Bài giảng Dạng vi phân

TÓM TẮT NỘI DUNG. Đây là tập bài giảng cho môn cao học Giải tích trên đa tạp, dựa trên bài giảng của R. Sjamaar [**Sja06**]. Tập bài giảng này sẽ được tiếp tục sửa chữa và bổ sung.

Biên soạn:

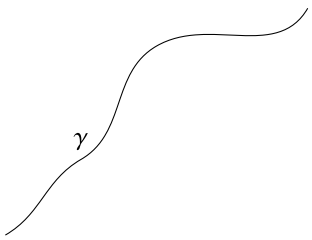
- Phan Đình Hiếu. Học viên cao học Toán Giải tích khóa 2014.
- Lê Chiêu Hoàng Nguyên. Sinh viên ngành Toán khóa 2012-2016.
- Phan Văn Phương. Học viên cao học Toán Giải tích khóa 2012.
- Huỳnh Quang Vũ: người biên tập. Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, email: `hqvu@hcmus.edu.vn`

11/2015 – Ngày 23 tháng 4 năm 2016

Mục lục

Mở đầu

Ta nhớ lại trong giải tích cổ điển hàm nhiều biến. Xét tích phân như $\iint_D x^2y^3dxdy = \iint_D x^2y^3dA$. Ở đây dA là "phần tử diện tích" được hiểu một cách mơ hồ mà không định nghĩa rõ. Hay $\int_\gamma xdy + ydx$. Hay $\int_\gamma fds$, với ds là phần tử chiều dài. Hay $\iint_S fdS$ với dS là phần tử diện tích mặt.



Trong chương trình đại học các đại lượng như vậy không được giải thích rõ ràng. Môn học này nghiên cứu đối tượng này một cách có hệ thống. Một mục đích nữa của môn học là phát triển lên đối tượng tổng quát hơn. Cần hiểu rõ hơn đối tượng là cái gì? Nhiều chiều thì ds, dS là cái gì? Các đối tượng trong không gian $\mathbb{R}^3$ sẽ được phát triển lên không gian nhiều chiều.

Chỉ riêng về vi phân hoặc riêng về tích phân đã phát triển trong tổng quát khá xa, tuy nhiên sự kết hợp cả hai thì còn hạn chế. Xét bài toán tích phân đơn giản:

$$\int_0^1 xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2.$$

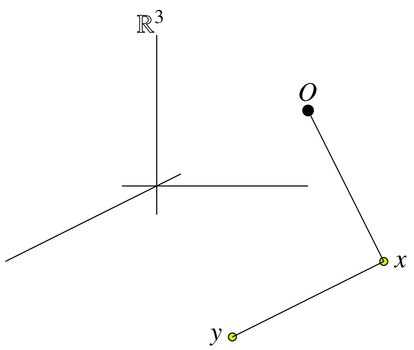
Nhắc lại công thức Newton-Leibniz: Nếu $F' = f$ thì

$$\int_a^b fdx = F|_a^b.$$

Như vậy đạo hàm và tích phân có thể xem là hai phép toán ngược nhau. Tổng quát hóa của công thức Newton-Leibniz là công thức Stokes sẽ có trong môn học này.

Tại sao phải xét không gian nhiều chiều? Vì khái niệm không gian tổng quát không chỉ mô tả không gian ba chiều chúng ta sống mà nó còn mô tả nhiều hệ thống. Số tham số quy định số chiều của hệ thống. Như vậy không gian nhiều chiều phụ thuộc nhiều tham số có thể lên đến vô hạn. Nói cách khác số chiều bằng số bậc tự do của hệ thống, bằng số tham số độc lập miêu tả hệ thống.

VÍ DỤ. Hệ gồm hai quả lắc (pendulum): Với O cố định, cái thứ hai gắn vào cái thứ nhất.



Bài toán định vị trí cho hệ hai điểm (x, y) rõ ràng là một hệ thống phụ thuộc vào 4 tham số (hệ thống 4 chiều). Thật vậy các khả năng vị trí điểm x là một mặt cầu S^2 tâm O, ứng với mỗi điểm x, khả năng vị trí điểm y là một mặt cầu S^2 tâm x. Như vậy hệ trên là một không gian 4 chiều $S^2 \times S^2$. Để mô tả hệ thống cần 4 tham số độc lập.

Việc nghiên cứu không gian nhiều chiều tổng quát hơn $\mathbb{R}^n$ chính là việc nghiên cứu về đa tạp. Bản thân $\mathbb{R}^n$ cũng là một đa tạp. Ví dụ phía trên là một đa tạp 4 chiều.

Trong môn học này ta quy ước $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ với các cấu trúc không gian vector quen thuộc, metric Euclid quen thuộc, và chuẩn Euclide: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Chúng ta thường viết vectơ x ở dạng cột vì thường xuyên nhân ma trận.

Chương 1

Dạng vi phân trong không gian Euclid

1.1. Những tính chất cơ bản

Các đại lượng dx, $dxdy$, $dx_1dx_2...dx_n$,... sẽ chưa được định nghĩa mà để lại ở một chương sau. Trước tiên chúng ta hiểu đại khái dx như là một vô cùng bé của x như ở bậc đại học.

Ví dụ. Xét trong $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ta có tính chất về dạng:

$$dxdy = -dydx,$$

(tính phản đối xứng). Như vậy $dxdx = -dxdx$ suy ra $dxdx = 0$. Ở đây 0 là cái gì? Nó có phải là số 0 đơn thuần không? Ta tạm xem nó như một kí hiệu hình thức.

Trong $\mathbb{R}^n$ với $x = (x_1,...,x_n)$. Biểu thức

$$dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k},\ 1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$$

được gọi là một *dạng vi phân* bậc k.

Dạng vi phân bậc k thỏa mãn tính chất *phản đối xứng* (anticommutative):

$$\boxed{dxdy = -dydx.}$$

Trong trường hợp tổng quát ta đổi chổ bất kì hai thành phần dx_{i_m}, dx_{i_n} công thức vẫn đúng:

$$dx_{i_1}\cdots dx_{i_m}\cdots dx_{i_n}\cdots dx_{i_k} = -dx_{i_1}\cdots dx_{i_n}\cdots dx_{i_m}\cdots dx_{i_k}.$$

Chứng minh dành cho bạn đọc.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$

$$dxdydz = -dxdzdy = dydzdx$$

$$dxdzdx = -dxdxdz = 0.$$

1.1.1. Ghi chú. Trong một dạng nếu có hai thành phần giống nhau thì dạng đó bằng không.
Trong $\mathbb{R}^n$ mọi k-dạng với $k > n$ đều bằng 0.

