PGS.TS ĐỖ VĂN LƯU - PGS.TS PHAN HUY KHẢI

GIẢI TÍCH LỒI

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2000

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích lồi đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết các bài toán cực trị và các ngành toán học ứng dụng có sử dụng công cụ giải tích và không gian tuyến tính. Sau các kết quả đầu tiên của H.Minkowski (1910) về tập lồi và hàm lồi, lý thuyết giải tích lồi đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Lý thuyết giải tích lồi được hoàn thiện khoảng ba chục năm nay, sau các công trình nổi tiếng của H.Minkowski, C.Carathéodory, W.Fenchel, J.J.Moreau, R.T.Rockafellar, L.Klee, A.Brondsted, W.V. Jensen, G.Choquet,...

Giáo trình này trình bày các kiến thức cơ bản của giải tích lồi và một số ứng dụng trong lý thuyết các bài toán cực trị. Chương I trình bày các kiến thức về tập lồi và nón lồi trong không gian lồi địa phương và trong không gian hữu hạn chiều, cùng với định lý nổi tiếng của Carathéodory về tập lồi. Chương II nghiên cứu hàm lồi, các phép toán về hàm lồi và tính liên tục của hàm lồi trong không gian lồi địa phương. Chương III trình bày các định lý tách cơ bản, các tính chất *của hàm liên hợp, bao gồm định lý Fenchel-Moreau và các định lý đối ngẫu quan trọng. Chương IV nghiên cứu khái niệm dưới vi phân hàm lồi và các định lý cơ bản về dưới vi phân, trong đó có định lý Moreau-Rockafellar. Lớp hàm lồi địa phương cũng được khảo sát trong chương này. Dựa trên các kết quả đã nghiên cứu trong các chương trước, chương V trình bày các điều kiện cực trị cho lớp các bài toán lồi, trơn và bài toán trơn-lồi tổng quát. Sau mỗi chương đều có bài tập nhằm củng cố và nâng cao nội dung kiến thức đã trình bày.*

Để hiểu được giáo trình này, độc giả cần có một số kiến thức tối thiểu về giải tích hàm và đại số tuyến tính. Giáo trình này dành cho các học viên cao học, nghiên cứu sinh và sinh viên toán của các trường đại học. Giáo trình đang được dùng làm tài liệu cho học viên cao học của Viện Toán học. *Các tác giả xin chân thành cảm ơn Trung tâm Đào tạo sau đại học - Viện Toán học, đã động viên khuyến khích các tác giả biên soạn và Cử nhân Đỗ Kim Chung, TS Vũ Văn Đạt đã xử lý văn bản cuốn sách trên hệ soạn thảo AMSTEX.*

CÁC TÁC GIẢ

Chương I

TẬP LỒI

1.1. TẬP LỒI

1.1.1. Định nghĩa và tính chất

Giả sử X là không gian tuyến tính, R là tập các số thực.

Định nghĩa 1.1. Tập $A \subset X$ được gọi là *lồi*, nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \lambda \in R : 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A.$$

Chú ý: theo định nghĩa, tập $\emptyset$ được xem là tập lồi.

Giả sử $A \subset X; x_1, x_2 \in A$.

Định nghĩa 1.2. *Đoạn nối* x_1, x_2 được định nghĩa như sau:

$$[x_1, x_2] = \{ x \in A : x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \ 0 \leq \lambda \leq 1 \}.$$

Nhận xét 1.1

Tập A là lồi, nếu: $\forall x_1, x_2 \in A \quad \Longrightarrow \quad [x_1, x_2] \subset A.$

Ví dụ 1.1

Các nửa không gian là các tập lồi. Các tam giác và hình tròn trong mặt phẳng là các tập lồi. Hình cầu đơn vị trong không gian Banach là tập lồi...

Mệnh đề 1.1. Giả sử $A_\alpha \subset X$ $(\alpha \in I)$ là các tập lồi, với I là tập chỉ số bất kỳ. Khi đó, tập $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ cũng lồi.

Chứng minh

Lấy $x_1, x_2 \in A$. Khi đó, $x_1, x_2 \in A_\alpha$ $(\forall \alpha \in I)$. Với $\forall \alpha \in I$, do A_α lồi, cho nên:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha \quad (\forall \lambda \in [0,1]).$$

$\Longrightarrow \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A.$ □

Từ định nghĩa 1.1 ta nhận được các mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2. Giả sử tập $A_i \subset X$ lồi, $\lambda_i \in R$ $(i = 1, \ldots, m)$. Khi đó, $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_m A_m$ là tập lồi.

Mệnh đề 1.3. Giả sử X_i là không gian tuyến tính, tập $A_i \subset X_i$ lồi $(i = 1, \ldots, m)$. Khi đó, tích Đề các $A_1 \times \ldots \times A_m$ là tập lồi trong $X_1 \times \ldots \times X_m$.

Mệnh đề 1.4. Giả sử X, Y là các không gian tuyến tính, $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính. Khi đó,

a) $A \subset X$ lồi $\Longrightarrow$ $T(A)$ lồi;

b) $B \subset Y$ lồi $\Longrightarrow$ Nghịch ảnh $T^{-1}(B)$ của B là tập lồi.

Định nghĩa 1.3. Vectơ $x \in X$ được gọi là *tổ hợp lồi* của các vectơ $x_1, \ldots, x_m \in X$, nếu $\exists \lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, sao cho $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.

Định lý 1.1. Giả sử tập $A \subset X$ lồi; $x_1, \ldots, x_m \in A$. Khi đó, A chứa tất cả các tổ hợp lồi của $x_1, \ldots, x_m$.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng quy nạp.

$m = 2$: với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, x_1, x_2 \in A$, theo định nghĩa 1.1, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$.

Giả sử kết luận đúng với $m \leq k$. Ta sẽ chứng minh rằng: $\forall x_1, \ldots, x_{k+1} \in A, \forall \lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k+1), \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$,

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in A.$$

Có thể xem như $\lambda_{k+1} < 1$, bởi vì nếu $\lambda_{k+1} = 1$ thì $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ và ta có ngay $x \in A$. Khi đó,

$$1 - \lambda_{k+1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k > 0,$$

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Bởi vì $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$, cho nên theo giả thiết qũy nạp ta có:

$$y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} x_k \in A.$$

Với các điểm $y \in A$ và $x_{k+1} \in A$, ta có:

$$1 - \lambda_{k+1} > 0, (1 - \lambda_{k+1}) + \lambda_{k+1} = 1,$$

Do đó,

$$x = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in A.$$

□

1.1.2. Bao lồi và bao lồi đóng

Định nghĩa 1.4. Giả sử $A \subset X$. Tương giao của tất cả các tập lồi chứa A được gọi là *bao lồi (convex hull)* của tập A, và ký hiệu là coA.

Nhận xét 1.2

a) coA là một tập lồi. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa A.

b) A lồi $\iff A = coA$.

Định lý 1.2. coA trùng với tập tất cả các tổ hợp lồi của A.

Chứng minh

Theo nhận xét 1.2, coA lồi. Bởi vì $A \subset coA$, cho nên coA chứa tất cả các tổ hợp lồi của A (định lý 1.1).

Mặt khác, tập tất cả các tổ hợp lồi của A là lồi, chứa A. Do đó, nó chứa coA. □

Hệ quả 1.2.1. Tập A lồi khi và chỉ khi A chứa tất cả các tổ hợp lồi của A.

Bây giờ giả sử X là không gian lồi địa phương.

Định nghĩa 1.5. Giả sử $A \subset X$. Tương giao của tất cả các tập lồi đóng chứa A được gọi là *bao lồi đóng* của tập A, và kí hiệu là $\overline{co}A$.

Nhận xét 1.3

$\overline{co}A$ là một tập lồi đóng. Đó là tập lồi đóng nhỏ nhất chứa A.

Mệnh đề 1.5. Giả sử $A \subset X$ lồi. Khi đó,

a) Phần trong $intA$ và bao đóng $\bar{A}$ của A là các tập lồi;

b) Nếu $x_1 \in intA$, $x_2 \in A$, thì

$$[x_1, x_2) = \{ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \ 0 < \lambda \le 1 \} \subset intA.$$

Nói riêng, nếu $intA \neq \emptyset$ thì

$$\bar{A} = \overline{intA}, \ int\bar{A} = intA.$$

Chứng minh

Lấy $x_1 \in intA, x_2 \in A$. Khi đó, tồn tại lân cận U của x_1 sao cho $U \subset A$.

Đặt $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ $(0 < \lambda < 1)$, ta có $\lambda U + (1-\lambda)x_2$ là một lân cận của x và $\lambda U + (1-\lambda)x_2 \subset A \implies x \in intA \implies intA$ lồi.

Bây giờ lấy $x_1, x_2 \in \bar{A}$. Đặt:

$$x = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad (0 < \lambda < 1).$$

Giả sử U là một lân cận lồi của 0. Do $x_i \in \bar{A}$, nên

$$(x_i + U) \cap A \neq \emptyset \quad (i = 1, 2).$$

$\implies \quad \exists x'_i \in (x_i + U) \cap A \quad (i = 1, 2).$

Đặt $x' = \lambda x'_1 + (1-\lambda)x'_2$. Khi đó,

$$x' \in \lambda(x_1 + U) + (1-\lambda)(x_2 + U) = x + U.$$

$\implies \quad (x + U) \cap A \neq \emptyset.$

$\implies \quad x \in \bar{A} \implies \bar{A}$ lồi. □

Định lý 1.3. Bao lồi đóng của tập A trùng với bao đóng của bao lồi của A, tức là:

$$\overline{co}A = \overline{coA}$$

Chứng minh

Theo mệnh đề 1.5, $\overline{coA}$ lồi. Như vậy, $\overline{coA}$ là tập lồi đóng chứa A. Do đó,

$$\overline{coA} \supset \overline{co}A. \tag{1.1}$$

Mặt khác, $\overline{co}A \supset coA$, bởi vì coA là tương giao của tất cả các tập lồi (không cần đóng) chứa A. Vì vậy,

$$\overline{co}A \supset \overline{coA}. \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra $\overline{co}A = \overline{coA}$. □

1.2. NÓN LỒI

Giả sử X là không gian tuyến tính.

Định nghĩa 1.6. Tập $K \subset X$ được gọi là *nón* có đỉnh tại 0, nếu:

$$\forall x \in K, \forall \lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda x \in K.$$

K được gọi là nón có đỉnh tại x_0, nếu $K - x_0$ là nón có đỉnh tại 0.

Định nghĩa 1.7. Nón K có đỉnh tại 0 được gọi là *nón lồi,* nếu K là một tập lồi, có nghĩa là:

$$\forall x, y \in K,\ \forall \lambda, \mu > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + \mu y \in K.$$

Ví dụ 1.2

Các tập sau đây trong R^n :

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n :\ \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

(orthant không âm),

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n : \xi_i > 0, i = 1, \ldots, n\}$$

(orthant dương)

là các nón lồi có đỉnh tại 0. Đó là các nón lồi quan trọng trong R^n.

Mệnh đề 1.6. Giả sử K_α $(\alpha \in I)$ là các nón lồi có đỉnh tại x_0 với I là tập chỉ số bất kỳ. Khi đó, $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ là nón lồi có đỉnh tại x_0.

Chứng minh. Suy ra từ định nghĩa 1.7. □

Ví dụ 1.3

$X = R^n$, $b_\alpha \in R^n$ $(\alpha \in I)$. Khi đó,

$$K = \{ x \in R^n : < x, b_\alpha > \leq 0, \ \forall \alpha \in I \}$$

là một nón lồi bởi vì $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$, trong đó

$$K_\alpha = \{ x \in R^n : < x, b_\alpha > \leq 0 \}$$

là nón lồi.

Định lý 1.4. Tập $K \subset X$ là một nón lồi có đỉnh tại 0 khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in K, \ \forall \lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y \in K, \ \lambda x \in K.$$

Chứng minh

a) Giả sử K là nón lồi. Khi đó, do K là tập lồi, ta có:

$$z = \frac{1}{2}(x + y) \in K.$$

Do K là nón có đỉnh tại 0, ta lại có:

$$x + y = 2z \in K.$$

b) Ngược lại, với $\forall x \in K, \forall \lambda > 0$ ta có $\lambda x \in K$, vậy K là một nón có đỉnh tại 0. Với $0 < \lambda < 1, x, y \in K$ ta có $(1 - \lambda)x \in K$, $\lambda y \in K$ và $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$. Chú ý với $\lambda = 0$ hoặc 1 ta vẫn có $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$. Vậy K là nón lồi có đỉnh tại 0. □

Hệ quả 1.4.1. Tập $K \subset X$ là nón lồi $\Longleftrightarrow$ K chứa tất cả các tổ hợp tuyến tính dương của các phần tử của K, tức là nếu $x_1, \ldots, x_m \in K$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ thì $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in K$.

Hệ quả 1.4.2. Giả sử A là tập bất kỳ trong X, K là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính dương của A. Khi đó, K là nón lồi nhỏ nhất chứa A.

Chứng minh

K là nón lồi có đỉnh tại 0, bởi vì K đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng. Ta có $K \supset A$. Hơn nữa, mọi nón lồi chứa A thì phải chứa K.

Định nghĩa 1.8. Tương giao của tất cả các nón lồi (có đỉnh tại 0) chứa tập A và điểm 0 là một nón lồi và được gọi là *nón lồi sinh bởi tập* A, ký hiệu là K_A.

Định nghĩa 1.9. Tương giao của tất cả các không gian con tuyến tính chứa tập A được gọi là *bao tuyến tính* của tập A, ký hiệu là $linA$.

Nhận xét 1.4

$$linA = K_A + K_A.$$

Mệnh đề 1.7

a) $K_A = K_{coA}$.

b) Nếu A là tập lồi thì:

$$K_A = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda A = \{ x \in X : x = \lambda z, \ \lambda \geq 0, \ z \in A \}.$$

Chứng minh. Phần này dễ dàng được chứng minh (bạn đọc tự làm). □

Sau đây ta đưa ra vài loại nón được sử dụng nhiều trong giải tích lồi và tối ưu.

Giả sử X là không gian lồi địa phương, X^* là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

Định nghĩa 1.10. Vectơ $x^* \in X^*$ được gọi là *pháp tuyến* của tập lồi A tại $\bar{x} \in A$, nếu:

$$< x^*, x - \bar{x} > \leq 0 \quad (\forall x \in A).$$

Tập tất cả các vectơ pháp tuyến của tập lồi A tại $\bar{x} \in A$ được gọi là *nón pháp tuyến* của A tại $\bar{x}$, ký hiệu là $N(\bar{x}|A)$. Như vậy,

$$N(\bar{x}|A) = \{x^* \in X^* : < x^*, x - \bar{x} > \leq 0, \ \forall x \in A\}.$$

Nhận xét 1.5

Nón pháp tuyến của tập lồi A tại $\bar{x} \in A$ là lồi đóng.

Bây giờ giả sử X là không gian tuyến tính.

Định nghĩa 1.11. Giả sử $A \subset X$ lồi, khác $\emptyset$. Ta nói tập A *lùi xa* theo phương $d \neq 0$, nếu $A + \lambda d \subset A$ $(\forall \lambda \geq 0)$, hay

$$x + \lambda d \in A \quad (\forall \lambda \geq 0, \ \forall x \in A). \qquad (1.3)$$

Nhận xét 1.6

Tập A lùi xa theo phương d nếu A chứa tất cả các nửa đường thẳng xuất phát từ các điểm của A và theo phương d.

Định nghĩa 1.12. Tập các vectơ $d \in X$ thỏa mãn (1.3) và vectơ $d = 0$ được gọi là *nón lùi xa* (recession cone) của A; ký hiệu là $o^+ A$.

Định lý 1.5. Giả sử tập $A \subset X$ lồi, khác $\emptyset$. Khi đó, o^+A là nón lồi chứa điểm 0. Đồng thời,

$$o^+A = \{d \in X : \; A + d \subset A\}. \tag{1.4}$$

Chứng minh

a) Trước hết chứng minh (1.4).

Lấy $d \in o^+A$. Khi đó, $x + \lambda d \in A$ $(\forall \lambda \geq 0, \forall x \in A)$. Với $\lambda = 1$, ta có $x + d \in A$ $(\forall x \in A)$, tức là

$$A + d \subset A.$$

$$\Longrightarrow \quad o^+A \subset \{d \in X : \; A + d \subset A\}. \tag{1.5}$$

Ngược lại, lấy $d \in X$ thỏa mãn $A + d \subset A$.

$\Longrightarrow \quad A + 2d = (A + d) + d \subset A + d \subset A.$

$\Longrightarrow \quad x + md \in A$ $(\forall x \in A, \forall m-$ nguyên dương).

Do A lồi, đoạn thẳng nối các điểm $x, x+d, x+2d, \ldots$ nằm trong A. Vì vậy,

$$x + \lambda d \in A \quad (\forall \lambda \geq 0).$$

$\Longrightarrow \quad d \in o^+A$

$$\Longrightarrow \quad \{d \in X : \; A + d \subset A\} \subset o^+A. \tag{1.6}$$

Từ (1.5), (1.6) ta suy ra (1.4).

b) Chứng minh o^+A là nón lồi.

Bởi vì phép nhân với số dương không làm thay đổi phương, cho nên o^+A là một nón.

Lấy $d_1, d_2 \in o^+A$, $0 \le \lambda \le 1$. Do A lồi, ta có:

$$(1-\lambda)d_1 + \lambda d_2 + A = (1-\lambda)(d_1 + A) + \lambda(d_2 + A)$$
$$\subset (1-\lambda)A + \lambda A = A.$$

$\Longrightarrow \quad (1-\lambda)d_1 + \lambda d_2 \in o^+A \quad \Longrightarrow \quad o^+A$ lồi.

Vậy o^+A là nón lồi. □

Ví dụ 1.4. $X = R^2$.

a) $C_1 = \{(x,y): \ x > 0, \ y \ge \frac{1}{x}\}$

$\Longrightarrow \quad o^+C_1 = \{(x,y): \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$.

b) $C_2 = \{(x,y): \ y \ge x^2\}$

$\Longrightarrow \quad o^+C_2 = \{(x,y): \ x = 0, y \ge 0\}$.

c) $C_3 = \{(x,y): \ x^2 + y^2 \le 1\}$

$\Longrightarrow \quad o^+C_3 = \{(x,y): \ x = y = 0\} = \{(0,0)\}$.

d) $C_4 = \{(x,y): \ x > 0, \ y > 0\} \cup \{(0,0)\}$

$\Longrightarrow \quad o^+C_4 = C_4$.

1.3. ĐỊNH LÝ CARATHÉODORY

Giả sử X là không gian hữu hạn chiều: $X = R^n$.

Định lý 1.6. Giả sử $A \subset R^n$ khác $\emptyset$, K_A là nón lồi sinh bởi tập A. Khi đó, mỗi điểm $x \ne 0$ thuộc K_A có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r,$$

trong đó $\lambda_i > 0, x_i \in A$ $(i = 1, \dots, r)$, các điểm $x_1, \dots, x_r$ độc lập tuyến tính. Nói riêng, $r \leq n$.

Chứng minh

Lấy $x \in K_A$, $x \neq 0$. Theo định lý 1.2 và mệnh đề 1.7, ta có:

$$x = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k, \tag{1.7}$$

với $\mu_i > 0, x_i \in A$ $(i = 1, \dots, k)$.

Giả sử các vectơ $x_1, \dots, x_k$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, tồn tại các số $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k = 0. \tag{1.8}$$

Như vậy, trong các số $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ có các $\gamma_i > 0$ (Nếu không ta đổi dấu toàn bộ $\gamma_1, \dots, \gamma_k$).

Ký hiệu :

$$J = \{i \in \overline{\{1, k\}} : \ \gamma_i > 0\}.$$

Đặt:

$$\beta = \min_{i \in J} \frac{\mu_i}{\gamma_i},$$
$$\mu'_i = \mu_i - \beta\gamma_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Khi đó, $\mu'_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, k)$ và có ít nhất một $\mu'_{i_0} = 0$.

Mặt khác, từ (1.7), (1.8) ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i' x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \beta \sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = x.$$

Như vậy, ta nhận được biểu diễn của x dưới dạng tổng không quá $k-1$ số hạng khác 0.

Lặp lại quá trình trên một số hữu hạn lần ta nhận được kết quả cần chứng minh. □

Định lý 1.7 *(Định lý Carathéodory)*

Giả sử $A \subset R^n$. Khi đó, mỗi điểm của tập coA là tổ hợp lồi không quá $n+1$ điểm khác nhau của A.

Chứng minh

Xét tập hợp:

$$B = \{1\} \times A = \{(1,x) : x \in A\} \subset R \times R^n.$$

Ta có:

$$coB = \{1\} \times coA.$$

Giả sử K_B là nón lồi sinh bởi B. Khi đó,

$$coB \subset K_B.$$

Theo định lý 1.6, nếu $(1,x) \in coB$ thì tồn tại r điểm $(1,x_1),\dots,(1,x_r) \in B$ và r số $\lambda_1 > 0,\dots,\lambda_r > 0$ với $r \leq$

$n+1$, sao cho:

$$(1, x) = \lambda_1(1, x_1) + \ldots + \lambda_r(1, x_r).$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r = x, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1. \end{cases} \qquad \square$$

Định lý 1.8. Giả sử tập $A \subset R^n$ đóng, bị chặn. Khi đó, coA đóng, tức là:

$$coA = \overline{co}A.$$

Chứng minh

Xét tập hợp sau trong R^{n+1} :

$$S = \{a = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) : \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n+1,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

Xét ánh xạ $\varphi : R^{n+1} \times \underbrace{R^n \times \ldots \times R^n}_{n+1 \text{lần}} \longrightarrow R^n$ được xác định như sau: với $a = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in R^{n+1}$, $x_i \in R^n$ $(i = 1, \ldots, n+1)$,

$$\varphi(a, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

Ta có:

φ liên tục, S và A compăc $\Longrightarrow$ $S \times \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n+1 \text{ lần}}$ compăc

$\Longrightarrow$ $\varphi(S, A, \ldots, A)$ compăc $\Longrightarrow$ $\varphi(S, A, \ldots, A)$ đóng.

Mặt khác, theo định lý Carathéodory,

$$\varphi(S, A, \ldots, A) = coA.$$

Vì vậy, $coA = \overline{co}A$. □

1.4. TẬP AFFINE VÀ BAO AFFINE

1.4.1. Tập affine

Định nghĩa 1.13. Tập $A \subset R^n$ được gọi là tập affine, nếu

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in A \quad (\forall x, y \in A, \forall \lambda \in R).$$

Nhận xét 1.7.

Nếu A là tập affine, thì với $a \in R^n$,

$$A + a = \{x + a : x \in A\}$$

là tập affine .

Mệnh đề 1.8. Tập $M \subset R^n$ là không gian con $\Longleftrightarrow$ M là tập affine chứa 0.

Chứng minh

a) Giả sử M là không gian con. Khi đó, $0 \in M$ và M là đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng. Vậy M là tập affine .

b) Ngược lại, giả sử M là tập affine chứa 0. Khi đó, $\forall x, y \in M, \forall \lambda \in R$,

$$\lambda x = (1-\lambda)0 + \lambda x \in M,$$
$$x + y = 2[\frac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2})y] \in M.$$

Như vậy, M là đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng. □

Định nghĩa 1.14. Tập affine A được gọi là *song song* với tập affine M, nếu tồn tại $a \in R^n$ sao cho:

$$A = M + a.$$

Ký hiệu $A//M$.

Định lý 1.9. Mỗi tập affine $A \neq \emptyset$ song song với một không gian con duy nhất L được xác định như sau:

$$L = A - A = \{x - y : \ x \in A, y \in A\}.$$

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh rằng: nếu A song song với các không gian con L_1, L_2 thì $L_1 = L_2$.

Thật vậy, ta có $L_1//L_2 \implies \exists a \in R^n : L_2 = L_1 + a.$

Ta lại có $0 \in L_2 \implies -a \in L_1 \implies a \in L_1$

$\implies \quad L_1 \supset L_1 + a = L_2.$

Tương tự ta nhận được $L_2 \supset L_1$. Do đó, $L_1 = L_2$. Như vậy, tính duy nhất được chứng minh.

Lấy $y \in A$, ta có $A - y$ là tập affine chứa 0. Vậy $A - y$ là không gian con duy nhất $L//A$. Bởi vì $L = A - y$ và y tùy ý, cho nên $L = A - A$. □

Từ định lý 1.9 ta có thể định nghĩa được chiều của một tập affine.

