Luồng cực đại trên mạng

Tài liệu đội tuyển Tin - PTNK

Ngày 1 tháng 7 năm 2007

1 Luồng trên mạng

1.1 Định nghĩa, ký hiệu

Ta sẽ định nghĩa khái niệm luồng trên mạng cho đồ thị tổng quát, bao gồm cả trường hợp đa đồ thị.
Cho đồ thị có hướng G = (V, E), trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh. Cho một hàm $c : E \rightarrow R^*$ trên tập cạnh E, được gọi là hàm dung lượng, một đỉnh $s \in V$ được gọi là đỉnh phát, và một đỉnh $t \in V$ được gọi là đỉnh thu.
Ký hiệu:

- u$^+ = \{e \in E \,|\, e$ đi vào $u\}$
- u$^- = \{e \in E \,|\, e$ đi ra $u\}$

Định nghĩa:
Luồng f là một hàm cho trên tập cạnh E, $f : E \rightarrow R^*$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $f(e) \leq c(e), \forall e \in E$
2. $f^+(u) = f^-(u), \forall u \in V - \{s, t\}$
   Trong đó, $f^+(u) = \sum_{e \in u^+} f(e)$, $f^-(u) = \sum_{e \in u^-} f(e)$

Điều kiện 1 được gọi là *điều kiện ràng buộc dung lượng*, còn điều kiện 2 được gọi là *điều kiện bảo toàn.*

1.2 Tính chất

1.2.1

Đặt $f(u) = f^{+}(u) - f^{-}(u)$
Điều kiện 2 tương đương với

$$f(u) = 0, \forall u \in V - \{s, t\}$$

1.2.2

$$\sum_{u \in V} f(u) = 0$$

Thật vậy:

$$\sum_{u \in V} f(u) = \sum_{u \in V} f^{+}(u) - \sum_{u \in V} f^{-}(u) = \sum_{e \in E} f(e) - \sum_{e \in E} f(e) = 0$$

Tính chất này không phụ thuộc vào điều kiện 2.

1.2.3

$$f(s) + f(t) = 0$$

Thật vậy:

$$f(s) + f(t) = \sum_{u \in V} f(u) - \sum_{u \in V - \{s,t\}} f(u)$$

Theo 1.2.1 và điều kiện 2:

$$f(s) + f(t) = 0 - 0 = 0$$

1.3 Giá trị của luồng

Do tính chất 1.2.3, ta định nghĩa giá trị

$$|f| = f(s) = -f(t)$$

là giá trị của luồng f

2 Bài toán luồng cực đại trên mạng

Bài toán: tìm luồng f sao cho $|f|_{max}$

2.1 Đường đi

Trong tài liệu này, khái niệm đường đi trên đồ thị có hướng sẽ được định nghĩa như sau: [1]
Một đường đi P trên đồ thị có hướng là một dãy các đỉnh $(n_1, n_2, ..., n_k)$, $k \geq 2$ cùng với k-1 cạnh tương ứng sao cho cạnh thứ i nối hai đỉnh (n_i, n_{i+1}) (gọi là cạnh xuôi) hoặc hai đỉnh (n_{i+1}, n_i) (gọi là cạnh ngược).
Ký hiệu P^+ và P^- tương ứng là tập các cạnh xuôi và cạnh ngược của P.

2.2 Đường tăng luồng

Đường tăng luồng là một đường đi P từ s đến t thỏa mãn các điều kiện:

- $f(e) < c(e)$, $\forall e \in P^+$
- $f(e) > 0$, $\forall e \in P^-$

2.3 Thuật toán Ford-Fulkerson

```
1:    f(e) = 0, ∀e ∈ E;
2:    while (tìm thấy đường tăng luồng P)
3:        δ = min{{c(e) − f(e)|e ∈ P+}, {f(e)|e ∈ P−}};
4:        for each (e ∈ P)
5:            if (e ∈ P+)
6:                f(e) = f(e) + δ;
7:            else
8:                f(e) = f(e) − δ;
```

Sau dòng 1 của thuật toán, f là một luồng. Bằng những phân tích đơn giản, ta có thể thấy sau mỗi bước tăng luồng, điều kiện ràng buộc dung lượng và điều kiện bảo toàn vẫn được đảm bảo, nên f vẫn là luồng trên mạng, hơn nữa $|f|$ tăng lên một lượng bằng δ.
Định lý max-flow min-cut [2] đã chỉ ra rằng nếu không tìm được đường tăng luồng thì f là luồng cực đại. Do đó, thuật toán Ford-Fulkerson sẽ luôn tìm được luồng cực đại trên mạng.