Phép nhân của dạng. Trong $\mathbb{R}^n$ nếu ω_1 và ω_2 là hai dạng bậc k và l thì ta có $\omega_1\omega_2$ lại là một dạng bậc $k+l$.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$, $\omega_1 = dx$ là một 1-dạng; $\omega_2 = dydz$ là một 2-dạng; $\omega_1\omega_2 = (dx)(dydz) = dxdydz$ là một 3-dạng.

Phép nhân này có tính chất kết hợp:

$$(\omega_1\omega_2)\omega_3 = \omega_1(\omega_2\omega_3) = \omega_1\omega_2\omega_3.$$

Phép nhân có phần tử không:

$$\omega \cdot 0 = 0 \cdot \omega = 0.$$

1.1.2. Mệnh đề. *Nếu ω_1 là một k-dạng và ω_2 là một l-dạng thì*

$$\boxed{\omega_1\omega_2 = (-1)^{kl}\omega_2\omega_1.}$$

Chứng minh. With

$$\omega_1 = dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}$$

and

$$\omega_2 = dx_{j_1}dx_{j_2}\cdots dx_{j_l}$$

we get

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 &= (dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k})(dx_{j_1}dx_{j_2}\cdots dx_{j_l})\\ &= (-1)^k dx_{j_1}(dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k})(dx_{j_2}\cdots dx_{j_l})\\ &= (-1)^{2k} dx_{j_1}dx_{j_2}(dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k})(dx_{j_3}\cdots dx_{j_l})\\ &= (-1)^{kl}(dx_{j_1}dx_{j_2}\cdots dx_{j_l})(dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}) = (-1)^{kl}\omega_2\omega_1.\end{aligned}$$

□

Tổng quát: một dạng bậc k trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ là một biểu thức $f dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}$ trong đó $f : U \to \mathbb{R}$.

Dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$. $U \in \mathbb{R}^n$, cho $x = (x_1, ..., x_n)$. Dạng bậc không (0-dạng) là một hàm thực $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dạng bậc k (k-dạng) là biểu thức $\sum f dx_{i_1}dx_{i_2}...dx_{i_k}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.1.3. Ví dụ. $dx_1, dx_2, ..., dx_n, 2dx_1 + 3dx_2, x_1^2x_2dx_1 + x_3dx_4$ là dạng bậc 1 trong $\mathbb{R}^n$. $x_1x_2dx_{i_1}dx_{i_2}...dx_{i_n}$ là dạng bậc n trong $\mathbb{R}^n$. $xdxdy$, $(xy+1)dxdz$ là những dạng bậc 2 trong $\mathbb{R}^3$.

Trên $\mathbb{R}^2$ một dạng bậc 1 là một biểu thức: $Pdx + Qdy$ trong đó $P, Q : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. một dạng bậc 2 là một biểu thức: $Pdxdy + Qdydx = (P - Q)dxdy = Rdxdy$. Một dạng bậc lớn hơn 2 = 0. Không gian n chiều thì mọi dạng bậc lớn hơn n đều bằng 0.

Ghi chú. Không thể cộng trừ hai dạng khác bậc. Chẳng hạn như $Pdx + Qdy + Rdxdy$ là sai.

Nhân hai dạng: $\alpha = \sum f dx_{i_1}dx_{i_2}...dx_{i_k}$ là một k-dạng. $\beta = \sum g dx_{j_1}dx_{j_2}...dx_{j_l}$ là một l-dạng. Ta định nghĩa $\alpha\beta = \sum fg dx_{i_1}dx_{i_2}...dx_{i_k}dx_{j_1}dx_{j_2}...dx_{j_l}$ là một $k+l$-dạng.

1.1.4. Ví dụ.

$$(dx)(dy) = dxdy$$

$$dx(dy + dz) = dxdy + dzdz$$

1.1.5. Mệnh đề. *Cho α và β là hai dạng, ta có:*

$$\alpha\beta = (-1)^{deg(\alpha).deg(\beta)}\beta\alpha$$

Chứng minh. Bạn đọc tự chứng minh. □

1.1.6. Hệ quả. *Nhân một dạng bậc lẻ với chính nó thì bằng* 0.

Chứng minh. Giả sử α là một k-dạng (k lẻ). Ta có: $\alpha^2 = \alpha.\alpha = (-1)^{k.k}\alpha.\alpha$ suy ra $\alpha^2 = 0$. □

1.2. Đạo hàm của dạng

1.2.1. Định nghĩa. Cho $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U mở, f trơn mọi cấp (tức $f \in C^\infty(U)$). Ta gọi f là dạng trơn bậc 0. Đạp hàm của dạng bậc 0 được định nghĩa:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Như vậy, đạo hàm của dạng bậc 0 là dạng bậc 1.

1.2.2. Ví dụ. Dạng bậc 0 trên $\mathbb{R}$.

$$u = f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$du = 2xdx$$

f hàm trên $\mathbb{R}$

$$u = f(x)$$

$$du = f'(x)dx$$

1.2.3. VÍ DỤ. Với

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Ta có $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Tổng quát:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$$

Ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Phía trên đây là đạo hàm của 0-dạng, bây giờ ta nói về đạo hàm của một k-dạng.

1.2.4. ĐỊNH NGHĨA. Cho $\alpha = \sum f dx_{i_1} ... dx_{i_k}$ là một k-dạng. Ta định nghĩa

$$d\alpha = \sum df dx_{i_1} ... dx_{i_k}$$

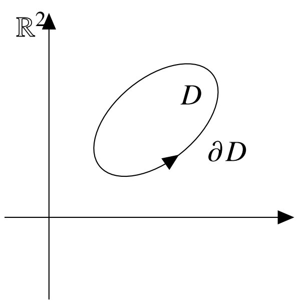
là một $(k+1)$-dạng.

Đặt $\Omega^k(U)$ là tập hợp các dạng bậc k trên U thì $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$.

1.2.5. VÍ DỤ. Trên $\mathbb{R}^2$ $\alpha = Pdx + Qdy$, ta có

$$d\alpha = d(Pdx + Qdy) = dPdx + dQdy = (\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy)dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy)dy = \frac{\partial P}{\partial y} dydx + \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Nhắc lại định lý Green trong giải tích cổ điển.



$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Công thức Newton-Leibniz:

$$\int_{[a,b]} du = u|_{\partial [a,b]}$$

.