Định nghĩa 1.15. Chiều của một tập affine không rỗng được định nghĩa là chiều của không gian con song song với nó.

Chú ý: ta quy ước $dim\emptyset = -1$.

Giả sử L là một không gian con trong R^n. *Phần bù trực giao* của L được xác định như sau:

$$L^{\perp} = \{x \in R^n : \; x \perp y, \; \forall y \in L\},$$

trong đó

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad < x, y >= 0.$$

Khi đó, tập $L^{\perp}$ cũng là một không gian con, và

$$dimL + dimL^{\perp} = n,$$

$$(L^{\perp})^{\perp} = L.$$

Định nghĩa 1.16. Tập affine $n-1$ chiều trong R^n được gọi là một *siêu phẳng*.

Định lý 1.10. Giả sử $\beta \in R$, $0 \neq b \in R^n$. Khi đó, tập:

$$H = \{x \in R^n : < x, b >= \beta\}$$

là một siêu phẳng trong R^n. Hơn nữa, mọi siêu phẳng đều có thể biểu diễn duy nhất bằng cách này (theo nghĩa: đồng nhất các siêu phẳng có b và β được nhân với cùng một số).

Chứng minh

Trước hết ta chú ý: các không gian con $n-1$ chiều là các tập có dạng $\{x \in R^n : \ x \perp b\}$ $(b \neq 0)$; các siêu phẳng là các dịch chuyển của chúng. Như vậy,

$$\begin{aligned} H &= \{x \in R^n : \ x \perp b\} + a \\ &= \{x + a :< x, b >= 0\} \\ &= \{y \in R^n : < y - a, b >= 0\} \\ &= \{y \in R^n : < y, b >= \beta\}. \end{aligned}$$

□

Định lý 1.11. Giả sử B là $m \times n-$ ma trận, $b \in R^m$. Khi đó, tập hợp:

$$M = \{x \in R^n : \ Bx = b\} \tag{1.9}$$

là affine trong R^n. Hơn nữa, mọi tập affine đều có thể biểu diễn dưới dạng (1.9).

Chứng minh

Lấy $x, y \in M, \lambda \in R$. Đặt $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, ta có:

$$Bz = (1-\lambda)Bx + \lambda By = (1-\lambda)b + \lambda b = b.$$

$\Longrightarrow \quad z \in M.$

Do đó, M là tập affine.

Giả sử A là tập affine khác $\emptyset$ của R^n; L là không gian con song song với A; $b_1, \ldots, b_m$ là một cơ sở của $L^\perp$. Khi đó,

$$\begin{aligned} L = (L^\perp)^\perp &= \{x \in R^n : \ x \perp b_1, \ldots, x \perp b_m\} \\ &= \{x \in R^n : < x, b_i >= 0, \ i = 1, \ldots, m\} \\ &= \{x \in R^n : \ Bx = 0\}, \end{aligned}$$

trong đó B là $m \times n-$ ma trận có các hàng là $b_1, \ldots, b_m$.

Bởi vì $A//L$, cho nên $\exists a \in R^n$ sao cho:

$$\begin{aligned} A = L + a = \{x \in R^n : B(x-a) = 0\} \\ = \{x \in R^n : \ Bx = b\}, \end{aligned}$$

trong đó $b = Ba$.

Chú ý: nếu $A = R^n$, ta lấy B là $m \times n-$ ma trận 0 và $b = 0$. Nếu $A = \emptyset$, ta lấy B là $m \times n-$ ma trận 0 và $b \neq 0$. □

Hệ quả 1.11.1. Mọi tập affine A trong R^n là tương giao của một số hữu hạn các siêu phẳng.

Chứng minh

Theo định lý 1.11,

$$A = \{x \in R^n : < x, b_i >= \beta_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{m} H_i,$$

trong đó $H_i = \{x \in R^n : < x, b_i >= \beta_i\}$.

$$\text{Mỗi } H_i \text{ là: } \begin{cases} \text{một siêu phẳng, nếu } b_i \neq 0, & \\ \emptyset & \text{, nếu } b_i = 0, \beta_i \neq 0, \\ R^n & \text{, nếu } b_i = 0, \beta_i = 0. \end{cases}$$

Tập $\emptyset$ ở đây có thể xem là tương giao của hai siêu phẳng khác nhau và song song với nhau; R^n có thể xem là tương giao của một họ rỗng các siêu phẳng của R^n. □

1.4.2. Bao affine

Định nghĩa 1.17. Tương giao của tất cả các tập affine chứa tập $A \subset R^n$ được gọi là *bao affine* (affine hull) của A, và ký hiệu là $affA$.

Nhận xét 1.8

$affA$ là tập affine nhỏ nhất chứa A.

Định nghĩa 1.18. Điểm $x \in R^n$ được gọi là *tổ hợp affine* của các điểm $x_1, \ldots, x_m \in R^n$, nếu $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sao cho: $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.

Nhận xét 1.9

$affA$ trùng với tập tất cả các tổ hợp affine các điểm của A :

$$affA = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m : x_i \in A, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

Định nghĩa 1.19. Tập $m+1$ điểm $b_0, b_1, \ldots, b_m$ được gọi là *độc lập affine* (affinely independent), nếu $aff\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ là m chiều.

Nhận xét 1.10

$b_0, b_1, \ldots, b_m$ độc lập affine $\iff$ $b_1 - b_0, \ldots, b_m - b_0$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy,

$$aff\{b_0, b_1, \ldots, b_m\} = L + b_0,$$

trong đó $L = aff\{0, b_1 - b_0, \ldots, b_m - b_0\}$.

Do đó, $dimL = m \iff b_1 - b_0, \ldots, b_m - b_0$ độc lập tuyến tính.

Nhận xét 1.11

Từ nhận xét 1.10 suy ra:

a) $b_0, b_1, \ldots, b_m$ độc lập affine, nếu:

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0\right] \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$$

b) Nếu $b_0, b_1, \ldots, b_m$ độc lập affine, thì mọi $x \in aff\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp affine của $b_0, b_1, \ldots, b_m$, tức là $\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_m$ duy nhất với $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ sao cho $x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i$. Các số $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ như thế được gọi là *tọa độ trọng tâm* (barycentric coordinates) của x.

Định nghĩa 1.20. Ánh xạ $T : R^n \to R^m$ được gọi là *affine,* nếu với mọi $x, y \in R^n, \lambda \in R$,

$$T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty.$$

Nhận xét 1.12

Ánh xạ $T : R^n \to R^m$ là affine, A là tập affine trong $R^n \implies TA$ là tập affine trong R^m.

Như vậy, $aff(TA) = T(aff A)$.

Định lý 1.12. Giả sử $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ và $\{b'_0, b'_1, \ldots, b'_m\}$ là các tập độc lập affine trong R^n. Khi đó, tồn tại ánh xạ affine 1-1 $T : R^n \to R^n$ sao cho:

$$T\, b_i = b'_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Nếu $m = n$ thì T duy nhất.

Chứng minh

Ta có thể quy về trường hợp $m = n$, bởi vì nếu cần thiết ta sẽ mở rộng các tập độc lập affine đã cho. Khi đó, theo lý thuyết đại số tuyến tính, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính 1-1 T_1 từ R^n lên R^n biến cơ sở $b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0$ của R^n lên cơ sở $b'_1 - b'_0, \dots, b'_n - b'_0$.

Đặt $Tx = T_1x + a$, trong đó $a = b'_0 - T_1b_0$, ta nhận được T là ánh xạ affine cần tìm. □

Hệ quả 1.12.1. Giả sử $M_1, M_2 \subset R^n$ là hai tập affine, $dimM_1 = dimM_2$. Khi đó, tồn tại ánh xạ affine 1-1 T từ R^n lên R^n sao cho $TM_1 = M_2$.

Chứng minh

Một tập affine m chiều là bao affine của $m + 1$ điểm độc lập affine. Áp dụng định lý 1.12 ta suy ra điều phải chứng minh. □

Định lý 1.13. Ánh xạ $T : R^n \to R^m$ là affine $\iff$ $Tx = T_1x + a$, trong đó T_1 là ánh xạ tuyến tính, $a \in R^m$.

Chứng minh

a) Nếu T là affine, ta lấy $a = T0$ và $T_1x = Tx - a$ và nhận được T_1 là ánh xạ affine với $T_10 = 0$. Vậy T_1 là ánh xạ tuyến tính.

b) Ngược lại, nếu $Tx = T_1x + a$ với T_1 là tuyến tính, thì

$$\begin{aligned} T((1-\lambda)x + \lambda y) &= (1-\lambda)T_1x + \lambda T_1y + a \\ &= (1-\lambda)Tx + \lambda Ty. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ T là affine. □

Định nghĩa 1.21. Bao lồi của $k+1$ điểm độc lập affine $b_0, b_1, \ldots, b_k$ được gọi là *đơn hình k-chiều* (k-simplex). Các điểm $b_0, b_1, \ldots, b_k$ được gọi là các *đỉnh* (vertex) của đơn hình.

Định lý 1.14. Giả sử S là đơn hình $n-$ chiều trong R^n với các đỉnh $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Khi đó, $intS \neq \emptyset$.

Chứng minh

Không mất tính chất tổng quát ta có thể xem như:

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_n = 0. \tag{1.10}$$

Lấy $x \neq 0$ thuộc R^n; $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ là tọa độ trọng tâm của x. Khi đó,

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1. \tag{1.11}$$

Đặt $\lambda = \max\{|\lambda_0|, \ldots, |\lambda_n|\}$.

Giả sử $\dfrac{1}{\epsilon} > (n+1)\lambda + 1$. Khi đó, $0 < \epsilon < 1$. Từ (1.10), (1.11), suy ra:

$$\epsilon x = (1-\epsilon)0 + \epsilon x = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon \lambda_i \right) b_i.$$

Đặt $\gamma_i = \frac{1-\epsilon}{n+1} + \epsilon\lambda_i$, ta nhận được: $\gamma_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n} \gamma_i = 1$ và

$$\epsilon x = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i b_i \in S.$$

Vì vậy, nếu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trong R^n, thì tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $\pm\epsilon e_j \in S$ $(j = 1, \ldots, n)$. Do đó,

$$co\{\pm\epsilon e_j : j = 1, \ldots, n\} \subset S.$$

Mặt khác, tập $co\{\pm\epsilon e_j : j = 1, \ldots, n\}$ lại chứa hình cầu bán kính $\epsilon / \sqrt[n]{n}$. Vì vậy, $intS \neq \emptyset$. □

Định nghĩa 1.22. *Chiều của tập lồi A* là chiều của $affA$.

Chú ý: bởi vì một đơn hình là một tập lồi, cho nên có thể xét chiều của các đơn hình theo định nghĩa 1.22.

Định nghĩa 1.15. Giả sử $A \subset R^n$ là tập lồi. Khi đó, $dimA$ là cực đại của chiều các đơn hình trong A.

Chứng minh

Nếu $C \subset A$, thì $coC \subset A$. Vì thế, cực đại của số chiều các đơn hình trong A là số m lớn nhất sao cho A chứa một tập $m+1$ điểm độc lập affine, chẳng hạn $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$.

Đặt $M = aff\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Khi đó,

$$dimM = m \quad \text{và} \quad M \subset affA.$$

Mặt khác, $A \subset M$, bởi vì nếu $\exists b \in A \backslash M$, thì tập $m + 2$ phần tử $\{b_0, b_1, \ldots, b_m, b\} \subset A$ độc lập affine, và do đó mâu thuẫn với tính cực đại của m.

$\Longrightarrow \quad A \subset M \subset affA.$

$\Longrightarrow \quad affA = M.$

$\Longrightarrow \quad dimA = m.$ □

1.5. PHẦN TRONG TƯƠNG ĐỐI

Định nghĩa 1.23. *Phần trong tương đối* (relative interior) của tập $A \subset R^n$ là phần trong của A trong $affA$; ký hiệu là riA.

Các điểm thuộc riA được gọi là *điểm trong tương đối* của tập A.

Nhận xét 1.13

$$intA = \{x \in R^n : \exists \epsilon > 0, \; x + \epsilon B \subset A\},$$

$$riA = \{x \in affA : \exists \epsilon > 0, \; (x + \epsilon B) \cap affA \subset A\},$$

trong đó B là hình cầu đơn vị đóng trong R^n.

Định nghĩa 1.24. Tập $\bar{A} \backslash riA$ được gọi là *biên tương đối* (relative boundary) của A.

Tập A được gọi là *mở tương đối* (relatively open), nếu $riA = A$.

Nhận xét 1.14

$$A_1 \subset A_2 \quad \not\Rightarrow \quad riA_1 \subset riA_2.$$

Thật vậy, chẳng hạn lấy A_2 là một khối lập phương R^3, A_1 là một mặt của A_2. Khi đó, $A_1 \subset A_2$, $riA_1 \neq \emptyset$, $riA_2 \neq \emptyset$, nhưng $riA_1 \cap riA_2 = \emptyset$.

Định lý 1.16. Giả sử A là tập lồi trong R^n; $x \in riA, y \in \bar{A}$. Khi đó,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in riA \quad (0 \leq \lambda < 1).$$

Chứng minh

Giả sử A là tập lồi m-chiều trong R^n. Theo hệ quả 1.12.1, tồn tại ánh xạ affine 1-1 $T: R^n \to R^n$ sao cho T ánh xạ $affA$ lên không gian con L:

$$L = \{x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) :$$
$$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Không gian con L có thể đồng nhất với R^m. Vì vậy, để chứng minh định lý ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp A là n-chiều. Khi đó, $riA = intA$.

Lấy $\lambda \in [0, 1)$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho:

$$(1-\lambda)x + \lambda y + \epsilon B \subset A,$$

trong đó B là hình cầu đơn vị đóng trong R^n.

Thật vậy, bởi vì $y \in \bar{A}$, cho nên với mọi $\epsilon > 0$, $y \in A + \epsilon B$. Do $x \in intA$, với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, ta có:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x + \lambda y + \epsilon B &\subset (1-\lambda)x + \lambda(A + \epsilon B) + \epsilon B \\ &= (1-\lambda)[x + \epsilon(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}B] + \lambda A \\ &\subset (1-\lambda)A + \lambda A = A.\end{aligned}$$

□

Hệ quả 1.16.1. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó, riA lồi.

Chứng minh

Lấy $y \in riA$ và áp dụng định lý 1.16 ta nhận được điều phải chứng minh. □

Định lý 1.17. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó,

$$aff(\bar{A}) = affA. \tag{1.12}$$

Chứng minh

Hiển nhiên $aff(\bar{A}) \supset affA$.

Mặt khác,

$$\bar{A} \subset \overline{affA} = affA.$$

Vì vậy,

$$aff(\bar{A}) = affA. \quad □$$

$\neq \phi$

Định lý 1.18. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó, $riA \neq \emptyset$ và

$$aff(riA) = affA. \qquad (1.13)$$

Chứng minh

a) Trước hết xét trường hợp $dimA = n$, tức là $affA = R^n$.

Theo định lý 1.15, A chứa tập $n+1$ điểm độc lập affine $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Đơn hình S các đỉnh $b_0, b_1, \ldots, b_n$ có $intS \neq \emptyset$ (định lý 1.14).

Hiển nhiên $\quad aff(intA) \subset affA, \qquad (1.14)$

Mặt khác, theo định lý 1.17 và mệnh đề 1.5,

$$affA \subset aff\bar{A} = aff(\overline{intA}) = aff(intA). \qquad (1.15)$$

Từ (1.14), (1.15) suy ra (1.13).

b) Trường hợp $dimA < n$: Không mất tính chất tổng quát có thể xem như $0 \in A$, tức là $affA$ là một không gian con. Giả sử $dimA = m$. Khi đó, ta có thể đồng nhất $affA$ với R^m và ta lại xét như trường hợp a). $\square$

Hệ quả 1.18.1. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó,

$$aff(riA) = aff(\bar{A}). \qquad (1.16)$$

Chứng minh

(1.16) được suy ra từ (1.12) và (1.13). $\square$

Hệ quả 1.18.2. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó,

$$dim\bar{A} = dim(riA) = dimA.$$

Nói riêng, $A \neq \emptyset \implies riA \neq \emptyset$.

Định lý 1.19. Giả sử A là tập lồi trong R^n. Khi đó,

$$\overline{riA} = \bar{A}, \quad ri\bar{A} = riA. \tag{1.17}$$

Chứng minh

Giả sử $dimA = m \leq n$. Không mất tính chất tổng quát ta có thể xem như $0 \in A$. Khi đó, $affA$ là không gian con và ta có thể đồng nhất $affA$ với R^m. Áp dụng mệnh đề 1.5 cho không gian R^m ta nhận được (1.17). □

Hệ quả 1.19.1. Giả sử A_1, A_2 là các tập lồi trong R^n. Khi đó,

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 \iff riA_1 = riA_2.$$

BÀI TẬP

1.1. Cho $C \subseteq R^n$ là tập hợp lồi, đóng nhưng không giới nội. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tia $S = \{z : z = \lambda z^0, \lambda \geq 0\}$, ở đây z^0 là vectơ cố định khác không, sao cho ta có từ $x \in C$ suy ra $x + S \subseteq C$.

1.2. Giả sử $C_i \subseteq R^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \geq n + 1$ là các tập hợp lồi. Biết rằng mỗi $n + 1$ tập C_i đều có giao khác trống. Chứng minh rằng

$$\bigcap_{i=1}^{m} C_i \neq \emptyset$$

(Định lý Kelly).

1.3. Xét không gian R^2. Biết rằng có bốn nửa mặt phẳng lấp đầy không gian . Chứng minh rằng tồn tại ba trong bốn nửa mặt phẳng ấy sao cho ba nửa mặt phẳng này cũng lấp đầy không gian .

1.4. Trên mặt phẳng cho n hình tròn ($n \geq 3$). Giả sử cứ với mỗi ba hình tròn, đều có một hình tròn bán kính r cắt cả ba hình tròn ấy. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính r cắt cả n hình tròn trên.

1.5. Cho n đoạn thẳng song song trên mặt phẳng ($n \geq 3$). Biết rằng cứ với bất kỳ ba đoạn thẳng nào cũng có một đường thẳng cắt cả ba đoạn thẳng ấy. Chứng minh tồn tại một đường thẳng cắt cả ba đoạn thẳng đã cho.

1.6. Cho C_i, $i \in Z$ là một họ tùy ý các tập compắc lồi trong R^n. Giả sử với mỗi $n + 1$ tập C_i đều có giao khác trống. Chứng minh rằng

$$\bigcap_{i \in Z} C_i \neq \emptyset.$$

1.7. Cho $C \subseteq R^n$ là tập lồi. Chứng minh rằng $x \in riC$ khi và chỉ khi $\forall y \in C, \exists \mu > 1$ sao cho $\mu x + (1 - \mu)y \in C$.

1.8. Cho $C_i, i \in I$ là họ các tập lồi trong R^n sao cho $\bigcap_{i\in I}(riC_i) \neq \emptyset$.

1) Chứng minh rằng

$$\overline{\bigcap_{i\in I} C_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{C_i}$$

2) Chứng minh rằng nếu I hữu hạn, $I = \{1, 2, \dots, k\}$, thì

$$ri(\bigcap_{i=1}^{k} C_i) = \bigcap_{i=1}^{k} riC_i.$$

1.9. Cho $C \subseteq R^n$ là tập lồi, $A : R^n \to R^m$ là phép biến đổi tuyến tính. Chứng minh rằng

$$ri(AC) = A(riC).$$

1.10. Điểm $x \in C$ của tập hợp lồi C được gọi là điểm cực biên của nó, nếu như không tồn tại hai điểm $x^1 \in C, x^2 \in C, x^1 \neq x^2$ sao cho x là điểm trong của đoạn $[x^1, x^2]$.

Chứng minh rằng điểm $x \in C$ là điểm cực biên của C khi và chỉ khi không tồn tại hai điểm $x^1 \in C, x^2 \in C, x^1 \neq x^2$ mà

$$x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$$

1.11. Cho C là tập hợp lồi trong R^n và $x \in C$.

1) Chứng minh rằng nếu x là điểm cực biên của C, thì $x \notin riC$

2) Chứng minh x là điểm cực biên của $C \iff C\backslash\{x\}$ là tập hợp lồi.

1.12. Giả sử $C \subseteq R^n$ là tập hợp lồi, compăc và khác trống. Chứng minh rằng C có ít nhất một điểm cực biên.

1.13. Cho $A \subseteq R^n$ là tập lồi, compăc và khác trống. Ký hiệu $\ddot{A}$ là tập hợp các điểm cực biên của A. Chứng minh rằng

$$A = \overline{co(\ddot{A})}.$$

Chương II

HÀM LỒI

2.1. HÀM LỒI

Giả sử X là không gian lồi địa phương, $D \subset X$, $f : D \to R \cup \{\pm\infty\}$.

Định nghĩa 2.1. *Trên đồ thị* (epigraph) của hàm f, ký hiệu là epif, được định nghĩa như sau:

$$epif = \{(x, r) \in D \times R : f(x) \le r\}.$$

Định nghĩa 2.2. *Miền hữu hiệu* (effective domain) của hàm f, ký hiệu là $domf$, được định nghĩa như sau:

$$domf = \{x \in D : f(x) < +\infty\}.$$

Định nghĩa 2.3. Hàm f được gọi là *chính thường* (proper), nếu $domf \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty$ $(\forall x \in D)$.

Định nghĩa 2.4. Hàm f được gọi là *lồi trên D* (convex on D), nếu epif là tập lồi trong $X \times R$. Hàm f được gọi là *lõm trên D* (concave on D), nếu $-f$ là hàm lồi trên D.

Nhận xét 2.1

f lồi $\Longrightarrow$ $domf$ lồi.

Thật vậy, $domf$ là hình chiếu trên X của epif:

$$domf = \{x : f(x) < +\infty\} = \{x : \exists r, (x, r) \in epif\}.$$

Như vậy, $domf$ là ảnh của tập lồi epif qua một ánh xạ tuyến tính. Do đó, $domf$ lồi.

Ví dụ 1.1

Hàm affine

$$f(x) = < x^*, x > +\alpha \quad (x^* \in X^*, \alpha \in R)$$

là hàm lồi trên X, trong đó X^* là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

Ví dụ 1.2

Giả sử f là hàm giá trị thực khả vi liên tục hai lần trên tập lồi mở $A \subset R^n$. Khi đó, f lồi trên A khi và chỉ khi ma trận Hessian:

$$Q_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

là bán xác định dương $(\forall x \in A)$, tức là:

$$< z, Q_x z > \geq 0 \quad (\forall z \in R^n, \forall x \in A).$$

Ví dụ 1.3

Chuẩn Euclide là một hàm lồi trên R^n :

$$||x|| = < x, x >^{1/2} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2},$$

trong đó $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

Ví dụ 1.4

Hàm chỉ (indicator function) $\delta(.|A)$ của tập lồi $A \subset X$ là hàm lồi:

$$\delta(x|A) = \begin{cases} 0 & \text{, nếu } x \in A, \\ +\infty & \text{, nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Ví dụ 1.5

Giả sử X^* là không gian liên hợp của X. *Hàm tựa* (support function) $s(.|A)$ của tập lồi $A \subset X^*$ là một hàm lồi:

$$s(x|A) = \sup_{x^* \in A} < x^*, x > .$$

Định lý 2.1. Giả sử D là tập lồi trong không gian X, hàm $f : D \to (-\infty, +\infty]$. Khi đó, f lồi trên D khi và chỉ khi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$$(\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in D) \qquad (2.1)$$

Chứng minh

a) Giả sử f là hàm lồi. Không mất tính tổng quát có thể xem như $\lambda \in (0,1)$.

Không thể xảy ra trường hợp $f(x) < +\infty$, $f(y) < +\infty$, mà $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = +\infty$, bởi vì $dom f$ lồi, với $x, y \in dom f$ thì $[x,y] \subset dom f$. Do $\lambda \in (0,1)$, nên: $f(x) = +\infty \implies \lambda f(x) = +\infty$. Nếu x hoặc $y \notin dom f$, thì $f(x) = +\infty$ hoặc $f(y) = +\infty$ và (2.1) đúng.

