III.Biểu diễn Quan hệ

1 - Biểu diễn quan hệ bằng mô tả

Giả sử R là một quan hệ từ tập A ={a_1, a_2, …a_n} tới tập B={b_1, b_2, …b_m}.

Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng mô tả tính chất các phần tử.

Ví dụ: Cho các tập A = {1, 2, 3} và B= {1, 2}

Quan hệ $R=\{(a, b) \mid a>b, a\in A, b\in B\}$

III.Biểu diễn Quan hệ

2 - Biểu diễn quan hệ bằng liệt kê các phần tử

Ví dụ: Cho các tập A = {1, 2, 3} và B= {1, 2}

Với quan hệ R={(a, b) | a>b, a$\in$A, b$\in$B}

Khi đó liệt kê các phần tử của R, ta có:

R={(2,1), (3,1), (3,2)}

III.Biểu diễn Quan hệ

3 - Biểu diễn bằng ma trận kề

Giả sử R là một quan hệ từ tập A ={a_1, a_2, …a_n} tới tập B={b_1, b_2, …b_m}.

Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng ma trận kề M={m_{ij}}, trong đó:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (\mathrm{ai}, \mathrm{bj}) \in \mathrm{R} \\ 0, & (\mathrm{a_i}, \mathrm{b}_j) \notin \mathrm{R} \end{cases}$$

3 - Biểu diễn bằng ma trận kề

Ví dụ: Cho các tập A = {1, 2, 3} và B= {1, 2}

Quan hệ R={(a, b) | a>b, a$\in$A, b$\in$B}

Khi đó biểu diễn R bằng ma trận kề:

	1	2
1	**0**	**0**
2	**1**	**0**
3	**1**	**1**

III.Biểu diễn Quan hệ

3 - Biểu diễn bằng ma trận kề

Ví dụ: Cho A={a_1, a_2, a_3}; B= {b_1, b_2, b_3, b_4, b_5}, hãy liệt kê các phần tử của quan hệ nếu biết ma trận kề của nó như sau:

	b_1	b2	b3	b4	b5
a_1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
a_2	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
a_3	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

3 - Biểu diễn bằng ma trận kề

Nhận xét: Ma trận của **quan hệ trên một tập** là ma trận vuông và có thể xác định được quan hệ đó có tính chất nào đó.

- Tính phản xạ:

Quan hệ có tính chất phản xạ nếu các phần tử trên đường chéo chính của ma trận đều bằng 1

- Tính đối xứng:

Quan hệ có tính chất đối xứng nếu các phần tử của nó đối xứng qua đường chéo chính.

III.Biểu diễn Quan hệ

3 - Biểu diễn bằng ma trận kề

Ví dụ: Có thể nhận biết quan hệ được biểu diễn bởi ma trận kề sau đây có tính chất gì?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

III.Biểu diễn Quan hệ

4 – Phép toán quan hệ trên ma trận

Cho R_1 và R_2 là 2 quan hệ trên tập A biểu diễn bằng ma trận M_{R1} và M_{R2}

- Hợp của hai quan hệ

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$$

- Giao của hai quan hệ

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

- Hợp thành của hai quan hệ

$$M_{R1 \Theta R2} = M_{R1} \Theta M_{R2}$$

-Ma trận biểu diễn hợp thành của các quan hệ A, B, C có tương ứng m, p, n phần tử

R quan hệ từ A đến B; S là quan hệ từ B đến C

Ma trận biểu diễn quan hệ R là $M_R = [\, r_{ij} \,]_{m \times p}$

Ma trận biểu diễn quan hệ S là $M_S = [\, s_{ij} \,]_{p \times n}$

Ma trận biểu diễn R_oS là $M_{RoS} = [\, t_{ij} \,]_{m \times n}$

- Cặp được sắp (a_i , c_j) thuộc R_oS nếu có một phần tử b_k sao cho (a_i, b_k) thuộc R, (b_k, c_j) thuộc S

Nói cách khác:

t_{ij} =1khi và chỉ khi $r_{ik} = s_{kj} = 1$ với k nào đó

$M_{RoS} = M_R \,\mathbf{o}\, M_S$

III.Biểu diễn Quan hệ

4 – Phép toán quan hệ ma trận

Cho 2 ma trận M_r và M_s

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{RoS} = M_R \mathbf{o}\ M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III.Biểu diễn Quan hệ

5 - Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng

Định nghĩa Đồ thị có hướng:

Đồ thị có hướng G (V, E), trong đó:

- V là tập các đỉnh.
- E là tập cạnh; E={(a, b)| a,b $\in$V}

đỉnh a gọi là đỉnh đầu, b gọi là đỉnh cuối.

* Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v là dãy các cạnh từ u đến v sao cho 2 cạnh liên tiếp là kề nhau

III.Biểu diễn Quan hệ

5 - Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng

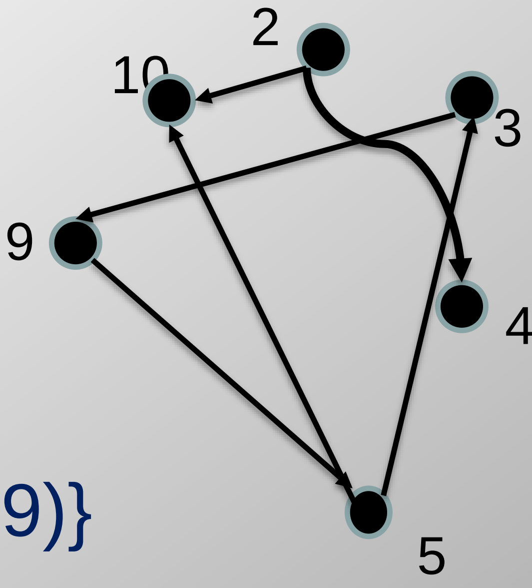
Quan hệ R={(a,b)| a,b∈A} là quan hệ trên tập A. Khi đó có thể biểu diễn quan hệ R như một đồ thị có hướng.

Ví dụ: Tập A={2, 3, 4, 5, 9, 10}

Quan hệ R trên tập A được cho bởi:

R={(2,4), (2,10), (5,3),(9,5), (5,10),(3,9)}

Vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ R.



IV.Bao đóng Quan hệ

1 – Định nghĩa

- Giả sử R là một quan hệ trên tập A.
- R có thể có một tính chất P nào đó (phản xạ, đối xứng, bắc cầu).
- Nếu S là một quan hệ có tính chất P và chứa R sao cho S là tập con của tất cả các quan hệ có tính chất P và chứa R thì S gọi là bao đóng của R đối với P

IV.Bao đóng Quan hệ

1 – Định nghĩa

Cho R là một quan hệ trên tập A.

- **Bao đóng phản xạ** của R: Một quan hệ "nhỏ nhất" chứa R và có tính chất phản xạ thì được gọi là bao đóng phản xạ của R. Ký hiệu R^*_{px}
- Định nghĩa tương tự "**Bao đóng đối xứng**": $R^*_{đx}$ và **"Bao đóng bắc cầu"**: R^*_{bc}

Bao đóng phản xạ R^*_{px} được tạo ra bằng cách thêm tất cả các cặp (a, a) với mọi a thuộc A nhưng không chứa trong R

$$bdpx\_R = R \cup \Delta; \Delta = (a,a) \mid \forall a \in A, (a,a) \notin R$$

Bao đóng đối xứng R^*_{px} được tạo ra bằng cách thêm tất cả các cặp (b, a) với (a,b) đã có trong R

$$bđđxR = R \cup R^{-1} \mid R^{-1} = (a,b) \mid (b,a) \in R, a,b \in A$$

Bao đóng bắc cầu R^*_{bc} bằng quan hệ liên thông R^*

$$M_{R^*} = M_{R^1} \cup M_{R^2} \cup \ldots M_{R^n}$$

Bao đóng phản xạ

Quan hệ R= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2) } trên tập A={1,2,3}. Tìm bao đóng phản xạ của R?

Hướng dẫn:

- Kiểm tra xem R có tính chất phản xạ không? Vì sao?
- Nếu đã có tính chất phản xạ thì bao đóng phản xạ là chính R (ban đầu).
- Nếu chưa có tính chất phản xạ cần bổ sung thêm cặp (a, a)ЄA. Để R có được tính chất phản xạ.

Ví dụ:
Quan hệ R= {(1,1), (1, 2), (2,1), (3, 2) } trên tập A={1, 2, 3}. Tìm bao đóng phản xạ của R?

Giải:
R không có tính chất phản xạ. Vì thiếu cặp Δpx= {(2, 2), (3, 3)}.
Vậy bao đóng phản xạ của quan hệ R ban đầu là:
Rpx=R U Δpx= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2), (2, 2), (3, 3)}.

Bao đóng đối xứng

Quan hệ R= {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2) } trên tập A={1,2,3} , tìm bao đóng đối xứng?

- Vậy bao đóng đối xứng được tạo ra bằng cách thêm tất cả các cặp $R^{-1} = (a,b) \mid (b,a) \in R, a,b \in A$

$$bđđxR = R \cup R^{-1} \mid R^{-1} = (a,b) \mid (b,a) \in R, a,b \in A$$

Ví dụ: Quan hệ R= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2) } trên tập A={1,2,3}. Tìm bao đóng đối xứng của R?

Hướng dẫn:

- Kiểm tra xem R có tính chất đối xứng không? Vì sao?
- Nếu đã có tính chất đối xứng thì bao đóng đối xứng là chính R (ban đầu).
- Nếu chưa có tính chất đối xứng cần bổ sung thêm cặp:

$$R^{-1} = (a,b) \mid (b,a) \in R, a,b \in A$$

Ví dụ:
Quan hệ R= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2) } trên tập A={1,2,3}. Tìm bao đóng đối xứng của R?