1.2.6. VÍ DỤ. Trên $\mathbb{R}^3$ Cho dạng

$$\alpha = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Thì

$$d\alpha = d(Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = dPdydz + dQdzdx + dRdxdy =$$
$$= (\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz)dydz + (\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz)dzdx + (\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz)dxdy$$
$$= (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz.$$

Cho dạng $\beta = Pdx + Qdy + Rdz$ thì

$$
\begin{aligned}
d\beta &= d(Pdx+Qdy+Rdz) = dPdx + dQdy + dRdz = \\
&= (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dx + (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz)dy + \\
&+ (\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz)dz = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx.
\end{aligned}
$$

Nhắc lại trong giải tích cổ điển: Định lý Stokes trong $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx.$$

Định lý Gauss - Ostragradski:

$$\int_{\partial E} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_E (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz.$$

Ta để ý các công thức Newton-Leibniz, Green, Stokes, Gauss - Ostragradski đều có dạng

$$\int_{\partial C} \alpha = \int_C d\alpha.$$

Trong đó α là một dạng và $d\alpha$ là đạo hàm của dạng đó. Ở phần sau ta sẽ tổng quát hóa lên thành định lý Stokes trong không gian nhiều chiều và trên đa tạp.

Trong giải tích cổ điển:

Cho $F = (P, Q, R)$, ta có khái niệm:

$$DivF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

$$RotF = CurlF = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}).$$

ĐỊNH LÍ. *Đạo hàm của đạo hàm của một dạng bất kì bằng* 0. *(Ở đây hàm lấy giá trị thực f phải trơn.) Tức $\alpha = \sum f dx_{i_1} dx_{i_2} ... dx_{i_k}$ là một k-dạng. Ta có: $d(d\alpha) = 0$.*

CHỨNG MINH. Phần chứng minh giành cho bạn đọc. □

1.2.7. VÍ DỤ. Trong $\mathbb{R}^3$ cho $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$

Như trên $d\alpha = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx.$

Do đó

$$
\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\left((\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx \right) = \\
&= d\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + d\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + d\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx \\
&= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}dz - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}dx - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}dy - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}dz\right)dxdy + dydz \\
&+ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}dz - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}dx - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y}dy - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}dz\right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}dy + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}dz - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}dx - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}dy - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}dz\right)dzdx. \\
&= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}dzdxdy - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}dzdxdy + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}dxdydz - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}dxdydz + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}dydzdx - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}dydzdx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

1.3. Dạng khớp và dạng đóng

1.3.1. ĐỊNH NGHĨA. α được gọi là dạng khớp nếu có dạng β sao cho $d\beta = \alpha$.

Một cách nôm na dạng khớp là đạo hàm của dạng khác, tức dạng có nguyên hàm.

Cho α là dạng bậc một trên $\mathbb{R}$ ($\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$ thì $\alpha = f dx$; $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

α khớp $\Leftrightarrow$ có tồn tại hàm $F \in \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ sao cho $dF = f dx$ tức $F'dx = f dx$ tức $F' = f$. Nghĩa là F là một nguyên hàm của f.

Như vậy dạng khớp như là tổng quát hóa của khái niệm có nguyên hàm trong giải tích cổ điển.

Trong $\mathbb{R}^2$ cho $\alpha = Pdx + Qdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

α là khớp $\Leftrightarrow$ tồn tại $F \in \Omega^0(\mathbb{R}^2) = C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$dF = \alpha \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q \end{cases} \Leftrightarrow (P,Q) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) = \nabla F = gradF$$

Trong giải tích hàm nhiều biến, trường (P,Q) sao cho $\exists F : \nabla F = (P,Q)$ thì (P,Q) gọi là bảo toàn. Nếu α là khớp thì (P,Q) là bảo toàn và hàm F được gọi là hàm thế. Bài toán quan tâm là một dạng có khớp hay không, nếu khớp tìm nguyên hàm?

1.3.2. VÍ DỤ. Trong $\mathbb{R}^2$ cho $\alpha = xydx + \frac{1}{2}x^2dy$ là 1-dạng. Hỏi α có khớp hay không? (Tức trường $(xy, \frac{1}{2}x^2)$ có bảo toàn hay không.)

Đây thực ra là bài toán tìm nguyên hàm. Tìm F sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = xy & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow F(x,y) = \int xydx = \frac{1}{2}x^2y + C(y)$. Thay vào (2) ta được:

$$(\frac{1}{2}x^2y + C(y))'_y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + C'(y) = \frac{1}{2}x^2$$

tức $C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C$. Vậy $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + C$. Vậy trường $(xy, \frac{1}{2}x^2)$ là trường bảo toàn hay α là dạng khớp và hàm thế $F = \frac{1}{2}x^2 + C$ (C là hằng số không phụ thuộc cả x lẩn y). Ví dụ trên là tương đối đơn giản, trong trường hợp tổng quát ta cần phương pháp lý thuyết.

Điều kiện cần để khớp: Giả sử α khớp thì $\exists \beta : d\beta = \alpha \Rightarrow d(\alpha) = d(d\beta) = 0$. Như vậy một dạng khớp thì có đạo hàm bằng 0. Nhắc lại trong giải tích hàm nhiều biến $\alpha = Pdx + Qdy$, $d\alpha = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$. Như vậy (P,Q) bảo toàn thì $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

1.3.3. ĐỊNH NGHĨA. Nếu $d\alpha = 0$ ta nói α là dạng đóng. Như vậy một dạng khớp thì đóng và không có chiều ngược lại. Trong giải tích hàm nhiều biến ta quan tâm bài toán trường (P,Q) có $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ mà (P,Q) không bảo toàn.

Như vậy mối quan hệ giữa khớp và đóng là phong phú.

Bài tập.

