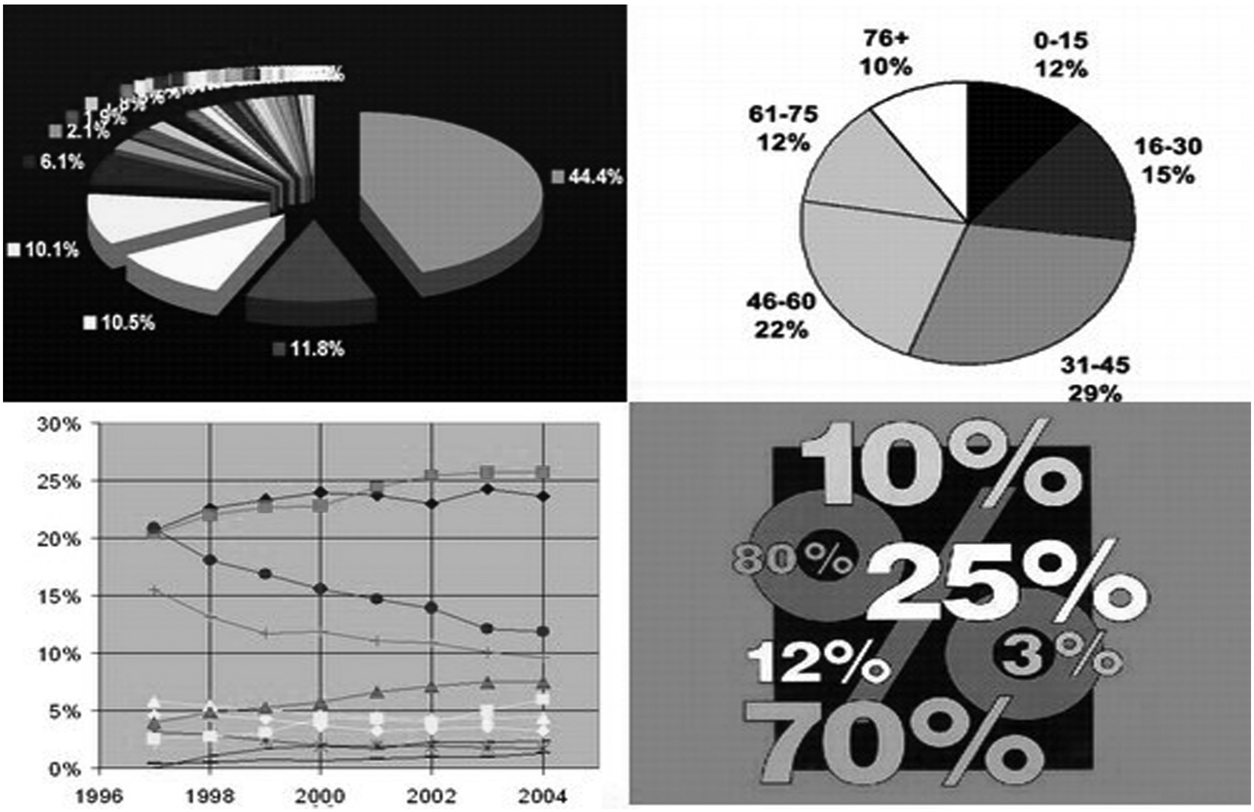
BÀI 7: KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ



Các kiến thức cần có

Trong chương này các bạn cần nắm vững những kiến thức sau:

- Các khái niệm về giả thuyết thống kê, miền bác bỏ và các bước làm bài toán kiểm định giả thuyết.
- Các quy tắc kiểm định cho các tham số của biến ngẫu nhiên.
- Các quy tắc kiểm định phi tham số.
- Cần xem kỹ các ví dụ trong mỗi bài học và làm các bài tập của các phần tương ứng.

Thời lượng

- 12 tiết

Mục tiêu

- Giới thiệu bài toán kiểm định giả thuyết và xây dựng các phương pháp kiểm định giả thuyết cho các tham số của tổng thể. Phương pháp kiểm định giả thuyết cho tham số của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ. Kiểm định giả thuyết hai tham số của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Kiểm định giả thuyết hai tỷ lệ.
- Phương pháp kiểm định phi tham số hay còn gọi là phương pháp khi bình phương dùng để kiểm định giả thuyết mang tính chất định tính như Kiểm định giả thuyết về phân phối của biến ngẫu nhiên, Kiểm định về tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên. Dùng tiêu chuẩn phi tham số để kiểm định cho bài toán mở rộng về so sánh nhiều tỷ lệ
- Cung cấp kiến thức nền quan trọng cho sinh viên tiếp thu kiến thức môn học Kinh tế lượng sau này

Nội dung

- Khái niệm giả thuyết thống kê
- Khái niệm
- Miền bác bỏ
- Các bước làm bài toán kiểm định
- Kiểm định tham số. Kiểm định so sánh kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn
- Kiểm định giả thuyết phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn
- Kiểm định giả thuyết cho xác suất (hay tỷ lệ)
- Kiểm định giả thuyết so sánh kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn
- Kiểm định giả thuyết so sánh hai xác suất
- Kiểm định giả thuyết so sánh phương sai của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.
- Một số tiêu chuẩn kiểm định phi tham số
- Kiểm định giả thuyết về phân phối của biến ngẫu nhiên
- So sánh nhiều tỷ lệ
- Kiểm tra tính độc lập

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG BÀI

Tình huống

Công ty Hoàng Lâm sản xuất mỳ chính theo dây chuyền của Đức. Theo tiêu chuẩn thì trọng lượng các gói mì chính được đóng trên một máy tự động là 453 g. Nghi ngờ máy tự động làm việc không còn đủ chính xác, công ty Hoàng Lâm tiến hành kiểm tra ngẫu nhiên 81 gói ta thấy trọng lượng trung bình là 448 g. Với mức ý nghĩa 0,05 có thể cho rằng trọng lượng các gói mì chính không đạt tiêu chuẩn hay không, biết rằng trọng lượng gói mì chính là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 36g?

Câu hỏi

1. Trọng lượng trung bình của 01 gói mỳ chính theo điều tra là bao nhiêu?

2. Để bác bỏ giả thuyết "dây chuyền vẫn hoạt động tốt – trọng lượng mỳ chính đúng tiêu chuẩn" thì tiêu chuẩn kiểm định phải không nằm trong khoảng nào?

3. Dây chuyền còn hoạt động tốt không?

7.1. Khái niệm giả thuyết thống kê

7.1.1. Khái niệm

Giả thuyết thống kê là một mệnh đề *nhận định về tham số của tổng thể*. Khi ta đồng nhất tổng thể với một biến ngẫu nhiên thì giả thuyết thống kê cũng có thể là nhận định về phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Ký hiệu H_0 là giả thuyết của tham số tổng thể, đi kèm với giả thuyết H_0 là mệnh đề đối lập được gọi là đối thuyết, ký hiệu là H_1. Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê gồm một cặp giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Dựa vào thông tin mẫu lấy được từ tổng thể ta phải đưa ra quyết định bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0, việc chấp nhận giả thuyết H_0 tương đương với bác bỏ đối thuyết H_1 và ngược lại.

Ví dụ:

Ta quan tâm tới thu nhập trung bình của người dân Việt Nam trong năm 2008. Khi đó ta có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1 về mức thu nhập trung bình μ là:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 750\$ \\ H_1 : \mu \neq 750\$ \end{cases}$$

Giả thuyết H_0 còn gọi là giả thuyết gốc và bài toán trên là bài toán kiểm định hai phía. Đối thuyết H_1 còn có thể phát biểu khác đi là $\mu > 750$ hoặc $\mu < 750$. Khi đó ta có hai bài toán kiểm định một phía

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 750\$ \\ H_1 : \mu > 750\$ \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = 750\$ \\ H_1 : \mu < 750\$ \end{cases}$$

Khi đưa ra giả thuyết H_0 thường căn cứ vào những nghiên cứu từ trước hoặc từ lý thuyết. Trong ví dụ trên việc đưa ra giả thuyết $H_0 : \mu = 750$ là căn cứ vào những nghiên cứu trong năm 2007.

7.2. Miền bác bỏ

Một trong những cách giải quyết bài toán kiểm định giả thuyết là dùng một thống kê G, được gọi là tiêu chuẩn thống kê.

Định nghĩa: Thống kê $T = G(X_1, X_2, ..., X_n)$ được gọi là một tiêu chuẩn thống kê (test statistics) nếu giá trị của nó được dùng để xem xét bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0. Ứng với mẫu cụ thể quan sát được, giá trị của tiêu chuẩn thống kê T được ký hiệu là t_{qs}. Ta sẽ dựa vào giá trị này để đưa ra kết luận chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết đang xét bằng cách so sánh giá trị đó với miền tiêu chuẩn.

Định nghĩa :

Miền W trong R được gọi là miền bác bỏ hay miền tiêu chuẩn nếu miền này được dùng cùng với tiêu chuẩn thống kê T và giá trị cụ thể t_{qs} của tiêu chuẩn đó để đưa ra kết luận về giả thuyết H_0 :

* Nếu $t_{qs} \in W$ thì bác bỏ giả thuyết H_0 .
* Ngược lại, nếu $t_{qs} \in W^c$ thì chấp nhận H_0 .

Khi bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0 thì ta gặp phải hai loại sai lầm:

* Sai lầm loại I: Bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng thực tế H_0 là đúng.
* Sai lầm loại II: Chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng thực tế H_0 là sai.

Quyết định bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết hoàn toàn dựa vào thông tin mẫu, do đó ta sẽ có xác suất mắc sai lầm loại I và sai lầm loại II. Ký hiệu α là xác suất mắc sai lầm loại I.

$$\alpha = \text{P(sai lầm loại I)} = \text{P(bác bỏ } H_0 \,|\, H_0 \text{ đúng).}$$

Lúc đó α được gọi là *mức ý nghĩa*. Ký hiệu β là xác suất mắc sai lầm loại II.

$$\beta = \text{P(sai lầm loại II)} = \text{P (chấp nhận } H_0 \,|\, H_0 \text{ sai)}$$

$$= \text{P(chấp nhận } H_0 \,|\, H_1 \text{ đúng).}$$

Trường hợp đặc biệt, khi dùng tiêu chuẩn T và miền bác bỏ W để tiến hành kiểm định giả thuyết, ta sẽ có:

$$\alpha = P(T \in W \,|\, H_0)$$

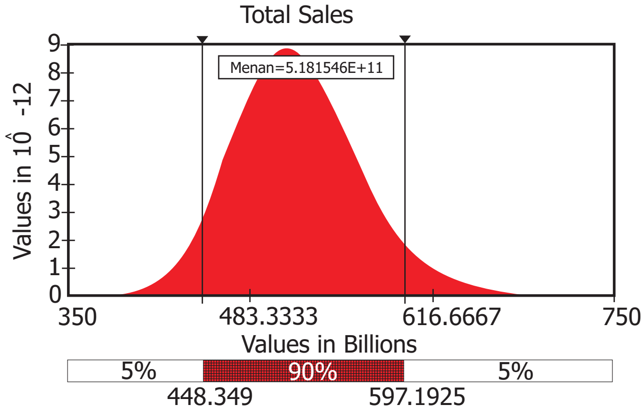
$$\beta = P(T \in W^c \,|\, H_1).$$

Khi tiến hành kiểm định, người ta luôn mong muốn sao cho có thể cực tiểu hóa cả hai loại sai lầm loại I và loại II, tuy nhiên khi cỡ mẫu cố định thì mong muốn trên là không thực hiện được, vì nói chung sai lầm loại I giảm xuống sẽ kéo theo sai lầm loại II tăng lên. Chẳng hạn, khi dùng tiêu chuẩn T và miền bác bỏ W để tiến hành kiểm định giả thuyết, để giảm bớt sai lầm loại I (α), ta phải thu nhỏ miền bác bỏ W, thay thế bằng một miền $W_1 \subset W$. Tuy nhiên điều đó dẫn đến $W_1^c \supset W^c$ và sai lầm loại II (β) lại tăng lên.

Vì những lý do trên, trong thực hành người ta thường cố định xác suất mắc sai lầm loại I và tìm cách làm cực tiểu xác suất mắc sai lầm loại II. Thông thường giá trị của α thường được lấy rất nhỏ, bằng 0,05, 0,02 hoặc 0,01.

7.2.1. Các bước làm bài toán kiểm định

Để tiến hành kiểm định giả thuyết, thông thường người ta có thể sử dụng miền tiêu chuẩn, xác suất ý nghĩa hoặc ước lượng khoảng của các tiêu chuẩn hay tham số thống kê, với các bước thực hiện tương ứng.