Giải:
R không có tính chất đối xứng. Vì thiếu cặp R^{-1}= {(2, 3)}
Vậy bao đóng đối xứng của R ban đầu là:
$R_{đx}$=R U R^{-1}={(1,1), (1,2), (2,1), (3,2), (2, 3)}.

Bao đóng bắc cầu

Đường đi trong đồ thị có hướng

Đường đi từ a đến b trong đồ thị có hướng G là dãy gồm một hoặc nhiều cạnh:

$(x_0, x_1), (x_1,x_2)\ldots(x_{n-1}, x_n)$

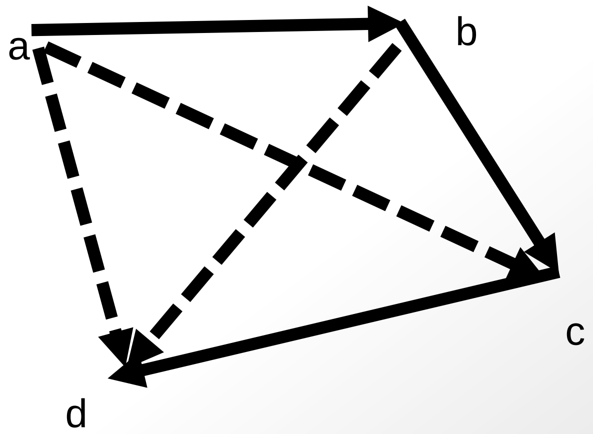
với x_0 = a đỉnh xuất phát, x_n= b đỉnh kết thúc

Ký hiệu $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ chiều dài n.

Định lý1

Cho R là một quan hệ trên tập A, có một đường đi chiều dài n từ a đến b nếu và chỉ nếu (a,b) thuộc R^n

➔ Bao đóng bắc cầu: việc tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ tương đương với việc xác định cặp đỉnh nào đó trong đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ đó được nối bằng một đường đi



có (a, b), có (b,c) cần thêm (a,c)

có (b,c), có (c,d) cần thêm (b,d)

có (a,c), có (c,d) cần thêm (a,d)

Định lý 2

Bao đóng bắc cầu của quan hệ R bằng quan hệ liên thông R*

Cho M_R là ma trận Boole - Một biểu diễn quan hệ R trên một tập gồm n phần tử. Khi đó ma trận Boole - Một biểu diễn bao đóng bắc cầu là :

$$M_{R^*} = M_{R^1} \cup M_{R^2} \cup \ldots M_{R^n}$$

- Tìm bao đóng bắc cầu dựa vào việc xây dựng đường đi trong đồ thi có hướng.

- Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị có hướng.
- Lấy R^*_{bc} =R
- Lặp: Tìm tất cả các đường đi từ mỗi đỉnh đến tất cả các đỉnh của đồ thị, nếu có thì bổ sung vào R^*_{bc}

Ví dụ: Cho tập A= {1, 2, 3, 4, 5}

Và quan hệ R={(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 2)}

Hướng dẫn:

Biểu diễn quan hệ R dưới dạng đồ thị có hướng.

Kiểm tra xem R đã có tính chất bắc cầu chưa?

Nếu thỏa mãn thì kết luận bao đóng bắc cầu R^*_{bc}= R là chính R.

Ngược lại ta bổ xung thêm các cặp dạng (a,c) với (a,b), (b,c) thuộc R

❖ Thuật toán Warshall tìm R^*_{bc} của quan hệ R (Tìm bao đóng bắc cầu của R bằng tích Bool)

Hướng dẫn:

- Biểu diễn quan hệ bằng ma trận Bool M_R.
- Xác định n. (n = số phần tử của tâp hợp).
- Tính tích bool: M_{R^1} , M_{R^2} , ...M_{R^n}

$$M_{R^*} = M_{R^1} \cup M_{R^2} \cup ...M_{R^n}$$

Ví dụ: tìm bao đóng bắc cầu bằng tích Bool.

Cho quan hệ R={ (1, 3), (1, 4), (2,1), (3, 2) } trên tập A= {1, 2, 3, 4}

Giải: Vì n= 4. Nên ta tính đến M_{R^4}

$$M_{R^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = M_{R^1} \cup M_{R^2} \cup M_{R^3} \cup M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 – Ví dụ

Quan hệ R= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2) } trên tập A={1,2,3}

R^*_{px}= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2), **(2,2), (3,3)**}

$R^*_{đx}$= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2), **(2,3)**}

R^*_{bc}= {(1,1), (1,2), (2,1), (3,2), **(3,1), (2,2)**}

IV.Bao đóng Quan hệ

2 – Ví dụ

Cho tập A= {1, 2, 3, 4, 5}

Và quan hệ R={(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 2)}

Hãy tìm R^*_{px}, $R^*_{đx}$, R^*_{bc}?

$R^*_{px} = R \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5,5)\}$

$R^*_{đx} = R \cup \{(2,1), (3,2), (4,1), (4,3), (5,3), (2,4)\}$

R^*_{bc}=????