---

[1] Tham khảo: Network Optimization - Continuous and Discrete Models www.mit.edu:8001/people/dimitrib/netbook.pdf

[2] Tham khảo tại en.wikipedia.org/wiki/max flow min cut theorem

2.4 Đa đồ thị → đơn đồ thị

Xây dựng mạng $G' = (V, E')$ như sau: liên kết tất cả các cạnh song song (nối cùng một cặp đỉnh) $e_1, e_2, ..., e_k$ thành một cạnh duy nhất e, và có dung lượng bằng tổng dung lượng các cạnh ban đầu:

$$c(e) = c(e_1) + c(e_2) + ... + c(e_k)$$

Ta thấy với mọi luồng f trên G, tồn tại luồng f' trên G' sao cho $|f'| = |f|$, đồng thời chiều ngược lại cũng đúng. [3]
Do đó bài toán tìm luồng cực đại trên đa đồ thị có thể đưa về bài toán tìm luồng cực đại trên đơn đồ thị

2.5 Luồng trên đơn đồ thị

Trên đơn đồ thị G, nếu một cạnh e nối giữa hai đỉnh (u, v) thì để chỉ luồng và dung lượng trên cạnh e, ta có thể ký hiệu $f(u, v)$ và $c(u, v)$ mà không sợ nhầm lẫn

2.6 Cài đặt

Trong thuật toán Ford-Fulkerson, nếu tìm đường tăng luồng bằng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng [4], thuật toán sẽ có độ phức tạp $O(VE^2)$

2.6.1 Ma trận kề

Với ma trận kề, trong thủ tục tìm đường tăng luồng, khi xử lý đỉnh u, ta có thể dễ dàng xét các đỉnh đến được từ u (cạnh xuôi) và các đỉnh đến được u (cạnh ngược), và kiểm tra các điều kiện như trong mục 2.2
Sau khi đã tìm được đường tăng luồng, để nhận biết cạnh xuôi hay cạnh ngược, ta có thể sử dụng một thủ thuật nhỏ: trong mảng dùng để truy vết đường đi, ta đánh dấu số hiệu đỉnh là số âm (số dương) nếu cạnh tương ứng là cạnh ngược (cạnh xuôi).

[3] Nghĩa là, tồn tại một song ánh giữa tập giá trị của các luồng trên G với tập giá trị của các luồng trên G'. Tuy nhiên, lưu ý một luồng trên G thì không tương ứng một-một với một luồng trên G'

[4] Tham khảo tại en.wikipedia.org/wiki/Edmonds Karp

2.6.2 Danh sách kề

Trong trường hợp đồ thị thưa, số đỉnh lớn, ta phải cài đặt thuật toán Ford-Fulkerson trên danh sách kề.
Đầu tiên, ta sẽ lưu các cạnh vào một danh sách riêng, thông tin sẽ bao gồm hai đầu mút (u, v) cùng dung lượng và luồng trên cạnh (có thể có các giá trị khác tùy theo bài toán).
Với mỗi đỉnh u, ta lưu giữ hai danh sách kề, gồm các cạnh đi ra đỉnh u và các cạnh đi vào đỉnh u. Cùng một cạnh nối hai đỉnh (u, v) lúc này sẽ xuất hiện ở hai vị trí. Do đã lưu các cạnh, trong danh sách kề mỗi phần tử chỉ cần chứa số hiệu của cạnh.
Để nhận biết cạnh xuôi hay cạnh ngược, ta cũng sử dụng thủ thuật đánh dấu như trên, tuy nhiên trong mảng truy vết ta cần lưu thêm số hiệu của cạnh tương ứng để sửa đổi giá trị luồng nhanh chóng.

3 Các bài toán mở rộng

Từ đây, ta sẽ gọi bài toán luồng cực đại trên mạng ở phần 2 là bài toán gốc. Các bài toán khác sẽ được đưa về bài toán này, sau đó sử dụng thuật toán Ford-Fulkerson để giải.

