Chương I: Đại số logic

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Khái niệm mệnh đề

1.1.2. Các phép toán logic và bit

1.1.3. Tương đương logic

1.2. Logic vị từ

1.2.1. Hàm mệnh đề

1.2.2. Lượng từ

1.3. Các phương pháp suy luận toán học

1.3.1. Các quy tắc suy luận

1.3.2. Các phương pháp chứng minh định lý

1.3.3. Tính đúng đắn của chương trình

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Ví dụ: Chứng minh hằng đúng: (p^(p→q))→q

p	q	p→q	p^(p→q)	(p^(p→q))→q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Đây là cơ sở của quy tắc suy luận Modus Ponens hay luật tách rời

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p, $p \rightarrow q$: giả thiết

$\therefore q$: kết luận

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Bảng các quy tắc suy luận

Hằng đúng	Tên	Ký hiệu quy tắc
1. $p \rightarrow (p \vee q)$	1. Cộng	$\dfrac{p}{p \vee q}$
2. $p \wedge q \rightarrow p$	2. Rút gọn	$\dfrac{p \wedge q}{p}$
3. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	3. Modus Ponens	$\dfrac{p,\ p \rightarrow q}{q}$
4. $(\overline{q} \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \overline{p}$	4. Modus Tollens	$\dfrac{\overline{q},\ p \rightarrow q}{\overline{p}}$
5. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	5. Tam đoạn luận giả định	$\dfrac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$
6. $(\overline{p} \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$	6. Tam đoạn luận tuyển	$\dfrac{\overline{p},\ p \vee q}{q}$

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc cộng

$$p \to (p \vee q)$$

Dạng sơ đồ:

$$\frac{p}{\therefore (p \vee q)}$$

Ví dụ1: Chủ nhật An thường lên thư viện.

Suy ra: Chủ nhật An thường lên thư viện hoặc về quê.

Ví dụ 2: Chiều nay trời mưa.

Suy ra: Chiều nay trời mưa hoặc đường ướt.

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc rút gọn $$(p \land q) \to p$$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{r} p \land q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ví dụ: Hôm nay An đi học Toán rời rạc và học Anh văn.

Suy ra: Hôm nay An học Toán rời rạc.

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc Modus Ponens

$$\left[(p \to q) \wedge p\right] \Rightarrow q$$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Ví dụ 1: Nếu An học chăm thì An học Giỏi.
Mà An học chăm.
Suy ra An học Giỏi.

Ví dụ 2: Nếu chiều nay trời mưa thì đường ướt.
Mà chiều nay trời mưa.
Suy ra chiều nay đường ướt.

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc Modus Tollens $\left[\left(p \to q\right) \wedge \neg q\right] \Rightarrow \neg p$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Ví dụ 1: Nếu An đi học đầy đủ thì An thi đạt môn toán rời rạc.
An không thi đạt môn toán rời rạc.
Suy ra: An không đi học đầy đủ.

Ví dụ 2: Nếu Trời mưa thì đường ướt.
Mà đường không ướt.
Suy ra Trời không mưa.

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc

Tam đoạn luận giả định

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \Rightarrow (p \to r)$$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Ví dụ: Nếu trời mưa thì đường ướt.

Nếu đường ướt thì đường trơn.

Suy ra: Nếu trời mưa thì đường trơn.

1.3.1 Các quy tắc suy luận

Quy tắc
Tam đoạn luận tuyển

$$[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$$

Dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore p \end{array}$$

Ý nghĩa của qui tắc: Nếu một trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp không xảy ra thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ xảy ra.

Ví dụ: Chủ nhật An thường lên thư viện hoặc về quê.
Chủ nhật này An không về quê.
Suy ra: Chủ nhật này An lên thư viện.

1.3.2. Các phương pháp chứng minh định lý

a. Chứng minh “Rỗng”
b. Chứng minh “Tầm thường”
c. Chứng minh “Trực tiếp”
d. Chứng minh “Gián tiếp”
e. Chứng minh “Phản chứng”
f. Chứng minh “Từng trường hợp”
g. Chứng mình “Qui nạp toán học”

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

a. Chứng minh "Rỗng":

Chỉ ra giả thiết P là F (tức là P luôn sai)

Ví dụ 1: Chứng minh rằng "nếu n là số nguyên vừa là chẵn vừa là lẻ thì $n^2 = 2n+1$".

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

Đặt P="số nguyên n nào vừa chẵn vừa lẻ".

Q= "$n^2 = 2n+1$";

Vì P luôn sai nên P→Q luôn đúng

Ví dụ 2:
Chứng minh P(0) với P(n) là câu "nếu n>1 thì $n^2 > 1$"

P(0) là câu "nếu 0>1 thì $0^2 > 1$", vì 0>1 luôn sai nên P(0) đúng

1.3.2. Các phương pháp chứng minh định lý

b. Chứng minh "Tầm thường:

Chỉ ra kết luận luôn đúng

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ví dụ: Chứng minh rằng " Nếu a, b là hai số nguyên dương và a ≥ b thì $a^n \geq b^n$".

Đặt P=" a, b là 2 số nguyên dương và a ≥ b"

Q="$a^n \geq b^n$"

Khi n=0 ta có Q(0): $a^0=b^0$ (đúng) nên P→Q là đúng

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

c. Chứng minh "Trực tiếp:

Chỉ ra Nếu p đúng thì q cũng đúng

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ví dụ:

Chứng minh "Nếu n là một số lẻ thì n^2 cũng là một số lẻ".

