Chương I: Đại số logic

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Khái niệm mệnh đề

1.1.2. Các phép toán logic và bit

1.1.3. Tương đương logic

1.2. Logic vị từ

1.2.1. Hàm mệnh đề

1.2.2. lượng từ

1.3. Các phương pháp suy luận toán học

1.3.1. Các quy tắc suy luận

1.3.2. Các phương pháp chứng minh định lý

1.3.3. Tính đúng đắn của chương trình

1.2 Logic vị từ

1.2.1 Hàm mệnh đề

cho câu “x>3”

“x”: chủ ngữ

“>3”:vị ngữ

Ta ký hiệu câu” x > 3 “là P(x) với P là ký hiệu vị ngữ, x là biến sẽ nằm trong một “***Không gian***” nào đó.

“***Hàm mệnh đề***” là một câu khẳng định có chứa biến.

Với một giá trị $x_{0,}$ Ta nói $P(x_0)$ là giá trị của hàm mệnh đề P tại x_0

Khi biến x được gán một giá trị cụ thể thì P(x) sẽ có một giá trị chân lý.

1.2 Logic vị từ

Ví dụ 1: P(x): "x>3" với không gian của x là tập số thực

Giá trị của P(4)=T (vì "4>3" là mệnh đề đúng)

P(2)=F (vì "2>3" là mệnh đề sai)

Ví dụ 2: Q(x,y): "x=y+3" với không gian của x và y là tập số thực

Khi đó: Q(1,3)=F (vì 1= 3+3 là một mệnh đề sai)

Q(3,0)=T (vì 3=0+3 là một mệnh đề đúng)

Ví dụ 3: R(x,y,z): "x+y=z". Xác đinh R(1,2,3); R(0,0,1)?

Tổng quát:

Câu khẳng định với nhiều biến x_1, x_2,..,x_n được ký hiệu $P(x_1,x_2,\ldots.x_n)$ và gọi là hàm mệnh đề P tại $(x_1,x_2,\ldots.x_n)$

1.2 Logic vị từ

1.2.2 Lượng từ

- Hàm mệnh đề khi gán giá trị cụ thể cho các biến thì trở thành mệnh đề.
- Cách khác để trở thành mệnh đề là sự "Lượng hóa" với hai lượng từ **"với mọi"** và **"tồn tại"**.

1.2 Logic vị từ

a. Lượng từ với mọi

- Định nghĩa: Lượng từ với mọi x của hàm mệnh đề P(x) là mệnh đề : “P(x) đúng với mọi giá trị của x trong không gian”
- Ký hiệu: $\forall x P(x)$
- Diễn đạt khác: “Đối với mọi x P(x)”

Ví dụ: Câu: “Tất cả sinh viên ở lớp này đều đã học giải tích”

Có thể diễn đạt như sau: P(x) = “x đã học giải tích”

Với x nằm trong không gian gồm ***tất cả sinh viên trong lớp*** ấy

Xác định lượng từ: với mọi

Vậy ta có $\forall x P(x)$

1.2 Logic vị từ

a. Lượng từ với mọi

"Tất cả sinh viên ở lớp này đều đã học giải tích" $\forall x P(x)$

$\Leftrightarrow$"nếu x là sinh viên lớp này thì x đã học giải tích"

Có thể biểu diễn như sau:

Đặt p(x) = "x là sinh viên lớp này",

Và q(x) = "x đã học giải tích",

Với x nằm trong không gian gồm tất cả sinh viên trong lớp này

Xác định lượng từ: với mọi

Thì có thể biểu diễn: $\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x))$

1.2 Logic vị từ

- Ví dụ 1: Cho P(x)="x+1>x" Xác định giá trị chân lý của lượng từ: ∀xP(x), nếu không gian của x là tập các số thực?
- Ví dụ 2: Cho Q(x) = "x>2". Xác định giá trị chân lý của lượng ∀x Q(x), nếu không gian của x là tập các số thực?
- Ví dụ 3: Cho R(x)= "x bình phương nhỏ hơn 10" với không gian của x là {1,2,3,4}. Hãy xác định giá trị chân lý của lượng từ ∀x R(x)?

Nhận xét: khi tất cả các phần tử của không gian được liệt kê thì lượng từ với mọi giống như phép Hội

$$\forall x P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge .. \wedge P(x_n)$$

1.2 Logic vị từ

b. Lượng từ tồn tại

Định nghĩa: Lượng từ tồn tại của P(x) là mệnh đề : “tồn tại một phần tử x trong không gian sao cho P(x) đúng”

- Ký hiệu: $\exists x P(x)$

Diễn đạt khác:

“Tồn tại ít nhất 1 giá trị của x sao cho P(x) đúng”

Ký hiệu : $\exists ! x P(x)$

Tồn tại **duy nhất** 1 giá trị của x sao cho P(x) đúng”

1.2 Logic vị từ

b. Lượng từ tồn tại

Ví dụ: Diễn đạt câu " Tồn tại sinh viên lớp này đã học giải tích"

Đặt P(x) = "x đã học giải tích".