Bởi vì epif lồi, $\forall (x,r) \in epi f, \forall (y,s) \in epi f, \forall \lambda \in (0,1)$,
$\lambda(x,r) + (1-\lambda)(y,s) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda r + (1-\lambda)s) \in epi f$.
$\implies \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda r + (1-\lambda)s.$
$\implies \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
(lấy $r = f(x)$, $s = f(y)$).

b) Ngược lại, giả sử (2.1) đúng. Lấy $(x,r) \in epi f$, $(y,s) \in epi f$, $\lambda \in [0,1]$ ta phải chứng minh:

$$\lambda(x,r) + (1-\lambda)(y,s) \in epi f.$$

Thật vậy,

$$(x,\lambda) \in epi f,\ (y,s) \in epi f \quad \implies \quad f(x) \leq r, f(y) \leq s.$$

$$\implies \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)s$$
$$\implies \quad (\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda r + (1-\lambda)s) \in epi f$$
$$\implies \quad \lambda(x,r) + (1-\lambda)(y,s) \in epi f. \qquad \square$$

Định lý 2.2 *(Bất đẳng thức Jensen)*

Giả sử $f : X \to (-\infty, +\infty]$. Khi đó, f là hàm lồi khi và chỉ khi $\forall \lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\forall x_1, \ldots, x_m \in X$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m). \quad (2.2)$$

Chứng minh

Không giảm tổng quát, có thể xem như $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Khi đó, nếu $x_i \notin dom f$ thì $f(x_i) = +\infty$, $\lambda_i f(x_i) = +\infty$ và bất đẳng thức (2.2) là tầm thường. Do $dom f$ lồi nên không xảy ra trường hợp $f(x_i) < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$ mà $f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) = +\infty$, bởi vì khi đó $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in dom f$.

Nếu $x_i \in dom f$ $(i = 1, \ldots, m)$, do $epi f$ lồi và $(x_i, f(x_i)) \in epi f$ $(i = 1, \ldots, m)$, theo định lý 1.1, ta có:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m, \lambda_1 f(x_1), \ldots, \lambda_m f(x_m)) \in epi f.$$

$$\Longrightarrow \quad f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m). \ \square$$

Mệnh đề 2.1. Giả sử $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Khi đó, f là hàm lồi khi và chỉ khi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda r + (1 - \lambda) s$$

$$(\forall \lambda \in (0, 1), \ \forall x, y : f(x) < r, f(y) < s)$$

Chứng minh. Tương tự định lý 2.1. $\square$

Định lý 2.3. Giả sử f là hàm lồi trên X, $\mu \in [-\infty, +\infty]$. Khi đó, các tập mức $\{x : f(x) < \mu\}$ và $\{x : f(x) \leq \mu\}$ lồi.

Chứng minh

a) Lấy $x_1, x_2 \in \{x : f(x) < \mu\}$, ta có $f(x_1) < \mu$, $f(x_2) < \mu$. Từ mệnh đề 2.1 suy ra: $\forall \lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda\mu + (1-\lambda)\mu = \mu$$

$\Longrightarrow \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \{x : f(x) < \mu\}$

$\Longrightarrow \quad \{x : f(x) < \mu\}$ lồi.

b) Tập $\{x : f(x) \leq \mu\}$ lồi, bởi vì

$$\{x : f(x) \leq \mu\} = \bigcap_{\gamma > \mu} \{x : f(x) < \gamma\}. \qquad \square$$

Hệ quả 2.3.1. Giả sử f_α là hàm lồi trên X, $\lambda_\alpha \in R$ ($\forall \alpha \in I$), I là tập chỉ số bất kỳ. Khi đó, tập

$$A = \{x \in X : \ f_\alpha(x) \leq \lambda_\alpha, \forall \alpha \in I\} \text{ - lồi} .$$

Chứng minh

Đặt $A_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) \leq \lambda_\alpha\}$. Khi đó, A_α lồi và do đó $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ lồi. $\square$

Định nghĩa 2.5. Hàm f xác định trên X được gọi là *thuần nhất dương* (positively homogeneous), nếu $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in (0, +\infty)$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Định lý 2.4. Hàm thuần nhất dương $f : X \to (-\infty, +\infty]$ là lồi khi và chỉ khi:

$$f(x+y) \le f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in X). \tag{2.3}$$

Chứng minh

a) Giả sử hàm thuần nhất dương f là lồi. Lấy $x, y \in X$. Khi đó,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 2f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \\ &\le 2\left[\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)\right] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

b) Ngược lại, giả sử (2.3) đúng. Lấy $(x_i, r_i) \in epif$ $(i = 1, 2)$ ta có $(x_1 + x_2, r_1 + r_2) \in epif$, bởi vì:

$$f(x_1 + x_2) \le f(x_1) + f(x_2) \le r_1 + r_2.$$

Hơn nữa, bởi vì f là hàm thuần nhất dương, cho nên nếu $(x, r) \in epif$ thì $f(x) \le r$ và

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) \le \lambda r \quad (0 < \lambda < \infty).$$

$\Longrightarrow \quad \lambda(x, r) \in epif.$

Như vậy, $epif$ đóng đối với phép cộng và phép nhân vô hướng. Theo định lý 1.4, $epif$ là một nón lồi. Vậy f là hàm lồi. □

Hệ quả 2.4.1. Giả sử f là hàm lồi chính thường, thuần nhất dương. Khi đó, $\forall x_i \in X$, $\forall \lambda_i > 0$ $(i = 1, \dots, m)$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m).$$

Hệ quả 2.4.2. Giả sử f là hàm lồi chính thường, thuần nhất dương. Khi đó,

$$f(x) + f(-x) \geq 0 \quad (\forall x \in X).$$

Chứng minh

Từ (2.3) suy ra

$$f(x) + f(-x) \geq f(x - x) = f(0) = 0. \qquad \square$$

Định nghĩa 2.6. Hàm f được gọi là *đóng*, nếu $epif$ đóng trong $X \times R$.

Định lý 2.5. Hàm f đóng $\iff$ tất cả các tập mức có dạng $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ của f là đóng.

Chứng minh

Ký hiệu các tập mức (tập Lebesgue) của f là $\mathcal{L}_\alpha f$. Ta có:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha f &= \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \\ &= \{x \in X : (x, \alpha) \in epif\}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $epif$ đóng kéo theo tất cả các tập $\mathcal{L}_\alpha f$ đóng.

Ngược lại, giả sử tất cả các tập $\mathcal{L}_\alpha f$ đóng. Ta chứng minh $epif$ đóng ?

Thật vậy,
$$\mathcal{L}_\alpha f = \bigcap_{\beta > \alpha} \mathcal{L}_\beta f. \tag{2.4}$$

Giả sử $(x_0, \alpha_0) \notin epif$. Để chứng minh $epif$ đóng, ta chứng minh tồn tại lân cận V của (x_0, α_0) sao cho:
$$(epif) \cap V = \emptyset.$$

Bởi vì $(x_0, \alpha_0) \notin epif$, cho nên $x_0 \notin \mathcal{L}_{\alpha_0} f$. Từ (2.4) suy ra $\exists \beta > \alpha_0$ sao cho $x_0 \notin \mathcal{L}_\beta f$. Do đó, tồn tại lân cận U của x_0 sao cho: $(\mathcal{L}_\beta f) \cap U = \emptyset$.

Đặt:
$$V = \{(x, \alpha) \in X \times R : \ x \in U, \alpha < \beta\}.$$

Khi đó, V là lân cận điểm (x_0, α_0) trong $X \times R$.

Nếu $(x, \alpha) \in V$, thì $x \notin \mathcal{L}_\beta f$. Do $\alpha < \beta$, $x \notin \mathcal{L}_\alpha f$. Vì vậy, $f(x) > \alpha$, nghĩa là $(epif) \cap V = \emptyset$. □

Nhận xét 2.2

Tính chất lồi của hàm không giống tính chất đóng. Cụ thể, nếu hàm f lồi thì tất cả các tập mức của f là lồi. Nhưng điều ngược lại không đúng.

Thật vậy, chẳng hạn hàm $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ $(x \in R)$ có tất cả các tập mức lồi, nhưng f không lồi.

2.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ HÀM LỒI

Định lý 2.6. Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, tổng $f_1 + \ldots + f_m$ là một hàm lồi.

Chứng minh. Suy ra từ định lý 2.1. □

Nhận xét 2.3

Nếu $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường, thì $f_1 + \ldots + f_m$ là hàm lồi, nhưng có thể không chính thường.

Thật vậy, chẳng hạn A_1, A_2 là hai tập lồi không tương giao. Khi đó, các hàm chỉ $\delta(.|A_1)$ và $\delta(.|A_2)$ là các hàm lồi chính thường, nhưng $\delta(.|A_1) + \delta(.|A_2)$ là hàm lồi không chính thường bởi vì:

$$\delta(x|A_1) + \delta(x|A_2) = +\infty \quad (\forall x \in X).$$

Định lý 2.7. Giả sử F là tập lồi trong $X \times R$ và

$$f(x) = inf\{\mu : (x, \mu) \in F\}. \tag{2.5}$$

Khi đó, f là hàm lồi trên X.

Chú ý: Ta qui ước *infimum* trên tập $\emptyset$ (các số thực) bằng $+\infty$.

Chứng minh

Nếu $f(x_1) < r$, thì từ (2.5) suy ra: $\exists \tilde{\mu_1} < r$, $(x_1, \tilde{\mu_1}) \in F$.
Nếu $f(x_2) < s$, thì $\exists \tilde{\mu_2} < s$, $(x_2, \tilde{\mu_2}) \in F$.
$\Longrightarrow \quad (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\tilde{\mu_1} + (1-\lambda)\tilde{\mu_2} \in F \quad (0 < \lambda < 1).$

$$\Longrightarrow \quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) = inf\{\mu : (\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \mu) \in F\}$$

$$\leq \lambda\tilde{\mu_1} + (1-\lambda)\tilde{\mu_2} < \lambda r + (1-\lambda)s.$$

$\Longrightarrow$ f là hàm lồi (mệnh đề 2.1). □

Định nghĩa 2.7. Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm chính thường trên X. *Tổng chập infimal* (infimal convolution) của $f_1, \ldots, f_m$ được xác định như sau:

$$f(x) = inf\{f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m) : x_i \in X, \sum_{i=1}^{m} x_i = x\}, \tag{2.6}$$

và được ký hiệu là $\bigoplus_{i=1}^{m} f_i$ hay $f_1 \oplus \ldots \oplus f_m$.

Nhận xét 2.4

Trường hợp $m = 2$, (2.6) có dạng:

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_y\{f_1(x-y) + f_2(y)\}.$$

Định lý 2.8. Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, $\bigoplus_{i=1}^{m} f_i$ là hàm lồi trên X.

Chứng minh

Đặt $F_i = epif_i$, $F = F_1 + \ldots + F_m$. Khi đó, F là tập lồi trong $X \times R$. Theo định nghĩa $(x, \mu) \in F \Longleftrightarrow \exists x_i \in R^n$, $\exists \mu_i \in R$ sao cho: $f(x_i) \leq \mu_i$ $(i = 1, \ldots, m), \mu = \mu_1 + \ldots + \mu_m$, $x = x_1 + \ldots + x_m$. Do đó, hàm f được xác định bởi (2.6) là một hàm lồi được xây dựng theo định lý 2.7 bởi tập F. □

Nhận xét 2.5

Nếu các hàm $f_1, \dots, f_m$ là các hàm lồi chính thường, thì hàm f được xác định bởi (2.6) là một hàm lồi, nhưng có thể không chính thường.

Thật vậy, chẳng hạn ta xét hai hàm tuyến tính khác nhau f_1, f_2 trên R. Khi đó,

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = -\infty \quad (\forall x \in R).$$

Định nghĩa 2.8. Giả sử $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ là một họ tùy ý các hàm.

a) *Cận trên* của các hàm f_α, ký hiệu là $\vee_{\alpha \in I} f_\alpha$, được xác định như sau:

$$\left(\vee_{\alpha \in I} f_\alpha\right)(x) = \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x);$$

b) *Cận dưới* của các hàm f_α, ký hiệu là $\wedge_{\alpha \in I} f_\alpha$, được xác định như sau:

$$(\wedge_{\alpha \in I} f_\alpha)(x) := inf_{\alpha \in I} f_\alpha(x);$$

c) *Bao lồi cận dưới* của các hàm f_α, ký hiệu $co \wedge_{\alpha \in I} f_\alpha$, được xác định như sau:

$$(co \wedge_{\alpha \in I} f_\alpha)(x) := inf\{\mu \in R : \ (x, \mu) \in co\left(\bigcup_{\alpha \in I} epi f_\alpha\right)\}.$$

Mệnh đề 2.2. Giả sử f_α $(\alpha \in I)$ là các hàm lồi trên X. Khi đó,

a) $\vee_{\alpha \in I} f_\alpha$ là hàm lồi,

b) $co \wedge_{\alpha \in I} f_\alpha$ là hàm lồi.

Chứng minh

a) Ta có:

$$epi f \vee_{\alpha \in I} f_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} epi f_\alpha.$$

Thật vậy,

$$(x, \mu) \in epi \vee_{\alpha \in I} f_\alpha \iff f_\alpha(x) \le \mu \quad (\forall \alpha \in I)$$

$$\iff (x, \mu) \in epi f_\alpha \ (\forall \alpha \in I) \iff (x, \mu) \in \bigcap_{\alpha \in I} epi f_\alpha.$$

b) Suy ra từ định lý 2.7. □

Nhận xét 2.6

Nếu f_α $(\alpha \in I)$ là các hàm lồi chính thường, thì các hàm cận trên và bao lồi cận dưới là lồi, nhưng có thể không chính thường.

Định nghĩa 2.9

a) *Bao đóng* của hàm f, ký hiệu là $\bar{f}$, được xác định như sau:

$$epi \bar{f} = \overline{epi f};$$

b) *Bao lồi* và *bao lồi đóng* của hàm f, ký hiệu là cof và $\overline{co}f$, được xác định tương ứng như sau:

$$epi(cof) = co(epif),$$

$$epi(\overline{co}f) = \overline{co}(epif).$$

Nhận xét 2.7

a) Hàm f đóng $\Longleftrightarrow$ $f = \bar{f}$;

b) Bao đóng của một hàm lồi là một hàm lồi;

c) Bao đóng của hàm chính thường có thể không chính thường;

d) Tổng hữu hạn các hàm đóng là một hàm đóng;

e) Cận trên của họ tùy ý các hàm đóng là một hàm đóng.

Ví dụ 1.6

Giả sử $A_1, A_2 \subset X$ với các hàm chỉ $\delta(.|A_1), \delta(.|A_2)$. Dễ dàng chứng minh được:

a) $\delta(.|A_1) + \delta(.|A_2) = \delta(.|A_1) \vee \delta(.|A_2) = \delta(.|A_1 \cap A_2)$;

b) $\delta(.|A_1) \oplus \delta(.|A_2) = \delta(.|A_1 + A_2)$;

c) $co(\delta(.|A_1) \wedge \delta(.|A_2)) = \delta(.|co(A_1 \cup A_2))$;

d) $\overline{\delta(.|A)} = \delta(.|\bar{A})$;

e) $\overline{co}\delta(.|A) = \delta(.|\overline{co}A)$.

2.3.TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM LỒI

Định lý 2.9. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

(i) f bị chặn trên trong một lân cận của $\bar{x}$;

(ii) f liên tục tại $\bar{x}$;

(iii) $int(epif) \neq \emptyset$;

(iv) $int(domf) \neq \emptyset$ và f liên tục trên $int(domf)$.

Đồng thời,

$$int(epif) = \{(x, \mu) \in X \times R : x \in int(domf), f(x) < \mu\}. \tag{2.7}$$

Chứng minh

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Giả sử f liên tục tại $\bar{x}$. Khi đó, hiển nhiên f bị chặn trong một lân cận của $\bar{x}$.

(i)$\Longrightarrow$(ii): Giả sử f bị chặn trên trong lân cận U của $\bar{x}$, tức là: $\exists c > 0$,

$$f(x) \leq c < +\infty \quad (\forall x \in U).$$

Ta có thể xem như $\bar{x} = 0$ và $f(0) = 0$, bởi vì nếu $\bar{x} \neq 0$, ta thay U bằng $U - \bar{x}$ và nếu $f(0) \neq 0$ ta thay $f(x)$ bằng $f(x + \bar{x}) - f(\bar{x})$.

Lấy $\epsilon \in (0, c]$ và đặt:

$$V_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{c}U\right) \cap \left(-\frac{\epsilon}{c}U\right).$$

Khi đó, V_ϵ là một lân cận của 0.

Bây giờ ta chứng minh: $|f(x)| \leq \epsilon \quad (\forall x \in V_\epsilon)$?

Lấy $x \in V_\epsilon \Longrightarrow x \in \frac{\epsilon}{c}U \Longrightarrow \frac{c}{\epsilon}x \in U$.

$\Longrightarrow \quad f(x) \leq \frac{\epsilon}{c}f(\frac{c}{\epsilon}x) + (1 - \frac{\epsilon}{c})f(0) \quad$ (do f lồi).

$$\Longrightarrow \quad f(x) \leq \frac{\epsilon}{c}.c = \epsilon. \qquad (2.8)$$

Mặt khác, $x \in -\frac{\epsilon}{c}U \iff -\frac{c}{\epsilon}x \in U$. Bởi vì:

$$\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{c}}x + \frac{\frac{\epsilon}{c}}{1+\frac{\epsilon}{c}}(-\frac{c}{\epsilon}x) = 0,$$

cho nên

$$0 = f(0) \leq \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{c}}f(x) + \frac{\frac{\epsilon}{c}}{1+\frac{\epsilon}{c}}f(-\frac{c}{\epsilon}x)$$

$$\leq \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{c}}f(x) + \frac{\frac{\epsilon}{c}}{1+\frac{\epsilon}{c}}.c$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \geq -\epsilon. \qquad (2.9)$$

$\Longrightarrow \quad |f(x)| \leq \epsilon \quad$ (do (2.8), (2.9)).

$\Longrightarrow \quad f$ liên tục tại 0.

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)*: hiển nhiên.

(i) $\Longrightarrow$*(iii)*: Nếu $f(x) \leq \mu_0$ $(\forall x \in U)$, thì:

$$\{(x,\mu) \in X \times R : x \in U, \ \mu > \mu_0\} \subset epi f.$$

$\Longrightarrow \quad int(epi f) \neq \emptyset.$

(iii) $\Longrightarrow$ *(iv)*: Giả sử $int(epi f) \neq \emptyset$. Khi đó, nếu $(x,\mu) \in int(epi f)$, thì f bị chặn trong một lân cận của x. Theo chứng minh trên, f liên tục tại x. Hơn nữa, từ mệnh đề 1.5 suy ra:

$$int(dom f) = \{x \in X : \ \exists \mu \in R, \ (x,\mu) \in int(epi f)\}.$$

Vì vậy, $int(dom f) \neq \emptyset$ và f liên tục trên $int(dom f)$.

Cuối cùng, công thức (2.7) là hiển nhiên: nếu $(x, \mu) \in int(epi f)$, thì rõ ràng $x \in int(dom f)$ và $f(x) < \mu$.

Ngược lại, nếu f liên tục trên $int(dom f)$, $x \in int(dom f)$ và $f(x) < \mu$, thì $(x, \mu) \in int(epi f)$. □

Định nghĩa 2.10. Giả sử X là không gian Banach. Hàm $f : X \to R$ được gọi là *Lipschitz địa phương tại* $\bar{x} \in X$, nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$, số $K > 0$ sao cho:

$$(\forall x, x' \in U) \quad |f(x) - f(x')| \leq K||x - x'||. \tag{2.10}$$

Hàm f được gọi là *Lipschitz địa phương trên tập* $D \subset X$, nếu f Lipschitz địa phương tại mọi $x \in D$.

Hàm f được gọi là *Lipschitz* với hằng số Lipschitz K trên tập $D \subset X$, nếu (2.10) đúng với mọi $x, x' \in D$.

Định lý 2.10. Giả sử X là không gian Banach; f là hàm lồi trên tập mở $D \subset X$; f bị chặn trên trong một lân cận của một điểm nào đó thuộc D. Khi đó, f Lipschitz địa phương trên D.

Chứng minh

Lấy $x \in D$, ta phải chứng minh f Lipschitz trong một lân cận của x.

Trước hết, ta chỉ ra f bị chặn trong một lân cận của x. Không mất tính chất tổng quát, có thể giả sử f bị chặn trên bởi số γ trên tập $\epsilon B \subset D$, trong đó B là hình cầu đơn vị mở trong X.

Chọn số $\rho > 1$ để sao cho: $y = \rho x \in D$. Với $\lambda = \dfrac{1}{\rho}$, tập hợp sau đây:

$$V = \{v : \ v = (1-\lambda)x' + \lambda y, \ x' \in \epsilon B\}$$

là một lân cận của điểm $x = \lambda y$ với bán kính $(1-\lambda)\epsilon$.

Với mọi $v \in V$, ta có:

$$f(v) \leq (1-\lambda)f(x') + \lambda f(y) \leq \gamma + \lambda f(y). \qquad (2.11)$$

Như vậy f bị chặn trên trong lân cận V của x.

Lấy $z \in V(= x + (1-\lambda)\epsilon B)$, có tồn tại $z' \in V$ sao cho: $x = \dfrac{1}{2}(z + z')$. Khi đó,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(z')$$

$\Longrightarrow \quad f(z) \geq 2f(x) - f(z') \geq 2f(x) - \gamma - \lambda f(y)$ (do (2.11)).

$\Longrightarrow \quad f$ bị chặn dưới trên $V \quad \Longrightarrow \quad f$ bị chặn trên V.

Giả sử L là đánh giá trên của $|f|$ trên tập $x + 2\delta B$, trong đó $\delta > 0$ sao cho $x + 2\delta B \subset D$. Lấy $x_1, x_2 \in x + \delta B$, $x_1 \neq x_2$. Đặt:

$$x_3 = x_2 + \frac{\delta}{\alpha}(x_2 - x_1) \quad (\alpha = ||x_2 - x_1||). \qquad (1.12)$$

Ta có $x_3 \in x + 2\delta B$, bởi vì $x_2 \in x + \delta B$, $\dfrac{\delta(x_2 - x_1)}{||x_2 - x_1||} \in \delta B$.

Từ (1.12) suy ra:

$$x_2 = \frac{\delta}{\alpha+\delta}x_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}x_3.$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) \le \frac{\delta}{\alpha+\delta}f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha+\delta}f(x_3)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \le \frac{\alpha}{\alpha+\delta}[f(x_3) - f(x_1)]$$
$$\le \frac{\alpha}{\delta}[f(x_3) - f(x_1)].$$

Bởi vì $|f| \le L$, $\alpha = ||x_2 - x_1||$, cho nên:

$$f(x_2) - f(x_1) \le \frac{2L}{\delta}||x_2 - x_1||.$$

Thay đổi vai trò của x_1, x_2 ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) \le \frac{2L}{\delta}||x_2 - x_1||.$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x_2) - f(x_1)| \le \frac{2L}{\delta}||x_2 - x_1|| \ (\forall x_1, x_2 \in x + \delta B). \ \square$$

Chú ý: trong định lý 2.10 ta xét hàm $f : D \to R$, tức là: $|f(x)| < +\infty$ $(\forall x \in D)$. Như vậy, $D = domf$.

Hệ quả 2.10.1. Giả sử $f : D \to R$ là hàm lồi, liên tục tại $\bar{x}$ thuộc tập lồi mở D. Khi đó, f Lipschitz địa phương trên D.

Chứng minh

Định lý 2.9 chỉ ra f bị chặn trên trong một lân cận của $\bar{x} \in D$. Theo định lý 2.10, f Lipschitz địa phương trên D. □

Bây giờ ta lại giả sử X là không gian lồi địa phương, $f : X \to R \cup \{\pm\infty\}$.

Định nghĩa 2.11

a) Hàm f được gọi là *nửa dưới liên tục* (lower semicontinuous) *tại* $\bar{x} \in X$ (với $f(\bar{x}) < \infty$), nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho:

$$f(\bar{x}) - \epsilon \leq f(y) \quad (\forall y \in U). \tag{2.13}$$

b) Nếu $f(\bar{x}) = +\infty$, thì f được gọi là *nửa liên tục dưới tại* $\bar{x}$, nếu với mọi $N > 0$, tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho:

$$f(y) \geq N \quad (\forall y \in U). \tag{2.14}$$

c) Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới*, nếu f nửa liên tục dưới tại mọi $x \in X$.

Chú ý: Nếu thay (2.13) và (2.14) tương ứng bởi (2.13') và (2.14') ta được định nghĩa *hàm nửa liên tục trên* tại $\bar{x}$:

$$f(y) \leq f(\bar{x}) + \epsilon \quad (\forall y \in U), \tag{2.13'}$$

(khi $f(\bar{x}) < +\infty$);

$$f(y) \leq -N \quad (\forall y \in U). \tag{2.14'}$$

(khi $f(\bar{x}) = -\infty$).