- Sử dụng miền tiêu chuẩn. Để giải quyết một bài toán kiểm định giả thuyết thống kê thông qua việc sử dụng miền tiêu chuẩn, người ta thường thực hiện các bước sau:

  Bước 1: Xác định tham số cần kiểm định, đặt giả thuyết và đối thuyết.

  Bước 2: Xác định tiêu chuẩn thống kê và tính giá trị của tiêu chuẩn thống kê đối với giá trị mẫu đã cho.

  Bước 3: Xác định miền bác bỏ W.

  Bước 4: So sánh giá trị của tiêu chuẩn thống kê với miền bác bỏ W và kết luận bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0.

- Sử dụng xác suất ý nghĩa (p–value)

  Nếu ta bác bỏ giả thuyết H_0 khi thấy một giá trị cụ thể a của mẫu xuất hiện, thì ta cũng phải bác bỏ giả thuyết đó cho những giá trị khác của mẫu thuộc vào một miền xác định bởi a. Chẳng hạn với giả thuyết cần kiểm định là "Chi tiết máy được gia công có kích thước đạt tiêu chuẩn", nếu ta bác bỏ giả thuyết khi đo thấy sản phẩm có kích lệch so với quy định 1 milimét thì ta cũng phải bác bỏ giả thuyết cho mọi sản phẩm khác đo được kích thước lệch so với quy định nhiều hơn 1 milimét. Có thể về thực chất thì các sản phẩm đó đều có kích thước đạt tiêu chuẩn nhưng do những tác động ngẫu nhiên trong quá trình đo đạc mà ta có kết luận sai, dẫn đến việc phạm sai lầm với một xác suất nào đó. Tập hợp chứa các giá trị của mẫu phải bác bỏ khi đã bác bỏ một giá trị cụ thể cho trước của mẫu có một xác suất phạm sai lầm được gọi là *xác suất ý nghĩa* ứng với giá trị cụ thể đó. Chính xác hơn, ta có định nghĩa sau

Định nghĩa:

Ứng với một giá trị mẫu cụ thể của tiêu chuẩn thống kê dùng kiểm định giả thuyết, *xác suất ý nghĩa (p–value)* là giá trị của xác suất phạm sai lầm nếu bác bỏ giả thuyết H_0 khi ta có giá trị mẫu cụ thể đó trong khi giả thuyết là đúng đối với mẫu đang xét.

Ta thấy xác suất ý nghĩa chính là xác suất phạm sai lầm loại I đã trình bày ở phía trên. Xác suất này nhỏ tương ứng với khả năng phạm sai lầm khi bác bỏ giả thuyết là nhỏ và ta có thể bác bỏ giả thuyết mà không e ngại có sai lầm. Ngược lại thì ta phải chấp nhận giả thuyết vì khả năng phạm sai lầm sẽ lớn. Như vậy ta có thể sử dụng xác suất ý nghĩa để giải quyết bài toán kiểm định theo thủ tục sau: Tiến hành các Bước 1 và 2 như trình bày ở trên và làm tiếp.

Bước 3': Tính xác suất ý nghĩa tương ứng với giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê đã có ở Bước 2:

Bước 4': So sánh xác suất ý nghĩa trên đây với mức ý nghĩa đã định trước (thường được cho bằng 5%, 1%, 0,5% hoặc 0,1%), nếu xác suất ý nghĩa nhỏ hơn hoặc bằng mức ý nghĩa thì bác bỏ giả thuyết, còn nếu ngược lại thì phải chấp nhận giả thuyết.

CHÚ Ý

Việc xác định miền bác bỏ có thể tiến hành thông qua việc tra bảng các giá trị tới hạn và có thể làm bằng tay. Trong khi đó việc tính toán xác suất ý nghĩa bằng cách tra bảng lại chưa được quen dùng. Do đó trong nhiều giáo trình chỉ trình bày thủ tục a) khi nói đền quy trình kiểm định giả thuyết. Tuy nhiên khi máy tính ngày càng phổ biến hơn và các phần mềm sẵn sàng cung cấp các tính toán liên quan đến xác suất ý nghĩa thì thủ tục b) tỏ ra rất thuận tiện.

Ngoài hai thủ tục trên, nhiều bài toán kiểm định có thể được tiến hành bằng cách sử dụng các ước lượng khoảng của các tham số hoặc các tiêu chuẩn thống kê, khá tiện dụng trong cả các tính toán bằng tay và cả khi có sự trợ giúp của máy tính.

- Sử dụng khoảng tin cậy (ước lượng khoảng) của tham số hoặc tiêu chuẩn thống kê

  Để tiến hành kiểm định bằng khoảng tin cậy, sau Bước 1 như đã nêu ở phần trên, ta tiếp tục tiến hành các bước sau:

  Bước 2: Xác định tiêu chuẩn thống kê và tìm khoảng tin cậy (ước lượng khoảng) của tiêu chuẩn đó (hoặc của tham số cần quan tâm) ứng với mẫu đã có và độ tin cậy đã định trước.

  Bước 3: So sánh khoảng tin cậy trên với một giá trị đã định, nếu khoảng tin cậy không chứa giá trị đó thì bác bỏ giả thuyết, còn nếu khoảng tin cậy chứa giá trị đó thì phải chấp nhận giả thuyết.

  Tiếp sau đây sẽ trình bày chi tiết một số bài toán kiểm định giả thuyết cụ thể, qua đó sẽ làm sáng tỏ hơn cách vận dụng các thủ tục trên đây.

7.3. Kiểm định tham số

7.3.1. Kiểm định so sánh kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn (với một giá trị cho trước của kỳ vọng)

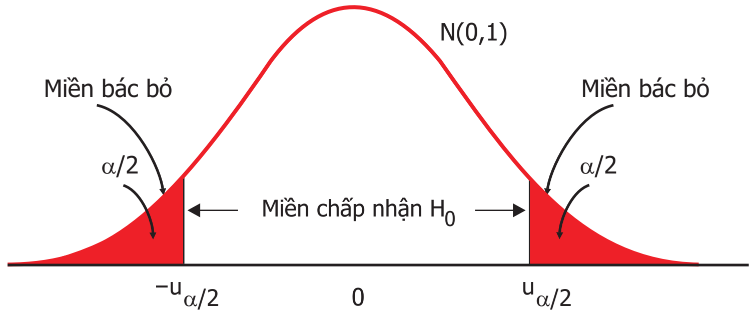
Trong phần này ta xét giả thuyết về kỳ vọng μ của biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$. Giả sử ta có mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ với giá trị mẫu là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được rút ra từ biến ngẫu nhiên X . Trong phần trước ta đã biết rằng $\overline{X}$ là một ước lượng không chệch cho kỳ vọng μ. Tuy nhiên ta chưa biết giá trị thực của μ và muốn kiểm tra xem giá trị đó có thực sự khác giá trị μ_0 cho trước hay không. Ta thành lập bài toán kiểm định như sau:

Giả thuyết $H_0: \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1: \mu \neq \mu_0$ hoặc $H_1: \mu > \mu_0$ hoặc $H_1: \mu < \mu_0$

- **Trường hợp σ^2 đã biết:**

Bài toán 1

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$



Hình 1: Miền tiêu chuẩn đối với phân phối chuẩn

- **Kiểm định bằng miền tiêu chuẩn.**

Ta thấy nếu giả thuyết H_0 là đúng thì thống kê $U = \dfrac{(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}$ có phân phối chuẩn N(0; 1), đồng thời $\overline{X}$ là một ước lượng không chệch cho μ.

Vậy với mức ý nghĩa α giả thuyết bị bác bỏ H_0 nếu $P\{|U| > u_{\alpha/2}\} = \alpha$, trong đó $\Phi_0(u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Cụ thể, ta thấy:

$$P[\text{bác bỏ } H_0 \text{ là đúng}] = P\{|U| > u_{\alpha/2} \,|\mu = \mu_0\} = 2(\alpha/2) = \alpha.$$

Do đó ta có miền bác bỏ (miền tiêu chuẩn, xem Hình 1):

$$W = (-\infty; -u_{\alpha/2}) \cup (u_{\alpha/2}; +\infty).$$

Với mẫu cụ thể ta có giá trị của tiêu chuẩn thống kê U là:

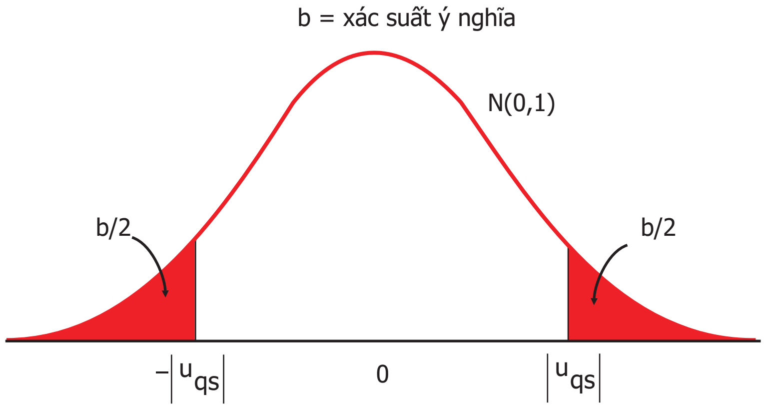
$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Nếu giá trị đó thuộc vào miền tiêu chuẩn thì ta bác bỏ giả thuyết, kết luận kỳ vọng của biến X thực sự khác μ_0. Ngược lại, nếu giá trị đó nằm trong miền chấp nhận thì phải kết luận kỳ vọng của X không khác μ_0 một cách có ý nghĩa.

- **Kiểm định bằng xác suất ý nghĩa**.

Nếu ta bác bỏ giả thuyết với giá trị cụ thể u_{qs} của tiêu chuẩn thống kê U được tính như trên, thì giả thuyết cũng phải bị bác bỏ cho mọi trường hợp khi giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê U có trị tuyệt đối lớn trị tuyệt đối của u_{qs} (Hình 2). Lúc đó xác suất ý nghĩa sẽ được tính qua công thức:

$$b = P\left(\{|U| > |u_{qs}|\} = 2[1 - \Phi(|u_{qs}|)\right)$$



Hình 2: Diện tích biểu diễn xác suất ý nghĩa của phép kiểm định

Nếu $b \le a$ có thể bác bỏ giả thuyết và kết luận X có kỳ vọng khác μ_0. Ngược lại, nếu $b > a$ thì ta phải chấp nhận giả thuyết cho rằng X có kỳ vọng bằng μ_0.

- **Kiểm định bằng khoảng tin cậy.**

  Theo nội dung của bài trước, với độ tin cậy $1-\alpha$ kỳ vọng của X sẽ có khoảng tin cậy xác định bởi:

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}; \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$

  Lúc đó ta sẽ chấp nhận giả thuyết nếu μ_0 là một điểm nằm trong khoảng trên và bác bỏ giả thuyết nếu μ_0 không thuộc khoảng đó.

Nhận xét: Ta có thể dễ dàng kiểm tra thấy ba cách kiểm định trên đều cho kết quả như nhau.

Ví dụ 1:

Theo tiêu chuẩn thì trọng lượng các gói mì chính được đóng trên một máy tự động là 453 g. Kiểm tra ngẫu nhiên 81 gói ta thấy trọng lượng trung bình là 448 g. Với mức ý nghĩa 0,05 có thể cho rằng trọng lượng các gói mì chính không đạt tiêu chuẩn hay không, biết rằng trọng lượng gói mì chính là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 36g?

Giải:

Gọi X là trọng lượng gói mì chính, ta có $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, với $\sigma = 36$ và tham số cần kiểm định là μ. Ta xây dựng bài toán kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 453 \\ H_1 : \mu \neq 453 \end{cases}$$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối chuẩn ta có $u_{0,025} = 1,96$. Vậy miền bác bỏ là: $W = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty)$.

Ta có $\overline{x} = 448$. Vậy:

$$u_{qs} = \frac{448 - 453}{36}\sqrt{81} = -1,25 \notin W.$$

Vậy ta chấp nhận giả thuyết H_0, kết luận các gói mì chính được đóng gói đạt tiêu chuẩn.

Để xác định xác suất ý nghĩa, ta tra bảng và thấy:

$$\Phi_0(|u_{qs}|) = \Phi_0(1,25) = 0,8944.$$

Vậy xác suất ý nghĩa bằng 2 x (1 – 0,8944) = 2 x 0,1056 = 0,2112 > 5%, ta phải chấp nhận giả thuyết.

