II.Giải tích tổ hợp

6. Hệ thức truy hồi

Một quần thể vi sinh vật, sau mỗi giờ số cá thể sẽ tăng gấp đôi. Hỏi sau 5h thì số cá thể sẽ là bao nhiêu nếu ban đầu có 5 vi sinh vật?

Giả sử số vi sinh vật sau giờ thứ n là An. Theo giả thiết thì

$$
\begin{aligned}
A_5 &= 2A_4 \\
&= 2(2A_3) = 2^2A_3 \\
&= 2^2(2A_2) = 2^3A_2 \\
&= 2^3(2A_1) = 2^4A_1 = \mathbf{2^5A_0}
\end{aligned}
$$

do vậy với $A_0=5 \rightarrow A_4=32*5=160$

II.Giải tích tổ hợp

6. Hệ thức truy hồi

Một người gửi tiền tiết kiệm với lãi suất 0.6%/tháng. Với số tiền gửi ban đầu là 10 triệu đồng, hỏi sau 10 năm người đó có số tiền (cả gốc và lãi) là bao nhiêu. Biết rằng sau mỗi tháng, số lãi sẽ được cộng dồn vào vốn?

Giải: Gọi M_n là số tiền người đó có sau n tháng. Vì số tiền có trong n tháng bằng số tiền có trong n-1 tháng cộng với số lãi, do vậy ta có công thức tính:

$M_n=M_{n-1}+M_{n-1}*0.6/100= M_{n-1}\ (1+0.6/100)$

$=M_{n-2}\ (1+0.6/100).(1+0.6/100)\ldots.$

Bằng phương pháp lặp, ta tính M_1, M_2,… M_{120}

II.Giải tích tổ hợp

6. Hệ thức truy hồi

Bài toán "Dãy số Fibonaci": Một cặp thỏ (gồm 1 con đực và 1 con cái) được thả lên 1 hòn đảo. Giả sử mỗi cặp thỏ sẽ có khả năng sinh ra một cặp thỏ nếu nó có 2 tháng tuổi trở lên (và giả sử nó trường thọ).

Hãy tìm công thức truy hồi để tính số thỏ sau n tháng?

Giả sử Fn là số cặp thỏ sau n tháng. Ta chỉ ra rằng fn với n =1, 2, 3, 4.. là các số của dãy Fibonaci

F1=1

F2=1

F3= 1+1=2

F4=2+1=3

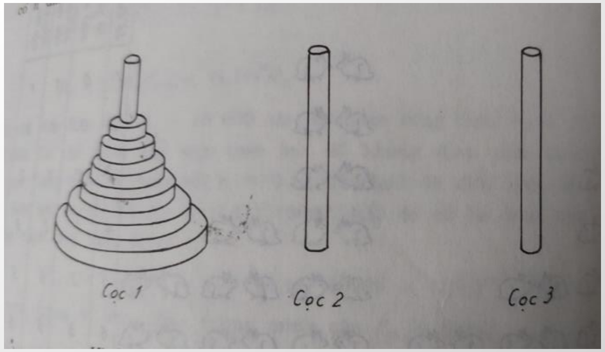
F5=3+1+1=5…. Fn= F(n-1)+F(n-2)

6. Hệ thức truy hồi

Bài toán "Tháp Hà Nội": Một toà tháp có n tầng, tầng ở trên luôn nhỏ hơn tầng ở dưới. Toà tháp ban đầu ở địa điểm A, cần chuyển sang địa điểm B theo cách:

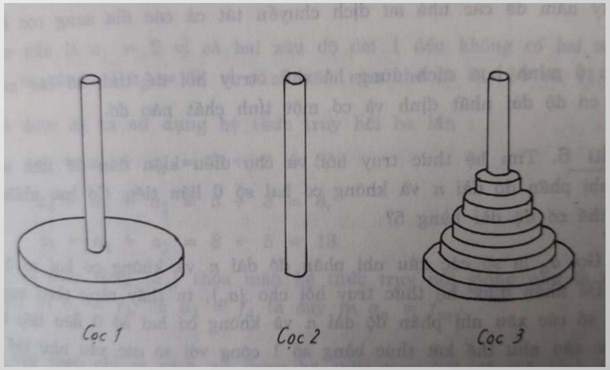
- Có 1 địa điểm trung gian là C
- Mỗi lần chuyển 1 tầng, từ địa điểm này sang địa điểm khác trong 3 địa điểm đó
- Tầng to hơn không được đặt lên trên tầng bé hơn.
- Hãy cho biết cách chuyển và có bao nhiêu thao tác chuyển?