Đặt P="n là một số lẻ"; Q="n bình phương là một số lẻ"

Chứng minh P→Q là đúng

Thật vậy n= 2.k +1, với k nguyên,

suy ra $n^2 = (2.k+1)^2 = 4.\ k^2\ \ +4.\ k+1 = 2.(2.\ k^2+ 2.k)+1$ lẻ

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

d. Chứng minh "Gián tiếp:

Thay vì chứng minh $p \rightarrow q$ đúng thì ta chứng minh mệnh đề tương đương với mệnh đề này là $\neg q \rightarrow \neg p$ đúng

p	q	p → q	┐q→ ┐p
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Ví dụ:

Chứng minh "Nếu 3n+2 là một số lẻ thì n cũng là một số lẻ"

Mệnh đề tương đương

Nếu n là một số chẵn thì 3n+2 cũng là một số chẵn

Thật vậy n chẵn tức là n= 2.k với k nguyên,

suy ra 3.n+2 = 3. 2.k+2 = 2.(3. k+ 1) chẵn

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

e. Chứng minh "Phản chứng:

Giữ nguyên giả thiết p, lấy phủ định của q và chỉ ra mâu thuẫn

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ví dụ:

Chứng minh " nếu 3n+2 là lẻ thì n là lẻ"

Đặt p= "3n+2 là số lẻ" q= "n là số lẻ". Cần chứng minh p→q

Giả sử $p \wedge \neg q$ tức là giả sử 3n+2 là số lẻ và n là số chẵn. Chỉ ra mâu thuẫn

Thật vậy n chẵn → n= 2k → 3n+2= 3.2k+2 = 2(3.k+1) chẵn, mâu thuẫn.

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

f. Chứng minh từng trường hợp

Chứng minh mệnh đề dạng (p_1 v p_2 v…v p_n)→q ta đi chứng minh các trường hợp:

p_1→q ; p_2→ q;… p_n→ q

Chứng minh p tương đương q ta chứng minh 2 trường hợp

p→q

q→p

Chứng minh nhiều mệnh đề tương đương $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3$

Ta đi chứng minh $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

g. Chứng minh quy nạp.

Bài toán: Chứng minh P(n) đúng $\forall n \geq n_0$, với n, n_0 là số tự nhiên.

Nguyên lý quy nạp: $P(n_0) \wedge \forall(n \geq n_0)(P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall(n \geq n_0) P(n)$

- Bước cơ sở: $P(n_0)$
- Bước chứng minh quy nạp: $\forall(n \geq n_0) P(n) \rightarrow P(n+1)$

  trong đó P(n) là giả thiết quy nạp

Ví dụ:

Chứng minh rằng tổng của n số nguyên dương lẻ đầu tiên= n^2

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

g. Chứng minh quy nạp. Bài toán: Chứng minh P(n) đúng $\forall n \geq n_0$, với n, n_0 là số tự nhiên.

Ví dụ:

Chứng minh rằng tổng của n số nguyên dương lẻ đầu tiên bằng n^2

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

.....

$1+3+...+(2n-1)=n^2$

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

Chứng minh:P(n): $1+3+...+(2n-1)=n^2$

- Bước cơ sở: Với n=1 ta có: 1=1(đúng) → P(1) đúng.
- Bước qui nạp: Giả sử P(n) đúng, ta cần chứng minh P(n+1) đúng.

Tức là $1+3+...+(2n-1)=n^2$ (*) đúng cần chứng minh

$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$ (**) là đúng

Thật vậy thay (*) vào (**) ta có $n^2+2n+1= (n+1)^2$

Vậy P(n+1) đúng → Điều phải chứng minh

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

g. Chứng minh quy nạp. Bài toán: Chứng minh P(n) đúng $\forall n \geq n_0$, với n, n_0 là số tự nhiên.

Nguyên lý quy nạp 2:

$P(n_0) \wedge \forall(n \geq n_0)\ (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)) \rightarrow \forall n P(n)$

- Bước cơ sở: $P(n_0)$
- Bước chứng minh quy nạp:

$\forall(n \geq n_0)\ (P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1))$

Trong đó:

$P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \wedge \ldots \wedge P(n)$ là giả thiết quy nạp

1.3.2 Các phương pháp chứng minh định lý

Ví dụ: Chứng minh rằng có thể sử dụng 2 loại tiền mệnh giá 2 đồng và 5 đồng để trả tiền cho tất cả các mặt hàng có giá trị >= 8 đồng.

P(n)=“ có thể sử dụng 2 mệnh giá 2 đồng và 5 đồng trả mặt hàng mệnh giá n đồng” với mọi giá trị $n \geq 8$

- Bước cơ sở: P(8) đúng (sử dụng 4 mệnh giá 2 đồng).

  P(9) đúng (2 mệnh giá 2 đồng 1 mệnh giá 5 đồng)

- Bước chứng minh quy nạp

giả thiết quy nạp: $P(8) \wedge P(9) \wedge P(10) \wedge \ldots \wedge P(n)$ là đúng cần chứng minh P(n+1) đúng

Thật vậy vì P(n+1) đúng do P(n-1) lấy thêm 1 mệnh giá 2 đồng