|A \cup B \cup C|$ theo công thức

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

3. Nguyên lý Bù trừ

$|A \cap B|$ ={các số chia hết cho 3 và 5} → $|A \cap B| = \lfloor 10000/15 \rfloor = 666$

$|A \cap C|$ ={các số chia hết cho 3 và 7} → $|A \cap B| = \lfloor 10000/21 \rfloor = 476$

$|B \cap C|$ ={các số chia hết cho 5 và 7} → $|B \cap C| = \lfloor 10000/35 \rfloor = 285$

$|A \cap B \cap C|$={các số chia hết cho 3,5 và 7}→ $|A \cap B \cap C| = \lfloor 10000/$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

- *Nguyên lý chuồng chim bồ câu*: Giả sử có một đàn chim bay về chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì có ít nhất một ngăn có nhiều hơn một con chim.

-Phát biểu nguyên lý Direchlet*:* **Nếu có n đồ vật đặt vào k hộp, sẽ tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn $\lceil n/k \rceil$ vật.**

Chứng minh:

Giả sử tất cả các hộp đều chứa ít hơn $\lceil \mathbf{n/k} \rceil$ đồ vật.

Khi đó tổng số đồ vật được chứa trong k hộp ít hơn **k*(n/k) =** n.

Trái với giả thiết có n đồ vật.

FIT-HaUI SINCE 1999

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

<u>Ví dụ 1</u>: Chứng minh rằng:

- Trong 367 người có ít nhất 2 người có trùng ngày sinh.
- Trong 13 người có ít nhất 2 người có cùng tháng sinh .

<u>Hướng dẫn</u>:

- Coi số ngày trong năm là “k hộp” và số người là “n đồ vật” 😬,

Thì do k=365|366, n=367, theo nguyên lý Direchlet thì có ít nhất 1 “hộp” phải chứa không ít hơn $\lceil 367/365 \rceil = \lceil 1.003 \rceil = 2$.

Vậy ít nhất phải có 2 người sinh cùng một ngày.

- Tương tự, coi k hộp là số tháng trong năm → k=12

và số người là n “đồ vật” → n=13.

Vậy để xếp n đồ vật vào k hộp, thì có ít nhất 1 hộp phải có $\lceil 13/12 \rceil = \lceil 1.083 \rceil = 2$ trở lên.

Tức là có ít nhất 2 người sinh cùng trong 1 tháng

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

Ví dụ 2: Bài thi chấm thang điểm 0..100. Lớp phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để trong mọi môn đều có ít nhất 2 sinh viên cùng 1 điểm?

n=?

k=101 (bậc thang)

$\lceil n/k \rceil = 2$

$\lceil n/k \rceil = \lceil n/101 \rceil = 2$

n=101*(2-1)+1= 102

n=?

k=101 (bậc thang)

$\lceil n/k \rceil = 10$

$\lceil n/k \rceil = \lceil n/101 \rceil = 10$

n=101*(10-1)+1= 910

Ví dụ 2': Bài thi chấm thang điểm 0..100. Lớp phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để trong mọi môn đều có ít nhất 10 sinh viên cùng 1 điểm?

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

<u>Ví dụ 3</u>: Nhóm 21 số hệ 10 ít nhất 3 số trùng nhau vì chứa 21 vật vào 10 hộp thì ít nhất một hộp chứa nhiều hơn 2 vật.

n=21

k=10 (0..9)

$$\lceil n/k \rceil = \lceil 21/10 \rceil = 3$$

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

Ví dụ 4: Có một tá tất màu đen, một tá tất màu nâu. Một người lấy ngẫu nhiên trong bóng tối, hỏi anh ta cần phải lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để có một đôi cùng màu?

- **n= số tất cần lấy ít nhất. Tìm n**
- **k=2 số màu (đen, nâu)**
- **$\lceil n/k \rceil = \lceil n/2 \rceil = 2$ (1 đôi)**
- **n=2*(2-1)+1=3**

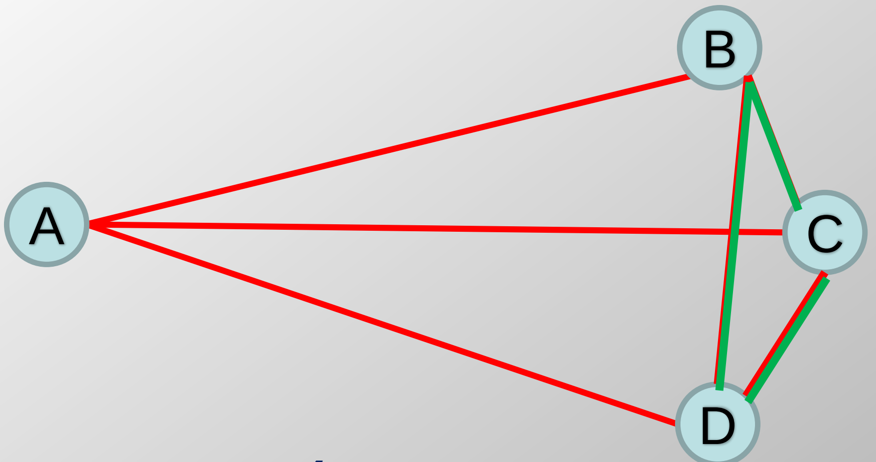
I. Các nguyên lý đếm cơ bản

4. Nguyên lý Direchlet

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng cho sáu điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm bởi cạnh xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng có một tam giác có cạnh cùng một màu.

Lấy 1 điểm (giả sử là A).

Khi đó nối A với 5 điểm còn lại bởi 5 cạnh (xanh hoặc đỏ). Theo Derichlet, phải có ít nhất 3 cạnh cùng màu (giả sử là AB,AC,AD màu đỏ)



n=5, k=2, $\lceil n/k \rceil = \lceil 5/2 \rceil = 3$

Xét ΔBCD:

Nếu có 1 cạnh màu đỏ, chẳng hạn cạnh BC đỏ thì ΔABC đỏ

Tương tự nếu BD, CD đỏ thì được tam giác đỏ ΔABD hoặc ΔADC

Ngược lại, thì ΔBCD là tam giác xanh.

Một số bài tập:

1. Chứng minh rằng trong mặt phẳng, với 5 điểm toạ độ nguyên luôn tìm được một trung điểm (của đoạn nối 2 điểm nào đó) có toạ độ nguyên.
2. Trong một cuộc họp gồm n>2 người, chứng mình luôn tìm được 2 người có số người quen bằng nhau.
3. Chứng minh rằng, n số tự nhiên $a_1,a_2,\ldots,a_n$ luôn tìm được một đoạn con các số liên tiếp có tổng chia hết cho n.

I. Các nguyên lý đếm cơ bản

Bài tập về nhà

Bài 1 đến 18 chương 2 phiếu bài tập