Nếu sử dụng ước khoảng, ta thấy khoảng tin cậy 95% của trung bình trọng lượng các gói mì chính sẽ là:

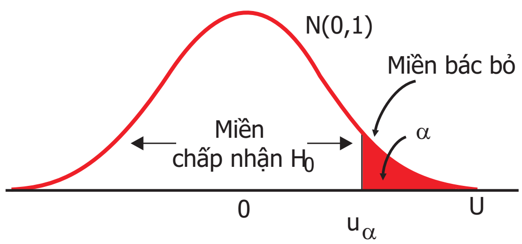
$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}; \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) = \left(448 - \frac{36}{\sqrt{81}}1,96; 488 + \frac{36}{\sqrt{81}}1,96\right) = (440,16; 455,84).$$

Rõ ràng $453 \in (440,16; 455,84)$ và ta phải chấp nhận giả thuyết, coi các gói mì chính đạt tiêu chuẩn về mặt trọng lượng.

Với các bài toán kiểm định một phía phải, ta dùng các thủ tục tương ứng như sau

Bài toán 2

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Hình 3: Miền bác bỏ của phép kiểm định một phía phải

- **Kiểm định bằng miền tiêu chuẩn.**

  Với mức ý nghĩa α, ta tìm được giá trị u_α sao cho $P\{U > u_\alpha\} = \alpha$. Rõ ràng giá trị đó xác định được thông qua phân vị của phân phối chuẩn tắc

$$\Phi_{0(u_\alpha)} = 1 - \alpha \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

và dễ dàng tìm được bằng cách tra bảng phân phối chuẩn tắc. Ta xác định được miền bác bỏ của phép kiểm định này là $W = \left(u_{\alpha;+\infty}\right)$. Để bác bỏ giả thuyết H_0 thì giá trị quan sát cụ thể của thống kê U phải đủ lớn. Giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê U là:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}.$$

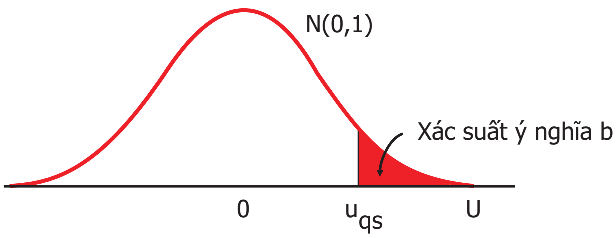
Như vậy ta sẽ bác bỏ giả thuyết nếu $u_{qs} \geq u_\alpha$. Ngược lại, nếu $u_{qs} < u_\alpha$ thì ta phải chấp nhận giả thuyết.

- **Kiểm định bằng xác suất ý nghĩa.**

  Với giá trị cụ thể u_{qs} của thống kê U, ta tính được (bằng máy tính hoặc tra bảng) xác suất ý nghĩa

$$b = P\left\{U > u_{qs}\right\} = 1 - \Phi\left(u_{qs}\right).$$

  So sánh với mức ý nghĩa α, nếu $b \leq \alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết. Còn nếu $b > \alpha$ thì ta chấp nhận giả thuyết.



Hình 4: Xác suất ý nghĩa của phép kiểm định một phía phải

- **Kiểm định bằng khoảng tin cậy.**

  Theo nội dung trình bày ở bài trước, khoảng tin cậy một phía phải (cực tiểu) của kỳ vọng được xác định là nửa đường thẳng:

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha ; +\infty\right).$$

  Lúc ấy nếu μ_0 thuộc vào khoảng trên thì ta chấp nhận giả thuyết, ngược lại thì ta bác bỏ giả thuyết.

Ví dụ 2:

Năng suất trung bình của một giống lúa ở các năm trước là 32,5 (tạ/ha). Năm nay người ta đưa vào phương pháp chăm sóc mới và hy vọng năng suất cao hơn năm trước. Điều tra trên 15 thửa ruộng thu được kết quả sau:

33,7 35,4 32,7 36,3 37,3 32,4 30,0
32,4 31,7 34,5 42,0 33,9 38,1 35,0 33,8 (tạ/ha)

Với mức ý nghĩa 1% có thể chấp nhận niềm hy vọng đó hay không, biết rằng năng suất lúa là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai là 10 (tạ/ha).

Giải:

Gọi X là năng suất lúa, ta có $X \sim N(\mu;\alpha^2)$ với $\alpha^2 = 10$. Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 32,5 \\ H_1 : \mu > 32,5 \end{cases}$$

Vì mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ nên $\Phi_{0(u_{0,01})} = 1 - 0,01 = 0,99$. Tra bảng phân phối chuẩn ta có $u_{0,01} = 2,33$. Vậy miền bác bỏ là $W = (2,33;+\infty)$. Với mẫu cụ thể đã cho ta tính được $\overline{X} = 34,613$, giá trị tiêu chuẩn thống kê là:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{34,613 - 32,5}{\sqrt{10}}\sqrt{15} = 2,587.$$

Ta có $u_{qs} = 2,587 \in W$, vậy ta bác bỏ giả thuyết H_0, kết luận năng suất lúa đã tăng lên.

Ta cũng có thể tra bảng để tìm ra xác suất ý nghĩa ứng với giá trị quan sát được của tiêu chuẩn thống kê:

$$\Phi_0(u_{qs}) = \Phi(2,587) = 0,9952.$$

Như vậy, b = 1 – 0,9952 = 0,0048 < 0,01, ta có quyền bác bỏ giả thuyết.

Khoảng tin cậy 99% một phía phải của kỳ vọng được tính như sau:

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{qs};\ +\infty\right) = \left(34,613 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}} \times 2,33; +\infty\right) = (32,71;+\infty).$$

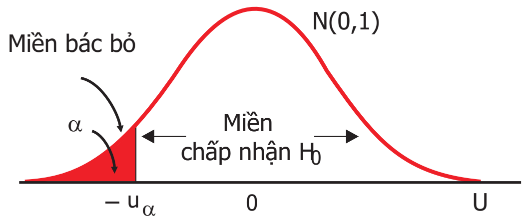
Rõ ràng $32,5 \notin (32,71;+\infty)$.

Vậy ta bác bỏ giả thuyết và kết luận năng suất lúa thực sự có tăng lên.

Bài toán kiểm định một phía trái được tiến hành như sau:

Bài toán 3

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$



Hình 5: Miền bác bỏ của phép kiểm định một phía trái

- **Kiểm định bằng miền tiêu chuẩn.**

  Với mức ý nghĩa α, ta xác định giá trị u_α sao cho $P\{U < -u_\alpha\} = \alpha$. Vì phân phối chuẩn có tính đối xứng nên giá trị trên có thể tra được từ bảng phân phối chuẩn qua công thức:

$$\alpha = P\{U < -u_\alpha\} = \Phi_0(-u_\alpha) = 1 - \Phi_0(u_\alpha).$$

  Giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê U là:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

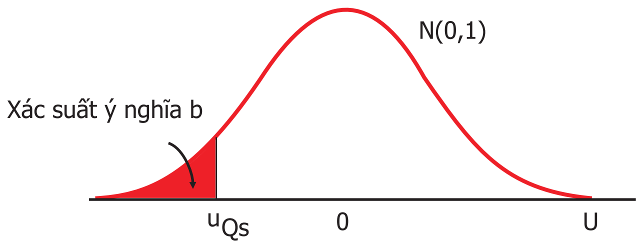
  Để bác bỏ giả thuyết H_0 thì giá trị quan sát được của thống kê U phải đủ nhỏ. Vậy miền bác bỏ là $W = (-\infty; -u_\alpha)$, tức là ta bác bỏ giả thuyết nếu $u_{qs} < u_\alpha$, chấp nhận giả thuyết nếu $u_{qs} \geq u_\alpha$.

- **Kiểm định bằng xác suất ý nghĩa**.

  Trước tiên ta chú ý là chỉ cần xét trường hợp giá trị cụ thể u_{qs} của thống kê U có giá trị âm. Với giá trị cụ thể ấy, ta tính (bằng máy tính hoặc tra bảng) xác suất ý nghĩa:

$$b = P\{U < u_{qs}\} = 1 - \Phi_0(-u_{qs}).$$

So sánh với mức ý nghĩa α, nếu $b \leq \alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết. Còn nếu $b > \alpha$ thì ta chấp nhận giả thuyết.



Hình 6: Xác suất ý nghĩa của phép kiểm định một phía trái

- **Kiểm định bằng khoảng tin cậy.**

  Tương tự như đã trình bày ở phần trên, khoảng tin cậy một phía trái của kỳ vọng được xác định là nửa đường thẳng:

$$\left(-\infty; \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha\right).$$

Lúc ấy nếu μ_0 thuộc vào khoảng trên thì ta chấp nhận giả thuyết, ngược lại thì ta bác bỏ giả thuyết.

Ví dụ 3:

Theo tiêu chuẩn thì trọng lượng các bao gạo do một máy tự động đóng là 50 kg. Sau một thời gian hoạt động người ta nghi ngờ máy hoạt động không bình thường làm cho trọng lượng các bao gạo giảm đi. Lấy ngẫu nhiên 90 bao và cân thử thì thu được trọng lượng trung bình là 48,5 kg. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận gì về điều nghi ngờ trên, biết rằng trọng lượng bao gạo là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 2 kg?

Giải:

Gọi X là trọng lượng bao gạo, ta có $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ với $\sigma = 2$. Ta có bài toán kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu < 50. \end{cases}$$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ ta có $\Phi_0(u_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95$. Tra bảng phân phối chuẩn ta có $u_{0,05} = 1,65$.

Vậy miền bác bỏ là $W = (-\infty;\ -1,65)$. Với mẫu đã cho ta có $\overline{x} = 48,5$, giá trị của tiêu chuẩn thống kê là:

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{48,5 - 50}{2}\sqrt{90} = -7,11.$$

Kiểm tra thấy $u_{qs} \in W$, vậy ta bác bỏ giả thuyết H_o và kết luận trọng lượng các bao gạo thực sự bị thiếu hụt. Khoảng tin cậy 99% một phía trái của kỳ vọng được xác định như sau:

$$(-\infty;\ \overline{x} + \frac{2}{\sqrt{90}} \times 1,65) = (-\infty; 48,5 - \frac{2}{\sqrt{90}} \times 1,65) = (-\infty; 48,84)$$

Rõ ràng $50 \notin (-\infty; 48,84)$, vậy ta bác bỏ giả thuyết và kết luận các bao gọi bị đóng gói thiếu trọng lượng.

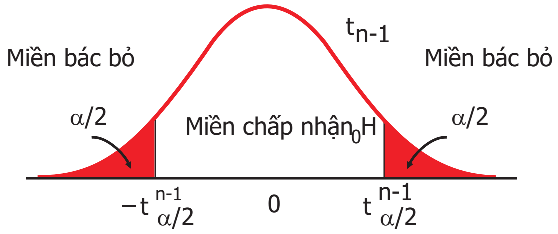
Trên đây ta thấy có thể tiến hành một phép kiểm định theo ba cách: Sử dụng miền bác bỏ, đánh giá xác suất ý nghĩa của tiêu chuẩn kiểm định hoặc xem xét khoảng tin cậy của tham số thống kê. Các phương pháp trên có thể áp dụng tương tự cho nhiều phép kiểm định thông thường. Để tránh rườm rà, tiếp theo đây sẽ chỉ trình bày cách tiếp cận thứ nhất (thông qua miền bác bỏ của tiêu chuẩn thống kê) cho một số phép kiểm định thường dùng trong thực hành.

- **Trường hợp σ^2 chưa biết:**

Xét thống kê $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S'}\sqrt{n}$, nếu giả thuyết H_0 là đúng thì T có quy luật phân phối Student với $n-1$ bậc tự do. Ta thấy $\overline{X}$ là ước lượng không chệch cho μ, vậy với mức ý nghĩa α ta bác bỏ giả thuyết H_0 nếu giá trị tuyệt đối của thống kê T đủ lớn, tức là khi $|T| > t_{\alpha/2}^{n-1}$. Trong đó phân vị $t_{\alpha/2}^{n-1}$ tìm từ bảng phân phối Student.

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



Hình 7: Miền tiêu chuẩn của phép kiểm định t–Student

Vậy miền bác bỏ của phép kiểm định này là $W = \left(-\infty; -t_{\alpha/2}^{n-1}\right) \cup \left(t_{\alpha/2}^{n-1}; +\infty\right)$. Với mẫu cụ thể giá trị của tiêu chuẩn thống kê được xác định bằng:

$$t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s'}\sqrt{n}.$$

Lúc đó ta sẽ bác bỏ giả thuyết nếu t_{qs} thuộc vào miền bác bỏ, nếu ngược lại ta sẽ chấp nhận giả thuyết.

