Giải đề thi môn **Giải tích lồi**

Nguyễn Tú Anh - A29888

12-03-2019

Bài 1

Đề: Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$, K_A là nón lồi sinh bởi A. Chứng minh rằng mỗi điể m $x \neq 0$ thuộc K_A có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r$$

trong đó $\lambda_i > 0$, $x_i \in A$, các điểm $x_1 ... x_r$ độc lập tuyến, và $r \leq n$

Giải: Lấy $x \in K_A, x \neq 0$,ta có:

$$x = \mu_1 x_1 + ... \mu_k x_k \text{ với } \mu_i > 0, x_i \in A$$

Giả sử các vector $x_1, ..., x_k$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, tồn tại các số $\gamma_1, ..., \gamma_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i = \gamma_1 x_1 + ... + \gamma_k x_k = 0$$

Như vậy, trong các số $\gamma_1, ..., \gamma_k$ có các $\gamma_i > 0$ (Nếu không ta đổi dấu 2 vế).
Ký hiệu: $J = \{i \in \overline{\{1, k\}} : \gamma_i > 0\}$.
Đặt:

$$\beta = \min_{i \in J} \frac{\mu_i}{\gamma_i}$$
$$\mu_i' = \mu_i - \beta \gamma_i (i = 1..k)$$

Khi đó, $\mu'_i \geq 0 (i = 1..k)$ và có **ít nhất một** $\mu'_j = 0$
Mặt khác, ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu'_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \beta \sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = x$$

Như vậy, ta nhận được biểu diễn của x dưới dạng tổng không quá $k-1$ số hạng khác 0.
Lặp lại quá trình trên một số hữa hạn lần ta sẽ nhận được kết quả cần chứng minh: $x_1, ..., x_k$ độc lập tuyến tính.

Bài 2

Đề Sử dụng BĐT Jensen chứng minh bất đẳng thức Cô si:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 .. x_n}$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

Giải Chỉ có một trong hai khả năng sau đây xảy ra:
TH1: $\exists i : x_i = 0$
Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
TH2: $\forall i : x_i > 0$
Xét hàm số: $f(x) = e^x$
Thấy $f''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy $f(x)$ là hàm lồi với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Tồn tại $a_1, a_2, ...a_n$ sao cho: $f(a_i) = e^{a_i} = x_i$ với $i = \overline{1..n}$ Áp dụng BĐT Jensen ta có:

$$f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

$$e^{\frac{a_1 + .. + a_n}{n}} \leq \frac{e^{a_1} + .. + e^{a_n}}{n}$$

$$\sqrt[n]{x_1 .. x_n} \leq \frac{x_1 + .. + x_n}{n} \text{ (vì } e^{a_i} = x_i)$$

Chứng minh xong !

Bài 3

Đề: Giả sử $f(x)$ xác định và liên tục đến đạo hàm cấp 2 trên (a, b). Chứng mminh rằng $f(x)$ là hàm lồi trên (a, b) nếu $f''(x) > 0$.

Giải: Lấy $x_1, x_2 \in [a, b], (x_1 < x_2)$. Giả sử $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ và $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ta phải chứng minh:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Xét đoạn thẳng $[x_1, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$.
Theo định lý Lagrange tồn tại ϵ_1, $x_1 < \epsilon_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ sao cho:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1) f'(\epsilon_1) \\ \Rightarrow f'(\epsilon_1) &= \frac{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1)}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda_1)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Xét đoạn thẳng $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_2]$.
Theo định lý Lagrange tồn tại ϵ_2, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \epsilon < x_2$ sao cho:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= (x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) f'(\epsilon_2) \\ \Rightarrow f'(\epsilon_2) &= \frac{f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}{x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \\ &= \frac{f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}{\lambda_1 (x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Vì $f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, cho nên $f'(x)$ là hàm đồng biến trên $[a, b]$. Do $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ta có:

$$f'(\epsilon_1) < f'(\epsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1)}{(1 - \lambda_1)(x_2 - x_1)} < \frac{f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}{\lambda_1 (x_2 - x_1)}$$

Vì $x_2 - x_1 > 0$ và $1 > \lambda_1 > 0$:

$$\Rightarrow [f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1)]\lambda_1 < [f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](1 - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi !

Bài 4

Đề: Cho $f(x) = \lambda g(\frac{x}{\lambda}), \lambda > 0$. Chứng minh rằng:

$$f^*(x^*) = \lambda g^*(x^*)$$

Giải: Áp dụng phép biến đổi Young - Fenchel ta có:

$$\begin{aligned}
f^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{< x^*, x > - f(x)\} \\
&= \sup_{x\in X}\{< x^*, x > - \lambda g(\frac{x}{\lambda})\} \\
&= \lambda \sup_{x\in X}\{\lambda^{-1} < x^*, x > - g(\frac{x}{\lambda})\} \\
&= \lambda \sup_{x\in X}\{< x^*, \frac{x}{\lambda} > - g(\frac{x}{\lambda})\} \\
&= \lambda g^*(x^*)
\end{aligned}$$

Bài 5

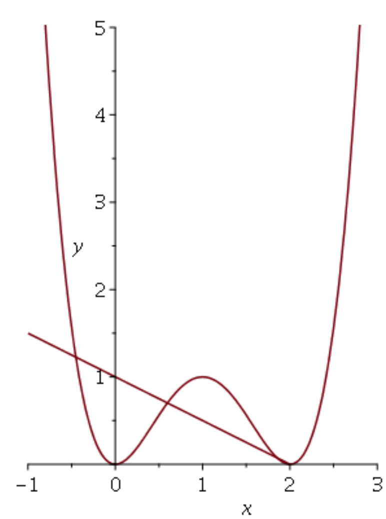
Đề: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{nếu } x \leq 2. \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tính $f'(2, v)$ và $\partial f(2)$.

Giải: **Tính** $f'(2, v)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\
\Rightarrow f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x
\end{aligned}$$



Xét $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$
Ta có:

$$f'(2, v) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(2 + \lambda v) - f(2)}{\lambda}$$

Xét $v \geq 0 \Rightarrow 2 + \lambda v > 2$:

$$\begin{aligned}
f'(2,v) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(2+\lambda v)^4 - 4(2+\lambda v)^3 + 4(2+\lambda v)^2 - 2^4 + 2^5 - 2^4}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(2+\lambda v)^2[(2+\lambda v)^2 - 4(2+\lambda v) + 4]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(2+\lambda v)^2 \lambda^2 v^2}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} (2+\lambda v)^2 \lambda v^2 = 0
\end{aligned}$$

Xét $v < 0 \Rightarrow 2 + \lambda v < 2$:

$$\begin{aligned}
f'(2,v) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{-\frac{x+\lambda v}{2} + 1 + \frac{2}{2} - 1}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{-x - \lambda v + 2}{2\lambda} \\
&= \frac{-v}{2}
\end{aligned}$$

Vậy $f'(2,v) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } v \geq 0 \\ \frac{-v}{2} & \text{nếu } v < 0 \end{cases}$

Tính $\partial f(2)$
$\exists \xi \in \partial f(2) \Rightarrow \xi v \leq f'(2,v)$
Với $v > 0$: $\xi v \leq 0 \Rightarrow \xi \leq 0$
Với $v < 0$: $\xi v \leq -\frac{v}{2} \Rightarrow \xi \geq -\frac{1}{2}$
Với $v = 0$: $\forall \xi$ thỏa mãn.
Vậy $\partial f(2) = [\frac{-1}{2}, 0]$