1.3.4. Hệ thống Lotka-Volterra là một mô hình con thú săn mồi-con mồi. Nó là một cặp phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = -rx + sxy, \frac{dy}{dt} = py - qxy$$

Ở đây $x(t)$ đại diện cho dân số con thú săn mồi, $y(t)$ đại diện cho dân số con mồi tại thời điểm t, trong đó p,q,s,t là các hằng số dương. Vấn đề chúng ta quan tâm là việc giải đường cong nghiệm (còn gọi là quỹ đạo) $(x(t), y(t))$ của hệ thống này. ([**Sja06**])

Chương 2

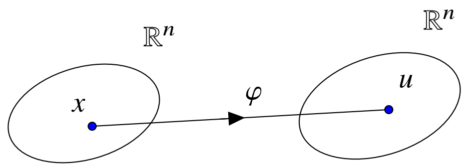
Kéo lui của một dạng

2.1. Công thức đổi biến trong $\mathbb{R}$

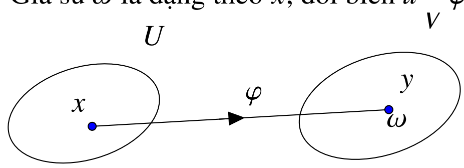
Nhắc lại trong không gian một chiều $\mathbb{R}$ ta có công thức đổi biến tích phân như sau: $\int f(u)u'(x)dx = \int f(u)du$
Chẳng hạn $\int \sin^2 t \cos t dt$
Đổi biến $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$ do đó, $\int \sin^2 t \cos t dt = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$.

2.2. Kéo lui của một dạng

Mục đích chính của chương này là tổng quát hóa công thức trên trong trường hợp n-chiều.



ω là dạng theo biến x trong $\mathbb{R}^n$, câu hỏi đặt ra: mối quan hệ vi phân của ω theo x và theo u như thế nào? Giả sử ω là dạng theo x, đổi biến $u = \varphi(x)$ thì ω trở thành dạng gì?



ω là dạng trên tập mở V. Câu hỏi đặt ra trên U có dạng gì tương ứng? Dạng tương ứng đó gọi là dạng kéo lui của dạng ω.

2.2.1. ĐỊNH NGHĨA. Kéo lui (pull-back) của dạng ω (kí hiệu: $\varphi^*\omega$) là một dạng trên U xác định như sau: Nếu

$$\omega = \sum f dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = y(y_1, \dots, y_n)$$

Thì $\varphi^*\omega = \sum f \circ \varphi d\varphi_{i_1} \dots d\varphi_{i_k}$

Trong đó:

- ω là dạng bậc k theo biến y
- f là hàm theo biến y
- φ là ánh xạ đi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$ biến x thành y
- $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- $x \longmapsto y$
- Chúng ta có thể hiểu $\varphi^*\omega$ nhận được bằng cách thay y bởi $\varphi(x)$ và thay u_i bởi $\varphi_i(x)$.

2.2.2. VÍ DỤ.

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto u = \varphi$$

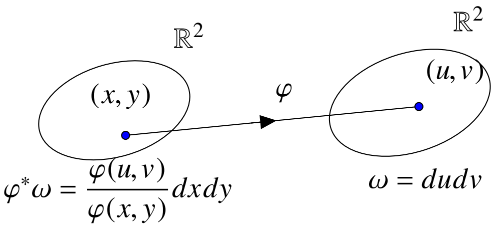
$\omega = f(u)du$ thì $\varphi^*\omega = f(\varphi(x))d\varphi = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Xem trường hợp nhiều chiều hơn: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (x,y) \longmapsto (u,v)$ ở đây u,v là hàm theo biến x,y. Cho $\omega = du$ thì $\varphi^*\omega = du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ Cho $\beta = dudv$ thì

$$\varphi^*\beta = dudv = d\varphi_1 d\varphi_2 = (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy)(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy) = (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x})dxdy$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} dxdy = (detJ\varphi)dxdy = \frac{\varphi(u,v)}{\varphi(x,y)}dxdy.$$

(dấu bằng cuối cùng là cách kí hiệu trong giải tích cổ điển).

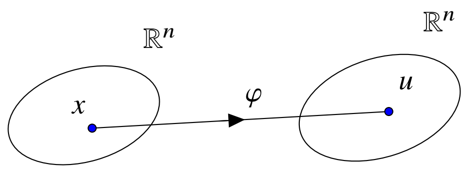


Nhớ lại công thức đổi biến trong tích phân hàm hai biến số:

$$\int\int f(u,v)dudv = \int\int f(u(x,y),v(x,y))\frac{\varphi(u,v)}{\varphi(x,y)}dxdy.$$

Ở đây cận (miền) lấy tích phân ở hai vế thuận theo qui tắc đổi cận tích phân khi ta đổi biến. Biểu thức dưới dấu tích phân trong vế phải $(*)$ là dạng kéo lui của biểu thức dưới dấu tích phân trong vế trái $(*)$.

2.2.3. Ví dụ. n-chiều



$\omega = du_1 du_2 ... du_n$

$$\varphi^*\omega = d\varphi_1 d\varphi_2 ... d\varphi_n = du_1 du_2 ... du_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial u_i}dx_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_2}{\partial u_i}dx_i\right)...\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_n}{\partial u_i}dx_i\right)$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx_1 dx_2 ... dx_n = det(J\varphi)dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Tóm lại: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto u$,

$$\varphi^*(du_1 du_2 ... du_n) = det(J\varphi)dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Ta có công thức đổi biến tích phân:

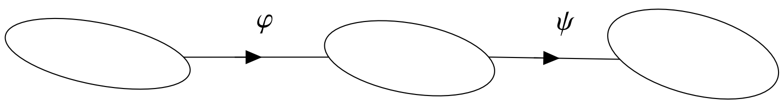
$$\int\int ... \int f(u)du_1 du_2 ... du_n = \int\int ... \int f(\varphi(x))det(J\varphi)dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Trong đó cận lấy tích phân tương ứng ở hai vế tuân theo qui luật đổi biến.

2.2.4. Định lí. *Ta có một số tính chất sau đây của dạng kéo lui*

(1) $\varphi^*(a\omega_1 + b\omega_2) = a\varphi^*\omega_1 + b\varphi^*\omega_2$. *(Tính tuyến tính)*
(2) $\varphi^*(\omega_1.\omega_2) = \varphi^*\omega_1.\varphi^*\omega_2$. *(Kéo lui của tích bằng tích kéo lui)*

(3) $(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^*(\psi^* \omega)$. *(Phép kéo lui thực hiện từng bước một)*



(4) $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^* \omega)$. *(Đạo hàm của dạng kéo lui bằng dạng kéo lui của đạo hàm).*

Ta làm rõ tính chất 4: Ta có $\varphi^* \omega$ và ω là dạng bậc k, còn $\varphi^* d\omega$ và $d\omega$ là dạng bậc $k+1$.
Kí hiệu: $\Omega^k(V)$ là tập hợp tất cả các dạng (trơn) bậc k trên V.

$$\varphi : U \to V$$
$$\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$$
$$d : \Omega^k(V) \to \Omega^{k+1}(V)$$
$$\Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

Ta có sơ đồ giao hoán:

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(V) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \Omega^{k+1}(V) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ \Omega^k(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+1}(U) \end{tikzcd}$$

$$d \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d$$

Phần chứng minh giành cho bạn đọc.