Ví dụ 4:

Trong các năm trước thu nhập trung bình của công nhân là 15 (triệu/năm), năm nay điều tra thu nhập của 25 công nhân ta có số liệu sau:

Thu nhập	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
Số công nhân	2	4	10	6	3

Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm định xem thu nhập trung bình của công nhân năm nay có khác so với năm trước hay không, biết rằng thu nhập của công nhân là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là thu nhập của công nhân, lúc đó $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Thành lập phép kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{cases}$$

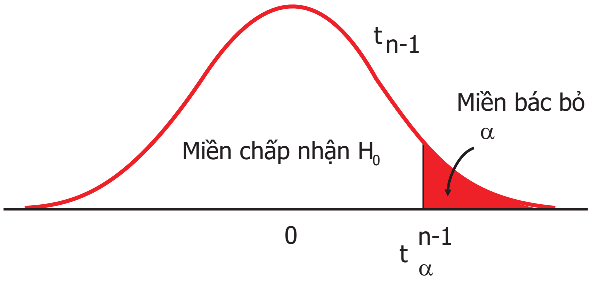
Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ và cỡ mẫu n = 25, tra bảng phân phối Student với bậc tự do 24 ta có $t_{0,025}^{24} = 2,06$. Vậy ta có miền bác bỏ $W = (-\infty; -2,06) \cup (2,06; +\infty)$ Với mẫu đã cho ta có $\overline{x} = 15,32$, $s'^2 = 4,893$, $s' = 2,212$ và giá trị tiêu chuẩn thống kê:

$$t_{qs} = \frac{15,32 - 15}{2,212}\sqrt{25} = 0,723.$$

Như vậy $t_{qs} \notin W$, do đó chưa thể bác bỏ được giả thuyết H_0 và phải kết luận thu nhập trung bình của công nhân năm nay vẫn như năm ngoái.

Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Hình 8: Miền tiêu chuẩn của phép kiểm định một phía phải t–Student

Đây là bài toán kiểm định một phía phải, với mức ý nghĩa α ta bác bỏ giả thuyết H_0 nếu giá trị của tiêu chuẩn thống kê T đủ lớn. Miền bác bỏ được xác định bằng $W = \left(t_{\alpha}^{n-1}; +\infty\right)$, trong đó phân vị t_{α}^{n-1} tìm từ bảng phân phối Student. Giá trị tiêu chuẩn thống kê với mẫu cụ thể là.

$$t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s'}\sqrt{n}.$$

Ta sẽ bác bỏ giả thuyết nếu giá trị này thuộc vào miền bác bỏ nêu trên

Ví dụ 5:

Mức xăng hao phí cho một loại xe ôtô chạy trên đoạn đường AB ở các năm trước là 50 lít. Năm nay do đoạn đường AB đã bị xuống cấp và người ta cho rằng mức xăng hao phí đã tăng lên. Điều tra 30 chuyến xe chạy trên đoạn đường AB ta có số liệu sau:

Mức xăng hao phí	49-49,5	49,5-50	50-50,5	50,5-51	51-51,5
Số chuyến	5	7	10	6	2

Với mức ý nghĩa 1% hãy kết luận về điều nghi ngờ trên, biết rằng mức xăng hao phí là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là mức xăng hao phí, ta có $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$. Phép kiểm định được đặt ra là:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu > 50 \end{cases}$$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$, tra bảng phân phối Student (bậc tự do 29 là khá lớn nên phân phối Student rất gần phân phối chuẩn và ta có thể dùng thay thế bằng bảng phân phối chuẩn), ta có $t_{0,01}^{29} = 2,46$. Vậy ta có miền bác bỏ $W = (2,46,+\infty)$.

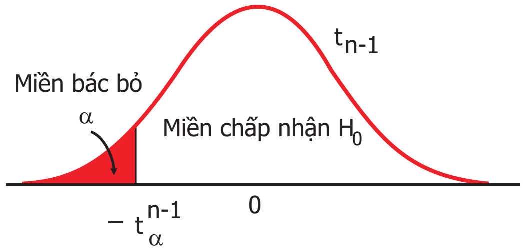
Với mẫu cụ thể đã cho ta tính toán được $\overline{x} = 50,133$, $s'^2 = 0,339, s' = 0,583$ và giá trị của tiêu chuẩn thống kê là:

$$t_{qs} = \frac{50,133 - 50}{0,538}\sqrt{30} = 1,254.$$

Ta thấy $t_{qs} \notin W$, do đó chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết.

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$



Hình 9: Miền tiêu chuẩn một phía trái của phép kiểm định t-Student

Đây là bài toán kiểm định một phía trái ứng với miền bác bỏ $W = (-\infty; -t_{\alpha}^{n-1})$. Thủ tục tiến hành phép kiểm định này cũng tương tự như đã trình bày phía trên.

Ví dụ 6:

Trọng lượng các bao gạo theo tiêu chuẩn là 50 kg. Có nhiều ý kiến khách hàng phản ảnh là trọng lượng gạo bị thiếu. Nhóm điều tra lấy ngẫu nhiên 25 bao cân thử và thu được kết quả sau:

Trọng lượng	48-48,5	48,5- 49	49 – 49,5	49,5 - 50	50-50,5
Số bao	3	5	10	5	2

Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm định ý kiến khách hàng có đúng không, biết rằng trọng lượng bao gạo là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là trọng lượng bao gạo, theo giả thiết ta có $X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Ta cần tiến hành phép kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu < 50 \end{cases}$$

Tra bảng phân phối Student với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ ta thấy $t_{0,05}^{24} = 1,71$. Vậy ta có miền bác bỏ $W = (-\infty; -1,71)$. Với số liệu của mẫu đã cho ở trên ta tính được $\overline{x} = 49,21$; $s'^2 = 0,311$; $s' = 0,558$ và giá trị tiêu chuẩn thống kê bằng

$$t_{qs} = \frac{49,21 - 50}{0,558}\sqrt{25} = -7,097.$$ So sánh ta thấy $t_{qs} \in W$.

Vậy giả thuyết H_0 bị bác bỏ, tức là ý kiến khách hàng phản ánh là đúng.

7.3.2. Kiểm định giả thuyết phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$. Ta cần so sánh phương sai σ^2 với một giá trị σ_0^2 cho trước.

- **Trường hợp kỳ vọng μ đã biết**

  Xét thống kê $\chi^2 = \dfrac{nS^{*2}}{\sigma_0^2}$,

  trong đó: $S^{*2} = \dfrac{1}{n}\sum (X_i - \mu)^2$.

  Khi đó χ^2 có phân phối Khi–bình phương với n bậc tự do. Với mẫu cụ thể ta có: $\chi^2_{qs} = \dfrac{ns^{*2}}{\sigma_0^2}$.

  Ba bài toán kiểm định hai phía, kiểm định một phía phải và kiểm định một phía trái của mô hình này được trình bày tóm tắt như sau:

Bài toán 1:

Kiểm định hai phía

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

Ứng với mức ý nghĩa α cho trước, miền bác bỏ của phép kiểm định này là:

$$W = (0;\ \chi^2_{1-\alpha/2,n}) \cup (\chi^2_{\alpha/2,n};\ +\infty).$$

Bài toán 2:

Kiểm định một phía phải

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (\chi^2_{\alpha,n}; +\infty)$ ứng với mức ý nghĩa α.

Bài toán 3:

Kiểm định một phía trái

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = \left(0;\ \chi^2_{1-\alpha,n}\right)$ ứng với mức ý nghĩa α.

- **Trường hợp kỳ vọng μ chưa biết**

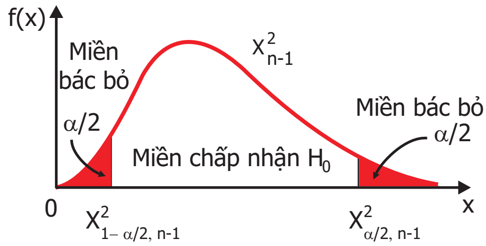
  Trong bài 4 ta đã thống kê

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2}$$

có quy luật phân phối khi–bình phương với n – 1 bậc tự do. Dựa trên cơ sở đó, các bài toán kiểm định hai phía, kiểm định một phía phải và kiểm định một phía trái của mô hình này được tất lược như sau, với các phân vị tương ứng được tìm từ bảng phân phối khi–bình phương:

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

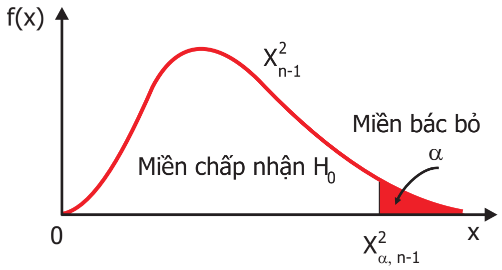


Hình 10: Miền tiêu chuẩn hai phía của phép kiểm định Khi–bình phương

được kiểm định theo miền bác bỏ $W = \left(0;\ \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) \cup \left(\chi^2_{\alpha/2,n-1}; +\infty\right)$.

Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

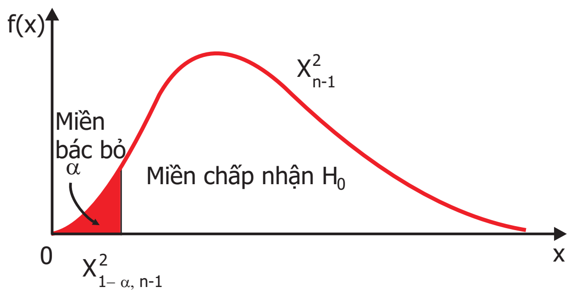


Hình 11: Miền tiêu chuẩn một phía phải của phép kiểm định Khi–bình phương

có miền bác bỏ $W = (\chi^2_{\alpha,n-1};\quad +\infty)$

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$



Hình 12: Miền tiêu chuẩn một phía trái của phép kiểm định Khi–bình phương

có miền bác bỏ $W = \left(0; x^2_{1-\alpha,n-1}\right)$.

Với mẫu cụ thể giá trị của tiêu chuẩn thống kê là:

$$\chi^2_{qs} = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2}.$$

Giá trị này được so sánh với miền tiêu chuẩn xác định phía trên để đưa ra kết luận thống kê.

Ví dụ 7:

Lấy ngẫu nhiên 20 chai nước do một máy đóng chai tự động đóng ta thu được độ lệch chuẩn mẫu là $s'^2 = 0,0153(l^2)$. Máy được gọi là đạt chuẩn nếu độ phân tán không sai khác quá $0,01(l^2)$. Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm định xem máy đóng chai có đạt chuẩn hay không, biết rằng thể tích nước trong chai là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là thể tích nước trong chai, ta có:

$X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Lập bài toán kiểm định một phía:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0,01 \\ H_1 : \sigma^2 > 0,01 \end{cases}$$

Xét mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ và bậc tự do 19, tra bảng phân phối Khi-bình phương ta có $\chi^2_{0,05;19} = 30,144$.

Lúc ấy, miền bác bỏ của phép kiểm định bằng một phía phải bằng $W = (30,144; +\infty)$

Ta có $s'^2 = 0,0153(l^2)$, do đó giá trị của tiêu chuẩn thống kê sẽ là:

$$\chi_{qs} = \frac{(19-1)\times 0,0153}{0,01} = 29,07.$$

Kiểm tra ta thấy $\chi_{qs} \notin W$. Vậy ta chưa có cơ sở bác bỏ giả thuyết H_0, tức là máy đóng chai vẫn đạt chuẩn.

7.3.3. Kiểm định giả thuyết cho xác suất (hay tỷ lệ)

Cho biến cố A với xác suất p chưa biết. Thực hiện n lần thử về biến cố A, gọi m là số lần A xảy ra. Ta có f = m/n là tần suất xuất hiện biến cố A. Ta cần so sánh xác suất p với một giá trị cho trước p_0. Xét thống kê:

$$U = \frac{(f - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$$

Khi đó U có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn N(0; 1). Với mẫu cụ thể ta có giá trị của thống kê U là u_{qs}. Các bài toán kiểm định hai phía, một phía phải và một phía trái được trình bày tóm tắt dưới đây:

Bài toán 1:

Phép kiểm định hai phía

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

Miền bác bỏ của phép kiểm định này là $W = (-\infty; -u_{\alpha/2}) \cup (u_{\alpha/2}; +\infty)$, trong đó $\Phi_0(u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, giá trị phân vị $u_{\alpha/2}$ có thể tìm được bằng cách tra bảng phân phối chuẩn.

Bài toán 2:

Bài toán kiểm định một phía phải

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (u_\alpha; +\infty)$, với $\Phi_0(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Bài toán 3:

Bài toán kiểm định một phía trái

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; u_\alpha)$.

Ví dụ 8:

Những năm trước nhà máy áp dụng công nghệ A sản xuất thì có tỷ lệ phế phẩm là 6%. Năm nay nhà máy nhập công nghệ B để sản xuất, hy vọng sẽ giảm được tỷ lệ phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 100 sản phẩm để kiểm tra thì thấy có 5 phế phẩm. Với mức ý nghĩa 5%, có thể cho rằng tỷ lệ phế phẩm của công nghệ B nhỏ hơn công nghệ A hay không?