3.1 Luồng trên đồ thị vô hướng

3.1.1 Đặc điểm

Đối với một cạnh vô hướng, luồng có thể di chuyển trên chiều nào cũng được, nhưng không đồng thời cả hai chiều

3.1.2 Giải pháp

Thay mỗi cạnh vô hướng bằng hai cạnh có hướng có cùng dung lượng, rồi đưa về bài toán gốc. Điều này là đúng, vì giả sử luồng di chuyển trên cả hai cạnh có hướng tương ứng, ta có thể trừ bớt luồng trên mỗi cạnh, sao cho một cạnh không còn luồng di chuyển. Điều này cho phép xây dựng một song ánh giữa tập giá trị của luồng trên hai đồ thị như trong 2.4.

3.2 Luồng vận chuyển

3.2.1 Đặc điểm

Bài toán vận chuyển hàng giữa một số đỉnh trên mạng đến một số đỉnh khác có thể mô hình như sau:
Cho một mạng $G = (V, E)$ với một hàm dung lượng $c : E \to R^*$ cho trên tập cạnh E.
Cho một hàm $b : V \to R$ với ý nghĩa như sau: nếu $b(u) < 0$ ta hiểu rằng $|b(u)|$ là lượng hàng cần vận chuyển đi từ đỉnh u, nếu $b(u) > 0$, ta hiểu rằng $b(u)$ là lượng hàng cần vận chuyển đến đỉnh u.
Biết rằng, b thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{u \in V} b(u) = 0$, nghĩa là hàng chỉ luân chuyển trong mạng
Luồng vận chuyển f là một hàm cho trên tập cạnh E, $f : E \to R^*$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $f(e) \le c(e), \forall e \in E$

2. $f(u) = b(u), \forall u \in V$
   Trong đó, $f(u)$ được định nghĩa tương tự như $f(u)$ của luồng trên mạng

Bài toán: tìm xem có tồn tại một luồng vận chuyển f trên mạng

3.2.2 Giải pháp

Bài toán này chỉ khác bài toán luồng trên mạng ở điều kiện 2, một số đỉnh sẽ đóng vai trò bồn chứa để nhận một lượng luồng xác định, còn một số đỉnh sẽ đóng vai trò nguồn phát để cung cấp một lượng luồng xác định.
Để đảm bảo điều kiện 2, ta xây dựng mạng G' bằng cách thêm một đỉnh phát s đóng vai trò trung tâm cấp hàng, và đỉnh thu t đóng vai trò trung tâm nhận hàng.
Đỉnh phát s sẽ nối với tất cả các nguồn phát u bằng các cạnh có dung lượng $|b(u)|$, còn tất cả các bồn chứa v sẽ nối với đỉnh thu t bằng các cạnh có dung lượng $b(v)$.
Ta nói một luồng f trên mạng là **đầy** nếu như $|f| = \sum\limits_{e \in s^+} c(e)$. Hiển nhiên, luồng đầy f luôn là luồng cực đại trên mạng.
Khi đó, tồn tại luồng vận chuyển nếu như tồn tại một luồng đầy trên mạng G'
Thật vậy, bằng các phân tích đơn giản, với mỗi luồng vận chuyển, ta có thể

xây dựng được một luồng đầy trên mạng G'. Ngược lại, mỗi luồng đầy trên mạng G' sẽ tương ứng với một luồng vận chuyển trên G.

3.3 Luồng tương thích

3.3.1 Đặc điểm

Cho một mạng $G = (V, E)$ với $l : E \to R^*$ và $u : E \to R^*$ tương ứng là hàm cận dưới và cận trên của dung lượng, thỏa mãn $l(e) \leq u(e)$, $\forall e \in E$. Cho một đỉnh phát và một đỉnh thu $s, t \in V$
Định nghĩa:
Luồng tương thích f là một hàm cho trên tập cạnh E, $f : E \to R^*$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$, $\forall e \in E$
2. $f^+(u) = f^-(u)$, $\forall u \in V - \{s, t\}$
   Điều kiện 2 tương tự như điều kiện 2 của bài toán gốc