Mệnh đề 2.3. f đóng $\Longleftrightarrow$ f nửa liên tục dưới.

Chứng minh

Định lý 2.5 chỉ ra rằng: f đóng $\Longleftrightarrow$ các tập mức $\{x : f(x) \leq \lambda\}$ đóng.

Mặt khác, f nửa liên tục dưới $\Longleftrightarrow$ các tập mức $\{x : f(x) \leq \lambda\}$ đóng ([3]). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

Định lý 2.11. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n. Khi đó, f liên tục trên $ri(domf)$.

Chứng minh

Bởi vì f lồi, nên $domf$ lồi (nhận xét 2.1), $ri(domf)$ lồi (mệnh đề 1.5). Giả sử $dim(domf) = k$. Khi đó, tồn tại đơn hình k-chiều S trong $ri(domf)$ với các đỉnh $b_0, b_1, \ldots, b_k$. Do f lồi, với mọi $x \in S$, ta có: $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i b_i$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 0, \ldots, k)$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

$\Longrightarrow \quad f(x) \leq \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(b_i)$ (bất đẳng thức Jensen)

$\Longrightarrow \quad f(x) \leq max\{f(b_0), \ldots, f(b_k)\}$.

Từ định lý 1.14 suy ra phần trong của đơn hình S trong $aff(domf)$ khác $\emptyset$. Như vậy, $\exists x_0 \in riS$ và f bị chặn trên trong một lân cận của x_0. Theo định lý 2.9, f liên tục trên $ri(domf)$ trong $aff(domf)$. □

BÀI TẬP

2.1. Chứng minh rằng hàm $f : R^n \to R$ là affine khi và chỉ khi f vừa lồi vừa lõm.

2.2. Giả sử $f : D(f) \to R$, ở đây $D(f) \subseteq R^n$ là tập hợp lồi. Chứng minh rằng f là lồi trên $D(f)$ khi và chỉ khi với mọi x, y cố định tùy ý $\in D(f)$, thì hàm số $\varphi(\lambda) = f[\lambda x + (1-\lambda)y]$ là lồi theo λ trên $[0, 1]$.

2.3. Cho $f : D(f) \to R$ là hàm lồi, ở đây $D(f) \subseteq R^n$ là tập lồi. Giả sử $g : D(g) \to R$ là hàm đơn điệu tăng và lồi trên $D(g) \subseteq R$ và $f(D(f)) \subseteq D(g)$. Chứng minh rằng khi đó hàm hợp $F : D(f) \to R$, ở đây $F(x) = g(f(x))$ là hàm lồi trên $D(f)$.

2.4. Cho $f : D(f) \to R$ là hàm lồi trên $D(f) \subseteq R^n$. Chứng minh rằng nếu $x^1 \in D(f)$ là điểm cực tiểu địa phương của hàm f trên $D(f)$, thì nó cũng là điểm cực tiểu toàn cục của f trên $D(f)$.

2.5. Cho $f : D(f) \to R$ là hàm lồi trên $D(f) \subseteq R^n$. Gọi D^0 là tập hợp tất cả các điểm mà f đạt cực tiểu địa phương trên $D(f)$. Chứng minh rằng D^0 là tập lồi.

2.6. Cho $D(f) \subseteq R^n$ là tập compắc và lồi. Giả sử $f : D(f) \to R$ là hàm liên tục và lồi chặt trên $D(f)$. Chứng minh rằng khi đó f đạt cực tiểu toàn cục trên $D(f)$ tại một điểm duy nhất.

2.7. Cho $f_i(x) : D(f) \to R$ là các hàm lồi $i = 1, \ldots, m$; α_1,

$\ldots, \alpha_m$ là các hằng số. Chứng minh rằng tập hợp

$$M = \{x \in D(f):\ f_i(x) \leq \alpha_i, i = 1, \ldots, m\}$$

là tập hợp lồi.

2.8. Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + a \leq 0, & (1) \\ 6x + 3y + 5a \geq 0. & (2) \end{cases}$$

Gọi Ω là tập nghiệm của hệ (1), (2). Tìm a để $AB \subset \Omega$, trong đó A và B có các tọa độ như sau: $A(0,9)$ và $B(3,6)$.

2.9. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục đến đạo hàm cấp 2 trên (a, b). Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm lồi trên (a, b) nếu như $f''(x) > 0$.

2.10. Sử dụng bất đẳng thức Jensen để chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) *Bất đẳng thức Cauchy:* Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Chứng minh

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

b) *Bất đẳng thức Schwartz:* Cho 2 n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ trong đó $b_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

c) *Bất đẳng thức Minkowski:* Cho 2 n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leq$$

$$\leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)}$$

d) *Bất đẳng thức Honde:* Cho $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n; p > 0, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

e) Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh

$$(b + c)^a (c + a)^b (a + b)^c \leq [\frac{2}{3}(a + b + c)]^{a+b+c}.$$

f) Cho $0 \leq x_i \leq \pi,\ i = 1, \ldots, n$. Chứng minh

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leq \sin(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Từ đó suy ra rằng trong mọi $\triangle ABC$, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2.11. Hàm $f : D(f) \to R$ gọi là *á lồi* trên tập lồi $D(f)$, nếu như từ $x^1, x^2 \in D(f)$, $f(x^2) < f(x^1)$ thì suy ra

$$f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \leq f(x^1) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ và } \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Cho $f : D(f) \to R^n$ là hàm khả vi liên tục trên tập lồi mở $D(f)$. Chứng minh rằng f là á lồi lên trên $D(f)$ khi và chỉ khi thỏa mãn điều kiện:
Từ $x^1, x^2 \in D(f), f(x^2) \leq f(x^1)$ thì suy ra

$$< x^2 - x^1, \nabla f(x^1) > \leq 0.$$

2.12. Hàm $f : D(f) \to R$ là hàm khả vi trên tập lồi mở, $D(f) \subseteq R^n$. Hàm f được gọi là *giả lồi* trên $D(f)$, nếu như từ $x^1, x^2 \in D(f), f(x^2) < f(x^1)$ thì suy ra

$$< x^2 - x^1, \nabla f(x^1) > < 0.$$

Cho $D(f) \subseteq R^n$ là tập lồi mở và hàm $f : D(f) \to R$ là hàm khả vi trên $D(f)$. Chứng minh rằng nếu f lồi trên $D(f)$ thì nó giả lồi trên $D(f)$.

Chương III

HÀM LIÊN HỢP

3.1. CÁC ĐỊNH LÝ TÁCH

Giả sử X là không gian lồi địa phương, X^* là không gian liên hợp của X, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

Định nghĩa 3.1. Tập hợp $M \subset X$ thỏa mãn: bất cứ đường thẳng nào đi qua hai điểm của M cũng nằm trọn trong M được gọi là một *đa tạp tuyến tính* trong X.

Chú ý: Khái niệm đa tạp tuyến tính chính là khái niệm tập *affine* trong không gian hữu hạn chiều đã trình bày trong chương I.

Lấy $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, $\beta \in R$ và ký hiệu:

$$H(x^*, \beta) = \{x \in X : < x^*, x >= \beta\},$$

$$H^+(x^*, \beta) = \{x \in X : < x^*, x > \leq \beta\},$$

$$H^-(x^*, \beta) = \{x \in X : < x^*, x > \geq \beta\}.$$

Định nghĩa 3.2. Với $0 \neq x^* \in X^*$, $\beta \in R$, tập $H(x^*, \beta)$ được gọi là một *siêu phẳng* trong X. Các tập $H^+(x^*, \beta)$ và $H^-(x^*, \beta)$ được gọi là các *nửa không gian* sinh bởi siêu phẳng $H(x^*, \beta)$.

Nhận xét 3.1

$H(x^*, \beta)$ là một đa tạp tuyến tính đóng có đối chiều bằng 1. Khái niệm siêu phẳng ở đây trùng với khái niệm siêu phẳng trong không gian hữu hạn chiều đã trình bày trong chương I.

Định nghĩa 3.3. Cho các tập hợp $A, B \subset X$. Ta nói phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \neq 0$ *tách* A và B, nếu tồn tại số α sao cho:

$$< x^*, y > \leq \alpha \leq < x^*, x > \quad (\forall x \in A, \forall y \in B). \tag{3.1}$$

Nếu (3.1) có dạng:

$$< x^*, y > < \alpha < < x^*, x > \quad (\forall x \in A, \forall y \in B),$$

thì ta nói x^* *tách ngặt* A và B.

Siêu phẳng đóng $H(x^*, \alpha) = \{x \in X :< x^*, x >= \alpha\}$ được gọi là *siêu phẳng tách* A và B. Các tập A và B được gọi là *tách được*.

Chú ý: (3.1) tương đương với:

$$< x^*, y > \leq < x^*, x > \ (\forall x \in A, \forall y \in B).$$

Mệnh đề 3.1. Giả sử H là một siêu phẳng đi qua điểm 0 trong X. Khi đó, hoặc là H đóng, hoặc là H trù mật trong X.

Chứng minh

Bởi vì H là một không gian con tuyến tính của X, nên $\bar{H}$ cũng là một không gian con tuyến tính của X.

Ta biết rằng một siêu phẳng đi qua 0 là một không gian con tuyến tính thực sự($\neq X$), cực đại của X (không có không gian con thực sự nào lớn hơn). Do đó, từ $\bar{H} \supset H$ ta suy ra: hoặc là: $\bar{H} = X$, hoặc là $\bar{H} = H$. □

Mệnh đề 3.2. Giả sử A là tập lồi mở trong không gian lồi địa phương thực X, H là không gian con tuyến tính của X, $H \cap A = \emptyset$. Khi đó,

(i) Hoặc H là một siêu phẳng (qua 0);

(ii) Hoặc là $\exists x_0 \notin H$ sao cho không gian con tuyến tính gây nên bởi H và x_0 không cắt A.

Chứng minh

Đặt $C = H + \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$. Khi đó, C mở và

$$-C = H + \bigcup_{\lambda<0} \lambda A.$$

Hơn nữa, $C \cap (-C) = \emptyset$.

Thật vậy, nếu $\exists x \in C \cap (-C)$, thì $x = h + \lambda a = h' - \lambda' a'$, với $h, h' \in H$; $a, a' \in A$; $\lambda, \lambda' > 0$. Do H lồi,

$$\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}a + \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}a' \in H.$$

Do A lồi,

$$\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}a + \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}a' \in A.$$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda'}a + \dfrac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}a' \in H \cap A$: Mâu thuẫn với giả thiết $H \cap A = \emptyset$.

Bây giờ ta xét hai trường hợp:

a) $H \cup C \cup (-C) \neq X$: Khi đó, $\exists x_0 \notin H$ và $x_0 \notin C \cup (-C)$. Gọi L là không gian con tuyến tính gây nên bởi H và x_0.

Nếu $L \cap A \neq \emptyset$, thì $\exists y \in L \cap A \implies \exists \mu \neq 0 : y \in \mu x_0 + H \implies x_0 \in \lambda y + H$ $(\lambda = \dfrac{1}{\mu} \neq 0)$.

Nhưng: $\lambda y + H \subset C \cup (-C)$. Vậy $x_0 \in C \cup (-C)$: Mâu thuẫn với $x_0 \notin C \cup (-C)$. Do đó, $L \cap A = \emptyset$.

b) $H \cup C \cup (-C) = X$: Nếu như H không là một siêu phẳng, thì tồn tại $a \in C$ sao cho không gian con tuyến tính M gây nên bởi H và a không trùng với X. Do đó, $\exists b \in -C$: $b \notin M$. Đặt:

$$f(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Bởi vì f liên tục và C mở, cho nên $I = f^{-1}(C)$ và $J = f^{-1}(-C)$ là các tập mở trong $[0, 1]$. Ta có: $0 \in I, 1 \in J$. Hơn nữa, $I \cap J = \emptyset$, bởi vì $C \cap (-C) = \emptyset$.

Đặt: $\alpha = \sup\limits_{\lambda \in I} \lambda$.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & \alpha \in \bar{I} \cap \overline{(X \backslash I)} \subset \overline{(X \backslash J)} \cap \overline{(X \backslash I)} \\ & \quad = (X \backslash J) \cap (X \backslash I) \\ \Longrightarrow \quad & f(\alpha) \notin C \cup (-C). \\ \Longrightarrow \quad & f(\alpha) \in H, \text{ tức là } (1-\alpha)a + \lambda b \in H.\end{aligned}$$

Điều này trái với $b \notin M$ ở trên. Vậy H là một siêu phẳng. □

Mệnh đề 3.3. Giả sử X là không gian tuyến tính phức; H là một siêu phẳng thực trong X. Khi đó, $H \cap (iH)$ là một siêu phẳng phức.

Chứng minh

Giả sử $a \notin H \cap (iH)$, và chẳng hạn $a \notin H$. Khi đó, ia không thuộc siêu phẳng thực iH. Vì vậy,

$$a = \alpha ia + b \quad (\alpha \in R, b \in iH),$$

bởi vì ta coi X như không gian thực được gây nên bởi ia và iH.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad (1 + \alpha i)b &= (a - \alpha ia) + (\alpha ia + \alpha^2 a) \\ &= (1 + \alpha^2)a \notin H.\end{aligned}$$

Bởi vì $b = (1 + \alpha i)b - \alpha ib$, $ib \in H$, cho nên $b \notin H$.

Lấy $x \in X$, ta có:

$$x = \beta b + y \quad (\beta \in R, y \in H),$$

$$y = \gamma ib + z \quad (\gamma \in R, z \in iH).$$

Do $z = y - \gamma ib$ ($y \in H, ib \in H$), nên $z \in H$.

$\Longrightarrow \quad x = (\beta + \gamma i)b + z = (\lambda + \mu i)a + z$ (với $z \in H \cap iH$)

$\Longrightarrow \quad H \cap iH$ là một siêu phẳng phức. □

Định nghĩa 3.4. Tập $\mathcal{C}$ gồm những tập con của X được gọi là một *dây xích* (tập *sắp thẳng*) nếu với hai tập con bất kỳ của $\mathcal{C}$ đều có một tập chứa tập kia.

Mệnh đề 3.4 *(Tiên đề cực đại)*

Giả sử $\mathcal{E}$ là một tập tùy ý các tập con của tập X; $\mathcal{C}$ là một dây xích trong $\mathcal{E}$. Khi đó, tồn tại một dây xích cực đại $\mathcal{M}$ sao cho: $\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$.

Chú ý: Tiên đề cực đại tương đương với bổ đề Zorn.

Định lý 3.1. Giả sử A là một tập con lồi mở trong không gian lồi địa phương X, M là một không gian con tuyến tính của X, $M \cap A = \emptyset$. Khi đó, tồn tại siêu phẳng đóng chứa M và không cắt A.

Chứng minh

a) *X là không gian con tuyến tính thực:* Gọi $\mathcal{E}$ là tập tất cả các không gian con tuyến tính của X, chứa M và không cắt A.

Áp dụng tiên đề cực đại cho dây xích $\mathcal{C} = \{M\}$ sẽ tồn tại dây xích cực đại $\mathcal{M}$ trong X với $\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$.

Gọi H là hợp tất cả các không gian con tuyến tính thuộc $\mathcal{M}$. Do $\mathcal{M}$ là một dây xích, H là một không gian con tuyến tính của X, chứa M không cắt A.

Theo mệnh đề 3.2, H là một siêu phẳng, bởi vì nếu không sẽ $\exists x_0 \notin H$, sao cho không gian con tuyến tính L gây nên bởi $H \cup \{x_0\}$ không cắt A, và có thể thêm L vào $\mathcal{M}$. Như vậy, $\mathcal{M}$ không phải là cực đại (!). Hơn nữa, H là đóng, bởi vì nếu không H sẽ trù mật trong X (mệnh đề 3.1). Do đó, H sẽ cắt mọi tập mở trong đó có A : mâu thuẫn với chứng minh trên(!).

b) *X là không gian tuyến tính phức:* Khi đó, X cũng là không gian tuyến tính thực (bằng cách chỉ xét trên trường số thực). Theo phần a), tồn tại siêu phẳng thực đóng K, chứa M và không cắt A. Mệnh đề 3.3 chỉ ra $H = K \cap iK$ là một siêu phẳng phức. Hơn nữa, H đóng, chứa $M \cap iM = M$ và không cắt A. $\square$

Hệ quả 3.1.1. Giả sử X là không gian lồi địa phương thực, A là tập con lồi mở trong X; f là một phiếm hàm tuyến tính trên không gian con tuyến tính $M \subset X$; $M \cap A \neq \emptyset$, và

$$f(x) > 0 \quad (\forall x \in M \cap A).$$

Khi đó, tồn tại phiếm hàm tuyến tính $\tilde{f}$ trên X suy rộng f, và

$$\tilde{f}(x) > 0 \quad (\forall x \in A).$$

Chứng minh

Đặt: $N = f^{-1}(0)(\subset M)$. Khi đó, $N \cap A = \emptyset$. Theo định lý 3.1, tồn tại siêu phẳng H chứa N sao cho: $H \cap A = \emptyset$.

Lấy $a \in A \cap M$ và xác định $\tilde{f}$ bởi:

$$H = \tilde{f}^{-1}(0), \quad \tilde{f}(a) = f(a).$$

Khi đó, $\tilde{f}$ suy rộng f và đồng thời $\tilde{f}(x) > 0$ $(\forall x \in A)$.

Thật vậy, $\tilde{f}(a) = \lambda > 0$. Nếu $\exists x_0 \in A$ với $\tilde{f}(x_0) = -\mu \leq 0$, thì $y = \dfrac{\lambda x_0 + \mu a}{\lambda + \mu} \in A$ (do A lồi).

Ta lại có:

$$\tilde{f}(y) = \frac{\lambda(-\mu) + \mu\lambda}{\lambda + \mu} = 0 \implies y \in H.$$

$\implies$ $y \in H \cap A$: Mâu thuẫn với $H \cap A = \emptyset$ (!).

$\implies$ $\tilde{f}(x) > 0 \quad (\forall x \in A)$. □

Định lý 3.2 *(định lý tách thứ nhất)*

Giả sử A, B là hai tập lồi trong không gian lồi địa phương X, $A \cap B = \emptyset, intA \neq \emptyset$. Khi đó, tồn tại $x^* \in X^*, x^* \neq 0$, tách A và B.

Chứng minh

Theo mệnh đề 1.5, $intA$ lồi. Vì $(intA) \cap B = \emptyset$, nên $(intA) - B$ lồi mở và $0 \notin (intA) - B$.

Từ định lý 3.1 suy ra tồn tại siêu phẳng đóng $H = \{x : < x^*, x >= 0\}$ chứa không gian con tuyến tính $\{0\}$ và không cắt $(intA) - B$. Ta có x^* liên tục, bởi vì H đóng. Hơn nữa, $x^* \neq 0$, bởi vì nếu $x^* = 0$ thì $H = X$, và do đó H không phải là siêu phẳng của X nữa.

Ta lại có $(intA) - B$ nằm trong một nửa không gian sinh bởi H, chẳng hạn nửa không gian trên. Khi đó,

$$< x^*, x - y >> 0 \quad (\forall x \in intA,\ \forall y \in B).$$

$$\Longrightarrow \quad < x^*, x > \geq < x^*, y > \quad (\forall x \in \overline{intA} = \bar{A}, \forall y \in B).$$

$$\Longrightarrow \quad < x^*, x > \geq < x^*, y > \quad (\forall x \in A,\ \forall y \in B). \qquad \square$$

Hệ quả 3.2.1. Giả sử A, B là các tập lồi trong X, $intA \neq \emptyset$. Khi đó,

$$A \text{ và } B \text{ tách được} \iff (intA) \cap B = \emptyset.$$

Chứng minh

a) Giả sử $(intA) \cap B = \emptyset$. Khi đó, theo định lý tách thứ nhất, $\exists 0 \neq x^* \in X^*$ sao cho:

$$< x^*, x > \leq < x^*, y > \quad (\forall x \in intA, \forall y \in B).$$

Do x^* liên tục, $A \subset \overline{intA}$, ta có:

$$< x^*, x > \leq < x^*, y > \quad (\forall x \in A, \forall y \in B),$$

tức là x^* tách A và B.

b) Giả sử $0 \neq x^* \in X^*$ tách A và B, tức là:

$$< x^*, x > \leq < x^*, y > \quad (\forall x \in A, \forall y \in B).$$

Nếu như $\exists x \in intA$, $\exists y \in B$ thỏa mãn:

$$< x^*, x > = < x^*, y >,$$

thì do $x^* \neq 0$, ta tìm được điểm x_1 trong lân cận U của $x (U \subset intA)$, sao cho:

$$< x^*, x_1 > > < x^*, y > .$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết (!). Vì vậy,

$$< x^*, x > < < x^*, y > \quad (\forall x \in intA, \ \forall y \in B).$$

$$\Longrightarrow \quad (intA) \cap B = \emptyset. \qquad \square$$

Định lý 3.3 *(định lý tách thứ 2)*

Giả sử tập A là tập con lồi đóng trong không gian lồi địa phương X và $x_0 \notin A$. Khi đó, tồn tại $x^* \neq 0$ thuộc X^* tách ngặt A và x_0.

Chứng minh

Bởi vì $X \backslash A$ mở và $x_0 \in X \backslash A$, cho nên tồn tại lân cận lồi U của 0 sao cho: $x_0 + U \subset X \backslash A$, tức là:

$$(x_0 + U) \cap A = \emptyset.$$

Theo định lý 3.2, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \neq 0$ tách $x_0 + U$ và A, tức là:

$$< x^*, y > \leq < x^*, x_0 > + < x^*, z > \quad (\forall y \in A, \ \forall z \in U).$$

Do $x^* \neq 0$, ta có:

$$-\epsilon = \inf_{z \in U} < x^*, z > < 0$$

$\Longrightarrow \quad < x^*, y > \leq < x^*, x_0 > -\epsilon \quad (\forall y \in A).$

$\Longrightarrow \quad x^*$ tách ngặt A và x_0. $\square$

Hệ quả 3.3.1. Giả sử X là không gian lồi địa phương Hausdorff, $A \subset X$. Khi đó, $\overline{co}A$ trùng với giao của tất cả các nửa không gian chứa A.

Chứng minh

Gọi tương giao của tất cả các nửa không gian chứa A là M. Bởi vì các nửa không gian là lồi đóng, cho nên một nửa không gian chứa A khi và chỉ khi nó chứa $\overline{co}A$. Do đó,

$$\overline{co}A \subset M.$$

Mặt khác, nếu $x \notin \overline{co}A$, thì do định lý 3.3, tồn tại nửa không gian chứa $\overline{co}A$ và không chứa x. Vậy, $x \notin M$. Do đó, $\overline{co}A = M$. □

Hệ quả 3.3.2. Giả sử X là không gian lồi địa phương Hausdorff, $A \subset X$ lồi. Khi đó, bao đóng của A theo tôpô xuất phát $\bar{A}$ là đóng theo tôpô yếu của X.

Chứng minh

Theo định nghĩa tôpô yếu, tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục theo tôpô yếu và tôpô xuất phát là trùng nhau. Do đó, tất cả các nửa không gian là đóng yếu. Áp dụng hệ quả 3.3.1 suy ra điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.3.3 *(Định lý Mazur)*

Giả sử X là không gian Banach, $A \subset X, x_0$ thuộc bao đóng yếu của A. Khi đó, tồn tại dãy các tổ hợp lồi các phần tử của A, hội tụ đến x_0 theo chuẩn.

Chứng minh

Giả sử $\overline{co}A$ là bao lồi đóng của A theo tôpô metric của X. Theo hệ quả 3.3.2, $\overline{co}A$ đóng yếu.

$\Longrightarrow \quad x_0 \in \overline{coA} = \overline{coA}$ (định lý 1.3).

$\Longrightarrow$ Tồn tại dãy các phần tử của coA hội tụ đến x_0 theo chuẩn. □

3.2.HÀM LIÊN HỢP

3.2.1 Phép biến đổi Young - Fenchel

Giả sử X là không gian lồi địa phương, X^* là không gian liên hợp (tôpô) của X, f là hàm xác định trên X.

Định nghĩa 3.5. *Phép biến đổi Young - Fenchel,* của hàm f, hay *hàm liên hợp* với f, được xác định trên X^* như sau

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{< x^*, x > -f(x)\}. \tag{3.2}$$

Chú ý: cận trên trong (3.2) chỉ lấy theo $x \in dom f$.

Mệnh đề 3.5. f^* là hàm lồi đóng *yếu.