Giải:

Gọi p là tỷ lệ phế phẩm của công nghệ B. Ta cần kiểm định:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,06 \\ H_1 : p < 0,06 \end{cases}$$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$, tra bảng phân phối chuẩn ta có $u_{0,05} = 1,65$, miền bác bỏ là $W = (-\infty;\ -1,65)$. Ta có $n = 100$; $m = 5$, do đó $f = m/n = 0,05$. Tính giá trị tiêu chuẩn thống kê ta thu được:

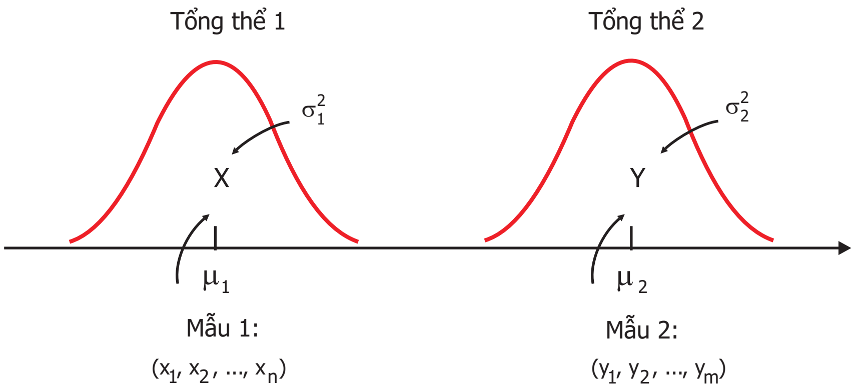
$$u_{qs} = \frac{(0,05 - 0,06)}{\sqrt{0,06 \times (1 - 0,06)}} \sqrt{100} = -0,42.$$

Rõ ràng $u_{qs} \notin W$. Vậy ta chấp nhận giả thuyết H_0, kết luận công nghệ B không làm giảm tỷ lệ phế phẩm.

7.3.4. Kiểm định giả thuyết so sánh kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn

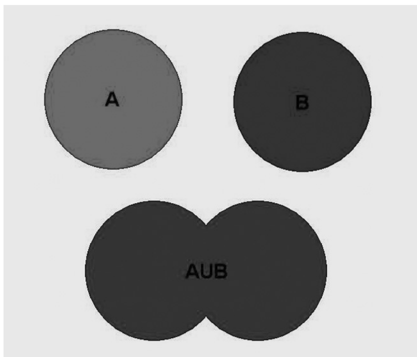
Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập X và Y, trong đó X có phân phối chuẩn $N(\mu_1;\sigma_1^2)$, biến ngẫu nhiên Y có phân phối chuẩn $N(\mu_2;\sigma_2^2)$. Xét hai mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ rút ra từ X với giá trị mẫu cụ thể $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và mẫu ngẫu nhiên $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ rút ra từ Y với giá trị mẫu cụ thể $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Ta có giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ với các đối thuyết

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2; H_1 : \mu_1 > \mu_2; H_1 : \mu_1 < \mu_2.$$



Hình 13: So sánh kỳ vọng của hai tổng thể

- **Trường hợp $\sigma_1^2;\sigma_2^2$ đã biết.**



Xét thống kê:

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

khi đó U có phân phối chuẩn N(0; 1). Nếu giả thuyết H_0 là đúng thì:

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

Với mẫu cụ thể giá trị của tiêu chuẩn thống kê là:

$$u_{qs} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

Lập luận tương tự như phần 6.2.1 a, ta có miền bác bỏ của các bài toán như sau:

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; -u_{\alpha/2}) \cup (u_{\alpha/2}; +\infty)$.

Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

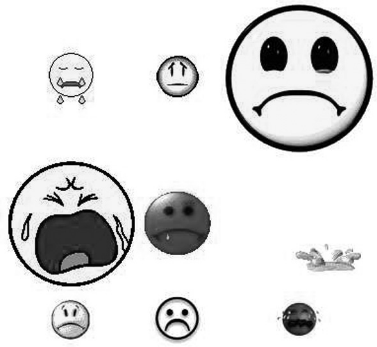
có miền bác bỏ $W = (u_{\alpha}; +\infty)$.

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; -u_{\alpha})$.

Ví dụ 9:



Học sinh hai trường A và B cùng học môn toán, khảo sát thi kết quả thi hết môn ta thu được kết quả sau:

Trường A: $n = 64$; $\overline{x} = 7,32$.

Trường B: $m = 68$; $\overline{y} = 7,66$.

Biết rằng điểm thi của hai trường là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn tương ứng là $\sigma_1 = 1,09$ và $\sigma_2 = 1,12$. Với mức ý nghĩa 1% có thể cho rằng kết quả thi của trường B cao hơn trường A hay không?

Giải:

Gọi X và Y là kết quả thi của hai trường A và B:

$$X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2);\ Y \sim N(\mu_2; \sigma_2^2).$$

Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

Với mức ý nghĩa 1% đã cho, tra bảng phân phối chuẩn, ta có $u_{0,01} = 2,33$. Như vậy miền bác bỏ sẽ là $W = (-\infty; -2,33)$. Tính giá trị của tiêu chuẩn thống kê ta được:

$$u_{qs} = \frac{7,32 - 7,66}{\sqrt{\frac{1,09^2}{64} + \frac{1,12^2}{68}}} = -31,43.$$

So sánh ta thấy $u_{qs} \in W$, vậy có thể bác bỏ giả thuyết H_0, khẳng định kết quả thi ở trường B cao hơn trường A.

- **Trường hợp phương sai $\sigma_1^2;\sigma_2^2$ chưa biết**

Giả sử rằng $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Xét thống kê:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{n+m}{nm}}}$$

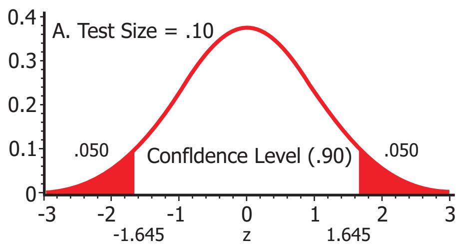
Khi đó T có quy luật phân phối Student với n + m – 2 bậc tự do. Với mẫu cụ thể giá trị của tiêu chuẩn thống kê T: $t_{qs} = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{ns_x^2 + ms_y^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{n+m}{nm}}}$.

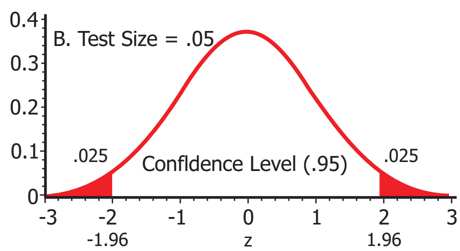
Lập luận tương tự như trong phần 7.2.1 b, ta có:

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = \left(-\infty; -t_{\alpha/2}^{n+m-2}\right) \cup \left(t_{\alpha/2}^{n+m-2}; +\infty\right)$.





Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (t_{\alpha/2}^{n+m-2};\ +\infty)$.

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; -t_{\alpha/2}^{n+m-2})$.

Ví dụ 10:

Điều tra thu nhập ($) trong một tháng của công nhân ở hai nhà máy sản xuất thiết bị điện tử A và B ta thu được số liệu sau:

Nhà máy A: 91,5; 94,18; 92,18; 95,39; 91,79; 89,07; 94,72; 89,21.

Nhà máy B: 89,19; 90,95; 90,46; 93,21; 97,19; 97,04; 91,07; 92,75.

Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng thu nhập trung bình của công nhân trong hai nhà máy trên là như nhau hay không, biết rằng thu nhập trong hai nhà máy có phân phối chuẩn?

Giải:

Gọi X và Y là thu nhập của công nhân trong hai nhà máy A và B, $X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$; $Y \sim N(\mu_1; \sigma_2^2)$. Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_2 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Ta có n = 8; m = 8, mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$. Tra bảng phân phối Student ta thu được giá trị $t_{0,025}^{8+8-2} = t_{0,025}^{14} = 2,14$ và miền bác bỏ $W = (-\infty; -2,14) \cup (2,14; +\infty)$. Với mẫu đã cho, tính toán cho ra kết quả $\overline{x} = 92,255; s_x^2 = 4,998; \overline{y} = 92,733; s_y^2 = 7,77$ và giá trị tiêu chuẩn thống kê:

$$t_{qs} = \frac{92,255 - 92,733}{\sqrt{\frac{8 \times 4,998 + 8 \times 7,77}{8 + 8 - 2}} \sqrt{\frac{8+8}{8 \times 8}}} = -0,353.$$

So sánh ta thấy $t_{qs} \notin W$, vậy phải chấp nhận H_0, kết luận công nhân hai nhà máy thu nhập như nhau.

7.3.5. Kiểm định giả thuyết so sánh hai xác suất

Cho hai biến ngẫu nhiên X và Y có phân phối 0-1 với tham số p_1 và p_2. Xét hai mẫu ngẫu nhiên rút từ X và Y tương ứng là $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ và$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$. Gọi k_1 là số lần mẫu ngẫu nhiên của X nhận giá trị 1, ta có tần suất mẫu

$$f_1 = \frac{k_1}{n}.$$

Gọi k_2 là số lần mẫu ngẫu nhiên của Y nhận giá trị 1, ta có tần suất mẫu

$$f_2 = \frac{k_2}{n}.$$

CHÚ Ý

Nếu có hai biến cố A và B với xác suất p_1 và p_2, ta có n và m là số lần thực hiện phép thử biến cố A và B, k_1 và k_2 là số lần biến cố A và B xảy ra, f_1 và f_2 là tần suất xảy ra biến cố A và B.

Đặt

$$f = \frac{k_1 + k_2}{n + m}.$$

Ta đưa ra giả thuyết H_0: $p_1 = p_2$ với các đối thuyết hai phía, một phía phải và một phía trái lần lượt là H_1: $p_1 \neq p_2$; H_1: $p_1 > p_2$; H_1: $p_1 < p_2$. Xét thống kê

$$U = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{f(1-f)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}.$$

Nếu giả thuyết đúng thì thống kê U có quy luật phân phối tiệm cận phân phối chuẩn N(0,1), do vậy với mức ý nghĩa α cho trước ta có miền bác bỏ ứng với các bài toán kiểm định sau

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_o : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; -u_{\alpha/2}) \cup (u_{\alpha/2}; +\infty)$.

Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (u_\alpha; +\infty)$.

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (-\infty; -u_\alpha)$.

Với giá trị mẫu cụ thể ta cũng tính giá trị của tiêu chuẩn thống kê U là u_{qs} rồi so sánh giá trị này với miền bác bỏ tương ứng để đưa ra kết luận thống kê.

Ví dụ 11:

Điều tra hiện tượng học sinh bỏ học ở hai vùng nông thôn A và B ta thu được số liệu sau:

Vùng A: Điều tra 1900 em có 175 em bỏ học.

Vùng B: Điều tra 2600 em có 325 em bỏ học.

Có ý kiến cho rằng tình trạng học sinh bỏ học ở vùng nông thôn A là ít nghiêm trọng hơn vùng nông thôn B. Với mức ý nghĩa 1% hãy kiểm định ý kiến đó.

Giải:

Gọi p_1 và p_2 là tỷ lệ học sinh bỏ học ở vùng nông thôn A và B. Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases}$$

Ta có n = 1900; k_1 = 175, tần suất f_1 = 175/1900 = 0,092

m = 2600; k_2 = 325, tần suất f_2 = 325/2600 = 0,125

f = $(k_1+k_2)/(n + m)$ = (175 + 325)/(1900 + 2600) = 0,111.

Vậy giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê là:

$$u_{qs} = \frac{0,092 - 0,125}{\sqrt{0,111(1-0,111)\left(\frac{1}{1900} + \frac{1}{2600}\right)}} = -3,48.$$

Với mức ý nghĩa 0,05, tra bảng ta được:

Ở trên $u_{0,05} = 1,65$, vậy miền bác bỏ là $W = (-\infty;\ -1,65)$. So sánh giá trị của tiêu chuẩn thống kê với miền bác bỏ ta thấy $u_{qs} \in W$, do đó có thể bác bỏ giả thuyết H_0, tức là khẳng định tình trạng bỏ học ở vùng A là ít nghiêm trọng hơn vùng B.

7.3.6. Kiểm định giả thuyết so sánh phương sai của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập $X \sim N(\mu_1;\sigma_1^2)$ và $Y \sim N(\mu_2;\sigma_2^2)$, xét mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ rút ra từ biến X với giá trị mẫu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mẫu ngẫu nhiên $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ rút ta từ biến Y với giá trị mẫu $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Ta có giả thuyết $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ với các đối thuyết $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2; H_1 : \sigma_1 > \sigma_2; H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$.