Bài toán: xác định xem có tồn tại một luồng tương thích f trên mạng

3.3.2 Giải pháp

Với mỗi luồng f trong G, xây dựng luồng f' với $f'(e) = f(e) - l(e)$ $\forall e \in E$
Ta có

$$\forall u \in V,\ f'(u) = \sum_{e \in u^+} f'(e) - \sum_{e \in u^-} f'(e) = \sum_{e \in u^-} l(e) - \sum_{e \in u^+} l(e) + f(u)$$

Do $f(u) = 0$, $\forall u \in V - \{s, t\}$, ta có

$$\forall u \in V - \{s, t\},\ f'(u) = \sum_{e \in u^-} l(e) - \sum_{e \in u^+} l(e)$$

Xây dựng mạng G' bằng cách thêm một cạnh r nối hai đỉnh (t, s) với dung lượng bằng ∞.
Đặt $f'(r)$ bằng giá trị hiện có của luồng f, nghĩa là

$$f'(r) = |f| = f(s) = -f(t)$$

Do có cạnh r, f'(s) sẽ giảm đi một lượng bằng $f(s)$ và f'(t) sẽ giảm đi một lượng bằng $f(t)$. Do đó:

$$\forall u \in \{s, t\},\ f'(u) = \sum_{e \in u^-} l(e) - \sum_{e \in u^+} l(e)$$

Đặt

$$b(u) = \sum_{e \in u^-} l(e) - \sum_{e \in u^+} l(e)$$

Dễ thấy,

$$\sum_{u \in V} b(u) = 0$$

Luồng f' trên G' thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $f'(e) \leq u(e) - l(e), \forall e \in E$
2. $\forall u \in V,\ f'(u) = b(u)$

Do đó, f' là một luồng vận chuyển trên mạng G', nghĩa là bài toán 3.3 có thể đưa về bài toán 3.2
Nếu trên đồ thị đã có cung nối (t, s), ta vẫn có thể thêm cung (t, s) với dung lượng bằng ∞ nếu hiểu mạng như một đa đồ thị. Điều này không ảnh hưởng gì đến phân tích bài toán. Bước này sẽ dễ dàng cài đặt nếu sử dụng cấu trúc dữ liệu danh sách kề.

3.3.3 Luồng tương thích cực đại và cực tiểu

Sau khi tìm được luồng tương thích, ta có thể tìm luồng tương thích có giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) bằng cách tìm các đường tăng luồng (hoặc đường giảm luồng)
Tương tự mục 2.2, ta có định nghĩa:
Đường tăng luồng là một đường đi P từ s đến t thỏa mãn các điều kiện:

- $f(e) < u(e), \forall e \in P^+$
- $f(e) > l(e), \forall e \in P^-$

Đường giảm luồng là một đường đi P từ s đến t thỏa mãn các điều kiện:

- $f(e) > l(e), \forall e \in P^+$
- $f(e) < u(e), \forall e \in P^-$

Luồng tương thích cực tiểu hoàn toàn có thể nhận giá trị âm.

3.4 Luồng với dung lượng của đỉnh

3.4.1 Đặc điểm

Trong bài toán luồng với dung lượng của đỉnh, tại một số đỉnh u nào đó, luồng f còn phải thỏa mãn ràng buộc dung lượng của đỉnh:

$$f^+(u) = f^-(u) \leq c(u)^5$$

với $c(u) \in R$ là dung lượng của đỉnh u

3.4.2 Giải pháp

Tách mỗi đỉnh u thành hai đỉnh u_{in}, u_{out}, thêm cạnh nối (u_{in}, u_{out}) với dung lượng c(u). Các cạnh đi vào đỉnh u bây giờ sẽ đi vào đỉnh u_{in}, còn các cạnh đi ra đỉnh u bây giờ sẽ đi ra từ u_{out}
Phân tích ta có thể thấy một luồng trên mạng mới này sẽ tương ứng với một luồng trên G thỏa mãn các ràng buộc dung lượng của đỉnh. Như vậy bài toán luồng với dung lượng của đỉnh cũng có thể đưa về bài toán gốc.

[5] Trường hợp đặc biệt $f^-(s) \leq c(s)$, $f^+(t) \leq c(t)$