Chứng minh

Với x cố định, hàm $g(x^*) :=< x^*, x > -f(x)$ là hàm tuyến tính trên X^*. Do đó, $g(x^*)$ lồi đóng * yếu.

Trên đồ thị của $f^*(x^*)$ là giao của trên đồ thị các hàm $g(x^*)$, tức là giao của các tập lồi đóng * yếu. Vì vậy, $epi f^*$ lồi đóng * yếu. □

Nhận xét 3.2

Từ định nghĩa 3.5 suy ra:

$$f(x) + f^*(x^*) \geq < x^*, x > \quad (\forall x \in X,\ \forall x^* \in X^*). \quad (3.3)$$

Bất đẳng thức (3.3) được gọi là *bất đẳng thức Young - Fenchel.*

Ví dụ 3.1

$$f(x) = < x_0^*, x > + \alpha \quad (x \in X, x_0^* \in X_0^*).$$

$$\Longrightarrow \quad f^*(x^*) = \sup_x < x^* - x_0^*, x > - \alpha$$

$$= \begin{cases} -\alpha, \text{ nếu } x^* = x_0^*, \\ \infty, \text{ nếu } x^* \neq x_0^*. \end{cases}$$

Ví dụ 3.2

Giả sử $A \subset X$, $f(x) = \delta(x|A)$ (hàm chỉ của tập A). Khi đó,

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in A} < x^*, x > = s(x^*|A)$$

Như vậy, liên hợp của hàm chỉ của tập A là hàm tựa của A :

$$\delta^*(x^*|A) = s(x^*|A) \quad (x^* \in X^*). \quad (3.3)$$

Ví dụ 3.3

Giả sử $A \subset X$. Khi đó, hàm Minkowski của tập A được xác định như sau:

$$f(x) = \mu(x|A) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 0, \\ inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in A\}, & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$$

Ký hiệu A^o là cực của tập A :

$$A^o = \{x^* \in X^* : \ s(x^*|A) \leq 1\}.$$

Chú ý: nếu K là một nón, thì K^0 cũng là một nón:

$$K^o := \{x^* \in X^* : < x^*, x > \leq \ 0, \ \forall x \in K\}.$$

Ta tìm hàm liên hợp của f :

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_x \{< x^*, x > -f(x)\} \\ &= \sup\{< x^*, x > -inf\{\lambda > 0 : \ \lambda^{-1}x \in A\} : x \in X\} \\ &= \sup\{< x^*, x > -\lambda : \ \lambda > 0, \lambda^{-1}x \in A\} \\ &= \sup\{\sup[< x^*, x >: \ x \in \lambda A] - \lambda : \ \lambda > 0\} \\ &= \sup_{\lambda > 0}\{\lambda(\sup_{x \in A} < x^*, x > -1)\} \\ &= \delta(x^*|A^o). \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4

Xét hàm $f(x) = e^x$ $(x \in R)$. Đây là hàm lồi chính thường đóng. Ta có:

$$f^*(x^*) = \sup_x\{x^*x - e^x\} \quad (x^* \in R).$$

* Nếu $x^* < 0$: $x^*x - e^x$ có thể nhận giá trị rất lớn bằng cách lấy x là số âm có trị tuyệt đối rất lớn. Do đó, cận trên bằng $+\infty$.

* Nếu $x^* > 0$: Xét hàm $g(x) = x^*x - e^x$. Ta có:

$$g'(x) = x^* - e^x \;,\; g''(x) = -e^x,$$

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = lnx^*,$$

$$g''(x^*) = -x^* < 0 \implies x = lnx^* \text{ là điểm cực đại.}$$

Vậy, $f^*(x^*) = x^*lnx^* - x^*$.

* Nếu $x^* = 0$: cận trên bằng 0.

Tóm lại,

$$f^*(x^*) = \begin{cases} x^*lnx^* - x^*, & \text{nếu } x^* > 0, \\ 0, & \text{nếu } x^* = 0, \\ +\infty, & \text{nếu } x^* < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 3.5

a) $f(x) = \dfrac{1}{p}|x|^p \quad (x \in R, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ 1 < p < +\infty)$

$\implies \quad f^*(x^*) = \dfrac{1}{q}|x^*|^q \quad (1 < q < +\infty).$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{p}x^p, \text{ nếu } x \geq 0, 0 < p < 1, \\ +\infty, \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad f^*(x^*) = \begin{cases} -\dfrac{1}{q}|x^*|^q, \text{ nếu } x^* < 0, \ -\infty < q < 0, \\ +\infty, \text{ nếu } x^* \geq 0, \end{cases}$$

trong đó $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

3.2.2. Tính chất của hàm liên hợp

Từ định nghĩa 3.5 suy ra:

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \sup_{x^*}\{< x^*, x > -f^*(x^*)\}. \qquad (3.4)$$

Mệnh đề 3.6. Với hàm f bất kỳ, ta có:

$$f^{**} \leq f$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{x^*}\{< x^*, x > -f^*(x^*)\} \\ &= \sup_{x^*}[< x^*, x > - \sup_{x}\{< x^*, x > -f(x)\}] \\ &= \sup_{x^*}[< x^*, x > + \inf_{x}\{f(x)- < x^*, x >\}] \\ &\leq \sup_{x^*}[< x^*, x > +\{f(x)- < x^*, x >\}] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Định lý 3.4. Giả sử f là hàm lồi chính thường đóng trên X. Khi đó, f^* là hàm lồi chính thường.

Chứng minh

Theo mệnh đề 3.5, f^* là hàm lồi. Ta còn phải chỉ ra f^* là hàm chính thường.

Lấy $x_0 \in domf$, ta có:

$$f^*(x^*) \geq < x_0^*, x_0 > -f(x_0) > -\infty \quad (\forall x^* \in X^*).$$

Hơn nữa, $(x_0, f(x_0) - 1) \notin epif$. Theo định lý tách thứ 2, tồn tại (y_0^*, β_0) sao cho:

$$\sup_{(x,\alpha)\in epif} (< y_0^*, x_0 > +\beta_0\alpha) << y_0^*, x_0 > +\beta_0(f(x_0) - 1). \tag{3.5}$$

Rõ ràng là $\beta_0 \neq 0$. Đồng thời, β_0 không thể là số dương, bởi vì nếu $\beta_0 > 0$ thì cận trên ở vế trái bằng $+\infty$. Chia hai vế (3.5) cho $|\beta_0|$, ta nhận được:

$$\sup_{x\in domf} (< |\beta_0|^{-1}y_0^*, x > -f(x)) = f^*(|\beta_0|^{-1}y_0^*)$$

$$< < |\beta_0|^{-1}y_0^*, x_0 > +1 - f(x_0) < \infty. \qquad \square$$

Định lý 3.5. Giả sử X, Y là các không gian lồi địa phương, $\Lambda : X \to Y$ là phép đồng phôi tuyến tính, g là hàm xác định trên Y. Đặt:

$$f(x) = \lambda g(\Lambx + y_0)+ < x_0^*, x > +\gamma_0,$$

trong đó $y_0 \in Y$, $x_0^* \in X^*$, $\gamma_0 \in R, \lambda > 0$. Khi đó,

$$f^*(x^*) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(x^* - x_0^*)) - < x^* - x_0^*, \Lambda^{-1}y_0 > -\gamma_0.$$

Chứng minh

$$f^*(x^*) = \sup_x(< x^*, x > -\lambda g(\Lambda x + y_0) - < x_0^*, x > -\gamma_0).$$

Đặt $y = \Lambda x + y_0$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \lambda \sup_y(\lambda^{-1} < \Lambda^{-1*}(x^* - x_0^*), y > -g(y)) - \\ &\quad - < x^* - x_0^*, \Lambda^{-1}y_0 > -\gamma_0 \\ &= \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(x^* - x_0^*)) - < x^* - x_0^*, \Lambda^{-1}y_0 > -\gamma_0. \quad \square \end{aligned}$$

Hệ quả 3.5.1

(i) $f(x) = g(x + x_0) \implies f^*(x^*) = g^*(x^*) - < x^*, x_0 >$;

(ii) $f(x) = g(x) + < x_0^*, x > \implies f^*(x^*) = g^*(x^* - x_0^*)$;

(iii) $f(x) = \lambda g(x), \lambda > 0 \implies f^*(x^*) = \lambda g^*(\lambda^{-1}x^*)$;

(iv) $f(x) = \lambda g(\lambda^{-1}x), \lambda > 0 \implies f^*(x^*) = \lambda g^*(x^*)$;

(v) $f(x) = g(\lambda x), \lambda > 0 \implies f^*(x^*) = g^*(\lambda^{-1}x^*)$.

Định lý 3.6 *(Định lý Fenchel - Moreau)*

Giả sử X là không gian lồi địa phương Hausdorff, $f : X \to (-\infty, +\infty]$. Khi đó,

$$f = f^{**} \iff f \text{ lồi đóng}.$$

Chứng minh

Trước hết ta chú ý rằng: đối với tập lồi A trong không gian lồi địa phương Hausdorff, thì do hệ quả 3.3.2, bao đóng và bao đóng yếu của A trùng nhau.

a) Giả sử $f = f^{**}$. Theo mệnh đề 3.5, f^{**} là hàm lồi đóng yếu. Vậy f^{**} lồi đóng.

b) Giả sử f lồi đóng.

Ta để ý rằng: nếu $f(x) \equiv +\infty$, thì hiển nhiên $f = f^{**}$. Do mệnh đề 3.6, $f^{**} \leq f$. Vì thế ta chỉ cần chứng minh rằng: nếu f là hàm lồi chính thường đóng thì $f \leq f^{**}$.

Thật vậy, giả sử $\exists x_0 \in dom f^{**}$ sao cho: $f(x_0) > f^{**}(x_0)$. Ta có $epi f$ là tập lồi đóng khác $\emptyset$ và $(x_0, f^{**}(x_0)) \notin epi f$. Theo định lý tách thứ 2, tồn tại $(y^*, \beta) \in X^* \times R$ tách ngặt $(x_0, f^{**}(x_0)$ và $epi f$, tức là:

$$\sup_{(y,\alpha)\in epi f} \{< y^*, y > +\beta\alpha\} < < y^*, x_0 > +\beta f^{**}(x_0). \quad (3.6)$$

Khi đó, $\beta \leq 0$, bởi vì nếu $\beta > 0$ thì cận trên ở vế trái bằng $+\infty$.

Mặt khác, theo định lý 3.4, f^* là hàm lồi chính thường. Như vậy, $dom f^* \neq \emptyset$.

Nếu $\beta = 0$: lấy $y_1^* \in domf^*$, với $t > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f^*(y_1^* + ty^*) &= \sup_{y \in domf} \{< y_1^* + ty^*, y > - f(y)\} \\ &\leq \sup_{y \in domf} \{< y_1^*, y > - f(y)\} + t \sup_{y \in domf} < y^*, y > \\ &= f^*(y_1^*) + t \sup_{y \in domf} < y^*, y > . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Từ (3.6) (với $\beta = 0$), suy ra:

$$< y^*, x_0 > > \sup_{y \in domf} < y^*, y > .$$

Vì vậy, từ (3.7) ta nhận được:

$$\begin{aligned} f^{**}(x_0) &\geq < y_1^* + ty^*, x_0 > - f^*(y_1^* + ty^*) \\ &\geq < y_1^*, x_0 > - f^*(y_1^*) + \\ &\quad + t \left[< y^*, x_0 > - \sup_{y \in domf} < y^*, y > \right] \to +\infty \end{aligned}$$

(khi $t \to +\infty$).

$\Longrightarrow$ $x_0 \notin domf^{**}$: Mâu thuẫn với $x_0 \in domf^{**}$ ở trên.

$\Longrightarrow$ Trường hợp $\beta = 0$ không xảy ra.

$\Longrightarrow$ $\beta < 0$.

Chia hai vế (3.6) cho $|\beta|$ và đặt $x^* = |\beta|^{-1}y^*$; ta nhận được:

$$\begin{aligned} < x^*, x_0 > -f^{**}(x_0) &> \sup_{(y,\alpha)\in epif} \{< x^*, y > -\alpha\} \\ &\geq \sup_{y\in domf} \{< x^*, y > -f(y)\} \\ &= f^*(x^*). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad < x^*, x_0 > > \; f^{**}(x_0) + f^*(x^*)$: Mâu thuẫn với bất đẳng thức Young - Fenchel (!).

Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 3.6.1. Giả sử f là hàm lồi chính thường đóng trên X. Khi đó, f trùng với cận trên của họ tất cả các hàm $affine$ liên tục không lớn hơn f :

$$f(x) = \sup\{h(x) : h - affine \text{ liên tục }, h \leq f\}$$

Chứng minh

Theo định lý Fenchel - Moreau, $f = f^{**}$. Do đó, $f(x)$ là cận trên của họ các hàm $affine$ có dạng:

$$x \longmapsto < x^*, x > -f^*(x^*) \quad (x^* \in domf^*).$$

Như vậy là:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sup_{x}\{< x^*, x > - f^*(x^*)\} \\
&\le \sup\{h(x) : h - affine \text{ liên tục }, h \le f\} \\
&\le f(x).
\end{aligned}
$$

Vì vậy,

$$f(x) = \sup\{h(x) : h - affine \text{ liên tục }, h \le f\}.$$

□

Hệ quả 3.6.2. Giả sử $\overline{co}f$ là hàm chính thường. Khi đó,

$$f^{**} = \overline{co}f.$$

Chứng minh

Ta có $epif^{**}$ là tập lồi đóng. Do $f \ge f^{**}$, nên

$$epif^{**} \supset epif.$$

Do đó,

$$epif \subset \overline{co}(epif) \subset epif^{**}.$$

$$\Longrightarrow \quad f \ge \overline{co}f \ge f^{**}. \tag{3.8}$$

Để ý rằng: nếu $f_1 \le f_2$, thì $f_1^* \ge f_2^*$. Vì thế,

$$f^* \le (\overline{co}f)^*.$$

$$\Longrightarrow \quad f^{**} \ge (\overline{co}f)^{**} = \overline{co}f. \tag{3.9}$$

Từ (3.8), (3.9) suy ra: $f^{**} = \overline{co}f$. □

Hệ quả 3.6.3. Giả sử $\overline{co}f$ là hàm chính thường. Khi đó,

$$f^* = (\overline{co}f)^*.$$

Chứng minh

Theo hệ quả 3.6.2, $f^{**} = \overline{co}f$.

$\Longrightarrow \quad (f^*)^{**} = (\overline{co}f)^*$.

Hơn nữa, theo mệnh đề 3.5, f^* là hàm lồi đóng, cho nên theo định lý 3.6,

$$(f^*)^{**} = f^*.$$

Do đó, $f^* = (\overline{co}f)^*$. □

Định lý 3.7. Giả sử f là hàm chính thường trên R^n. Khi đó,

$$(cof)(x) = inf\{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) : \ x_i \in R^n, \alpha_i \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x\} \qquad (3.10)$$

Hơn nữa, nếu f là hàm đóng và $domf^{**}$ là tập bị chặn, thì:

$$f^{**} = cof.$$

Chứng minh

a) Theo định lý Carathéodory,

$$(cof)(x) = inf\{\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i f(x_i) : \ x_i \in R^n, \alpha_i \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i x_i = x\}.$$

Ta cố định $x_i \in R^n$ $(i = 1, \ldots, n+2)$ và $x \in R^n$ và xét bài toán:

$$(P1) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i f(x_i) \to inf, \\ \alpha_i \geq 0, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 1, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i x_i = x. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán $(P1)$ tồn tại, bởi vì tập chấp nhận được là compăc và hàm mục tiêu là tuyến tính.

Để chứng minh (3.10), ta chỉ cần chứng minh rằng: khi giá trị của bài toán $(P1)$ hữu hạn, trong số các nghiệm của $(P1)$ ta tìm được một nghiệm $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ có ít nhất một thành phần bằng 0.

Giả sử $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ là nghiệm của bài toán $(P1)$.

* Nếu một trong các số α_i bằng 0, ta nhận được điều cần chứng minh.

* Nếu $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n+2)$: Theo định lý Carathéodory, ta tìm được $\alpha'_1 \geq 0, \ldots, \alpha'_{n+2} \geq 0$, trong đó không quá $n+1$

số khác 0, sao cho:

$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha'_i = 1, \sum_{i=1}^{n+2} \alpha'_i x_i = x.$$

- Nếu $\sum \alpha'_i f(x_i) \leq \sum \alpha_i f(x_i)$: ta có $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n+2})$ là nghiệm của bài toán $(P1)$ và suy ra điều phải chứng minh.
- Nếu $\sum \alpha'_i f(x_i) > \sum \alpha_i f(x_i)$: Đặt $\beta_i = \alpha_i - \alpha'_i$. Khi đó,

$$\sum \beta_i = 0, \sum \beta_i x_i = 0.$$

Hơn nữa, với $\alpha > 0$ đủ nhỏ, ta có:

$$\alpha_i + \lambda\beta_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n+2);\ \sum_{i=1}^{n+2} (\alpha_i + \lambda\beta_i) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} (\alpha_i + \lambda\beta_i) x_i = x;$$
$$\sum_{i=1}^{n+2} (\alpha_i + \lambda\beta_i) f(x_i) < \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i f(x_i),$$

mâu thuẫn với $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ là nghiệm của $(P1)$.

b) Giả sử f là hàm đóng và $domf^{**}$ là tập bị chặn.

Lấy $x \in domf^{**}$. Từ hệ quả 3.6.2 suy ra tồn tại dãy $\{(\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{n+1,m}, x_{1m}, \ldots, x_{n+1,m})\}$ sao cho: $\alpha_{im} \geq 0$,

$\sum \alpha_{im} = 1, x_{im} \in dom f$ và:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} f(x_{im}) \to f^{**}(x) \quad (\text{ khi } m \to \infty),$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} x_{im} \to x \quad (\text{ khi } m \to \infty).$$

Bởi vì các dãy $\{\alpha_{im}\}$ và $\{x_{im}\}$ bị chặn, cho nên ta có thể xem như $\alpha_{im} \to \alpha_i, x_{im} \to x_i$ khi $m \to \infty$ $(\forall i)$. Khi đó, $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \alpha_i x_i = x$.

Nếu $f(x_{im}) \to +\infty$ với chỉ số i nào đó: do f bị chặn dưới, $\alpha_{im} \to 0$ và $\alpha_{im} f(x_{im}) \to 0$.

Nếu $\underline{\lim} f(x_{im}) < +\infty$: do tính đóng của f ta có $f(x_i) < +\infty$.

Vì vậy,

$$f^{**}(x) \leq (cof)(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

$$\leq \underline{\lim} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{im} f(x_{im}) = f^{**}(x).$$

$\square$

3.2.3. Quan hệ giữa hàm tựa và hàm chỉ

Định lý 3.8

a) Giả sử A là tập lồi đóng trong không gian lồi địa phương X. Khi đó, hàm tựa và hàm chỉ của tập A liên hợp lẫn nhau:

$$(s(.|A))^* = \delta(.|A),$$

$$(\delta(.|A))^* = s(.|A).$$

b) Hàm tựa của một tập lồi khác $\emptyset$ là hàm lồi, thuần nhất dương, chính thường, đóng.

Chứng minh

a) Ta có:

$$\begin{aligned}\delta^*(x^*|A) &= \sup_x\{< x^*, x > -\delta(x|A)\}\\ &= \sup_{x\in A} < x^*, x >\\ &= s(x^*|A).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad (s(.|A))^* &= (\delta(.|A))^{**} = \overline{co}\delta(.|A) \quad \text{(hệ quả 3.6.2)}\\ &= \delta(.|\overline{co}A) = \delta(.|A) \quad \text{(ví dụ 1.6)}.\end{aligned}$$

b) Ta sẽ chỉ ra rằng: hàm lồi, chính thường, đóng f không nhận giá trị nào khác ngoài 0 và $+\infty$ khi và chỉ khi hàm liên hợp f^* là thuần nhất dương.

Thật vậy, f là hàm lồi, chính thường, đóng không nhận giá trị nào khác ngoài 0 và $+\infty$ khi và chỉ khi:

$$f(x) = \lambda f(x) \quad (\forall x \in X, \forall \lambda > 0).$$

Mặt khác, f^* là hàm thuần nhất dương khi và chỉ khi:

$$f^*(x^*) = \lambda f^*(\lambda^{-1}x^*) \quad (\forall x^* \in X^*, \ \forall \lambda > 0).$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}(f^*\lambda)(x^*) = (\lambda f)^*(x^*) &= \sup_x\{< x^*, x > -\lambda f(x)\} \\ &= \sup_x\{\lambda(< \lambda^{-1}x^*, x > -f(x))\} \\ &= \lambda f^*(\lambda^{-1}x^*).\end{aligned}$$

Vậy f^* là hàm thuần nhất dương khi và chỉ khi:

$$f^* = f^*\lambda \quad (\forall \lambda > 0).$$

Rõ ràng là: nếu f là hàm lồi đóng, thì:

$$f = \lambda f \ (\forall \lambda > 0) \iff f^* = f^*\lambda \ (\forall \lambda > 0).$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.3

Có sự tương ứng 1-1 giữa các tập lồi đóng và hàm tựa của chúng.

Thật vậy, ta có sự tương ứng 1-1 giữa các tập lồi đóng và hàm chỉ của chúng. Từ định lý 3.8.a) ta suy ra kết luận cần chứng minh. □

Hệ quả 3.8.1. Giả sử f là hàm lồi thuần nhất dương, $f \not\equiv +\infty$. Khi đó, bao đóng $\bar{f}$ của f là hàm tựa của tập lồi đóng C :

$$C = \{x^* \in X^* :< x^*, x > \leq f(x),\ \forall x\}.$$

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Giả sử A là tập lồi đóng trong X. Khi đó,

$$x \in A \Longleftrightarrow < x^*, x > \leq \sup_{y \in A} < x^*, y > = s(x^*|A)$$
$$(\forall x^* \in X^*).$$

Chứng minh

Thật vậy, nếu $x \in A$ thì hiển nhiên:

$$< x^*, x > \leq \sup_{y \in A} < x^*, y > \quad (\forall x^*). \tag{3.11}$$

Ngược lại, giả sử (3.11) đúng, nhưng $x \notin A$. Theo định lý tách thứ 2, x và A tách ngặt được bởi $x_0^* \neq 0$ thuộc X^*, tức là:

$$\sup_{x \in A} < x_0^*, x > < < x_0^*, x > .$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in A} < x_0^*, x > < < x_0^*, x > \leq \sup_{x \in A} < x_0^*, x > \text{: vô lý (!)}$$

Chứng minh hệ quả 3.8.1.

Xét hai trường hợp: hoặc là $\bar{f}$ là hàm lồi thuần nhất dương, chính thường, đóng, hoặc là $\bar{f} \equiv -\infty$ (hàm tựa của tập $\emptyset$). Theo định lý 3.8 và nhận xét 3.3, $\bar{f} = s(.|C)$ với C là một tập lồi đóng nào đó. Từ bổ đề 3.1 và hệ quả 3.6.3, ta có:

$$\begin{aligned} x \in C &\Longleftrightarrow < x^*, x > \leq s(x^*|C) \ (\forall x^*) \\ &\Longleftrightarrow f^* = (\bar{f})^* = s^*(.|C) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow < x^*, x > \leq f(x) \ (\forall x). \end{aligned}$$

□

3.3. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

Định lý 3.9

a) Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm xác định trên X. Khi đó,

$$(f_1 \oplus \ldots \oplus f_m)^* = f_1^* + \ldots + f_m^*,$$
$$(f_1 + \ldots + f_m)^* \leq f_1^* \oplus \ldots \oplus f_m^*.$$

b) Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường; $\exists x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i$; có thể trừ ra một hàm, còn lại đều liên tục tại x_0. Khi đó,

$$(f_1 + \ldots + f_m)^* = f_1^* \oplus \ldots \oplus f_m^*. \qquad (3.12)$$

Hơn nữa, $\forall x^* \in dom(f_1 + \ldots + f_m)^*$, $\exists x_i \in dom f_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ sao cho:

$$x^* = x_1^* + \ldots + x_m^*,$$

$$(f_1 + \ldots + f_m)^*(x^*) = f_1^*(x_1^*) + \ldots + f_m^*(x_m^*).$$

Chứng minh

Ta chỉ chứng minh cho $m = 2$. Trường hợp tổng quát dễ dàng suy ra được bằng quy nạp.

a) Ta có: $(f_1 \oplus f_2)^*(x^*) =$

$$\begin{aligned}
&= \sup_x \{< x^*, x > - \inf_z [f_1(x - z) + f_2(z)]\} \\
&= \sup_{y,z} \{< x^*, y > - f_1(y) + < x^*, z > - f_2(z)\} \\
&= f_1^*(x^*) + f_2^*(x^*)
\end{aligned}$$

Do bất đẳng thức Young - Fenchel,

$$f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) \geq < x_1^* + x_2^*, x > - f_1(x) - f_2(x)$$

$$(\forall x_1^*, x_2^* \in X^*, \forall x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) \geq (f_1 + f_2)^*(x_1^* + x_2^*). \qquad (3.13)$$

Bất đẳng thức (3.13) đúng với mọi x_1^*, x_2^* mà $x_1^* + x_2^* = x^*$. Vì vậy,

$$f_1^* \oplus f_2^* \geq (f_1 + f_2)^*. \qquad (3.14)$$

b) Bởi vì các hàm f_1, f_2 là các hàm lồi chính thường, cho nên nếu $dom(f_1 + f_2)^* = \emptyset$, thì từ (3.14) suy ra (3.12) đúng:

$$f_1^* \oplus f_2^* = (f_1 + f_2)^* \equiv +\infty$$

(*Chú ý:* ta quy ước cận trên lấy trên tập $\emptyset$ bằng $+\infty$).