Hệ thức truy hồi



Bài toán "Tháp Hà Nội": Một toà tháp có n tầng, tầng ở trên luôn nhỏ hơn tầng ở dưới. Toà tháp ban đầu ở địa điểm A, cần chuyển sang địa điểm B theo cách:

- Có 1 địa điểm trung gian là C
- Mỗi lần chuyển 1 tầng, từ địa điểm này sang địa điểm khác trong 3 địa điểm đó
- Tầng to hơn không được đặt lên trên tầng bé hơn.
- Hãy cho biết cách chuyển và có bao nhiêu thao tác chuyển?



$$H_n = 2.H_{n-1} + 1$$

$$H_n = 2.(2H_{n-2}+1)+1 = 2^{2}.H_{n-2}+2+1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1$$

II.Giải tích tổ hợp

7. Sinh hoán vị

Một tập hợp gồm n phần tử, có thể tương ứng với tập số nguyên {1,2,…,n}.

Vì vậy liệt kê các hoán vị của tập hợp sẽ tương ứng với liệt kê các hoán vị của tập n số nguyên {1,2,…,n}

Ví dụ: Hoán vị các loại quả {cam, táo, hồng, lê} có thể coi tương ứng với hoán vị tập các số nguyên {1,2,3,4}.

Chẳng hạn:

Hoán vị (2,1,4,3) sẽ tương ứng là (táo, cam, lê, hồng)

Hoán vị (4,2,3,1) sẽ tương ứng là (lê, táo, hồng, cam)

II.Giải tích tổ hợp

7. Sinh hoán vị

Bài toán đặt ra: sinh các hoán vị của tập {1,2,..,n} theo trật tự "từ điển" tăng dần.

Hoán vị $A=(a_1, a_2, a_3,\dots, a_n)$ được gọi là **nhỏ hơn** hoán vị $B=(b_1, b_2, b_3,\dots, b_n)$ nếu tồn tại vị trí i sao cho $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\dots a_{i-1}=b_{i-1}$ và $a_i<b_i$.

Nếu hoán vị $A=(a_1, a_2, a_3,\dots, a_n)$ nhỏ hơn hoán vị $B=(b_1, b_2, b_3,\dots, b_n)$ và không có hoán vị nào ở giữa chúng thì hoán vị B được gọi là "**ngay sau**" hoán vị A.

Ví dụ: Với tập {1,2,3,4} có hoán vị (1,3,2,4) là hoán vị đứng **ngay trước** hoán vị (1,3,4,2).

II.Giải tích tổ hợp

7. Sinh hoán vị

Thuật toán sinh các hoán vị của tập {1,2,..,n} theo trật tự “từ điển” tăng dần.

(Để tiện theo dõi và không ảnh hưởng gì đến tính chất của tập hợp, ta ký hiệu hoán vị là số 123…n)

- Ví dụ: hoán vị (1,3,2,4) ta ký hiệu là 1324
- Nhận xét: Hoán vị *nhỏ nhất* là 123…n, hoán vị *lớn nhất* là n…321.
- Giả sử ta đang có hoán vị a1a2a3…an.

Cần tìm hoán vị **ngay sau** hoán vị đó.

II.Giải tích tổ hợp

7. Sinh hoán vị

Tìm từ phải sang trái vị trí i đầu tiên có tính chất: $a_i<a_{i+1}$.

