Chương I: Đại số logic

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Khái niệm mệnh đề

1.1.2. Các phép toán logic và bit

1.1.3. Tương đương logic

1.2. Logic vị từ

1.2.1. Hàm mệnh đề

1.2.2. lượng từ

1.3. Các phương pháp suy luận toán học

1.3.1. Các quy tắc suy luận

1.3.2. Các phương pháp chứng minh định lý

1.3.3. Tính đúng đắn của chương trình

Nội dung bài học:

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Khái niệm mệnh đề

1.1.2. Các phép toán logic và bit

1.1.3. Tương đương logic

1.1.1 Khái niệm mệnh đề

Khái niệm

Mệnh đề là câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai chứ không có thể vừa đúng vừa sai

Mệnh đề đúng (T): * “Hà Nội là thủ đô của Việt Nam”
* “1+1=2”

Mệnh đề sai (F): * “Băng Cốc là thủ đô của Lào”
* “2+2=3”

Không phải mệnh đề:

- Bây giờ là mấy giờ?
- Hãy đọc bài này cho kỹ!
- x+1=2
- x+y=z

Các phép toán mệnh đề

** Phép toán “**Phủ định**”:*

Giả sử P là một mệnh đề.

Câu nói: “Không phải P” là một mệnh đề phủ định của P

Ký hiệu: phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$ (hoặc **¬P**)

Bảng chân lý:

P	$\overline{P}$
T	F
F	T

Ví dụ:

P=“Hôm nay là thứ Tư”

$\overline{P}$=“Hôm nay không phải là thứ Tư

Các phép toán mệnh đề

** Phép toán “**Và**” (Hội):.*

Giả sử P và Q là hai mệnh đề

Mệnh đề “**P và Q**” được ký hiệu P∧Q (còn được gọi là hội của P và Q) đúng khi cả hai đều đúng, sai trong các trường hợp khác

Bảng chân lý:

P	Q	P ∧ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Ví dụ:

p: “Hôm nay là thứ Tư”

q: “Hôm nay trời mưa”

p∧q: “Hôm nay là thứ Tư và trời mưa”

Các phép toán mệnh đề

** Phép toán “**Hoặc**”(Tuyển):*

Giả sử P và Q là hai mệnh đề.

Mệnh đề “P hoặc Q” được ký hiệu PvQ (còn gọi là tuyển của P và Q) sai khi cả hai đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân lý:

P	Q	PvQ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ví dụ:

P=“Hôm nay là thứ 6”

Q=“Hôm nay trời mưa”

PvQ: “Hôm nay là thứ 6 hoặc trời mưa”

Các phép toán mệnh đề

** Phép toán “**Hoặc phủ định**” (Tuyển chọn):*

Giả sử P và Q là hai mệnh đề.

Mệnh đề “P tuyển loại Q” ký hiệu P⊕Q đúng khi P, Q có giá trị khác nhau, sai trong các trường hợp còn lại

Bảng chân lý:

P	Q	P⊕Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Các phép toán mệnh đề

** Phép toán "**Kéo theo**":*

Giả sử p và q là hai mệnh đề

Mệnh đề p kéo theo q được ký hiệu p→q sai khi p là T, q là F, đúng trong các trường hợp còn lại

Bảng chân lý:

P	**Q**	P→**Q**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Chú ý: Trong suy luận toán học sử dụng nhiều thuật ngữ diễn đạt kéo theo

- Nếu P thì Q
- P kéo theo Q
- Q được suy ra từ P
- P là điều kiện đủ của Q
- Q là điều kiện cần của P

Các phép toán mệnh đề

Ví dụ:

- "nếu ***hôm nay là thứ 6*** thì ***2+3=5***".

  Mệnh đề là T (đúng) vì kết luận luôn T
- "nếu ***hôm nay là thứ 6*** thì ***2+3=6***".

  Mệnh đề là T trừ hôm nay đúng là ngày thứ 6
- Trong ngôn ngữ lập trình chứa các câu lệnh nếu P thì Q:

  if P then Q

  với P là ***mệnh đề***, Q là ***các câu lệnh***

Ví dụ:

Xác định giá trị của mệnh đề sau:

if (2+2=4) then x:=x+1

nếu trước câu lệnh x:=0

P	**Q**	P→**Q**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Các phép toán mệnh đề

* *Phép toán "**Tương đương**"*

Cho P và Q là hai mệnh đề.

Mệnh đề tương đương của P và Q ký hiệu P↔Q chỉ đúng khi P và Q có cùng giá trị chân lý và sai trong trường hợp còn lại.

Bảng chân lý

P	Q	P↔Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Một số cách diễn đạt khác:

- "P nếu và chỉ nếu Q"
- "P là cần và đủ đối với Q"
- "nếu P thì Q và ngược lại"

1.1.2. Các phép toán logic và bit

-Binary digit (Bit) - số nhị phân. Dùng số 0 và 1

-Bit dùng biểu diễn chân lý vì chân lý có hai giá trị T (true) và F (false), người ta dùng bit 1 biểu diễn giá trị T, bít 0 biểu diễn giá trị F

-Phép toán bit trong máy tính sẽ thay giá trị logic T bằng 1, F bằng 0 trong bảng giá trị chân lý. Với các toán tử thì sử dụng ký hiệu AND, OR, XOR, NOT thay cho $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\neg$

- Thông tin thường biểu diễn bởi các xâu bit đó là dãy 0-1

1.1.3 Tương đương logic

Định nghĩa 1

- Một mệnh đề phức hợp mà luôn luôn đúng bất kể các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần của nó gọi là hằng đúng.
- Một mệnh đề phức hợp mà luôn luôn sai bất kể các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần của nó gọi là mâu thuẫn
- Một mệnh đề không phải hằng đúng cũng không phải mâu thuẫn thì gọi là tiếp liên