Xét thống kê:

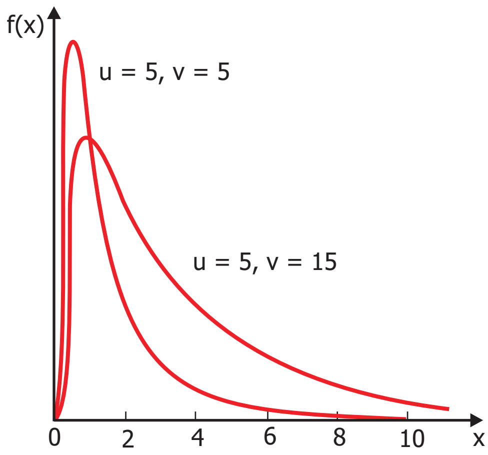
$$F = \frac{S_x'^2 / \sigma_1^2}{S_y'^2 / \sigma_2^2}.$$

Khi đó thống kê F có phân phối Fisher với n -1 và m -1 bậc tự do, nếu giả thuyết H_0 là đúng thì:

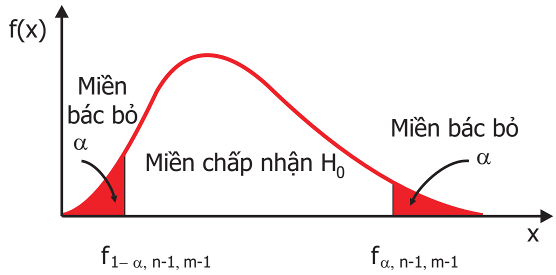
$$F = \frac{S_x'^2}{S_y'^2}.$$

Với mẫu cụ thể giá trị của thống kê F là:

$$f_{qs} = \frac{s_x'^2}{s_y'^2}.$$



Hình 14: Hàm mật độ của phân phối Fisher



Hình 15: Miền bác bỏ của phép kiểm định Fisher

Vậy ta có miền bác bỏ ứng với các bài toán kiểm định như sau

Bài toán 1:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (0; f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}) \cup (f_{\alpha/2,n-1,m-1}; +\infty)$

Bài toán 2:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1 > \sigma_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (f_{\alpha,n-1,m-1}; +\infty)$

CHÚ Ý

$$f_{1-\alpha,n-1,m-1} = \frac{1}{f_{\alpha,n-1,m-1}}$$

Bài toán 3:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1 < \sigma_2 \end{cases}$$

có miền bác bỏ $W = (0; f_{1-\alpha,n-1,m-1})$, với phân vị của phân phối Fisher

$$f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}; f_{\alpha/2,n-1,m-1}; f_{\alpha,n-1,m-1}; f_{1-\alpha,n-1,m-1}$$

được tìm từ bảng phân phối Fisher (phân phối F).

Ví dụ 12:

Hai máy A và B cùng gia công một loại chi tiết. Người ta muốn kiểm tra xem hai máy có độ chính xác như nhau hay không. Để làm điều đó người ta tiến hành lấy mẫu và thu được kết quả sau:

Máy A: 135 138 136 140 138 135 139

Máy B: 140 135 140 138 135 138 140

Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm tra xem hai máy có độ chính xác như nhau hay không, biết kích thước chi tiết là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

Giải:

Gọi X là kích thước chi tiết của máy A, $X \sim N(\mu_1;\sigma_1^2)$, Y là kích thước chi tiết của máy B, $Y \sim N(\mu_1;\sigma_1^2)$. Ta cần kiểm định giả thuyết $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$

Ta có mức ý nghĩa là 5% và cỡ mẫu n = 7, m = 7. Tra bảng phân phối F thu được

$$f_{0,975;6,6} = 0,2;\ \ f_{0,025;6,6} = \frac{1}{0,2} = 4,995.$$

Vậy ta có miền bác bỏ $W = (0;\,0,2) \cup (4,995;\,+\infty)$. Với mẫu đã cho, tính toán ta được: $s_x'^2 = 3,905;\ s_y'^2 = 5$, và giá trị tiêu chuẩn thống kê $f_{qs} = 3,905/5 = 0,781$.

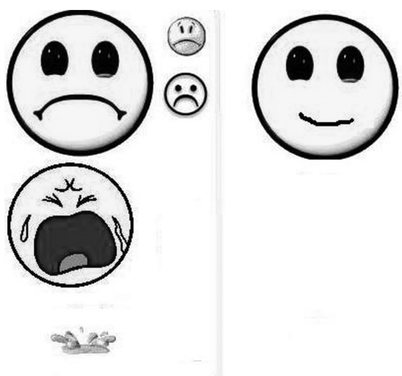
So sánh giá trị này với miền bác bỏ, ta thấy $f_{qs} \notin W$. Vậy cần chấp nhận giả thuyết H_0 và kết luận độ chính xác của hai máy là như nhau.

7.4. Một số tiêu chuẩn kiểm định phi tham số

Các thủ tục kiểm định trình bày trên đây đều dựa vào giả thiết đã biết được dạng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên ban đầu và có thể dùng các ước lượng tham số của phân phối đó để đưa ra tiêu chuẩn kiểm định. Đó là các phép kiểm định "có tham số". Tiếp theo đây ta sẽ xem xét trường hợp của một số phép kiểm định phi tham số, là phép kiểm định với tiêu chuẩn thống kê được xây dựng không dựa vào ước lượng tham số của phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên ban đầu.

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng phân phối Khi–bình phương như một tiêu chuẩn để giải quyết các bài toán liên quan tới kiểm định giả thuyết cho phân phối của biến ngẫu nhiên cũng như kiểm định giả thuyết cho nhiều xác suất hay tỷ lệ. Tiêu chuẩn phù hợp Khi–bình phương là một loại kiểm định phi tham số.

7.4.1. Kiểm định giả thuyết về phân phối của biến ngẫu nhiên



Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối F(x), ta có bài toán kiểm định sau:

H_0: X có phân phối $F_0(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_r)$

H_1: X không có phân phối $F_0(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_r)$,

trong đó các $\theta_1,\theta_2,...,\theta_r$ là các tham số của phân phối F_0. Để giải quyết bài toán trên ta tiến hành như sau: xét mẫu ngẫu nhiên $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ được rút ra từ X với giá trị mẫu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Chia miền giá trị của X thành k miền không giao nhau $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Ký hiệu n_i là số giá trị mẫu rơi vào khoảng S_i (i = 1,2,..,k), n_i được gọi là tần số thực nghiệm.

Nếu giả thuyết H_0 là đúng thì khi đó X có phân phối xác định là F_0, do đó ta tính được các xác suất:

$$p_i = P\{X \in S_i\}, i = 1, 2, .., k.$$

Đặt $E_i = n.p_i$, $i = 1,2,\ldots,k$; $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Các E_i chính là tần số lý thuyết trong các miền S_i . Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp các tham số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ đã biết.**

  Xét thống kê:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}.$$

  Khi đó thống kê đã cho có phân phối Khi–bình phương với k−1 bậc tự do. Giả thuyết H_0 được bác bỏ nếu giá trị của tiêu chuẩn thống kê đủ lớn, do đó với mức ý nghĩa α cho trước miền bác bỏ là $W = (\chi^2_{\alpha,k-1}; +\infty)$. Với mẫu cụ thể ta tính giá trị của tiêu chuẩn thống kê χ^2_{qs} và so sánh giá trị đó với miền bác bỏ để đưa ra kết luận về phân phối của biến đang xét.

Ví dụ 13:

Quan sát biến ngẫu nhiên X ta thu được số liệu mẫu sau

Giá trị X	0-1	1-3	3-6	6-7	7-10
Số lần	3	4	2	5	4

Với mức ý nghĩa 5% hãy kiểm định xem biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [0; 10] hay không.

Giải:

Ta cần kiểm định giả thuyết H_0: X có phân phối đều trên [0; 10] với đối thuyết H_1: X không có phân phối đều trên [0; 10].

Ta có cỡ mẫu n = 18 và các khoảng:

$$S_1 = (0,1),\ n_1 = 3;\ S_2 = (1; 3),\ n_2 = 4;\ S_3 = (3; 6),\ n_3 = 2;$$

$$S_4 = (6;7),\ n_4 = 5;\ S_5 = (7;10),\ n_5 = 4.$$

Các xác suất tương ứng là:

$$p_1 = P\{0 < X < 1\} = 1/10;$$
$$p_2 = P\{1 < X < 3\} = 2/10 = 1/5;$$
$$p_3 = 3/10;\ p_4 = 1/10;\ p_5 = 3/10.$$

Các tần số lý thuyết:

$$E_1 = 18 \times 1/10 = 1,8;\ E_2 = 18 \times 1/5 = 3,6;\ E_3 = 18 \times 3/10 = 5,4;$$
$$E_4 = 18 \times 1/10 = 1,8;\ E_5 = 18 \times 3/10 = 5,4.$$

Vậy ta có:

$$\chi^2_{qs} = \frac{(3-1,8)^2}{1,8} + \frac{(4-3.6)^2}{3.6} + \frac{(2-5,4)^2}{5,4} + \frac{(5-1,8)^2}{1,8} + \frac{(4-5,4)^2}{5,4} = 9,037$$

Tra bảng phân phối Khi–bình phương ta được $\chi^2_{0,05;4} = 9,488$ và miền bác bỏ là $W = (9,488;\ +\infty)$. So sánh giá trị quan sát được của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ, ta thấy $\chi^2_{qs} \notin W$, do đó chưa thể bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 14:

Người ta cho rằng số lỗi trong in ấn là một đại lượng tuân theo luật phân phối Poisson với cường độ là 0,75. Để khẳng định điều này ta lấy mẫu gồm 60 trang in và thu được kết quả sau:

Số lỗi in	0	1	2	3
Số trang	32	15	9	4

Với mức ý nghĩa 5% hãy đánh giá ý kiến trên.

Giải:

Gọi X là lỗi xuất hiện trong quá trình in ấn một trang sách, ta cần kiểm định giả thuyết

H_0: X có phân phối Poisson với tham số 0,75.

H_1: X không có phân phối Poisson với tham số 0,75.

Ta có các khoảng:

$S_1 = \{0\}$, $n_1 = 32$; $S_2 = \{1\}$, $n_2 = 15$; $S_3 = \{2\}$, $n_3 = 9$; $S_4 = [3;\ +\infty)$, $n_4 = 4$.

Với tham số $\lambda = 0,75$ ta tính các xác suất:

$$p_1 = P(X=0) = \frac{e^{-0,75}0,75^0}{0!} = 0,472 \Rightarrow E_1 = 60 \times 4,72 = 28,32$$

$$p_2 = P(X=1) = \frac{e^{-0,75}0,75^1}{1!} = 0,354 \Rightarrow E_2 = 60 \times 0,354 = 21,24$$

$$p_3 = P(X=2) = \frac{e^{-0,75}0,75^2}{2!} = 0,133 \Rightarrow E_3 = 60 \times 0,133 = 7,98$$

$$p_4 = P(X \geq 3) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0,041 \Rightarrow E_4 = 60 \times 0,041 = 2,46.$$

Từ đó ta có:

$$\chi^2_{qs} = \frac{(32-28,32)^2}{283,2} + \frac{(15-21,24)^2}{21,24} + \frac{(9-7,98)^2}{7,98} + \frac{(4-2,46)^2}{2,46} = 2,94.$$

Với mức ý nghĩa 5% tra bảng ta được $\chi^2_{0,05;3} = 7,814$, vậy miền bác bỏ sẽ là $W = (7,814;\ +\infty)$. So sánh giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ, ta thấy $\chi^2_{qs} \notin W$, do đó chưa thể bác bỏ giả thuyết H_0.

- **Trường hợp các tham số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ chưa biết**

  Trong trường hợp này ta cũng tiến hành các bước tương tự như trước nhưng các xác suất $p_i = P(X \in S_i)$ sẽ phụ thuộc vào các tham số vì vậy ta thay các tham số bằng các ước lượng điểm tương ứng. Ta cũng xét tiêu chuẩn thống kê như trong trường hợp trước nhưng lưu ý rằng tiêu chuẩn thống kê bây giờ có phân phối Khi–bình phương với $k - r - 1$ bậc tự do. Cụ thể là:

  - Đối với phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$, ta có các tham số $\theta_1 = \mu$; $\theta_2 = \sigma^2, r = 2$, ta thay μ bằng $\bar{x}$, thay σ^2 bằng s'^2.
  - Đối với phân phối Poisson với tham số λ, r = 1, thay tham số λ bằng $\bar{x}$.
  - Đối với phân phối nhị thức B(n; p), r = 1, tham số p được thay bằng tần suất $f = m/n$.
  - Đối với phân phối mũ với tham số λ, r = 1, thay tham số λ bằng $1/\bar{x}$.
  - Đối với phân phối đều trên [a; b], số tham sô là r = 2 và tham số a được thay bằng $\bar{x} - \sqrt{3}s$, tham số b được thay bằng $\bar{x} + \sqrt{3}s$.