Bây giờ xét trường hợp: $dom(f_1 + f_2)^* \neq \emptyset$. Giả sử $(f_1 + f_2)^*(x_0^*) = \alpha_0 < +\infty$ và f_1 liên tục tại điểm nào đó thuộc $dom f_2$. Khi đó, $dom(f_1 + f_2) \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow \quad (f_1 + f_2)^*(x^*) > -\infty \quad (\forall x^* \in X^*)$.

$\Longrightarrow \quad -\infty < (f_1 + f_2)^*(x_0^*) = \alpha_0 < +\infty$.

Xét tập hợp:

$$A = \{(x, \alpha) \in X \times \boldsymbol{R} :\ \alpha \leq < x_0^*, x > -f_2(x) - \alpha_0\}.$$

Khi đó, A lồi. Do định lý 2.9, $int(epi f_1) \neq \emptyset$.

Ta chứng minh: $A \cap int(epi f_1) = \emptyset$?

Thật vậy, nếu $A \cap int(epi f_1) \neq \emptyset$, thì $\exists (x, \alpha) \in A \cap int(epi f_1)$. Khi đó,

$$f_1(x) < \alpha \leq < x_0^*, x > -f_2(x) - \alpha_0.$$

$\Longrightarrow \quad \alpha_0 < < x_0^*, x > -f_1(x) - f_2(x) \leq (f_1 + f_2)^*(x_0^*)$: mâu thuẫn với $(f_1 + f_2)^*(x_0^*) = \alpha_0$ (!).

$\Longrightarrow \quad A \cap int(epi f_1) = \emptyset$.

Theo định lý tách thứ nhất, tồn tại $(y^*, \beta) \neq 0$ thuộc $X^* \times R$ tách A và $epi f_1$:

$$\sup\{ < y^*, x > +\beta\alpha : (x,\alpha) \in epi f_1\} \leq$$
$$\leq inf\{< y^*, x > +\beta\alpha : \ (x,\alpha) \in A\}. \tag{3.15}$$

Rõ ràng $\beta \leq 0$. Nếu $\beta = 0$, thì y^* vẫn khác 0, bởi vì $(y^*, \beta) \neq 0$. Từ (3.15) suy ra y^* tách $dom f_1$ và $dom f_2$. Nhưng điều này không thể xảy ra được, bởi vì $int(dom f_1) \cap dom f_2 \neq \emptyset$ (hệ quả 3.2.1).

Vì vậy, $\beta < 0$. Chia hai vế (3.15) cho $|\beta|$ và đặt $x_1^* = |\beta|^{-1} y^*$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} f_1^*(x_1^*) &= \sup\{< x_1^*, x > -f_1(x) : \ x \in X\} \\ &= \sup\{< x_1^*, x > -\alpha : \ (x,\alpha) \in epi f_1\} \\ &\leq inf\{< x_1^*, x > -\alpha : \ (x,\alpha) \in A\} \\ &= inf\{< x_1^* - x_0^*, x > +f_2(x) : \\ &\qquad\qquad x \in dom f_2\} + \alpha_0 \\ &= -f_2^*(x_0^* - x_1^*) + \alpha_0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad (f_1^* \oplus f_2^*)(x_0^*) = f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_0^* - x_1^*)$$
$$\leq \alpha_0 = (f_1 + f_2)^*(x_0^*).$$

Nhận xét 3.4

Định lý 3.9 chỉ ra rằng: các phép toán cộng và tổng chập các hàm lồi chính thường là đối ngẫu lẫn nhau.

Một kết quả tương tự định lý 3.9 là: các phép toán lấy cận trên và bao lồi cận dưới các hàm lồi, hữu hạn, liên tục (có thể trừ ra một hàm không liên tục) là đối ngẫu lẫn nhau:

$$(co(f_1 \wedge \ldots \wedge f_m))^* = f_1^* \vee \ldots \vee f_m^*,$$
$$(f_1 \vee \ldots \vee f_m)^* = co(f_1^* \wedge \ldots \wedge f_m^*).$$

Bây giờ giả sử X, Y là các không gian lồi địa phương; $\Lambda : X \to Y$ là toán tử tuyến tính ; f là hàm xác định trên Y; g là hàm xác định trên X. Ta xác định các hàm $f\Lambda$ và Λg như sau:

$$(f\Lambda)(x) = f(\Lambda x),$$
$$(\Lambda g)(y) = inf\{g(x) : x \in X,\ \Lambda x = y\}.$$

Định nghĩa 3.6. Các hàm $f\Lambda$ và Λg được gọi tương ứng là *nghịch ảnh* của hàm f và *ảnh* của hàm g qua ánh xạ Λ.

Định lý 3.10

a) Giả sử $\Lambda : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục; g là hàm xác định trên X; f là hàm xác định trên Y. Khi đó,

$$(\Lambda g)^* = g^*\Lambda^* \text{ , } (f\Lambda)^* \leq \Lambda^* f^*.$$

b) Nếu f là hàm lồi, liên tục tại một điểm nào đó thuộc $Im\Lambda$, thì:

$$(f\Lambda)^* = \Lambda^* f^*.$$

Hơn nữa, $\forall x^* \in dom(f\Lambda)^*$, $\exists y^* \in Y^*$ sao cho:

$$x^* = \Lambda^* y^*, \ (f\Lambda)^*(x^*) = f^*(y^*).$$

Chứng minh

a) Ta có:

$$\begin{aligned}(\Lambda g)^*(x^*) &= \sup_x \{< x^*, x > - \inf_{\Lambda y = x} g(y)\} \\ &= \sup_x \sup_{\Lambda y = x} \{< x^*, x > - g(y)\} \\ &= \sup_y \{< x^*, \Lambda y > - g(y)\} \\ &= \sup_y \{< \Lambda^* x^*, y > - g(y)\} \\ &= g^*(\Lambda^* x^*) = (g^* \Lambda^*)(x^*).\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad (\Lambda g)^* = g^* \Lambda^*. \tag{3.16}$$

Từ bất đẳng thức Young - Fenchel, ta nhận được:

$$(\Lambda^* f^*)(x^*) \geq < x^*, x > -(\Lambda^* f^*)^*(x)$$

$$(\forall x \in X, \forall x^* \in X^*)$$

$\Longrightarrow \quad (\Lambda^* f^*)(x^*) \geq < x^*, x > -(f^{**}\Lambda)(x)$ (do (3.16)).

Bởi vì $epif \subset epif^{**}$, cho nên $f \geq f^{**}$. Do đó,

$$f(\Lambda x) \geq f^{**}(\Lambda x)$$

$\Longrightarrow \quad < x^*, x > -f^{**}(\Lambda x) \geq < x^*, x > -(f\Lambda)(x)$

$\Longrightarrow \quad \Lambda^* f^* \geq (f\Lambda)^*$

b) Để chứng minh phần b), ta chỉ cần chứng minh rằng: nếu f liên tục tại điểm nào đó thuộc $Im\Lambda$, và $x^* \in dom(f\Lambda)^*$, thì:

$$(\Lambda^* f^*)(x^*) \leq (f\Lambda)^*(x^*).$$

Đặt $\alpha_0 = (f\Lambda)^*(x^*)$. Do $(domf) \cap (Im\Lambda) \neq \emptyset$, hàm $f\Lambda$ có nhận giá trị hữu hạn, nghĩa là hàm $(f\Lambda)^*$ lớn hơn $-\infty$ tại mọi điểm. Như vậy, $|\alpha_0| < +\infty$.

Xét đa tạp tuyến tính sau đây trong $Y \times R$:

$$M = \{(y,\alpha) \in Y \times R : \\ \exists x \in X,\ \alpha = < x^*, x > -\alpha_0,\ y = \Lambda x\}.$$

Ta có:

$$M \cap int(epif) = \emptyset. \tag{3.17}$$

Thật vậy, nếu $M \cap int(epif) \neq \emptyset$, thì $\exists (y, \alpha) \in M \cap int(epif)$. Do đó, $\exists x \in X$ sao cho:

$$f(\Lambda x) < < x^*, x > -\alpha_0.$$

$\Longrightarrow \quad \alpha_0 \; << x^*, x> - f(\Lambda x) \le (f\Lambda)^*(x^*) = \alpha_0$: vô lý (!)

$\Longrightarrow \quad$ (3.17) đúng.

Theo định lý tách thứ nhất, $\exists(y^*, \beta) \neq 0$ thuộc $Y^* \times R$ sao cho:

$$\sup\{< y^*, y> + \beta\alpha : (y, \alpha) \in epif\} \le$$
$$\le inf\{< y^*, y> + \beta\alpha : \; (y, \alpha) \in M\}. \qquad (3.18)$$

Rõ ràng là $\beta \le 0$. Nếu $\beta = 0$, thì $y^* \neq 0$ và y^* tách $domf$ và $Im\Lambda$. Điều này mâu thuẫn với $int(domf) \cap (Im\Lambda) \neq \emptyset$. Vì vậy, $\beta < 0$.

Chia hai vế (3.18) cho $|\beta|$, và đặt $y_0^* = |\beta|^{-1}y^*$, ta nhận được:

$$f^*(y_0^*) \le inf\{< y_0^*, y> - \alpha : \; (y, \alpha) \in M\}$$
$$= inf\{< y_0^*, \Lambda x> - < x^*, x> + \alpha_0 : x \in X\}.$$

Do $f^*(y^*) > -\infty$ $(\forall y^*)$, ta suy ra $x^* = \Lambda^* y_0^*$.

Thật vậy, nếu $x^* \neq \Lambda^* y_0^*$, thì:

$$\inf_x\{< y_0^*, \Lambda x> - < x^*, x>\} =$$
$$= \inf_x < \Lambda^* y_0^* - x^*, x> = -\infty.$$

Như vậy, $x^* \in Im\Lambda^*, x^* = \Lambda^* y_0^*$. Khi đó,

$$(\Lambda^* f^*)(x^*) = inf\{f^*(y^*) : y^* \in Y^*, \Lambda^* y^* = x^*\}$$
$$\le f^*(y_0^*) \le \alpha_0 = (f\Lambda)^*(x^*). \qquad \square$$

BÀI TẬP

3.1. Cho $C \subseteq R^n$ là tập hợp lồi, $f : C \to R^p$, $g : C \to R^q$ là các hàm vectơ lồi, còn $h : C \to R^r$ là hàm vectơ affine. Xét hai hệ bất phương trình sau:

$$f(x) < 0;\ g(x) \leq 0;\ h(x) = 0,\ x \in C; \qquad (1)$$

$$< u, f(x) > + < v, g(x) > + < w, h(x) > \geq 0. \qquad (2)$$

$(\forall x \in C; u \in R^p_+; v \in R^q_+; w \in R^r)$.

Giả sử hệ (1) không có nghiệm. Chứng minh rằng hệ (2) có nghiệm $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ không tầm thường.

3.2. Cho $f : D(f) \to R$, với $D(f) \subseteq R^n$ là hàm tùy ý. Gọi f^* là hàm liên hợp của f. Xét hàm số:

$$g(x) = \alpha f(x) + < x, z > + \beta,$$

trong đó $x \in D(f)$, $z \in R^n$ là vectơ cho trước, α và β là các hằng số cho trước trong đó $\alpha > 0$. Chứng minh rằng:

$$g^*(y) = \alpha f^*(\frac{y - z}{\alpha}) - \beta\ ,$$

với $y \in D(g^*) = \alpha D(f^*) + z$.

3.3. Cho $f : D(f) \to R$, $D(f) \subseteq R^n$ là hàm có dạng:

$$f(x) = f(x^1, x^2) = f_1(x^1) + f_2(x^2),$$

$(x^1, x^2) \in D(f) = D(f_1) \times D(f_2)$, $D(f_1) \subseteq R^k, D(f_2) \subseteq R^l$

với $k + l = n$. Chứng minh rằng:

$$f^*(y) = f^*(y_1, y_2) = f_1^*(y_1) + f_2^*(y_2).$$

3.4. Cho hàm affine $f : D(f) \to R$ xác định như sau:

$$f(x) = < a, x > + b \qquad (a \in R^n, b \in R).$$

Xác định $f^*(y)$ và hãy xác định $D(f^*)$.

3.5. Cho hàm $f : R^n \to R$ là hàm thuần nhất dương bậc 1, tức là:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in R^n, \forall \lambda \in R_+.$$

Tính $f^*(y)$ và xác định $D(f^*)$.

3.6. Cho $f_i(x) = < a_i, x > + b_i$, với $a_i \in R^n, b_i \in R, i = 1, 2,$ $f(x) = \max_{i=1,2} f_i(x)$.

Chứng minh rằng:

1) $D(f^*) = [a_1, a_2] = \{y : y = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$;

2) Khi $y \in D(f^*)$ thì:

$$f^*(y) = -\lambda b_1 - (1 - \lambda) b_2.$$

3.7. Giả sử $a \in R^n, a \neq 0, b, c \in R$. Xác định hàm số f như sau:

$$f(x) = b, \forall x \in D(f) = \{x \in R^n : < a, x > \leq c\}$$

(hàm hằng số trên nửa không gian).

Chứng minh rằng:

1) $D(f^*) = \{y : y = \rho a, \rho \geq 0\}$,

2) $f^*(y) = \rho c - b, \forall y \in D(f^*)$.

3.8. Giả sử $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p, p > 1$.

Chứng minh rằng :

1) $D(f^*) = R^n$,

2) $f^*(y) = \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$, ở đây $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Chương IV

DƯỚI VI PHÂN

4.1. ĐẠO HÀM THEO PHƯƠNG

Giả sử f là hàm xác định trên không gian lồi địa phương Hausdorff X, $|f(\bar{x})| < +\infty$.

Định nghĩa 4.1. *Đạo hàm của hàm f theo phương d tại* $\bar{x}$, ký hiệu là $f'(\bar{x}; d)$, được định nghĩa là giới hạn sau:

$$f'(\bar{x}; d) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

nếu giới hạn này tồn tại (có thể hữu hạn hoặc $\pm\infty$).

Nhận xét 4.1

$f'(\bar{x}; .)$ là hàm thuần nhất dương.

Thật vậy, $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}; \lambda d) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \epsilon\lambda d) - f(\bar{x})}{\epsilon} \\ &= \lambda \lim_{\epsilon' \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \epsilon' d) - f(\bar{x})}{\epsilon'} \\ &= \lambda f'(\bar{x}; d). \end{aligned}$$

Mệnh đề 4.1. Giả sử φ là hàm lồi chính thường trên R. Khi đó, φ có đạo hàm phải $\varphi'_+(.)$ tại mọi điểm của $dom\varphi$. Đồng thời, $\varphi'_+(t)$ là hàm không giảm và nhận giá trị hữu hạn khi $t \in int(dom\varphi)$.

Chứng minh

Lấy $t_1 < t_2 < t_3$, với $t_1, t_2 \in dom\varphi$. Bởi vì hàm φ lồi và:

$$t_2 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}.t_1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.t_3,$$

cho nên:

$$\varphi(t_2) \leq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}\varphi(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\varphi(t_3).$$

$$\Longrightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}[\varphi(t_3) - \varphi(t_1)],$$

$$\varphi(t_3) - \varphi(t_2) \geq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}[\varphi(t_3) - \varphi(t_1)].$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_1)}{t_3 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2}. \quad (4.1)$$

Lấy $t \in dom\varphi$. Từ (4.1) suy ra $\dfrac{\varphi(t+\lambda) - \varphi(t)}{\lambda}$ không tăng khi λ giảm tới 0 (nếu t là điểm biên bên phải của $dom\varphi$, thì $\dfrac{\varphi(t+\lambda) - \varphi(t)}{\lambda} = +\infty, \forall \lambda > 0$). Do đó, với $t \in dom\varphi$, φ có đạo hàm phải $\varphi'_+(t)$:

$$\varphi'_+(t) = \varphi'(t;1) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(t+\lambda) - \varphi(t)}{\lambda}.$$

Hơn nữa, với $t_1, t_2 \in dom\varphi$ và $0 < \delta < t_2 - t_1$, từ (4.1) ta nhận được:

$$\varphi'_+(t_1) \leq \frac{\varphi(t_1+\delta) - \varphi(t_1)}{\delta}$$
$$\leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_2+\lambda) - \varphi(t_2)}{\lambda}.$$

$\Longrightarrow \quad \varphi'_+(t_1) \leq \varphi'_+(t_2)$, tức là $\varphi'_+(.)$ không giảm và $|\varphi'_+(t)| < +\infty$ khi $t \in int(dom\varphi)$. □

Định lý 4.1. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, f có đạo hàm theo phương tại mọi điểm $x \in domf$. Đồng thời,

$$f'(x;d) = \inf_{\lambda>0} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}. \tag{4.2}$$

Chứng minh

Lấy $x \in domf$, $d \in X$. Đặt $\varphi(t) := f(x+td)$. Khi đó, φ là hàm lồi chính thường trên R và $0 \in dom\varphi$. Mệnh đề 4.1 chỉ ra đạo hàm phải $\varphi'_+(0)$ tồn tại. Đồng thời,

$$\varphi'_+(0) = f'(x;d).$$

Như vậy, f có đạo hàm theo phương d tại x.

Bởi vì $\varphi'_+(.)$ là hàm không giảm (mệnh đề 4.1), cho nên (4.2) đúng. □

Nhận xét 4.2

Nếu f là lồi chính thường trên $X, x \in domf$, thì $f'(x,.)$ là hàm lồi.

Thật vậy, lấy $d_1, d_2 \in X$, ta có:

$$f'(x; d_1 + d_2) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \frac{\lambda}{2}(d_1 + d_2)) - f(x)}{\frac{\lambda}{2}}$$

$$= 2 \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\frac{1}{2}(x + \lambda d_1) + \frac{1}{2}(x + \lambda d_2)) - f(x)}{\lambda}$$
$$\leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda d_1) - f(x) + f(x + \lambda d_2) - f(x)}{\lambda}$$
$$= f'(x; d_1) + f'(x; d_2)$$

Mệnh đề 4.2. Giả sử f là hàm thuần nhất dương trên X. Khi đó,

a) Nếu f liên tục tại mọi điểm của tập $U \subset X$, thì f liên tục tại mọi điểm của nón K_U sinh bởi tập U, có thể trừ ra điểm 0;

b) Nếu f liên tục trong một lân cận của 0, thì f liên tục trên X.

Chứng minh

a) Lấy $x_0 \neq 0$ thuộc K_U. Khi đó, $\exists \lambda > 0 : \lambda x_0 \in U$. Do f liên tục tại điểm λx_0, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại lân cận V của λx_0 sao cho:

$$|f(x) - f(\lambda x_0)| < \lambda \epsilon \quad (\forall x \in V).$$

Ta có $\frac{1}{\lambda}V$ là một lân cận của x_0 và $\forall x \in \frac{1}{\lambda}V$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \lambda^{-1}|f(\lambda x) - f(\lambda x_0)| < \epsilon.$$

$\Longrightarrow$ f liên tục tại x_0.

b) Nếu f liên tục trong lân cận W của 0, thì theo chứng minh phần a) f liên tục tại mọi điểm của nón K_W sinh bởi tập W, có thể trừ ra điểm 0. Ta lại có $K_W = X$ và tại 0 ta đã giả thiết f liên tục. Vì vậy, f liên tục trên toàn X. □

Định lý 4.2. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X, liên tục tại các điểm của tập $U \subset X$. Khi đó,

a) Nếu tại điểm $\tilde{d} \in X$ thỏa mãn $x + \tilde{d} \in U$ mà $f'(x;\tilde{d})$ hữu hạn, thì $f'(x;.)$ liên tục tại mọi điểm của nón K_{U-x} sinh bởi tập $U - x$, có thể trừ ra điểm 0;

b) Nếu f liên tục tại x, thì $f'(x;.)$ hữu hạn và liên tục trên X.

Chứng minh

a) Theo mệnh đề 4.2, ta chỉ cần chứng minh rằng $f'(x;.)$ liên tục tại mọi điểm của tập $U - x$.

Trước hết ta chỉ ra $f'(x;.)$ là hàm chính thường.

Do $|f'(x;\tilde{d})| < +\infty$, nên $x \in dom f$. Từ định lý 4.1 ta nhận được:

$$f'(x;d) \leq f(x+d) - f(x) \quad (\forall d \in X).$$

Nếu $\exists d_1 \in X : f'(x; d_1) = -\infty$. Theo định lý 2.9, $x + \tilde{d} \in int(dom f)$. Do đó, với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, $x + (\tilde{d} + \epsilon(\tilde{d} - d_1)) = x + d_2 \in dom f$. Bởi vì:

$$x + \lambda\tilde{d} = \frac{1}{1+\epsilon}(x + \lambda d_2) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}(x + \lambda d_1),$$

cho nên:

$$f(x + \lambda\tilde{d}) \le \frac{1}{1+\epsilon} f(x + \lambda d_2) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} f(x + \lambda d_1)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x; \tilde{d}) \le \frac{1}{1+\epsilon} f'(x; d_2) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} f'(x; d_1). \qquad (4.3)$$

Do $x + d_2 \in dom f$, nên $f'(x; d_2) < +\infty$. Vì vậy, từ (4.3) suy ra $f'(x; \tilde{d}) = -\infty$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $|f'(x; \tilde{d})| < +\infty$(!). Do đó, $f'(x; .)$ là hàm chính thường.

Nếu $d_1 \in U - x$, thì f bị chặn trên bởi hằng số c trong một lân cận đủ nhỏ V của $x + d_1$. Khi đó,

$$f'(x; d) \le f(x + d) - f(x) \le c - f(x) \ (\forall d \in V - x).$$

$\Longrightarrow$ $f'(x; .)$ hữu hạn và bị chặn trên tập $V - x$.

$\Longrightarrow$ $f'(x; .)$ liên tục tại d_1 (định lý 2.9).

Khẳng định a) được chứng minh.

b) Chú ý rằng: do tính lồi, nếu f liên tục tại 0, thì f liên tục trong một lân cận của 0. Áp dụng mệnh đề 4.2 ta nhận được khẳng định b). □

4.2. DƯỚI VI PHÂN

Giả sử f là hàm lồi trên X.

Định nghĩa 4.2. Phiếm hàm $x^* \in X^*$ được gọi là *dưới gradient* (subgradient) của hàm f tại $\bar{x} \in X$, nếu:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq < x^*, x - \bar{x} > \quad (\forall x \in X).$$

Định nghĩa 4.3. Tập tất cả dưới gradient của f tại $\bar{x}$ được gọi là *dưới vi phân* (subdifferential) của f tại $\bar{x}$, ký hiệu là $\partial f(\bar{x})$, tức là:

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : f(x) - f(\bar{x}) \geq < x^*, x - \bar{x} >, \ \forall x \in X\}.$$

Định nghĩa 4.4. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* tại $\bar{x}$, nếu $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Định lý 4.3. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X và $\bar{x} \in dom f$. Khi đó,

$$x^* \in \partial f(\bar{x}) \iff f'(\bar{x}; d) \geq < x^*, d > \quad (\forall d \in X).$$

Chứng minh

Nếu $x^* \in \partial f(\bar{x})$, thì với mọi $d \in X$, $\lambda > 0$, ta có:

$$f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x}) \geq \lambda < x^*, d > .$$

Theo định lý 4.1, f có đạo hàm tại $\bar{x}$ theo phương d, cho nên:

$$f'(\bar{x}; d) \geq < x^*, d > . \tag{4.4}$$

Ngược lại, nếu (4.4) đúng, ta lấy $x \in X$, $d = x - \bar{x}$, từ định lý 4.1 ta nhận được:

$$< x^*, x - \bar{x} > \leq f'(\bar{x}; x - \bar{x}) \leq f(\bar{x} + (x - \bar{x})) - f(\bar{x})$$

Do đó, $x^* \in \partial f(\bar{x})$. □

Hệ quả 4.3.1. $\partial f(\bar{x}) = \partial_d f'(\bar{x}; 0)$,
trong đó ∂_d là dưới vi phân của $f'(\bar{x}; d)$ theo biến d.