Chương 3

Tích phân của dạng

Trong chương này ta xây dựng khái niệm tích phân của dạng trên một tập con (một miền được tham số hóa - parametrized region) của $\mathbb{R}^n$, là sự tổng quát hóa của các khái niệm tích phân đường và tích phân mặt quen thuộc. Từ đó đưa ra phát biểu tổng quát hơn của định lý Stokes.

Dưới đây để đơn giản, ta sẽ xét miền lấy tích phân là những miền đơn giản như hình hộp $R \subset \mathbb{R}^k$, có dạng $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]$, rồi đến hình hộp suy biến (singular block, sẽ được định nghĩa sau). Nhắc lại rằng với hàm $f : R \to \mathbb{R}^k$ trơn trên R[1] thì tích phân của f trên R tồn tại (theo cả nghĩa Riemann lẫn Lebesgue). Từ định lý Fubini, ta có:

$$\int_R f = \int_{a_k}^{b_k} \left(\cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_k.$$

3.1. Tích phân của dạng

3.1.1. ĐỊNH NGHĨA. (Tích phân dạng bậc k trên hình hộp $R \subset \mathbb{R}^k$). Cho ω là một dạng bậc k xác định trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^k$ và $U \supset R$. Do ω là dạng bậc k xác định trên một tập con của R^k nên ω viết được thành $\omega = f dx_1 dx_2 \cdots dx_k$. Ta định nghĩa

$$\int_R \omega := \int_R f.$$

Từ định nghĩa trên ta có

$$\int_R -\omega = \int_R -f = -\int_R f = -\int_R \omega.$$

3.1.2. GHI CHÚ. Chú ý rằng trong định nghĩa trên ta phải quy ω về dạng sao cho tích các dx_i luôn là $dx_1 dx_2 \cdots dx_k$. Xét chẳng hạn tích phân của dạng $\omega = f(x,y)\, dxdy$ trên $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$, với f khả tích trên R. Do $f(x,y)\, dxdy = -f(x,y)\, dydx$, nên theo dịnh nghĩa trên, ta có:

$$\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_R -f(x,y)\, dydx = -\int_R f(x,y)\, dydx. \tag{3.1.3}$$

Như vậy hai dạng bậc k về hình thức có thể có cùng hàm hệ số f nhưng nếu thứ tự các dx_i khác nhau thì tích phân của chúng trên $R \subset \mathbb{R}^k$ chưa chắc bằng nhau.

Bên cạnh đó ta biết rằng việc thay đổi thứ tự lấy tích phân của f trên R không ảnh hưởng gì, tức là:

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dydx. \tag{3.1.4}$$

Điều này không có gì mâu thuẫn với (3.1.1), bạn đọc kiểm tra xem như bài tập (xem ví dụ 3.8).

3.1.5. ĐỊNH NGHĨA. Cho U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và ω là một dạng bậc k xác định trên U. Cho hình hộp $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]$ trong $\mathbb{R}^k$ và $\varphi : R \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ trơn xác định trên $R \subset \mathbb{R}^k$ sao cho $\varphi(R) \subset U$. Khi đó nếu $n \geq k$ thì dạng kéo lui $\varphi^*\omega$ là một dạng bậc k xác định trên R, nếu $n < k$ thì ω (do đó cả $\varphi^*\omega$) chỉ có thể bằng 0. Ta định nghĩa tích phân của ω trên φ, ký hiệu $\int_\varphi \omega$, là

$$\int_\varphi \omega := \int_R \varphi^* \omega.$$

Ánh xạ φ trên được gọi là một hình hộp suy biến k-chiều. Ảnh $\varphi(R)$ của nó có thể rất khác so với R (do φ chỉ yêu cầu trơn), chẳng hạn φ có thể mang đoạn $[a,b]$ thành một đoạn cong, thậm chí trở thành một điểm.

[1] Với V là một tập không mở, nếu không nói gì thêm ta hiểu rằng nói f trơn trên V nghĩa là f trơn trên một tập mở chứa V.

3.1.6. VÍ DỤ. (Tích phân đường). Cho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ là một đường trơn và $\alpha = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ là dạng bậc 1 xác định trên một tập mở U chứa $c([a,b])$. Theo định nghĩa trên, ta có:

$$\begin{aligned}
\int_c \alpha &:= \int_{[a,b]} c^*\alpha \\
&= \int_{[a,b]} ((P\circ c)\,dx(t) + (Q\circ c)\,dy(t) + (R\circ c)\,dz(t)) \\
&= \int_a^b \left[((P\circ c)\,x'(t) + (Q\circ c)\,y'(t) + (R\circ c)\,z'(t))\right] dt.
\end{aligned}$$

3.1.7. VÍ DỤ. (Tích phân mặt). Cho $D \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ là một mặt trơn và $\alpha = P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$ là dạng bậc 2 xác định trên một tập mở U chứa $\varphi(D)$. Theo định nghĩa 3.3, ta có:

$$\begin{aligned}
\int_\varphi \alpha &:= \int_D \varphi^*\alpha \\
&= \int_D ((P\circ\varphi)\,dydz + (Q\circ\varphi)\,dzdx + (R\circ\varphi)\,dxdy) \\
&= \int_D ((P,Q,R)\circ\varphi)\cdot(dydz, dzdx, dxdy).
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
dydz &= (y_u du + y_v dv)(z_u du + z_v dv) \\
&= y_u z_v dudv + y_v z_u dvdu \\
&= (y_u z_v - y_v z_u)\,dudv,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dzdx &= (z_u du + z_v dv)(x_u du + x_v dv) \\
&= z_u x_v dudv + z_v x_u dvdu \\
&= (z_u x_v - z_v x_u)\,dudv,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dxdy &= (x_u du + x_v dv)(y_u du + y_v dv) \\
&= x_u y_v dudv + x_v y_u dvdu \\
&= (x_u y_v - x_v y_u)\,dudv,
\end{aligned}$$

nên:

$$\begin{aligned}
&(dydz, dzdx, dxdy) \\
&= ((y_u z_v - y_v z_u), (z_u x_v - z_v x_u), (x_u y_v - x_v y_u))\,dudv \\
&= \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv \\
&= (\varphi_u \times \varphi_v)\,dudv.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\int_\varphi \alpha &= \int_D \varphi^*\alpha \\
&= \int_D ((P,Q,R)\circ\varphi)\cdot(\varphi_u \times \varphi_v)\,dudv,
\end{aligned}$$

điều này khớp với khái niệm tích phân mặt đã biết.