Ví dụ 15:

Quan sát biến ngẫu nhiên X ta thu được giá trị mẫu như sau:

Giá trị X	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
n_i	3	6	4	7	2

Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn hay không?

Giải:

Ta cần kiểm định bài toán

H_0: X có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$.

H_1: X không có phân phối chuẩn $N(\mu;\sigma^2)$.

Ta có miền giá trị của X là R do đó ta phải gộp các khoảng lại

$$S_1 = (-\infty;\ 3), n_1 = 3;\quad S_2 = (3;\ 5), n_2 = 6;\quad S_3 = (5;\ 7), n_3 = 4;$$
$$S_4 = (7; 9), n_4 = 7;\ S_5 = (9;\ +\infty), n_5 = 2.$$

Với mẫu đã cho ta tính được $\bar{x} = 5,91;\ s'^2 = 6,25$. Thay các tham số chưa biết bằng các ước lượng tương ứng, $\mu = \bar{x} = 5,91;\ \sigma^2 = s'^2 = 6,25$. Khi đó giả sử biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn N(5,91; 6,25), ta tính các xác suất:

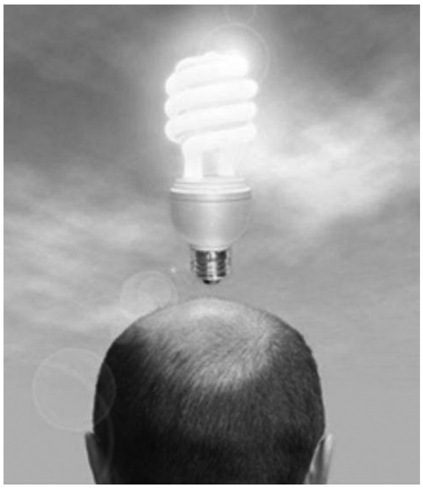
$$p_1 = P\{-\infty < X < 3\} = 0,181 \Rightarrow E_1 = 22 \times 0,181 = 3,982$$
$$p_2 = P\{3 < X < 5\} = 0,275 \Rightarrow E_2 = 22 \times 0,275 = 6,05$$
$$p_3 = P\{5 < X < 7\} = 0,299 \Rightarrow E_3 = 22 \times 0,299 = 6,578$$
$$p_4 = P\{7 < X < 9\} = 0,177 \Rightarrow E_4 = 22 \times 0,177 = 3,894$$
$$p_5 = P\{9 < X < +\infty\} = 0,068 \Rightarrow E_5 = 22 \times 0,068 = 1,496.$$

Từ đó ta có:

$$\chi^2_{qs} = \frac{(3-3,982)^2}{3,982} + \frac{(6-6,05)^2}{6,05} + \frac{(4-6,578)^2}{6,578} + \frac{(7-3,894)^2}{3,894} + \frac{(2-1,496)^2}{1,496} = 3,9$$

Với mức ý nghĩa 5% và số tham số là r = 2, tra bảng ta được $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$. Vậy miền bác bỏ là $W = (5,99;\ +\infty)$. So sánh giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ, ta thấy $\chi^2_{qs} \notin W$, do đó chưa thể bác bỏ giả thuyết H_0.

7.4.2. So sánh nhiều tỷ lệ



Phần này sẽ xét bài toán mở rộng của bài toán kiểm định so sánh hai xác suất. Giả sử ta có k biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_k$ độc lập cùng phân phối 0-1 với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ta kiểm định bài toán sau:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 = \ldots = p_k \\ H_1 : \exists p_i \neq p_j, i \neq j \end{cases}$$

Để kiểm định bài toán trên ta thành lập một mẫu n quan sát về các biến ngẫu nhiên nói trên và có bảng số liệu mẫu như sau:

	X_1	…	X_i	…	X_k	$\sum$
0	n_{11} E_{11}	…	n_{1i} E_{1i}	…	u_{1k} E_{1k}	u_1
1	n_{21} E_{21}	…	n_{2i} E_{2i}	…	n_{2k} E_{1k}	u_2
$\sum$	v_1	…	v_i	…	v_k	n

Trong đó:

$$v_i = \sum_{s=1}^{2} n_{si};\quad u_s = \sum_{i=1}^{k} n_{si}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = n,$$

v_i là cỡ mẫu của biến ngẫu nhiên X_i (i = 1,2,..,k).

Đặt:

$$E_{si} = \frac{u_s . v_i}{n};\ s = 1,2,\ i = 1,2,..,k.$$

Ta viết giá trị E_{si} ngay cạnh giá trị của n_{si} trong bảng số liệu. Lúc đó nếu giả thuyết đúng thì thống kê: $\chi^2 = \sum_{s=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_{si}-E_{si})^2}{E_{si}}$ có phân phối xấp xỉ phân phối Khi–bình phương với $k-1$ bậc tự do. Với mức ý nghĩa α, tra bảng phân phối khi–bình phương ta được giá trị phân vị $\chi^2_{\alpha,k-1}$, từ đó xác định được miền bác bỏ $W=\left(x^2_{\alpha,k-1};+\infty\right)$.

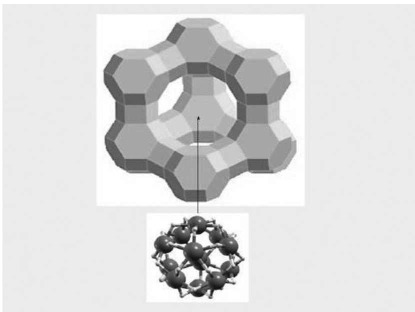
Ví dụ 16:

Có ba nhà máy cùng sản xuất một loại sản phẩm, người ta tiến hành kểm tra sản phẩm của ba nhà máy thu được số liệu sau:

Nhà máy / chất lượng	Nhà máy A	Nhà máy B	Nhà máy C	$\sum$
Phế phẩm	12 13,14	16 15,77	18 17,09	46
Chính phẩm	88 86,86	104 104,23	112 112,91	304
$\sum$	100	120	130	350

Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng tỷ lệ phế phẩm của ba nhà máy là như nhau hay không?

Giải:



Gọi p_1, p_2, p_3 là tỷ lệ phế phẩm của ba nhà máy A, B và C. Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0: p_1 = p_2 = p_3 \\ H_1: \exists p_i \neq p_j, i \neq j \end{cases}$$

Tính toán với số liệu đã cho, ta được các E_{si} được ghi trong bảng. Từ đó ta có:

$$\chi^2_{qs} = \frac{(12-13,14)^2}{13,14} + \frac{(88-86,86)^2}{86,86} + \frac{(16-15,77)^2}{15,77}$$
$$+\frac{(104-104,23)^2}{104,23} + \frac{(18-17,09)^2}{17,09} + \frac{(112-112,91)^2}{112,09} = 0,174.$$

Với mức ý nghĩa 5%, k = 3, tiến hành tra bảng ta có được $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$ và miền bác bỏ sẽ là $W = (5,99;+\infty)$. So sánh giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ xác định ở trên, ta thấy $\chi^2_{qs} \notin W$, do đó ta chấp nhận giả thuyết H_0 và coi tỷ lệ phế phẩm ở ba nhà máy là như nhau.

7.4.3. Kiểm tra tính độc lập

Trong lý thuyết xác suất việc kiểm tra tính độc lập hai biến ngẫu nhiên là bài toán quan trọng. Phần này sẽ đưa ra phương pháp thống kê để kiểm định tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên hay hai tổng thể.

Ta xét hai biến ngẫu nhiên X và Y với giả thuyết H_0 : X độc lập với Y, và đối thuyết H_1 : X không độc lập với Y. Để giải quyết bài toán kiểm định trên ta lấy một mẫu ngẫu nhiên hai chiều $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2),\ldots,(X_n, Y_n)$ rút ra từ véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) và có các giá trị mẫu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Thu gọn giá trị mẫu ta có bảng biểu diễn sau:

y_j \ x_i	y_1	…	y_j	…	y_s	$\sum$
x_1	n_{11} (E_{11})	…	n_{1j} (E_{1j})	…	n_{1s} (E_{1s})	b_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_{i1} (E_{i1})	…	n_{ij} (E_{ij})	…	n_{is} (E_{is})	b_i
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
x_r	n_{r1} (E_{r1})	…	n_{rj} (E_{rj})	…	n_{rs} (E_{rs})	b_r
$\sum$	a_1	..	a_j	….	a_s	n

trong đó n_{ij} là số lần cặp giá trị (x_i, y_j) xuất hiện trong giá trị mẫu:

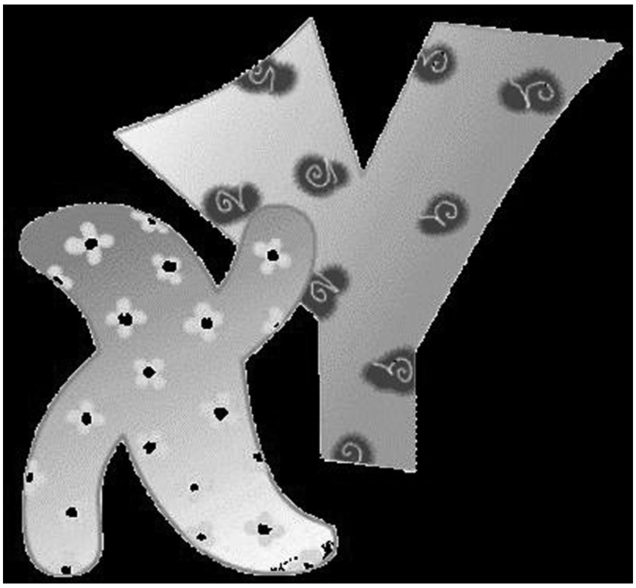
$$a_i = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}, i = 1, 2, .., r$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}, j = 1, 2, ..., s\,.$$

Đặt $E_{ij} = \dfrac{a_i.b_j}{n}$, ta viết giá trị E_{ij} vào trong ngoặc bên cạnh n_{ij} của ô (i;j). Nếu giả thuyết đúng thì thống kê:

$$\chi^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}.$$

sẽ có quy luật phân phối xấp xỉ phân phối khi–bình phương với $(r-1)(s-1)$ bậc tự do. Với mức ý nghĩa α ta tra bảng phân phối khi-bình phương và thu được giá trị phân vị $\chi^2_{\alpha,(r-1)(s-1)}$, từ đó xác định được miền bác bỏ là $W = (\chi^2_{\alpha,(r\text{-}1)(s\text{-}1)}; +\infty)$.



Ví dụ 17:

Nghiên cứu tình trạng hôn nhân trước ngày cưới của 542 cặp vợ chồng ta có bảng số liệu:

Tình trạng hôn nhân của vợ / Tình trạng hôn nhân của chồng	Chưa kết hôn lần nào	Ly hôn	Goá	$\sum$
Chưa kết hôn lần nào	180 (129,61)	34 (66,42)	36 (53,97)	250
Ly hôn	58 (97,47)	76 (49,95)	54 (40,58)	188
Goá	43 (53,92)	34 (27,63)	27 (22,45)	104
$\sum$	281	144	117	542

Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng tình trạng hôn nhân của vợ và chồng là độc lập với nhau hay không?

Giải:

Ta cần kiểm định giả thuyết

H_0 : Tình trạng hôn nhân của chồng độc lập với vợ.

H_1 : Tình trạng hôn nhân của chồng không độc lập với vợ.

Theo số liệu đã cho, tính toán các giá trị E_{ij} và ghi vào các ô tương ứng. Ta có $E_{11} = 281x250/542 = 129,61$. Tính toán tương tự ta được các số liệu được cho như trong bảng. Tiếp đó ta tính giá trị cụ thể của tiêu chuẩn thống kê:

$$\chi_{qs}^2 = \frac{(180-129,61)^2}{129,61} + \frac{(58-97,47)^2}{97,47} + \frac{(43-53,92)^2}{53,92} + \frac{(34-66,42)^2}{66,42} + \frac{(76-49,95)^2}{49,95}$$
$$+ \frac{(34-27,63)^2}{27,63} + \frac{(36-53,97)^2}{53,97} + \frac{(54-40,58)^2}{40,58} + \frac{(27-22,45)^2}{22,45} = 80.$$

Ta có $r = s = 3$. Với mức ý nghĩa 5%, tra bảng phân phối Khi–bình phương ta được $\chi_{0,05,4}^2 = 9,48$, vậy ta có miền bác bỏ $W = (9,48; +\infty)$. So sánh giá trị của tiêu chuẩn thống kê với miền bác bỏ, ta thấy $\chi_{qs}^2 \in W$. Do đó ta bác bỏ giả thuyết H_0.

