Câu 1

Đề:

Hãy xây dựng không gian các biến cố cơ sở (Không gian mẫu) cho phép thử: Tung 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất, nếu xuất hiện mặt khác 6 chấm thì tung tiếp đồng tiền cân đối, còn nếu xuất hiện mặt 6 chấm thì tung tiếp con xúc xắc lần nữa.

a. Cho biết không gian các biến cố cơ sở trên có đồng khả năng không.

b. Tính xác xuất để con xúc xắc lần thứ 2 cũng xuất hiện mặt 6 chấm.

Giải:

Không gian mẫu:
$\Omega = \{(1,S),(1,N),(2,S),(2,N),(3,S),(3,N),(4,S),(4,N),(5,S),$
$(5,N),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
Với: 1..6 là số chấm thu được khi tung xúc xắc, S và N lần lượt là sấp và ngửa khi tung đồng xu.

Gọi:
- X số chấm khi tung xúc xắc lần 1.
- Y số chấm khi tung xúc xắc lần 2.
- Z là biến cố tung đồng tiền lần 2 thu được mặt sấp.

a.

Không gian các biến cố cơ sở trên không đồng khả năng vì:
$P(X=2,Z) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
$P(X=6,Y=5) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b.

Xác suất để con xúc xắc lần thứ 2 cũng xuất hiện mặt 6 chấm là:

$$P(Y=6,X=6) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Câu 2

Đề:

Có 2 chiếc hòm, hòm 1 chứa 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen. Hòm 2 chứa 3 quả cầu trắng và 7 quản cầu đen. Người ta lấy ngẫn nhiên 1 quả cầu từ hòm 1 sang hòm 2 rồi lại lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu từ hòm 2 bỏ trở lại hòm 1. Tính xác suất để cuối cùng khi lấy 1 quả cầu từ hòm 1 ta được quả cầu trắng.

Giải:

Gọi X là biến cố lấy được quả cầu trắng từ hòm 1 sáng hòm 2.
Ta có: $P(X) = 6/10$, $P(\overline{X}) = 4/10$
Gọi Y là biến cố lấy được quả cầu trắng từ hòm 2 sang hòm 1.
Ta có $XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{XY}$ tạo thành 1 hệ đầy đủ

$$P(XY) = P(X) * P(Y/X) = \frac{6}{10} * \frac{4}{11} = \frac{12}{55}$$
$$P(X\overline{Y}) = P(X) * P(\overline{Y}/X) = \frac{6}{10} * \frac{7}{11} = \frac{21}{55}$$
$$P(\overline{X}Y) = P(\overline{X}) * P(Y/\overline{X}) = \frac{4}{10} * \frac{3}{11} = \frac{6}{55}$$
$$P(\overline{XY}) = P(\overline{X}) * P(\overline{Y}/\overline{X}) = \frac{4}{10} * \frac{8}{11} = \frac{16}{55}$$

Gọi Z là biến cố lấy được quả cầu trắng từ hòm 1 cuối cùng.
Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được:

$$\begin{aligned}
P(Z) &= P(XY)P(Z/XY) + P(\overline{X}Y)P(Z/\overline{X}Y) + P(X\overline{Y})P(Z/X\overline{Y}) + P(\overline{XY})P(Z/\overline{XY}) \\
&= \frac{12}{55} * \frac{6}{10} + \frac{6}{55} * \frac{7}{10} + \frac{21}{55} * \frac{5}{10} + \frac{16}{55} * \frac{6}{10} \\
&= \frac{63}{110}
\end{aligned}$$

Câu 3

Đề:

Một người mang 4 viên đạn vào thao trường để thử súng theo phương án: Bắn liên tiếp từng phát vào một bia cố định cho đến khi trúng 2 phát liên tiếp vào bia hoặc hết thì dừng. Gọi X là số viến đạn anh ta sẽ bắn ra.

a. Tính và vẽ đồ thị hàm phân phối cho X.

b. Tính kì vọng và phương sai của X.

Giải:

a.

Gọi p là xác suất người đó bắn trúng bia.
$P(X=2)=p^2$
$P(X=3)=(1-p)p^2$
$P(X=4)=1-(p^2+(1-p)p^2)=1-(2-p)p^2$
Ta có bảng phân bố:

X	2	3	4
P	p^2	$(1-p)p^2$	$1-(2-p)p^2$

Hàm phân bố:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 2 \\ p^2 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 2p^2-p^3 & \text{nếu } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{nếu } 4 < x \end{cases}$$

Tự vẽ hình

b.

Kì vọng:
$E(X)=2p^2+3(1-p)p^2+4(1-(2-p)p^2)=4-3p^2+p^3$
Phương sai:
$E(X^2)=4p^2+9(1-p)p^2+16(1-(2-p)p^2)=16-9p^2+7p^3$
$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=16-9p^2+7p^3-(4-3p^2+p^3)^2$

Câu 4

Đề:

Cho $X_1, X_2, ...X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn với các tham số lần lượt là (μ_1, σ_1^2), (μ_2, σ_2^2), ... (μ_n, σ_n^2) tương ứng.

- Cho biết hàm mật dộ phân phối và hàm đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Tìm giá trị của xác suất:

$$P\left(\left|Y - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu_i\right| \leq \frac{2}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\right)$$

Giải:

1.

Có $X_1, X_2, ...X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên **độc lập** có phân phối chuẩn nên Y cũng có phân phối chuẩn với kì vọng và phương sai là:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \overline{\mu} \\
D(Y) &= D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Đặt $\mu = E(Y), \sigma = \sqrt{D(Y)}$

Hàm phân bố của Y: $F_Y(x) = P(Y < x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Với $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$

Hàm mật độ của Y: $f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Có hàm đặc trưng của phân phối chuẩn là:

$$g_Y(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{it\mu_i - \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}$$

với $\mu = E(Y)$ và $\sigma^2 = D(Y)$

2.

Vì Y tuân theo phân phối chuẩn nên ta có:

$$P\left(\left|Y - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mu_i\right| \leq \frac{2}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right) = P(|Y-\mu| \leq 2\sigma) = P(\mu-2\sigma < Y < \mu+2\sigma) = 95.5\%$$

Câu 5

Đề:

Cho $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân phối xác suất:

$$P\left(X_n = n^{\alpha}\right) = P\left(X_n = -n^{\alpha}\right) = \frac{1}{2}.$$

a. Hãy tính kỳ vọng và phương sai của X_n(n = 1,2,...).

b. Chứng minh rằng dãy trên tuân theo luật số lớn với $\alpha < \frac{1}{2}$.

Giải:

a.

Bảng phân bố xác xuất cho X_n:

X_n	n^α	$-n^\alpha$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Kì vọng: $E(X_n) = n^\alpha * \frac{1}{2} - n^\alpha * \frac{1}{2} = 0$
Phương sai:
$E(X_n^2) = n^{2\alpha} * \frac{1}{2} + n^{2\alpha} * \frac{1}{2} = n^{2\alpha}$
$D(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = n^{2\alpha}$

b.

Chứng minh: Tuân theo luật số lớn với $\alpha < \frac{1}{2}$
Đặt $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
Ta có:
$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i)$
Do $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập nên:

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i^{2\alpha}$$

Có $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow i^{2\alpha} < i \Rightarrow D(\overline{X}) < \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = 0.5 + \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = 0.5 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i) = 0.5$$

$\Rightarrow$ Không thể chứng minh yêu cầu đề bài !