Ví dụ:

- $P \vee \overline{P}$: Là hằng đúng
- $P \wedge \overline{P}$: Là mâu thuẫn

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$	$P \wedge \overline{P}$
T	F	T	F
F	T	T	F

Tương đương logic

Định nghĩa 2

Các mệnh đề phức hợp luôn có cùng giá trị chân lý được gọi là tương đương logic

Ký hiệu: $P \Leftrightarrow Q$

Ví dụ 1:

Chứng minh: $\overline{P \vee Q}$ và $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ là tương đương logic

P	Q	P∨Q	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Tương đương logic

Bảng tương đương logic

STT	Tương đương	Tên gọi
1	$P \vee F \Leftrightarrow P$ $P \wedge T \Leftrightarrow P$	Luật đồng nhất
2	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$	Luật nuốt
3	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	Luật luỹ đẳng
4	$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$	Luật phủ định kép
5	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	Luật giao hoán
6	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	Luật kết hợp
7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Luật phân phối
8	$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$	Luật DeMorgan

Một số tương đương tiện ích

1. $P \vee \overline{P} \Leftrightarrow T$
2. $P \wedge \overline{P} \Leftrightarrow F$
3. $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$

Tương đương logic

Ví dụ:

Chứng minh hằng đúng $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

- Cách 1: Sử dụng bảng chân lý
- Cách 2: Dùng bảng các tương đương logic

P	Q	P∧Q	P∨Q	P∧Q→P∨Q
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Tương đương logic

Cách 2: Dùng bảng các tương đương logic

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \quad (*)$$

Một số tương đương tiện ích
1. $P \vee \overline{P} \Leftrightarrow T$
2. $P \wedge \overline{P} \Leftrightarrow F$
3. $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$

Sử dụng tiện ích 3: $(*) \Leftrightarrow (\overline{p \wedge q}) \vee (p \vee q)$ (**)

Sử dụng luật DeMorgan: $(**) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (p \vee q)$ (***)

Sử dụng luật Giao hoán: $(***) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee p) \vee (\overline{q} \vee q)$ (****)

Sử dụng tiện ích 1: $(****) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee p) \vee (\overline{q} \vee q) \Leftrightarrow T \vee T$

Sử dụng Luật luỹ đẳng: $T \vee T \Leftrightarrow T$

Bài tập

1. Chứng minh mệnh đề sau là mâu thuẫn:

$$((\overline{r \vee q) \wedge q} \vee \overline{p}) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{q}) \rightarrow (p \wedge q \wedge r))$$

Trước hết có thể chứng minh kết quả sau **(Luật hấp thụ)**

$(A \vee B) \wedge A) \Leftrightarrow A$ hoặc $(A \wedge B) \vee A) \Leftrightarrow A$

A	B	A∨B	(A∨B)∧A
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

A	B	A∧B	(A∧B)vA
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Hướng dẫn

Để chứng minh $((\overline{(r \vee q) \wedge q} \vee \overline{p}) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{q}) \rightarrow (p \wedge q \wedge r))$ là mâu thuẫn

Ta đặt X= $\overline{(r \vee q) \wedge q} \vee \overline{p}$ và Y=$((\overline{p} \vee \overline{q}) \rightarrow (p \wedge q \wedge r))$

Thì mệnh đề đã cho có dạng X$\wedge$Y

Biến đổi X	$= \overline{(r\vee q)\wedge q}\vee\overline{p}$	
	$= (\overline{(r\vee q)}\vee\overline{q})\vee\overline{p}$	Theo DeMorgan
	$= ((\overline{r}\wedge\overline{q})\vee\overline{q})\vee\overline{p}$	Theo DeMorgan
	$= \overline{q}\vee\overline{p}$	Theo nhận xét $(A \vee B)\wedge A) \Leftrightarrow A$
	$= \overline{p\wedge q}$ (*)	Theo DeMorgan
Biến đổi Y	$= (\overline{p}\vee\overline{q}) \rightarrow (p\wedge q\wedge r)$	
	$= \overline{(\overline{p}\vee\overline{q})} \vee (p\wedge q\wedge r)$	Theo $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P}\vee Q$
	$= (p\wedge q)\vee(p\wedge q\wedge r)$	Theo DeMorgan
	$= (p\wedge q)$ (**)	Theo nhận xét $(A \vee B)\wedge A) \Leftrightarrow A$

Từ (*) và (**) thì X $\wedge$Y là mâu thuẫn

Bài tập

2. Chứng minh mệnh đề sau là mâu thuẫn :

$$\bar{p}\wedge\overline{(p\wedge q)}\wedge\overline{p\wedge\bar{r}})\ \wedge\ ((\bar{q}\rightarrow r)\vee\overline{q\vee(r\wedge s)\vee(r\wedge\bar{s})})\wedge p)$$

Đặt X= $\bar{p}\wedge\overline{(p\wedge q)}\wedge\overline{p\wedge\bar{r}})$ và Y= $(\bar{q}\rightarrow r)\vee\overline{q\vee(r\wedge s)\vee(r\wedge\bar{s})})\wedge p$

Thì mệnh đề đã cho có dạng X∧Y

Biến đổi X $= \bar{p}\wedge(\bar{p}\vee\bar{q})\wedge(\bar{p}\vee r)$ Theo DeMorgan

$= \bar{p}$ (*) Theo nhận xét $(A\vee B)\wedge A) \Leftrightarrow A$

Biến đổi Y $= \bar{p}\wedge(\bar{p}\vee\bar{q})\wedge(\bar{p}\vee r)$

$= p$ (**) Tương tự

Từ (*) và (**) thì X ∧Y là mâu thuẫn