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này ta sẽ xét bài toán quan trọng tiếp theo của thống kê là kiểm định giả thuyết. Bài trước ta đã xem xét bài toán làm thế nào để ước lượng tham số của tổng thể. Tuy nhiên rất nhiều bài toán trong khoa học, kỹ thuật và kinh tế đòi hỏi ta phải đưa ra quyết định chấp nhận hay bác bỏ một nhận định về tham số của tổng thể. Lúc đó ta phải giải quyết bài toán kiểm định giả thuyết thống kê.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Mức ý nghĩa có thể là:

a) giá trị z

b) giá trị tham số

c) giá trị nằm trong khoảng 0 và 1

d) giá trị α

2. Với bài toán kiểm định giả thuyết.

Giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$

Đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$

với mức ý nghĩa α, mẫu lớn và phương sai chưa biết, giả thuyết H_0 sẽ bị bác bỏ nếu giá trị thống kê là:

a) $z > z_\alpha$

b) $z < -z_\alpha$

c) $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$

d) $z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

3. Năng suất trung bình một giống lúa ở nước ta những năm trước là 32,5 tạ/ha. Năm nay người ta đưa vào phương pháp chăm sóc mới và hy vọng năng suất cao hơn năm trước. Bài toán kiểm định giả thuyết là:

a) Giả thuyết $H_0 : \mu = 32,5$

Đối thuyết $H_1 : \mu > 32,5$

b) Giả thuyết $H_0 : \mu = 32,5$

Đối thuyết $H_1 : \mu < 32,5$

c) Giả thuyết $H_0 : \mu \neq 32,5$

Đối thuyết $H_1 : \mu > 32,5$

d) Giả thuyết $H_0 : \mu < 32,5$

Đối thuyết $H_1 : \mu > 32,5$

4. Một phương pháp ăn kiêng được quảng cáo rằng: sẽ làm giảm trọng lượng ít nhất 45 pound trong 6 tháng. Bài toán kiểm định giả thuyết là:

a) Giả thuyết $H_0 : \mu = 45$

Đối thuyết $H_1 : \mu > 45$

b) Giả thuyết $H_0 : \mu = 45$

Đối thuyết $H_1 : \mu < 45$

c) Giả thuyết $H_0 : \mu \neq 45$

Đối thuyết $H_1 : \mu < 45$

d) Giả thuyết $H_0 : \mu \neq 45$

Đối thuyết $H_1 : \mu > 45$

5. Cho các thông tin sau:

$n = 16, \mu = 15, \overline{x} = 16, \sigma^2 = 16$. Giả sử mẫu tuân theo luật phân phối chuẩn. Giá trị thống kê là

a) $z = 1$

b) $z = \frac{1}{4}$

c) $z = 0$

d) $z = -1$

6. Cho các thông tin sau:

$n = 16, \mu = 15, \overline{x} = 16, \sigma^2 = 16$. Giả sử mẫu tuân theo luật phân phối chuẩn. Nếu thực hiện kiểm định một phía bên phải thì:

a) Bác bỏ giả thuyết nếu $\alpha = 0{,}1$

b) Không bác bỏ giả thuyết nếu $\alpha = 0{,}1$

c) Không thể thực hiện được bài toán kiểm định cần nhiều thông tin hơn

d) Bác bỏ giả thuyết nếu $\alpha > 0{,}1$

7. Cho các thông tin sau:

Mẫu A: $n = 81, \overline{x} = 51, s_1^2 = 16$

Mẫu B: $m = 64, \overline{y} = 48, s_2^2 = 12$

Khoảng tin cậy cho hiệu $\overline{x} - \overline{y}z$ với độ tin cậy 95% là:

a. $(1{,}784; 4{,}216)$

b. $(1{,}584; 4{,}216)$

c. $(1{,}784; 5{,}216)$

d. $(1{,}84; 4{,}416)$

8. Một giáo sư toán học muốn xác định xem liệu có một sự khác nhau điểm trung bình học kỳ I và học kỳ II Môn Thống kê kinh tế hay không. Chọn ngẫu nhiên 16 sinh viên học kỳ I, tính được điểm trung bình là 75 với độ lệch tiêu chuẩn 4. Chọn ngẫu nhiên của 9 sinh viên học kỳ II, tính được điểm trung bình 73 với độ lệch tiêu chuẩn là 6. Điểm học kỳ I và II giả sử tuân theo phân phối chuẩn và có cùng phương sai.

Giá trị Thống kê là

a. $z = 1{,}9964$

b. $t = 0{,}5009$

c. $t = 0,956$

d. $z = 0,5009$

9. Một nhóm các sinh viên nước ngoài muốn du học ở Hoa Kỳ đã đăng ký thi TOFEL chuẩn bị cho khóa học. Lấy một mẫu kiểm tra vào ngày đầu tiên đi học và sau kiểm tra lại vào cuối khóa học. Kết quả thu được như sau:

Trước	325	495	525	480	525	480
Sau	375	520	510	510	550	490

Ký hiệu $\mu_d = \mu_T - \mu_S$ là hiệu của trung bình điểm thi trước và trung bình điểm thi sau.

Ta muốn kiểm định xem liệu khoá học có giúp sinh viên học TOFEL tốt hơn không. Bài toán kiểm định giả thuyết là:

a) Giả thuyết : $H_0 : \mu_d = 0$

Đối thuyết: $H_1 : H_0 : \mu_d > 0$

b) Giả thuyết : $H_0 : \mu_d = 0$

Đối thuyết: $H_1 : H_0 : \mu_d < 0$

c) Giả thuyết : $H_0 : \mu_d \geq 0$

Đối thuyết: $H_1 : H_0 : \mu_d \neq 0$

d) Giả thuyết : $H_0 : \mu_d \leq 0$

Đối thuyết: $H_1 : H_0 : \mu_d \neq 0$

10. Một nhóm các sinh viên nước ngoài muốn du học ở Hoa Kỳ đã đăng ký thi TOEFL chuẩn bị cho khóa học. Lấy một mẫu kiểm tra vào ngày đầu tiên đi học và sau kiểm tra lại vào cuối khóa học. Kết quả thu được như sau:

Trước	325	495	525	480	525	480
Sau	375	520	510	510	550	490

Ta muốn kiểm định xem liệu khoá học có giúp sinh viên học TOEFL tốt hơn không. Giá trị Thống kê là:

a) $z = 2,3814$ b) $t = 0,0169$

c) $z = -0,0169$ d) $t = 2,3814$

11. Công ty nước giải khát Coca-Cola đang nghiên cứu việc đưa vào một công thức mới để cải tiến sản phẩm của mình. Với công thức cũ khi cho 500 người dùng thử thì có 150 người ưa thích nó. Với công thức mới khi cho 1000 người khác dùng thử có 350 người ưa thích.

Giá trị Thống kê là:

a) 2,4
b) 3,0
c) 1,96
d) 2,12

BÀI TẬP

1. Theo tiêu chuẩn trọng lượng các gói mỳ chính do máy đóng gói tự động là 453 gam. Kiểm tra ngẫu nhiên 90 gói thấy trọng lượng trung bình là 448gam. Biết rằng trọng lượng các gói mỳ chính là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 36gam. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận các gói mỳ chính bị đóng thiếu hay không?

2. Để định mức thời gian gia công một chi tiết máy, người ta theo dõi ngẫu nhiên quá trình gia công 25 chi tiết và thu được số liệu sau:

Thời gian	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Số chi tiết	4	7	7	5	2

Biết rằng thời gian gia công chi tiết là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng thời gian trung bình gia công chi tiết lớn hơn 18 phút không?

3. Trước đây định mức tiêu hao nhiên liệu cho một máy sản xuất trong 1 ca là 1,5 lít. Do các điều kiện đã thay đổi, người ta theo dõi 35 máy sản xuất và thu được số liệu sau:

s	1,0-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-2,0
Số máy	5	8	12	7	3

Giả thiết lượng tiêu hao nhiên liệu là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 3% hãy kết luận xem có cần thay đổi mức tiêu hao nhiên liệu hay không?

4. Tỷ lệ phế phẩm do máy tự động sản xuất là 5%. Kiểm ra ngẫu nhiên 300 sản phẩm thấy có 24 phế phẩm. Hãy kết luận với mức ý nghĩa 4% về ý kiến cho rằng tỷ lệ phế phẩm có xu thế tăng lên.

5. Tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh T khi điều trị thuốc A là 85%. Thử nghiệm dùng loại thuốc B để chữa trị thì trong 900 người mắc bệnh T có 810 người được chữa khỏi. Có thể cho rằng thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 5%.

6. Theo số liệu điều tra của quốc tế, tỷ lệ mắc bệnh A ở nước X là 0,15%. Điều tra ngẫu nhiên 12500 người dân của nước Y thì thấy có 38 người mắc bệnh A. Với mức ý nghĩa 2% hãy kiểm định ý kiến cho rằng tỷ lệ mắc bệnh A ở nước Y cao hơn nước X .

7. Để so sánh trọng lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở thành thị và nông thôn, người ta cân thử trọng lượng của 10000 cháu và thu được kết quả trong bảng sau:

Vùng	Số cháu	Trọng lượng Tb	Độ lệch chuẩn mẫu
Nông thôn	8000	3,0kg	0,9kg
Thành thị	2000	3,2kg	0,4kg

Biết rằng trong lượng trẻ là biến ngẫu có phân phối chuẩn, với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng trọng lượng trung bình của trẻ sơ sinh ở thành thị cao hơn ở nông thôn hay không?

8. Tiến trình thí nghiệm 2 phương pháp chăn nuôi gia cầm sau 1 tháng thu được kết quả như sau:

Phương pháp	Số gia cầm	Mức tăng TB	Độ lệch chuẩn mẫu
Phương pháp I	100	1,1	0,2
Phương pháp II	150	1,2	0,3

Giả thiết mức tăng trọng của gia cầm là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 4% có thể kết luận phương pháp II hiệu quả hơn phương pháp I hay không?

9. Điều tra tình trạng công nhân bỏ việc ở 2 xí nghiệp A và B ta có số liệu sau:

Xí nghiệp A có 200 công nhân thì năm 2001 có 30 người bỏ việc.

Xí nghiệp B có 350 công nhân thì năm 2001 có 65 nguơi bỏ việc.

Với mức ý nghĩa 3% có thể cho rằng tỉ lệ công nhân bỏ việc ở xí nghiệp A thấp hơn xí nghiệp B hay không?

10. Trọng lượng sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và máy móc được coi là hoạt động bình thường , nếu độ lệch chuẩn là 1kg. Có thể coi máy móc hoạt động bình thường hay không khi cân thử 30 sản phẩm thấy độ lệch chuẩn mẫu là 1,1 kg. Hãy kết luận với mức ý nghĩa 5%.

11. Cho 2 biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2);(\mu_2\ \sigma_2^2)$. Tiến hành lấy mẫu ngẫu nhiên của X và Y ta thu được kết quả sau:

Biến ngẫu nhiên X: $n_1 = 9$, $\overline{X} = 5, s_x = 2$

Biến ngẫu nhiên Y: $n_2 = 10$, $\overline{Y} = 3, s_y = 1$

Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận gì phương sai σ_1^2 lớn hơn phương sai σ_2^2 hay không?

12. Đo phần trăm giãn nở của các thanh thép bằng dụng cụ đo A và B trên 5 thanh thu được số liệu sau:

Phương pháp A	28	29	31	33	30
Phương pháp B	34	27	30	36	33

Với mức ý nghĩa 1% có thể kết luận gì về sự khác biệt về phương sai của hai phương pháp A và B, biết rằng độ giãn nở là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

13. Nghiên cứu thành phần ảnh hưởng của thức ăn của bố mẹ X đối với giới tính Y của con cái,thu được kết quả sau:

X / Y	Không có Vitamin	Có Vitamin	Tộng cộng
Nam	123	145	268
Nữ	152	150	303

Với mức ý nghĩa 3% có thể xem X và Y độc lập với nhau hay không?

14. Sử dụng 3 phương pháp xử lý hạt giống thu được kêt quả:

Kết quả	Phương pháp 1	Phương pháp 2	Phương pháp 3
số hạt mọc	360	603	490
số hạt không mọc	40	97	180

Kiểm định xem tỷ lệ nảy mầm của các phương pháp có khác nhau hay không, kết luận với mức ý nghĩa 5%?