3.1.8. ĐỊNH NGHĨA. Cho hai hình hộp $R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\cdots[a_k,b_k]$ và $R' = \left[a_1', b_1'\right]\times\left[a_2', b_2'\right]\cdots\left[a_k', b_k'\right]$ trong $\mathbb{R}^k$. Ta gọi ánh xạ trơn $p : R' \to R$ là một phép tham số hóa lại (reparametrization) nếu p là song ánh và ma trận Jacobi $J_p(s)$ của p khả nghịch với mọi $s \in R'$. Do $J_p(s)$ là ma trận vuông nên điều này tương đương với $\det J_p(s) \neq 0$ với mọi $s \in R'$. Do p trơn nên $\det J_p : R' \to \mathbb{R}$, $S \mapsto \det J_p(s)$ là hàm liên tục, do đó hoặc $\det J_p(s) > 0$, hoặc $\det J_p(s) < 0$ với mọi $s \in R'$. Nếu $\det J_p(s) > 0$ (tương ứng, $\det J_p(s) < 0$) ta nói p bảo toàn (tương ứng, đảo ngược) định hướng của $\varphi : R \to U$.

Do $\det J_p(s) \neq 0$ với mọi $s \in R'$, bằng định lý hàm ngược ta chứng minh được p là một phép đổi biến, hay một phép vi đồng phôi (diffeomorphism), tức p là một song ánh, khả vi liên tục và ánh xạ ngược p^{-1} cũng khả vi liên tục. Từ đó ta có định lý sau:

3.1.9. ĐỊNH LÍ. *Cho α là dạng bậc k xác định trên tập mở U và $\varphi : R \to U$ là hình hộp suy biến, $p : R' \to R$ là một phép tham số hóa lại. Khi đó*

$$\int_{\varphi\circ p} \alpha = \begin{cases} \int_\varphi \alpha & \text{nếu } p \text{ bảo toàn định hướng,} \\ -\int_\varphi \alpha & \text{nếu } p \text{ đảo ngược định hướng.} \end{cases}$$

CHỨNG MINH. Ta có

$$\int_{\varphi\circ p} \alpha = \int_{R'} (\varphi\circ p)^* \alpha = \int_{R'} p^*(\varphi^*\alpha).$$

Với $\varphi^*\alpha = g dx_1 dx_2 \cdots dx_k$ và $x = (x_1, \ldots, x_k) = p(s)$, $s \in R'$, từ ví dụ 2.3, ta có:

$$\begin{aligned} p^*(\varphi^*\alpha) &= p^*(g dx_1 dx_2 \cdots dx_k) \\ &= g(p(s)) \det J_p(s) ds_1 ds_2 \cdots ds_k, \end{aligned}$$

nên

$$\int_{\varphi\circ p} \alpha = \int_{R'} g(p(s)) \det J_p(s) ds_1 ds_2 \cdots ds_k.$$

Do p là một phép đổi biến, nên:

$$\begin{aligned} &\int_{R'} g(p(s)) \det J_p(s) ds_1 ds_2 \cdots ds_k \\ =&\begin{cases} \int_R g(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_k & \text{nếu } \det J_p(s) > 0, \\ -\int_R g(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_k & \text{nếu } \det J_p(s) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $\int_\varphi \alpha$ chính là $\int_R g(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_k$ nên ta có đpcm. □

3.1.10. VÍ DỤ. Trong $\mathbb{R}^k$ cho khối vuông đơn vị k-chiều $[0,1]^k$ và một hình hộp $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]$. Xét $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k) : [0,1]^k \to R$ với $p_{i, 1\le i\le k}$ cho bởi $p_i(s) = (b_i - a_i) s_i + a_i$. Dễ thấy $p : [0,1]^k \to R$ là song ánh. Ta có:

$$J_p(s) = \begin{pmatrix} \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \\ \vdots \\ \nabla p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_k - a_k \end{pmatrix}.$$

Do đó $\det J_p(s) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i) > 0$, nên p bảo toàn định hướng. Vậy với α là dạng bậc k trên U và $\varphi : R \to U$ thì $\int_{\varphi\circ p} \alpha = \int_c \alpha$.

Ví dụ 3.8 cho thấy rằng tích phân của dạng trên một hình hộp suy biến k-chiều bất kỳ có thể quy về thành tích phân trên khối vuông (cube) suy biến $[0,1]^k \to U$, ở phần tới ta chỉ xét tích phân trên các khối vuông suy biến như vậy (điều này giúp giảm đi sự rườm rà về ký hiệu).

3.2. Định lý Stokes

Định lý Stokes đã được giới thiệu trong các bài giảng về giải tích cổ điển, với các trường hợp riêng như định lý Newton - Leibniz, định lý Green... Nó nói rằng tích phân của một đối tượng α trên biên ∂D của một miền D thì bằng tích phân trên D của một đối tượng $d\alpha$ liên quan tới đạo hàm của α, tức là:

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha.$$

Ở đây ta sẽ phát biểu và chứng minh định lý Stokes ở dạng tổng quát hơn. Ở dạng đã biết, ta thấy D và biên ∂D không chỉ là tập hợp, mà chúng còn được cho một định hướng, sao cho các định hướng đó tương thích với nhau. Chẳng hạn ở định lý Newton - Leibniz:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

với $\partial D = \{a, b\}$ thì $\int_{\{a,b\}} f = f(a) + f(b)$. Như vậy với ∂D đơn thuần chỉ mang nghĩa tập hợp thì không đủ để phát biểu được định lý. Ở đây ta thấy vai trò của a và b không như nhau. Có thể nói rằng a trước, b sau, hoặc a ứng với dấu $-$, b ứng với dấu $+$. Với sự phân biệt vai trò a, b như vậy, đoạn $[a, b]$ một cách tương ứng cũng được gọi là có định hướng từ a đến b (tích phân $\int_a^b f'(x)\,dx$ thực sự có ngầm ý một định hướng như vậy cho miền $[a, b]$). Vậy tóm lại cần một định hướng cho biên, được cho bằng cách quy ước các dấu $+, -$ cho các phần của nó.