Chứng minh

Do $f'(\bar{x}; 0) = 0$, theo định lý 4.3, ta có:

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(\bar{x}) &\Longleftrightarrow \quad f'(\bar{x}; d) - f'(\bar{x}; 0) \geq < x^*, d > \quad (\forall d \in X) \\ &\Longleftrightarrow \quad x^* \in \partial_d f'(\bar{x}; 0). \end{aligned}$$

□

Định lý 4.4. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X và $\bar{x} \in dom f$. Khi đó,

$$x^* \in \partial f(\bar{x}) \iff f(\bar{x}) + f^*(x^*) = < x^*, \bar{x} > .$$

Chứng minh

a) Giả sử $x^* \in \partial f(\bar{x})$. Khi đó,

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq < x^*, x - \bar{x} > \quad (\forall x \in X).$$

$$\Longrightarrow \quad <x^*, \bar{x}> - f(\bar{x}) \geq <x^*, x> - f(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad <x^*, \bar{x}> - f(\bar{x}) \geq \sup_x \{<x^*, x> - f(x)\}$$

$$= f^*(x^*). \tag{4.5}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Young - Fenchel,

$$<x^*, \bar{x}> - f(\bar{x}) \leq f^*(x^*) \tag{4.6}$$

Từ (4.5), (4.6) suy ra:

$$f(\bar{x}) + f^*(x^*) = <x^*, \bar{x}> . \tag{4.7}$$

b) Giả sử (4.7) đúng. Từ bất đẳng thức Young - Fenchel, với $\lambda > 0, d \in X$, ta có:

$$f(\bar{x} + \lambda d) \geq <x^*, \bar{x} + \lambda d> -(<x^*, \bar{x}> - f(\bar{x})).$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \geq \frac{<x^*, \lambda d>}{\lambda} = <x^*, d>$$

$$\Longrightarrow \quad f'(\bar{x}; d) \geq <x^*, d> \quad (\forall d \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad x^* \in \partial f(\bar{x}) \quad (\text{định lý } 4.3). \qquad \square$$

Ví dụ 4.1

Cho hàm affine $f(x) = <x^*, x> + \alpha \quad (x^* \in X^*, \alpha \in R)$. Khi đó, $\partial f(x) = \{x^*\} \quad (\forall x \in X)$.

Ví dụ 4.2

Cho hàm chỉ $f(x) = \delta(.|A)$, trong đó A là tập lồi khác $\emptyset$. Khi đó, với $\bar{x} \in A$,

$$x^* \in \partial\delta(\bar{x}|A) \Longleftrightarrow \delta(x|A) \geq \delta(\bar{x}|A) + < x^*, x - \bar{x} > \ (\forall x \in X)$$

$$\Longleftrightarrow < x^*, x - \bar{x} > \leq 0 \quad (\forall x \in A).$$

Điều này có nghĩa là x^* là véctơ pháp tuyến của A tại $\bar{x}$. Như vậy, $\partial\delta(\bar{x}|A)$ là nón pháp tuyến của A tại $\bar{x}$:

$$\partial\delta(\bar{x}|A) = N(\bar{x}|A).$$

Chú ý: với $\bar{x} \notin A$, $\partial\delta(\bar{x}|A) = \emptyset$.

Ví dụ 4.3

Giả sử X là không gian Banach, $f(x) = ||x||$.

a) Với $x \neq 0$, ta có:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : ||x^*|| = 1, < x^*, x >= ||x||\}.$$

Thật vậy, nếu x^* thỏa mãn $< x^*, x >= ||x||$ và $||x^*|| = 1$, thì:

$$< x^*, z > \leq ||z|| ||x^*|| = ||z|| \quad (\forall z \in X).$$

$\Longrightarrow \quad < x^*, z - x > \leq ||z|| - ||x||$

$\Longrightarrow \quad x^* \in \partial f(x).$

Ngược lại, nếu $x^* \in \partial f(x)$, thì:

$$-||x|| = ||0|| - ||x|| \geq < x^*, 0 - x > = - < x^*, x >,$$

$$||x|| = ||2x|| - ||x|| \geq < x^*, 2x - x > = < x^*, x > .$$

$$\Longrightarrow \quad ||x|| = < x^*, x > . \tag{4.8}$$

Với $z \in X, \lambda > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} ||\lambda z + x|| - ||x|| &\geq < x^*, (\lambda z + x) - x > \\ &= < x^*, \lambda z > \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad ||z + \frac{x}{\lambda}|| - \frac{1}{\lambda}||x|| \geq < x^*, z > .$$

Cho $\lambda \to \infty$, ta nhận được:

$$||z|| \geq < x^*, z > \quad (\forall z \in X).$$

$$\Longrightarrow \quad ||x^*|| \leq 1.$$

Nhưng $||x^*||$ không thể < 1, bởi vì nếu $||x^*|| < 1$ thì:

$$| < x^*, z > | < 1 \quad (\forall z \in X, \ ||z|| = 1).$$

Với $z = \dfrac{x}{||x||}$, thì $||z|| = 1$. Do đó,

$$| < x^*, \frac{x}{||x||} > | \ < \ 1 \quad \Longrightarrow \quad < x^*, x > < \ ||x||.$$

Điều này mâu thuẫn với (4.8). Vì vậy, $||x^*|| = 1$.

b) Với $x = 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\partial f(0) &= \{x^* \in X^* : ||z|| \geq < x^*, z >\} \\ &= \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\} \\ &= \bar{B}_*(0, 1) \text{ (hình cầu đơn vị đóng trong } X^*).\end{aligned}$$

Trường hợp riêng: $X = R$, $f(x) = |x|$.
Với $x \neq 0$: f là hàm khả vi, và:

$$\partial f(x) = \{|x|^{-1}x\}.$$

Với $x = 0$:

$$\begin{aligned}\partial f(0) &= \{\xi \in R : |z| \geq < \xi, z >, \ \forall z \in R\} \\ &= \{\xi \in R : |\xi| \leq 1\} \\ &= [-1, 1].\end{aligned}$$

Mệnh đề 4.3. Giả sử f là hàm lồi đóng thuần nhất dương. Khi đó, f^* là hàm chỉ của tập $dom f^*$:

$$f^*(x^*) = \delta(x^*|dom f^*) \quad (x^* \in X^*).$$

Hơn nữa, $dom f^*$ là tập đóng.

Chứng minh

Ta có:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{< x^*, x > -f(x)\} \geq < x^*, 0 > -f(0) = 0$$

$$< x^*, x_1 > -f(x_1) > 0.$$

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &\geq \sup_{\lambda>0}\{< x^*, \lambda x_1 > -f(\lambda x_1)\} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda[< x^*, x_1 > -f(x_1)] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ f^* chỉ nhận hai giá trị 0 và $+\infty$.

$$\Longrightarrow f^*(x^*) = \delta(x^*|dom f^*) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x^* \in dom f^*, \\ +\infty, \text{ nếu } x^* \notin dom f^*. \end{cases}$$

Để ý rằng: hàm chỉ của tập A là đóng khi và chỉ khi A đóng. Do f^* là hàm đóng, nên $dom f^*$ đóng. □

Mệnh đề 4.4. Giả sử f là hàm lồi đóng thuần nhất dương. Khi đó,

$$f(x) = \sup\{< x^*, x >: \ x^* \in dom f^*\}.$$

Chứng minh

Theo định lý 3.6, $f = f^{**}$. Mặt khác, $f^* = \delta(.|dom f^*)$ (mệnh đề 4.3). Vì vậy,

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup_{x^*}\{< x^*, x > -\delta(x^*|dom f^*)\}$$
$$= \sup\{< x^*, x >: \ x^* \in dom f^*\}.$$

$\square$

Định lý 4.5. Giả sử $f'(\bar{x};.)$ là hàm đóng. Khi đó, $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ và $\forall d \in X$,

$$f'(\bar{x}; d) = sup\{< x^*, d >: \ x^* \in \partial f(\bar{x})\}.$$

Chứng minh

Bởi vì $f'(\bar{x};.)$ là hàm lồi thuần nhất dương, cho nên từ mệnh đề 4.4 ta nhận được: $\forall d \in X$,

$$f'(\bar{x}; d) = \sup\{< x^*, d >: x^* \in dom(f'(\bar{x};.))^*\}. \tag{4.8}$$

Theo mệnh đề 4.3,

$$(f'(\bar{x};.))^*(x^*) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x^* \in dom(f'(\bar{x};.))^*, \\ +\infty, \text{ nếu } x^* \notin dom(f'(\bar{x};.))^*. \end{cases}$$

Mặt khác,

$$(f'(\bar{x};.))^*(x^*) = \sup_{d \in X}\{< x^*, d > -f'(\bar{x}; d)\}.$$

Vì vậy,

$x^* \in dom(f'(\bar{x};.))^* \iff 0 \geq < x^*, d > -f'(\bar{x}; d) \quad (\forall d \in X)$

$$\iff \quad x^* \in \partial f(\bar{x}) \quad \text{(định lý 4.3)}.$$

Do đó, $\partial f(\bar{x}) = dom(f'(\bar{x};.))^*$, và $\forall d \in X$,

$$f'(\bar{x};d) = \sup\{< x^*, d >: x^* \in \partial f(\bar{x})\}. \qquad \square$$

Mệnh đề 4.5. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên R^n. Khi đó, $\partial f(x) \neq \emptyset$ $(\forall x \in ri(domf))$.

Chứng minh

Từ các định lý 2.11 và 4.2 suy ra: với $x \in ri(domf)$, hàm $f'(x;.)$ hữu hạn trên không gian con $aff(domf) - x$. Theo định lý 3.4, $(f'(x;.))^*$ là hàm chính thường, cho nên $dom(f'(x;.))^* \neq \emptyset$. Theo chứng minh định lý 4.5,

$$dom(f'(x;.))^* = \partial f(x).$$

Do đó, $\partial f(x) \neq \emptyset$ $\quad (\forall x \in ri(domf))$. $\square$

Mệnh đề 4.6. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X, $\bar{x} \in domf$. Khi đó, $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi $f'(\bar{x};.)$ nửa liên tục dưới tại 0.

Chứng minh

a) Giả sử $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$. Khi đó, $\exists x^* \in \partial f(\bar{x})$. Như vậy,

$$f'(\bar{x};d) \geq < x^*, d > \quad (\forall d \in X).$$

Do x^* liên tục, nên $f'(\bar{x};.)$ nửa liên tục dưới tại 0.

b) Giả sử $f'(\bar{x};.)$ nửa liên tục dưới tại 0. Như vậy, $f'(\bar{x};.)$ là hàm lồi thuần nhất dương, đóng. Do đó, $f'(\bar{x};0) = 0$ và $f'(\bar{x};.)$ không thể nhận giá trị $-\infty$.

Theo định lý 3.4, $(f(\bar{x};.))^*$ là hàm chính thường. Vậy $dom(f(\bar{x};.))^* \neq \emptyset$. Theo chứng minh định lý 4.5, ta có:

$$dom(f(\bar{x};.))^* = \partial f(\bar{x}).$$

Vì vậy, $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$. $\square$

Nhận xét 4.3

Nếu $x \notin domf$, thì $\partial f(x) = \emptyset$.

Thật vậy, $x^* \in \partial f(x)$ khi và chỉ khi

$$f(z) - f(x) \geq < x^*, z - x > \quad (\forall z \in X). \qquad (4.9)$$

Nếu $z \in domf$, thì (4.9) không thể thỏa mãn khi $f(x) = +\infty$, tức là khi $x \notin domf$.

Nhắc lại: hàm f được gọi là *khả vi Gâteaux* tại $\bar{x} \in X$, nếu $\exists x^* \in X^*$, sao cho với mọi $d \in X$,

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + t < x^*, d > + o(t). \qquad (4.10)$$

Khi đó, ta gọi x^* là đạo hàm Gâteaux của f tại $\bar{x}$: $f'_G(\bar{x}) = x^*$.

Định lý 4.6. Giả sử f là hàm lồi trên X. Khi đó,

a) Nếu f khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$ với đạo hàm Gâteaux tại $\bar{x}$ là x^* và f khả dưới vi phân tại $\bar{x}$, thì $\partial f(\bar{x}) = \{x^*\}$.

b) Nếu f là hàm chính thường, liên tục tại $\bar{x}$ và $\partial f(\bar{x})$ gồm một phần tử duy nhất x^*, thì f khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$ và $f'_G(\bar{x}) = \{x^*\}$.

Chứng minh

a) Từ (4.10) ta có:

$$f'(\bar{x}; d) = < f'_G(\bar{x}), d > = < x^*, d > .$$

Do đó,

$$\begin{aligned} y^* \in \partial f(\bar{x}) &\Longleftrightarrow < y^*, d > \leq < x^*, d > \quad (\forall d \in X) \\ &\Longleftrightarrow < x^* - y^*, d > \geq 0 \quad (\forall d \in X) \\ &\Longleftrightarrow x^* - y^* = 0 \text{ hay } x^* = y^*. \end{aligned}$$

Vậy $\partial f(\bar{x}) = \{x^*\}$.

b) Giả sử $\partial f(\bar{x}) = \{x^*\}$. Theo định lý 4.2, $f'(\bar{x}; ,)$ liên tục. Do đó, $f'(\bar{x}; ,)$ là hàm đóng. Vì vậy, $\forall d \in X$,

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}; d) &= (f'(\bar{x}; ,))^{**}(d) \quad \text{(định lý 3.6)} \\ &= \sup\{< y^*, d >: \ y^* \in \partial f(\bar{x})\} \quad \text{(định lý 4.5)} \\ &= < x^*, d > . \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f'_G(\bar{x}) = x^*$.

Hệ quả 4.6.1. Giả sử X là không gian Banach, f là hàm lồi khả vi Fréchet tại $\bar{x} \in X$ với đạo hàm Fréchet tại $\bar{x}$ là $f'(\bar{x})$. Khi đó,

$$\partial f(\bar{x}) = \{f'(\bar{x})\}.$$

Định lý 4.7. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên không gian lồi địa phương Hausdorff X, liên tục tại $\bar{x} \in X$. Khi đó, $\partial f(\bar{x})$ khác $\emptyset$, lồi, compăc *yếu. Đồng thời,

$$f'(\bar{x}; d) = \max\{< x^*, d >: \ x^* \in \partial f(\bar{x})\}$$

Chứng minh

a) Ta chứng minh $\partial f(\bar{x})$ lồi?

Lấy $x_1^*, x_2^* \in \partial f(\bar{x})$ và $\lambda \in [0,1]$. Khi đó, $\forall x \in X$,

$$< \lambda x_1^*, x - \bar{x} > \ \le \ \lambda(f(x) - f(\bar{x})),$$
$$< (1 - \lambda)x_2^*, x - \bar{x} > \ \le \ (1 - \lambda)(f(x) - f(\bar{x})).$$

$\Longrightarrow \quad < \lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^*, x - \bar{x} > \le \ f(x) - f(\bar{x}) \ (\forall x \in X).$

$\Longrightarrow \quad \lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^* \in \partial f(\bar{x}) \ \Longrightarrow \ \partial f(\bar{x})$ lồi.

b) Chứng minh $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$?

Theo định lý 4.2, $f'(\bar{x}; ,)$ liên tục trên X. Do đó, $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ (mệnh đề 4.6).

c) Chứng minh $\partial f(\bar{x})$ compăc *yếu ?

Do $f'(\bar{x};.)$ liên tục, $f'(\bar{x};.)$ là hàm đóng. Theo định lý 4.5,

$$\sup\{<x^*,d>: x^* \in \partial f(\bar{x})\} = f'(\bar{x};d) < +\infty \quad (\forall d \in X).$$

Khi d chạy trên các tập hữu hạn A trên X, thì:

$$-\infty < \max_{d\in A} f'(\bar{x};d) < +\infty.$$

Vì vậy, $\partial f(\bar{x})$ bị chặn theo tôpô *yếu của X^*.

Mặt khác, $\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{d\in X} H_d$, trong đó H_d là nửa không gian đóng *yếu trong X^* :

$$H_d = \{x^* \in X^* : <x^*,d> \leq f(\bar{x}+d) - f(\bar{x})\}.$$

$\Longrightarrow$ $\partial f(\bar{x})$ là tập đóng *yếu trong X^*.

$\Longrightarrow$ $\partial f(\bar{x})$ compăc *yếu trong X^*. □

4.3. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ DƯỚI VI PHÂN

Giả sử X là không gian lồi địa phương Hausdorff.

Mệnh đề 4.7. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X và $\lambda > 0$. Khi đó, $\forall x \in X$,

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Chứng minh

Với $x \in dom f$, do f lồi chính thường và $\lambda > 0$, nên λf lồi chính thường và $x \in dom(\lambda f)$. Đồng thời,

$$(\lambda f)'(x;.) = \lambda f'(x;.).$$

Từ định lý 4.3 suy ra:

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Nếu $x \notin dom f$, thì

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x) = \emptyset. \qquad \square$$

Định lý 4.8*(Moreau - Rockafellar)*

Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là **hàm** lồi chính thường trên X. Khi đó, $\forall x \in X$,

$$\partial(f_1 + \ldots + f_m)(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Hơn nữa, nếu tại điểm $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i$, tất cả các hàm $f_1, \ldots, f_m$ liên tục (có thể trừ ra một hàm), thì:

$$\partial(f_1 + \ldots + f_m)(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Chứng minh

Ta chứng minh cho trường hợp $m = 2$. Trường hợp tổng quát dùng quy nạp.

a) Chứng minh:

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x). \qquad (4.11)$$

Lấy $x_i^* \in \partial f_i(x)$ $(i = 1, 2)$. Khi đó, với $\forall z \in X$,

$$< x_i^*, z - x > \leq f_i(z) - f_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

$\Longrightarrow \quad < x_1^* + x_2^*, z - x > \leq f_1(z) + f_2(z) - (f_1(x) + f_2(x)).$

$\Longrightarrow \quad x_1^* + x_2^* \in \partial(f_1 + f_2)(x) \Longrightarrow (4.11).$

b) Ta chứng minh rằng nếu f_1 liên tục tại $\bar{x} \in dom f_2$, thì:

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \qquad (4.12)$$

Ta có: $int(epi f_1) \neq \emptyset$?

Thật vậy, $\forall \epsilon > 0$, tồn tại lân cận U mở của $\bar{x}$ sao cho:

$$|f_1(x) - f_1(\bar{x})| < \epsilon \quad (\forall x \in U).$$

$\Longrightarrow \quad A := \{(x, \alpha) \in X \times R : \alpha > f_1(\bar{x}) + \epsilon,\ x \in U\} \subset epi f_1$
và A mở. $\Longrightarrow \quad int(epi f_1) \neq \emptyset.$

Lấy $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)$. Xét các tập sau:

$$C_1 = \{(z, \alpha) \in X \times R : \alpha \geq f_1(x + z) - f_1(x)\},$$

$$C_2 = \{(z, \alpha) \in X \times R : \alpha << x^*, z > -f_2(x + z) + f_2(x)\}.$$

Khi đó,

$$C_1 = epi f_1 - (x, f_1(x)).$$

$\Longrightarrow \quad C_1$ lồi và $int C_1 \neq \emptyset$.

Ta kiểm tra tính lồi của C_2?

Lấy $(z_i, \alpha_i) \in C_2$ $(i = 1, 2)$ và $\lambda \in [0, 1]$, ta có:

$$\alpha_i < < x^*, z_i > -f_2(x + z_i) + f_2(x) \; (i = 1, 2). \quad (4.13)$$

Bởi vì f_2 là hàm lồi,

$$f_2(\lambda(x+z_1)+(1-\lambda)(x+z_2) \leq \lambda f_2(x+z_1)+(1-\lambda)f_2(x+z_2) \quad (4.14)$$

Từ (4.13), (4.14) suy ra:

$$\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 < < x^*, \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 > - \\ - f_2(\lambda(x + z_1) + (1 - \lambda)(x + z_2)) + f_2(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(z_1, \alpha_1) + (1 - \lambda)(z_2, \alpha_2) \in C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 \text{ lồi.}$$

Ta có: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$?

Thật vậy, nếu $\exists(z_0, x_0) \in C_1 \cap C_2$, thì:

$$< x^*, z_0 > -f_2(x + z_0) + f_2(x) > f_1(x + z_0) - f_1(x)$$

$$\Longrightarrow \quad < x^*, z_0 > > \; f_1(x + z_0) + f_2(x + z_0) - (f_1(x) + f_2(x)).$$

Điều này mâu thuẫn với $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)(!)$.
Vậy, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Theo định lý tách thứ nhất, $\exists x_1^* \in X^*$, $\exists \beta \in R$ với $(x_1^*, \beta) \neq 0$ sao cho:

$$\sup_{(z,\alpha)\in C_1} \{< x_1^*, z > +\beta\alpha\} \leq \inf_{(z,\alpha)\in C_2} \{< x_1^*, z > +\beta\alpha\} \quad (4.15)$$

Rõ ràng $\beta \leq 0$, bởi vì nếu $\beta > 0$ thì cận trên trong (4.15) bằng $+\infty$ và cận dưới bằng $-\infty$(!!!).

Hơn nữa, $\beta \neq 0$, bởi vì nếu $\beta = 0$ thì (4.15) có dạng:

$$\sup_{z \in dom f_1 - x} < x^*, z > \leq \inf_{z \in dom f_2 - x} < x_1^*, z > . \qquad (4.16)$$

Mặt khác, $x_1^* \neq 0$, bởi vì $\beta = 0$ và $(x_1^*, \beta) \neq 0$. Do đó,

$$< x_1^*, \bar{x} - x > < \sup_{z \in U - x} < x_1^*, z > \leq \sup_{z \in dom f_1 - x} < x_1^*, z >$$

$$\Longrightarrow \quad \inf_{z \in dom f_2 - x} < x_1^*, z > \leq < x_1^*, \bar{x} - x >$$

$$< \sup_{z \in dom f_1 - x} < x_1^*, z >$$

Điều này mâu thuẫn với (4.16)(!). Vì vậy, $\beta \neq 0$ và ta có $\beta < 0$.

Không mất tính chất tổng quát có thể xem $\beta = -1$. Như vậy, C_1 và C_2 tách được bởi siêu phẳng:

$$H = \{(z, \alpha) \in X \times R : < x_1^*, z > -\alpha = 0\}.$$

Từ (4.15) suy ra:

$$\sup_z \{ < x_1^*, z > -f_1(x + z) + f_1(x)\} \leq$$

$$\leq \inf_z \{< x_1^* - x^*, z > +f_2(x + z) - f_2(x)\} \qquad (4.17)$$

Để ý rằng với $z = 0$, thì các biểu thức trong ngoặc của hai vế (4.17) đều bằng 0. Do đó, khi đặt $x_2^* = x^* - x_1^*$, ta nhận được:

$$f_1(x+z) - f_1(x) \geq < x_1^*, z > \quad (\forall z \in X),$$
$$f_2(x+z) - f_2(x) \geq < x_2^*, z > \quad (\forall z \in X).$$

$\Longrightarrow \quad x_i^* \in \partial f_i(x)\ (i = 1, 2) \Longrightarrow$ (4.12). □

Hệ quả 4.8.1. Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X và $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_m > 0$. Khi đó, $\forall x \in X$,

$$\partial(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m)(x) \supset \lambda_1 \partial f_1(x) + \ldots + \lambda_m \partial f_m(x).$$

Hơn nữa, nếu tại $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i$, tất cả các hàm $f_1, \ldots, f_m$ liên tục (có thể trừ ra một hàm), thì với mọi $x \in X$,

$$\partial(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m)(x) = \lambda_1 \partial f_1(x) + \ldots + \lambda_m \partial f_m(x).$$

Chứng minh: Suy ra từ định lý 4.8 và mệnh đề 4.7. □

Định lý 4.9. Giả sử X, Y là các không gian lồi địa phương Hausdorff; $\Lambda : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục; f là hàm xác định trên Y. Khi đó, với mọi $x \in X$,

$$\Lambda^* \partial f(\Lambda x) \subset \partial(f\Lambda)(x). \qquad (4.18)$$

Hơn nữa, nếu f lồi và liên tục tại một điểm nào đó thuộc $Im\Lambda$, thì với mọi $x \in X$,

$$\Lambda^*\partial f(\Lambda x) = \partial(f\Lambda)(x). \tag{4.19}$$

Chứng minh

a) Ta chứng minh (4.18):

Lấy $x^* \in \Lambda^*\partial f(\Lambda x)$. Khi đó, $\exists y^* \in \partial f(\Lambda x)$ sao cho: $x^* = \Lambda^* y^*$. Do đó,

$$< y^*, y - \Lambda x > \leq f(y) - f(\Lambda x) \quad (\forall y \in Y).$$

$\Longrightarrow \quad < y^*, \Lambda z - \Lambda x > \leq f(\Lambda z) - f(\Lambda x) \quad (\forall z \in X)$

$\Longrightarrow \quad < \Lambda^* y^*, z - x > \leq (f\Lambda)(z) - (f\Lambda)(x) \quad (\forall z \in X).$

$\Longrightarrow \quad \Lambda^* y^* \in \partial(f\Lambda)(x) \quad \Longrightarrow \quad (4.17).$

b) Chứng minh (4.19):

Ta giả thiết f là hàm lồi liên tục tại điểm $\Lambda\bar{x}$, $\bar{x} \in X$. Ta xét hai trường hợp sau:

Nếu $\partial(f\Lambda)(x) = \emptyset$: do (4.18), nên (4.19) đúng.