- Tìm từ i+1 đến n, số a_k nhỏ nhất mà $a_k>a_i$.
- Đổi chỗ a_k và a_i.
- Sắp lại các số từ $a_{i+1},\ldots,a_n$ theo thứ tự tăng dần.
- Ví dụ: tìm hoán vị ngay sau hoán vị 532641 của {1,2,3,4,5,6} là hoán vị 534126.

II.Giải tích tổ hợp

8. Sinh Tổ hợp

Liệt kê các phần tử của tổ hợp chập k của n phần tử theo thứ tự **từ điển** tăng dần.

- Tổ hợp đầu tiên: (1,2,3,…,k).
- Tổ hợp cuối cùng (n-k+1,n-k+2,…,n)

Ví dụ: Tổ hợp chập 3 của 5 phần tử {1,2,3,4,5} liệt kê theo thứ tự từ điển tang sẽ là:

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345

8. Sinh Tổ hợp

Thuật toán tìm tổ hợp đứng "ngay sau" tổ hợp $(a_1a_2\ldots a_k)$:

- Tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải sang trái sao cho **$a_i \neq n-k+i$**.
- Thay $a_i = a_i + 1$.
- Thay các $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{k-i}$ bởi a_i+j $(j=1,2,\ldots,k-i)$

Ví dụ: Tìm tổ hợp đứng ngay sau "1256" là tổ hợp chập 4 của 6 phần tử {1,2,3,4,5,6}:

i=4 và i=3: không thoả mãn điều kiện ai $\neq$ n-k+i

i=2 thoả mãn vì a2 $\neq$ 6-4+2 (n=6, k=4)→"1345"

II.Giải tích tổ hợp

8. Sinh Tổ hợp

Thuật toán tạo các tổ hợp chập r từ n phần tử {1, 2, ..n}

Liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển.

Xác định tổ hợp liền sau tổ hợp $a_1a_2... a_r$

- Tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải sang trái sao cho a_i khác n-r+i
- Thay $a_i = a_i + 1$

$a_j = a_i + j - i$ với j=i+1,i+2...r

Ví dụ: Tìm tổ hợp chập 4 từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 6} đi sau tổ hợp {1, 2, 5, 6} n=6,r=4

Giải

a_2 thỏa mãn a_i khác n-r+i :2 khác 6-4+2

Thay $a_2 = a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$;

$a_3 = 3+3-2=4$; $a_4 = 3+4-2=5$

Vậy tổ hợp đi sau {1,2,5,6} là {1,3,4,5}

9. Bài tập

Bài tập 1: Trong một lớp có 52 sinh viên, có 27 sinh viên đạt môn “Kỹ thuật số”, 20 sinh viên đạt môn “Toán rời rạc”. Nếu có 15 sinh viên thi đạt cả 2 môn thì có bao nhiêu sinh viên phải thi lại cả hai môn?

Bài tập 2: Một cuộc điều tra mức sống của các gia đình ở Mỹ. Có 96% gia đình có ít nhất 1 TV, 98% có điện thoại, 95% có điện thoại và có ít nhất 1 TV. Tính tỷ lệ % các gia đình ở Mỹ không có điện thoại hoặc không có TV?

II.Giải tích tổ hợp

9. Bài tập

Bài tập 3: Chứng minh rằng, trong không gian có 9 điểm nguyên, thì ít nhất có 1 trung điểm của đoạ nối 2 điểm nào đó cũng là điểm nguyên.

Bài tập 4: Có 6 phong bì và 6 cái tem. Cần lấy ra 4 cái phong bì và 4 cái tem để dán vào 4 cái phong bì. Hỏi có bao nhiêu cách tạo ra được 4 cái phong bì đã dán tem?

Bài tập 5: Có bao nhiêu cách lấy 5 tờ tiền trong các loại tiền 1đ, 2đ, 5đ,10đ, 20đ,100đ, 200đ, 500đ với giả thiết là mỗi loại tiền có số tờ ít nhất là 5 tờ?

9. Bài tập

Bài tập 6: Bất phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 30$, có bao nhiêu nghiệm nguyên thoả mãn: $x_1>1$, $x_2\geq2$, $x_3>2$, $x_4>2$?