3.2.1. ĐỊNH NGHĨA. (Mặt của khối vuông suy biến). Cho khối vuông suy biến k-chiều $c : [0,1]^k \to U$, ta định nghĩa các mặt của c, ký hiệu là $c_{i,0}$, $c_{i,1}$, như sau. Cho $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) \in [0,1]^{k-1}$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$, ta đặt

$$c_{i,0}(t) = c(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots t_{k-1}),$$
$$c_{i,1}(t) = c(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, 1, t_i, \ldots t_{k-1}).$$

Chúng chính là giới hạn của c lên các mặt của khối vuông đơn vị $[0,1]^k$, là các khối vuông suy biến $(k-1)$-chiều.

3.2.2. VÍ DỤ. Cho $c : [0,1] \to U$ $(k = 1)$, i chỉ bằng 1, ta có:

$$c_{1,0}(t) = c(0),$$
$$c_{1,1}(t) = c(1).$$

Cho $c : [0,1]^2 \to U$ $(k = 1)$, $i = 1, 2$. Với $t \in [0,1]$, ta có:

$$c_{1,0}(t) = c(0,t), \qquad c_{2,0}(t) = c(t,0),$$
$$c_{1,1}(t) = c(1,t), \qquad c_{2,1}(t) = c(t,1).$$

3.2.3. ĐỊNH NGHĨA. (Biên của khối vuông suy biến). Cho khối vuông suy biến $c : [0,1]^k \to U$ với các mặt $c_{i,0}$, $c_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Quy ước rằng mặt $c_{i,0}$ mang dấu $(-1)^i$, mặt $c_{i,1}$ mang dấu $(-1)^{i+1}$. Ta định nghĩa biên của c, ký hiệu ∂c, là tổng hình thức (formal sum) của các mặt $c_{i,0}$, $c_{i,1}$ cùng với dấu tương ứng, nghĩa là:

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \left((-1)^i c_{i,0} + (-1)^{i+1} c_{i,1} \right) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (c_{i,0} - c_{i,1}).$$

3.2.4. VÍ DỤ. Cho $c : [0,1] \to U$, ta có:

$$\partial c = (-1)(c_{1,0} - c_{1,1})$$
$$= c_{1,1} - c_{1,0}.$$

Cho $c : [0,1]^2 \to U$, ta có:

$$\partial c = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i (c_{i,0} - c_{i,1})$$
$$= c_{1,1} - c_{1,0} + c_{2,0} - c_{2,1}.$$

Các tổng hình thức trên, chẳng hạn $c_{1,1} - c_{1,0} + c_{2,0} - c_{2,1}$, và cả các khối vuông suy biến c, là trường hợp riêng của khái niệm xích dưới đây.

3.2.5. ĐỊNH NGHĨA. (Xích). Cho $c_1, c_2, \ldots, c_m$ là một họ các khối vuông suy biến k-chiều. Ta định nghĩa xích (chain) c k-chiều là tổ hợp tuyến tính (hình thức) của $c_1, c_2, \ldots, c_m$ với hệ số thực, nghĩa là:

$$c = a_1 c_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m,$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.

Như vậy một khối vuông suy biến c k-chiều cũng là một xích k-chiều, biên ∂c của nó là một xích $(k-1)$-chiều.

3.2.6. ĐỊNH NGHĨA. (Biên của xích). Biên của xích $c = a_1 c_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$, ký hiệu ∂c, được định nghĩa là tổ hợp tuyến tính (hình thức) của các biên ∂c_i với hệ số a_i tương ứng, nghĩa là:

$$\partial c = a_1 \partial c_1 + a_2 \partial b_2 + \cdots + a_m \partial b_m.$$

Với phép lấy tổ hợp (phép cộng) hình thức trên, dễ thấy rằng tập tất cả các xích k-chiều là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$, với cơ sở là tập tất cả các khối vuông suy biến k-chiều. Phép lấy biên của xích như vậy là một ánh xạ (tuyến tính) từ không gian vectơ các xích k-chiều đến không gian vectơ các xích $(k-1)$-chiều, nó là mở rộng tuyến tính của phép lấy biên các khối vuông suy biến k-chiều.

Bằng cách mở rộng tuyến tính - tương tự phép lấy biên của xích c - khái niệm tích phân của dạng trên khối vuông suy biến lên cho xích, ta định nghĩa khái niệm tích phân của dạng bậc k trên xích như sau.

3.2.7. ĐỊNH NGHĨA. (Tích phân của dạng trên xích). Cho α là dạng bậc k xác định trên tập mở U. Cho $c_1, c_2, \ldots, c_m$ là họ các khối vuông suy biến k-chiều trong U (tức $c_i\left([0,1]^k\right) \subset U$, $\forall i = 1,2,\ldots,m$), xích $c = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_mc_m$ được gọi là một xích k-chiều trong U. Tích phân của α trên c, ký hiệu $\int_c \alpha$, được cho bởi:

$$\int_c \alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i \int_{c_i} \alpha.$$

3.2.8. VÍ DỤ. Cho α là dạng bậc 1 xác định trên tập mở U và $c : [0,1]^2 \to U$. Từ ví dụ 3.13 ta có $\partial c = c_{1,1} - c_{1,0} + c_{2,0} - c_{2,1}$ và nó là một xích trong U. Theo định nghĩa trên, ta có:

$$\int_c \alpha = \int_{c_{1,1}} \alpha - \int_{c_{1,0}} \alpha + \int_{c_{2,0}} \alpha - \int_{c_{2,1}} \alpha.$$

Ta thấy rằng với các khái niệm trên, có thể phát biểu lại các dạng của định lý Stokes đã biết. Chẳng hạn với định lý Newton - Leibniz

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a),$$

ta có thể viết như sau. Với $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ cho bởi $\varphi(t) = t$, ta có $\int_a^b f'(t)\,dt = \int_\varphi f'(x)\,dx$. Bằng phép tham số hóa lại (ví dụ 3.8) $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ cho bởi $p(s) = a + s(b-a)$, ta có $\int_\varphi f'(x)\,dx = \int_c f'(x)\,dx = \int_c df$, $c = \varphi \circ p$ là một khối vuông suy biến. Mặt khác ta thấy $f(b) = f(c(1)) = \int_{\{c(1)\}} f$, tương tự $f(a) = \int_{\{c(0)\}} f$, nên $f(b) - f(a) = \int_{\{c(1)\}} f - \int_{\{c(0)\}} f = \int_{\{c(1)\}-\{c(0)\}} f = \int_{\partial c} f$. Vậy $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ được viết lại dưới dạng

$$\int_c df = \int_{\partial c} f.$$

Bây giờ ta phát biểu định lý Stokes.