Không gian của x gồm tất cả các sinh viên trong lớp này

Xác đinh lượng từ: tồn tại

Khi đó ta có lượng từ $\exists x P(x)$

1.2 Logic vị từ

- Ví dụ 1: Cho P(x)="x+1>x" Xác định giá trị chân lý của lượng từ ∃x p(x), không gian của x là tập các số thực
- Ví dụ 2: Cho Q(x) là câu "x>2" Xác định giá trị chân lý của lượng từ ∃x Q(x), không gian của x là tập các số thực
- Ví dụ 3: Cho R(x) là: "x bình phương nhỏ hơn 10" không gian của x= {1,2,3,4}. Xác định giá trị chân lý của lượng từ ∃x R(x)

Nhận xét: khi tất cả các phần tử của không gian được liệt kê thì lượng từ tồn tại giống như phép tuyển

$$\exists x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee .. \vee (x_n)$$

1.2 Logic vị từ

c. Lượng từ nhiều biến

Ví dụ: Cho $Q(x,y)$ = “ $x+y= 0$” .

Xác định giá trị chân lý của các câu sau với không gian của x,y là số nguyên

1. $\exists x \exists y Q(x,y) =$ T
2. $\exists y \exists x Q(x,y) =$ T
3. $\exists x \forall y Q(x,y) =$ F
4. $\exists y \forall x Q(x,y) =$ F
5. $\forall x \exists y Q(x,y) =$ T
6. $\forall y \exists x Q(x,y) =$ T
7. $\forall x \forall y Q(x,y) =$ F
8. $\forall y \forall x Q(x,y) =$ F

1.2 Logic vị từ

d. Phủ định của biểu thức có chứa lượng từ

Ví dụ 1: " tất cả sinh viên trong lớp đều đã học môn giải tích"

Có thể diễn đạt như sau: P(x) = "x đã học giải tích"
Với x nằm trong không gian gồm tất cả sinh viên trong lớp ấy
Xác định lượng từ: với mọi
Vậy ta có $\forall xP(x)$

Xét phủ định của câu là:

" Không phải tất cả sinh viên trong lớp đều đã học môn giải tích"

$\overline{\forall xP(x)}$

"$\Leftrightarrow$ Tồn tại sinh viên trong lớp chưa học môn giải tích"

$\exists x\overline{P(x)}$

Vậy: $\overline{\forall xP(x)} \Leftrightarrow \exists x\overline{P(x)}$

1.2 Logic vị từ

d. Phủ định của biểu thức có chứa lượng từ

Ví dụ 2: " một vài sinh viên trong lớp đã học môn giải tích"

Đặt P(x) = "x đã học giải tích".
Không gian của x gồm tất cả các sinh viên trong lớp này
Xác đinh lượng từ: tồn tại
Khi đó ta có lượng từ $\exists x P(x)$

xét phủ định của câu:

" Không phải một vài sinh viên trong lớp đã học môn giải tích"

$$\overline{\exists x P(x)}$$

"$\Leftrightarrow$ Tất cả sinh viên trong lớp chưa học môn giải tích"

$$\forall x \overline{P(x)}$$

Vậy: $\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$

1.2 Logic vị từ

d. Phủ định của biểu thức có chứa lượng từ

Bảng phủ định các lượng từ

Phủ định	Tương đương	Khi nào đúng	Khi nào sai
$\overline{\exists x P(x)}$	$\forall x \overline{P(x)}$	P(x) sai với mọi x	Có ít nhất 1 giá trị để P(x) đúng
$\overline{\forall x P(x)}$	$\exists x \overline{P(x)}$	Có ít nhất 1 giá trị x để P(x) sai	P(x) đúng với mọi x

1.2 Logic vị từ

Biểu diễn các câu sau dưới dạng logic vị tự

1. Có một số bạn trong “lớp mình” bị trượt môn Lập trình cơ bản. Không gian môn học là các học phần trong chương trình đào tạo
2. Tất cả các bạn trong lớp mình đều đã học tiếng Anh hoặc tiếng Hàn. Không gian môn học là các môn ngoại ngữ.
3. Justin là một người rất yêu thương mẹ của mình. Không gian là người trên toàn thế giới.
4. Trên đời này, Justin chẳng yêu ai ngoài bản thân mình. Không gian là người trên toàn thế giới.

1.2 Logic vị từ

Biểu diễn các câu sau dưới dạng logic vị tự

1. Có một số bạn trong "lớp mình" bị trượt môn Lập trình cơ bản. Không gian môn học là các học phần trong chương trình đào tạo.

Đặt P(x)="x bị trượt môn LTCB".

Không gian x là sinh viên lớp mình

Khi đó ta có: **$\exists x P(x)$**

2. Tất cả các bạn trong lớp mình đều đã học tiếng Anh hoặc tiếng Hàn. Không gian môn học là các môn ngoại ngữ.

Đặt P(x,y)="x đã học môn y", trong đó x thuộc không gian "sinh viên lớp mình", y thuộc không gian "các môn ngoại ngữ".

Khi đó ta có mệnh đề: **$\forall x \exists y \exists z (P(x,y) \vee P(x,z))$**

1.2 Logic vị từ

Biểu diễn các câu sau dưới dạng logic vị tự

3. Lê là một người rất yêu thương mẹ của mình. Không gian là người trên toàn thế giới.

Đặt P(x,y)="x rất yêu y" với x,y thuộc không gian người trên thế giới.

Khi đó ta có: $\exists x \exists y(P(x,y)$

4. Trên đời này, Justin chẳng yêu ai ngoài bản thân mình. Không gian là người trên toàn thế giới.

Đặt P(x,y)="x yêu y" và Q(x,y)="x khác y, với x,y∈{người trên thế giới}.

Khi đó ta có: $\exists x P(x,x) \wedge (\forall y Q(x,y) \wedge \overline{P(x,y)})$