II.Giải tích tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa Hoán vị:

- Một cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng được gọi là một "**Hoán vị của n các đối tượng**" đó.

Ví dụ*:* Cho tập S = {1,2,3}

Sắp xếp (3,2,1), (3,1,2),… là những hoán vị của S

II.Giải tích tổ hợp

1. Hoán vị

Số hoán vị của tập n phần tử ký hiệu: P(n).

Công thức: **P(n) = n(n-1)(n-2)...3.2.1 = n!**

Chứng minh:

Phần tử thứ i có n-i+1 cách chọn (i = 1,2,..,n).

Theo **Nguyên lý nhân** ta có kết quả cần chứng minh!

II.Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa Chỉnh hợp:

- Một cách sắp xếp có thứ tự k đối tượng trong n đối tượng được gọi là một "**Chỉnh hợp chập k của n phần tử**".

Ví dụ: Cho tập S = {1,2,3}

Những cách sắp xếp (3,2), (1,2), (1,3)… là những chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử của S

II.Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp

Số chỉnh hợp chập k của tập n phần tử ký hiệu: A_n^k.

Công thức: $\mathbf{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Chứng minh:

Phần tử thứ i có n-i+1 cách chọn (i=1,2,..,k).

Theo **Nguyên lý nhân** ta có kết quả cần chứng minh!

Để ý: khi k = n, chỉnh hợp chập k của n phần tử trở thành hoán vị của n phần tử.

$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots1 = n! = P(n)$

II.Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa Chỉnh hợp lặp:

- Một cách sắp xếp có thứ tự k đối tượng trong n đối tượng, và bản thân mỗi đối tượng có thể được lặp lại gọi là một "**Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử**".

Ví dụ: Cho tập S = {1,2,3}

Những cách sắp xếp (3,2), (1,2), (3,3), (1,1), … là những chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử của S

2.2 Chỉnh hợp lặp

Số chỉnh hợp lặp chập k của tập n phần tử ký hiệu: L_n^k.

Công thức: $\mathbf{L_n^k = n^k}$

Chứng minh:

Phần tử thứ i có n cách chọn (i=1,2,..,k).

Theo **Nguyên lý nhân** ta có kết quả cần chứng minh!

II.Giải tích tổ hợp

2.3 Ví dụ

Ví dụ 1:

Từ các chữ số {1,2,3,4,5,6} có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Kết quả: L_6^4 = 6.6.6.6 = 1296

Ví dụ 2:

Từ các chữ số {1,2,3,4,5,6} có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số, các chữ số trong số đôi một khác nhau?

Kết quả: A_6^4 = 6.5.4.3 = 360

II.Giải tích tổ hợp

2.3 Ví dụ

Ví dụ 3:

Từ các chữ số {1,2,3,4,5,6,7} có thể lập được bao nhiêu số **chẵn** có 4 chữ số?

Chọn chữ số cuối trước → có 3 khả năng là 2,4,6. Sau đó sẽ chọn các chữ sô còn lại. Kết quả 3.7.7.7

Ví dụ 4:

Từ các chữ số {0,1,2,3,4,5,6} có thể lập được bao nhiêu số **chẵn** có 4 chữ số, **các chữ số trong số đôi một khác nhau**?

- Nếu số 0 ở cuối: 1.6.5.4=120 số, Nếu số 2,4,6 ở cuối: 3.5.5.4=300, Kết quả: 120+300=420

II.Giải tích tổ hợp

3. Tổ hợp

Định nghĩa Tổ hợp:

Một "**Tổ hợp chập k của n phần tử**" là cách chọn k phần tử trong n phần tử của tập hợp đã cho.

Ví dụ : Cho tập hợp S={a, b, c, d}

Các tập con (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d) là những tổ hợp chập 2 của 4 phần tử đã cho

II.Giải tích tổ hợp

3. Tổ hợp

Số tổ hợp chập k của tập n phần tử ký hiệu: C_n^k.

Công thức: $$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Chứng minh:

Áp dụng công thức ***số chỉnh hợp chập k của n phần tử*** → số cách lấy ra k phần tử (có thứ tự) là A_n^k

Tuy nhiên do khi không kể đến thứ thì mỗi một bộ gồm k phần tử đã bị **lặp lại k!** lần. Do đó ***số tổ hợp chập k của n phần tử*** bằng $\frac{A_n^k}{k!}$

3. Tổ hợp

Ví dụ 1:

Để chọn ra một đội thi đấu bóng rổ 5 người, trong số thành viên 18 cầu thủ, hỏi có bao nhiêu cách?

Giải: Vì chọn 5 người trong 18 người nên số cách chọn là: C_{18}^{5}

Ví dụ

Ví dụ 2:

Sau bữa tiệc, mỗi người phải bắt tay với mọi người khác tham gia bữa tiệc đó. Có tất cả 66 lượt bắt tay, hỏi bữa tiệc có bao nhiêu người?

Kết quả: 12

II.Giải tích tổ hợp

4. Hệ số nhị thức

- Công thức khai triển nhị thức

$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}. y + \dots . C_n^{n-1} x.y^{n-1} + C_n^n . y^n$

- Tam giác Pascal:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

II.Giải tích tổ hợp

4. Hệ số nhị thức

- Tính chất của tổ hợp

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

II.Giải tích tổ hợp

Ví dụ

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức:

$(x+y)^{15}$

5. Tổ hợp lặp

Ví dụ 1: Trong một đĩa quả có táo, cam, lê mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa nếu giả sử thứ tự các quả không quan trọng và quả thuộc cùng một loại là không phân biệt

1. *4 táo*
2. *4 cam*
3. *4 lê*
4. *3 táo 1 cam*
5. *3 táo 1 lê*
6. *3 cam 1 táo*
7. *3 cam 1 lê*
8. *3 lê 1 táo*
9. *3 lê 1 cam*
10. *2 táo 2 cam*
11. *2 táo 2 lê*
12. *2 cam 2 lê*
13. *2 táo 1 cam 1 lê*
14. *2 cam 1 táo 1 lê*
15. *2 lê 1 táo 1 cam*

II.Giải tích tổ hợp

5. Tổ hợp lặp

Tổ hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu: R_n^k.

Công thức:

$$\mathbf{R_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}$$

5. Tổ hợp lặp

Ví dụ 3: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

$$x_1+x_2+x_3=11$$

Kết quả: $\mathbf{R_3^{11} = 78}$

Ví dụ 4: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

$$x_1+x_2+x_3=11$$

Thoả mãn: x1>=1, x2>=2 và x3>=3?

Kết quả: $\mathbf{R_3^{5} = 21}$

Bài tập: Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình: $x1 + x2 + x3 < 15$

Thỏa mãn $x1 >= 1$, $x2 >= 2$, $x3 <= 2$