Nếu $\partial(f\Lambda)(x) \neq \emptyset$: Rõ ràng là $(f\Lambda)'(x; z) = f'(\Lambda x; \Lambda z)$. Theo định lý 4.2, hàm $f'(\Lambda x; .)$ liên tục tại điểm $\Lambda(\bar{x} - x) \in Im\Lambda$. Áp dụng định lý 3.10 đối với hàm $f'(\Lambda x; .)$ ta nhận được:

$$\begin{aligned}\partial(f\Lambda)(x) &= \partial(f\Lambda)'(x;0) \quad \text{(hệ quả 4.3.1)}\\ &= \partial(f'(\Lambda x;.)\Lambda)(0)\\ &= \Lambda^*\partial f'(\lambda x;0) \quad \text{(định lý 3.10)}\\ &= \Lambda^*\partial f(\Lambda x) \quad \text{(hệ quả 4.3.1).}\end{aligned}$$

□

Giả sử S là không gian tôpô compăc, $f(s,x)$ là hàm xác định trên $S \times X$. Đặt:

$$f(x) = \sup_{s\in S} f(s,x),$$
$$S_0(x) = \{s \in S : f(s,x) = f(x)\}.$$

Định lý 4.10. Giả sử hàm $f(s,x)$ lồi theo x với mỗi $s \in S$ và nửa liên tục trên theo s với mỗi $x \in X$. Khi đó, với mỗi $x \in X$,

$$\overline{co}\Big(\bigcup_{s\in S_0(x)} \partial f_s(x)\Big) \subset \partial f(x). \tag{4.20}$$

Hơn nữa, nếu với mỗi $s \in S$, hàm $f(s,.)$ liên tục tại $\bar{x}$, thì:

$$\overline{co}\Big(\bigcup_{s\in S_0(\bar{x})} \partial f_s(\bar{x})\Big) = \partial f(\bar{x}). \tag{4.21}$$

trong đó $f_s(.)$ là hàm trên X được xác định bởi $f_s(x) = f(s,x)$; bao lồi đóng trong (4.20), (4.21) lấy theo tôpô *yếu trong X^*.

Chứng minh

a) $f(x)$ là hàm lồi, bởi vì $f_s(x)$ lồi $(\forall s \in S)$. Lấy $s \in S_0(x)$ và $x^* \in \partial f_s(x)$. Khi đó, $\forall z \in X$,

$$< x^*, z - x > \leq f(s,z) - f(s,x) \leq f(z) - f(x).$$

$$\Longrightarrow \quad x^* \in \partial f(x).$$
$$\Longrightarrow \quad \partial f_s(x) \subset \partial f(x) \quad (\forall s \in S_0(x)).$$
$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{s \in S_0(x)} \partial f_s(x) \subset \partial f(x)$$
$$\Longrightarrow \quad Q := \overline{co}(\bigcup_{s \in S_0(x)} \partial f_s(x) \subset \partial f(x))$$

(do $\partial f(x)$ lồi đóng *yếu).

b) Chứng minh (4.21): Giả sử $f(s,.)$ liên tục tại $\bar{x}$ $(\forall s \in S)$. Từ định lý 4.7 suy ra $\partial f_s(\bar{x}) \neq \emptyset$ $(\forall s \in S)$. Bởi vì hàm $f(.,\bar{x})$ hữu hạn và nửa liên tục trên, nên $S_0(\bar{x}) \neq \emptyset$. Do đó, $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Giả sử $Q \subsetneq \partial f(\bar{x})$, tức là $\exists x^* \in \partial f(\bar{x}) \backslash Q$. Để ý rằng không gian liên hợp với không gian X^* với tôpô *yếu là không gian X. Do đó, theo định lý tách thứ 2, $\exists x \in X$, $x \neq 0$, $\exists \epsilon > 0$ sao cho:

$$< x^*, x > \geq \sup\{< z^*, x >: z^* \in Q\} + \epsilon. \tag{4.22}$$

Không mất tính chất tổng quát, ta có thể xem như $f(\bar{x} + x) < +\infty$.

Thật vậy, do $f_s(x)$ liên tục tại $\bar{x}$, $\forall s \in S$, $\exists \lambda(s) > 0$ sao cho:

$$f_s(\bar{x} + \lambda(s)x) \leq f_s(\bar{x}) + 1.$$

Do $f(.,x)$ nửa liên tục trên, tập hợp:

$$U(s) = \{\xi \in S : f(\xi, \bar{x} + \lambda(s)x) < f(\bar{x}) + 2\}$$

mở trong S và $\bigcup_{s\in S} U(s) = S$. Do S compăc, tồn tại $s_1, \ldots, s_n$ sao cho: $U(s_1), \ldots, U(s_n)$ phủ S. Khi đó,

$$\lambda = \min\{\lambda(s_1), \ldots, \lambda(s_n)\} > 0,$$

$$f(s, \bar{x} + \lambda x) < f(\bar{x}) + 2.$$

Nếu cần ta thay x cho λx và nhận được $f(\bar{x} + x) < +\infty$. Lấy $t \in (0, 1)$, ta có $\bar{x} + tx \in dom f$. Chọn $s_t \in S$ sao cho:

$$f(s_t, \bar{x} + tx) = f(\bar{x} + tx). \tag{4.23}$$

Từ định lý 4.1 và (4.22) suy ra:

$$\frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})}{t} \geq \sup\{< z^*, x >: \ z^* \in Q\} + \epsilon.$$

Do bất đẳng thức Jensen và (4.23),

$$\begin{aligned}(1 - t)f(s_t, \bar{x}) + tf(s_t, \bar{x} + x) &\geq f(s_t, \bar{x} + tx)\\ &= f(\bar{x} + tx)\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}(1-t)f(s_t,\bar{x}) &\geq f(\bar{x}+tx)-tf(s_t,\bar{x}+x)\\ &\geq f(\bar{x}+tx)-tf(\bar{x}+x).\end{aligned}$$

Cho $t \to 0$, ta nhận được:

$$f(\bar{x}) \geq \lim_{t\to 0} f(s_t,\bar{x}) \geq f(\bar{x}). \tag{4.24}$$

Gọi s_0 là điểm giới hạn của tập $\{s_t\}$. Do tính nửa liên tục trên của $f(.,\bar{x})$, từ (4.24) suy ra $f(s_0,\bar{x}) = f(\bar{x})$. Do đó,

$$\begin{aligned}\frac{f(s_t,\bar{x}+tx)-f(s_t,\bar{x})}{t} &\geq \frac{f(\bar{x}+tx)-f(\bar{x})}{t}\\ &\geq f'(\bar{x};x) \geq < x^*,x >\\ &\geq \sup\{< z^*,x >: z^* \in \partial f_{s_0}(\bar{x})\}+\epsilon\\ &= f'_{s_0}(\bar{x};x)+\epsilon.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Chọn t_1 đủ nhỏ sao cho:

$$\frac{f(s_0,\bar{x}+t_1x)-f(s_0,\bar{x})}{t_1} \leq f'_{s_0}(\bar{x};x)+\frac{\epsilon}{2}. \tag{4.26}$$

Với $0 < t < t_1$, từ (4.25) và (4.26) ta suy ra:

$$\frac{t}{t_1} f(s_t, \bar{x} + t_1 x) + (1 - \frac{t}{t_1}) f(s_t, \bar{x}) \geq$$

$$\geq f(s_t, \bar{x} + tx)$$

$$\geq f(s_t, \bar{x}) + t[f'_{s_0}(\bar{x}; x) + \epsilon], \quad \text{(do (4.25))}$$

$$\geq f(s_t, \bar{x}) + t[\frac{f(s_0, \bar{x} + t_1 x) - f(s_0, \bar{x})}{t_1} + \frac{\epsilon}{2}]$$

(do (4.26))

$\Longrightarrow \quad f(s_t, \bar{x}+t_1 x) \geq f(s_0, \bar{x}+t_1 x) + f(s_t, \bar{x}) - f(s_0, \bar{x}) + t_1 \frac{\epsilon}{2}.$

$\Longrightarrow \quad \overline{\lim_{t \to 0}} f(s_t, \bar{x} + t_1 x) \geq f(s_0, \bar{x} + t_1 x) + t_1 \frac{\epsilon}{2},$

bởi vì $\lim_{t \to 0} f(s_t, \bar{x}) = f(s_0, \bar{x})$.

$\Longrightarrow$ Hàm $f(., \bar{x} + t_1 x)$ không nửa liên tục trên tại s_0 : Trái với giả thiết. Vậy giả thiết $Q \subsetneqq \partial f(\bar{x})$ là không đúng.

$\Longrightarrow \quad Q = \partial f(\bar{x})$.

Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 4.10.1. Giả sử $X = R^n$, các hàm $f(s, x)$, $f(x)$ và tập $S_0(x)$ xác định như trong định lý 4.10. Giả thiết rằng hàm $f(s, .)$ lồi ($\forall s \in S$), hàm $f(., x)$ nửa liên tục trên ($\forall x \in X$) và hàm $f(s, .)$ liên tục tại $\bar{x}$ ($\forall s \in S$). Khi đó, mọi $y \in \partial f(\bar{x})$ đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$y = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m,$$

trong đó $m \leq n+1$; $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, $y_i \in \partial f_{s_i}(\bar{x})$, $s_i \in S_0(\bar{x})$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh tập $P := \bigcup_{s \in S_0(\bar{x})} \partial f_s(\bar{x})$ bị chặn và đóng?

Từ chứng minh định lý 4.10 suy ra: $\forall x \in R^n$, $\exists \lambda > 0$ sao cho $\bar{x} + \lambda x \in dom f$. Do đó, $dom f'(\bar{x}, .) = R^n$. Do $f'(\bar{x}, .)$ là hàm lồi chính thường, nên $f'(\bar{x}, .)$ liên tục (định lý 2.11). Từ định lý 4.7 suy ra $\partial f(\bar{x})$ bị chặn, cho nên P cũng bị chặn, bởi vì $P \subset \partial f(\bar{x})$ (định lý 4.10).

Lấy dãy $\{z_k\} \subset P : z_k \in \partial f_{s_k}(\bar{x})$, $s_k \in S_0(\bar{x})$, $z_k \to z$.

Bởi vì $S_0(\bar{x})$ compăc, nên dãy $s_1, s_2, \ldots$, có điểm giới hạn là $s_0 \in S_0(\bar{x})$. Do $f(., x)$ nửa liên tục trên, với mọi $x \in R^n$ ta có:

$$\begin{aligned}
f(s_0, x) - f(s_0, \bar{x}) &= f(s_0, x) - f(\bar{x}) \\
&\geq \overline{\lim_{k\to\infty}} f(s_k, x) - f(\bar{x}) \\
&= \overline{\lim_{k\to\infty}} [f(s_k, x) - f(s_k, \bar{x})] \\
&\geq \lim_{k\to\infty} < z_k, x - \bar{x} > = < z, x - \bar{x} > .
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $z \in \partial f_{s_0}(\bar{x}) \subset P$.

$\Longrightarrow$ P đóng. Như vậy, P đóng và bị chặn.

$\Longrightarrow$ coP đóng (định lý 1.8), tức là $coP = \overline{co}P$. $\square$

4.4. HÀM LỒI ĐỊA PHƯƠNG

Giả sử X là không gian lồi địa phương Hausdorff.

Định nghĩa 4.5. Hàm f xác định trên X được gọi là *lồi địa phương* tại điểm $\bar{x} \in X$, nếu đạo hàm theo phương $f'(\bar{x};.)$ tại $\bar{x}$ tồn tại và lồi.

Chú ý: f lồi $\Longrightarrow$ f lồi địa phương tại mọi $x \in dom f$.

Giả sử Y cũng là một không gian lồi địa phương Hausdorff.

Định nghĩa 4.6. Ánh xạ $F : X \to Y$ được gọi là *khả vi theo phương d* tại điểm $\bar{x}$, nếu tồn tại giới hạn:

$$F'(\bar{x}; d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(\bar{x} + \lambda d) - F(\bar{x})}{\lambda}.$$

Định nghĩa 4.7. Ánh xạ $F : X \to Y$ được gọi là *khả vi đồng đều theo phương d* tại điểm $\bar{x}$, nếu với mọi lân cận V của 0 trong Y, tồn tại lân cận U của d trong X và số $\lambda_0 > 0$ sao cho: $\forall z \in U$, $\forall \lambda \in (0, \lambda_0)$,

$$\frac{F(\bar{x} + \lambda z) - F(\bar{x})}{\lambda} - F'(\bar{x}; d) \in V. \qquad (4.27)$$

Mệnh đề 4.8. Giả sử ánh xạ $F : X \to Y$ khả vi đồng đều theo mọi phương tại $\bar{x}$, thì đạo hàm theo phương $F'(\bar{x};.)$ là ánh xạ liên tục từ X vào Y.

Chứng minh

Từ (4.27) suy ra với mọi $d \in X$, với mọi lân cận V của $0 \in Y$, tồn tại lân cận U của d trong X sao cho:

$$F'(\bar{x}; z) - F'(\bar{x}; d) \in V \quad (\forall z \in U).$$

Như vậy, $F'(\bar{x}; .)$ liên tục tại d. □

Định nghĩa 4.8. Hàm f xác định trên X được gọi là *lồi địa phương chính quy* tại $\bar{x}$, nếu f lồi địa phương và khả vi đồng đều theo mọi phương tại $\bar{x}$.

Nhận xét 4.4

Từ mệnh đề 4.8 suy ra: nếu f là hàm lồi địa phương chính quy tại $\bar{x}$ thì $f'(\bar{x}; .)$ lồi liên tục

Định lý 4.11. Giả sử f là hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, f lồi địa phương chính quy tại $\bar{x}$ khi và chỉ khi f liên tục tại $\bar{x}$.

Chứng minh

a) Giả sử f lồi địa phương chính quy tại $\bar{x}$. Khi đó, $\forall d \in X$, $\forall \epsilon > 0$, tồn tại lân cận U của d và số $\lambda_0 > 0$ sao cho:

$$\left|\frac{f(\bar{x} + \lambda z) - f(\bar{x})}{\lambda} - f'(\bar{x}; d)\right| < \epsilon$$

$$(\forall z \in U, \ \forall \lambda \in (0, \lambda_0)). \tag{4.28}$$

Lấy $d = 0$ trong (4.28) ta suy ra f liên tục tại $\bar{x}$.

b) Ngược lại: giả sử f liên tục tại $\bar{x}$. Do f là hàm lồi, với mọi $\bar{x} \in dom f$, $f'(\bar{x};.)$ là hàm lồi. Ta chỉ cần chứng minh f khả vi đồng đều theo mọi phương, tức là $\forall d \in X$, $\forall \epsilon > 0$, tồn tại lân cận U của d và số $\lambda_0 > 0$ sao cho (4.28) đúng ?

Do f liên tục tại $\bar{x}$, nên f liên tục trong lân cận U_0 của $\bar{x}$ (định lý 2.9). Chọn số $\lambda_0 > 0$ sao cho $\bar{x} + \lambda_0 d \subset U$, và

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_0 d) - f(\bar{x})}{\lambda_0} - f'(\bar{x}; d) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.29}$$

Bởi vì $\bar{x} + \lambda_0 d \in U_0$, nên f liên tục tại $\bar{x} + \lambda_0 d$. Do đó, tồn tại lân cận U của d sao cho:

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda_0 z) - f(\bar{x} + \lambda_0 d)}{\lambda_0} < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall z \in U) \tag{4.30}$$

Không mất tính chất tổng quát có thể xem tập U là đối xứng qua d, tức là: U chứa z cùng với điểm $y = 2d - z$ (để cho $d = \dfrac{1}{2}(z + y)$), hay là: có thể thay U bằng tập $(U - d) \cap (-U + d) + d$.

Lấy $z \in U$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Khi đó, từ (4.1) suy ra:

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda z) - f(\bar{x})}{\lambda} \leq \frac{f(\bar{x} + \lambda_0 z) - f(\bar{x})}{\lambda_0} \tag{4.31}$$

Vì vậy, $\forall z \in U$, $\forall \lambda \in (0, \lambda_0)$,

$$\frac{f(\bar{x}+\lambda z)-f(\bar{x})}{\lambda}-f'(\bar{x};d)\le$$

$$\le \frac{f(\bar{x}+\lambda_0 z)-f(\bar{x})}{\lambda_0}-f'(\bar{x};d) \quad (\text{do } (4.31))$$

$$< \frac{f(\bar{x}+\lambda_0 d)-f(\bar{x})}{\lambda_0}-f'(\bar{x};d)+\frac{\epsilon}{2} \quad (\text{do } (4.30))$$

$$< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \qquad (\text{do } (4.29)).$$

Mặt khác, nếu $z \in U$ thì $y = 2d - z \in U$. Do đó,

$$f(\bar{x}+\lambda d) \le \frac{1}{2}[f(\bar{x}+\lambda z)+f(\bar{x}+\lambda y)].$$

$$\Longrightarrow \quad f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x}+\lambda z) \le f(\bar{x}+\lambda y)-f(\bar{x}+\lambda d).$$

Bởi vì $\lambda f'(\bar{x};d) \le f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})$, cho nên:

$$f'(\bar{x};d)-\frac{f(\bar{x}+\lambda z)-f(\bar{x})}{\lambda}\le$$

$$\le \frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x}+\lambda z)}{\lambda}$$

$$\le \frac{f(\bar{x}+\lambda y)-f(\bar{x}+\lambda d)}{\lambda}$$

$$\le \frac{f(\bar{x}+\lambda y)-f(\bar{x})}{\lambda}-f'(\bar{x};d)$$

$$< \epsilon.$$

Vì vậy, $\forall z \in U,\ \forall \lambda \in (0,\lambda_0)$,

$$\left|\frac{f(\bar{x}+\lambda z)-f(\bar{x})}{\lambda}-f'(\bar{x};d)\right| < \epsilon.$$

Mệnh đề 4.9. Giả sử X, Y là các không gian Banach, ánh xạ $F : X \to Y$ khả vi Fréchet tại $\bar{x} \in X$. Khi đó, F khả vi đồng đều theo mọi phương tại $\bar{x}$.

Nói riêng, nếu f là hàm xác định trên X, khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, thì f lồi địa phương chính quy tại $\bar{x}$.

Chứng minh

Bởi vì F khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, cho nên $\forall \lambda > 0, \forall d \in X$,

$$\frac{F(\bar{x} + \lambda d) - F(\bar{x})}{\lambda} - F'(\bar{x})d \to 0 \quad (\text{khi } \lambda \to 0_+),$$

và sự hội tụ là đồng đều theo d trên các tập bị chặn, trong đó $F'(\bar{x})$ là đạo hàm Fréchet của F tại $\bar{x}$. Hơn nữa,

$$F'(\bar{x}; d) = F'(\bar{x})d.$$

Vì vậy, F khả vi đồng đều theo mọi phương d tại $\bar{x}$.

Phần còn lại suy ra từ định nghĩa 4.8. $\square$

Đến đây, ta có thể mở rộng định nghĩa dưới vi phân cho hàm lồi địa phương trong không gian lồi địa phương Hausdorff X.

Giả sử f là hàm lồi đóng thuần nhất dương trên X. Khi đó, theo mệnh đề 4.4,

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= dom f^* \\ &= \{x^* \in X^* : f(x) \geq < x^*, x >, \ \forall x \in X\}. \end{aligned}$$

Bây giờ giả sử f là hàm lồi địa phương chính qui tại $\bar{x} \in domf$. Khi đó, $f'(\bar{x};.)$ lồi, thuần nhất dương, và liên tục (nhận xét 4.4). Như vậy, $f'(\bar{x};.)$ đóng.

Định nghĩa 4.9. *Dưới vi phân* của hàm lồi địa phương f trên X tại $\bar{x} \in domf$, ký hiệu là $\partial f(\bar{x})$, được định nghĩa như sau:

$$\partial f(\bar{x}) := \partial_d f'(\bar{x};0),$$

trong đó ∂_d là dưới vi phân của hàm lồi $f'(\bar{x};d)$ theo biến d.

Mỗi phần tử $\xi \in \partial f(\bar{x})$ được gọi là *dưới gradient* của f tại $\bar{x}$. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* nếu $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Nhận xét 4.5

Nếu f là hàm lồi, thì dưới vi phân theo định nghĩa 4.9 trùng với dưới vi phân của hàm lồi f.

Thật vậy, giả sử f là hàm lồi. Khi đó, f là hàm lồi địa phương tại mọi $x \in domf$. Từ hệ quả 4.3.1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 4.12. Giả sử f_1, f_2 là các hàm lồi địa phương chính qui tại $\bar{x}$. Khi đó, $f_1 + f_2$ cũng lồi địa phương chính quy tại $\bar{x}$. Đồng thời,

$$(f_1 + f_2)'(\bar{x};.) = f_1'(\bar{x};.) + f_2'(\bar{x};.), \tag{4.32}$$

$$\partial(f_1 + f_2)(\bar{x}) = \partial f_1(\bar{x}) + \partial f_2(\bar{x}). \tag{4.33}$$

Chứng minh

Từ định nghĩa ta suy ra (4.32).

Theo nhận xét 4.4, $f_1'(\bar{x};.)$ và $f_2'(\bar{x};.)$ là các hàm lồi liên tục. Áp dụng định lý 4.8 cho $f_1'(\bar{x};.)$ và $f_2'(\bar{x};.)$ ta nhận được (4.33). □

BÀI TẬP

4.1. Cho $f : D(f) \to R$, $D(f) \subseteq R^n$ là một hàm lồi, $x^0 \in D(f)$ và $\partial f(x^0) \neq \emptyset$. Chứng minh rằng $\partial f(x^0)$ là tập lồi và đóng.

4.2. Cho $f_1 : D(f_1) \to R$, và $f_2 : D(f_2) \to R$ là các hàm lồi. Xét hàm số $f(x) = \mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x) \quad (\mu_1, \mu_2 \geq 0)$ xác định trên $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Giả sử

$$riD(f_1) \cap riD(f_2) \neq \emptyset.$$

Chứng minh rằng $\forall x \in D(f)$ ta có:

$$\partial f(x) = \mu_1 \partial f_1(x) + \mu_2 \partial f_2(x).$$

4.3. Cho hàm $f(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$, ở đây $x = (x_1, x_2) \in R^2$.

Chứng minh rằng $\quad \partial f(0) = \{y : |y_1| + |y_2| \leq 1\}$.

4.4. Giả sử $K_1, K_2, \ldots, K_n$ là các nón lồi mở, có tương giao khác rỗng.

Chứng minh rằng

$$(\bigcap_{i=1}^{n} K_i)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*$$

4.5. *(Định lý Dubovitsky - Milyutin về tương giao của các nón)*

Cho $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$ là các nón lồi, trong đó K_i là mở với $i = \overline{1, n}$. Khi đó

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$$

khi và chỉ khi tồn tại phiếm hàm $x_i^* \in K_i^*$, $i = \overline{1, n+1}$ không đồng thời bằng 0, sao cho

$$x_1^* + x_2^* + \ldots + x_{n+1}^* = 0.$$