3.2.9. ĐỊNH LÍ (Định lý Stokes). *Cho α là dạng bậc $k-1$ xác định trên tập mở U của $\mathbb{R}^n$ và c là một xích k-chiều trong U. Khi đó:*

$$\boxed{\int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha.}$$

CHỨNG MINH. Do phép lấy tích phân trên xích c là mở rộng tuyến tính của phép lấy tích phân trên khối vuông suy biến, nên ta chỉ cần chứng minh định lý với c là một khối vuông suy biến $[0,1]^k \to U$ là đủ.

Xét vế trái. Từ định nghĩa tích phân của dạng và định lý 2.4 (4), ta có:

$$\int_c d\alpha = \int_{[0,1]^k} c^* d\alpha = \int_{[0,1]^k} d\left(c^*\alpha\right).$$

Do α là dạng bậc $k-1$ nên $c^*\alpha$ là dạng bậc $k-1$ trên $[0,1]^k$. Do đó ta có thể viết $c^*\alpha$ dưới dạng

$$c^*\alpha = \sum_{i=1}^{k} f_i\, dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k,$$

với f_i là các hàm thực trơn xác định trên $[0,1]^k$, và $\widehat{dt_i}$ chỉ sự khuyết đi dt_i. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} d\left(c^*\alpha\right) &= d\left(\sum_{i=1}^{k} f_i dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d\left(f_i\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial t_j} dt_j\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Do với mọi $j \neq i$ thì $dt_j dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k = 0$ nên số hạng thứ i trong (3.2.1) là

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial t_j} dt_j\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k &= \frac{\partial f_i}{\partial t_i} dt_i dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial t_i} (-1)^{i+1} dt_1 dt_2 \cdots dt_i \cdots dt_k. \end{aligned}$$

Do đó

$$d\left(c^*\alpha\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial t_i}\right) dt_1 dt_2 \cdots dt_k.$$

Vậy vế trái bằng:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^k} d\left(c^*\alpha\right) &= \int_{[0,1]^k} \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial t_i}\right) dt_1 dt_2 \cdots dt_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Lưu ý lại rằng các tích phân ở vế phải của (3.2.2) là tích phân Riemann quen thuộc, nên áp dụng được định lý Fubini, và do $f_{i,1\le i\le k}$ là các hàm trơn nên bằng định lý Newton - Leibniz, ta có:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial t_i} dt_1 dt_2 \cdots dt_k &= \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial t_i} dt_i\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} \left(f_i\left(t_1,\ldots,t_{i-1},1,t_{i+1},\ldots,t_k\right) - f_i\left(t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_{i+1},\ldots,t_k\right)\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k. \end{aligned}$$

Xét vế phải. Với $\partial c = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(c_{i,0} - c_{i,1}\right)$, ta có:

$$\int_{\partial c} \alpha = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\int_{c_{i,0}} \alpha - \int_{c_{i,1}} \alpha\right).$$

Để so sánh với (3.2.2) ta viết lại thành:

$$\int_{\partial c} \alpha = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \left(\int_{c_{i,1}} \alpha - \int_{c_{i,0}} \alpha\right).$$

Ta kiểm tra rằng

$$\int_{c_{i,0}} \alpha = \int_{[0,1]^{k-1}} \left(f_i\left(t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_{i+1},\ldots,t_k\right)\right) dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k.$$

Ta có:

$$\int_{c_{i,0}} \alpha = \int_{[0,1]^{k-1}} c_{i,0}^* \alpha.$$

Bằng cách viết $c_{i,0} : [0,1]^{k-1} \to U,\ (s_1, s_2, \dots s_{k-1}) \mapsto c(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots s_{k-1})$ thành $c_{i,0} = c \circ h$, với $h : (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots s_{k-1}) \mapsto (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots s_{k-1})$, ta có:

$$\begin{aligned} c_{i,0}^* \alpha &= (c \circ h)^* \alpha \\ &= h^* (c^* \alpha) \\ &= h^* \left(\sum_{i=1}^{k} f_i dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right). \end{aligned}$$

Với $j \neq i$, không mất tính tổng quát, giả sử $j < i$, ta có:

$$\begin{aligned} h^* \left(f_j dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_j} \cdots dt_k \right) &= \left(f_j \circ h \right) ds_1 ds_2 \cdots \widehat{ds_j} \cdots ds_{i-1} 0 ds_i \cdots ds_{k-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Với $j = i$:

$$\begin{aligned} h^* \left(f_i dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right) &= (f_i \circ h)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{i-1} \widehat{0} ds_i \cdots dt_{k-1} \\ &= (f_i \circ h)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{k-1}. \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} c_{i,0}^* \alpha &= h^* \left(\sum_{i=1}^{k} f_i dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k \right) \\ &= (f_i \circ h)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{k-1}. \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} \int_{c_{i,0}} \alpha &= \int_{[0,1]^{k-1}} c_{i,0}^* \alpha \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} (f_i \circ h)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{k-1} \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} f(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots s_{k-1})\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{k-1} \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_k)\, dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\int_{c_{i,1}} \alpha = \int_{[0,1]^{k-1}} (f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_k))\, dt_1 dt_2 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_k.$$

Vậy định lý đã được chứng minh. □

Chương 4

Tích phân trên đa tạp

Bài tập.

4.0.1. Bài tập 5.6 trang 65 giáo trình.

4.0.2. Cho một 2-hình hộp suy biến

$$\begin{aligned} c : [0,1]^2 &\to \mathbb{R}^4 \\ (t_1,t_2) &\mapsto (t_1^2, t_2, t_1t_2, t_1+1). \end{aligned}$$

Cho dạng $\alpha = x_1 dx_3 + x_1x_4 dx_2$.

(1) Tính cụ thể để kiểm tra rằng $c^*(d\alpha) = d(c^*\alpha)$.
(2) Tính $\int_c d\alpha$.
(3) Tính $\int_{\partial c} \alpha$.
(4) Kiểm tra c là đơn ánh.
(5) Chứng tỏ c mang tập mở thành tập mở. Từ đó suy ra c là đồng phôi lên tập ảnh $c([0,1]^2)$ của nó, tức ánh xạ ngược c^{-1} là liên tục. (Gợi ý: chú ý $[0,1]^2$ là compắc và xét tập đóng thay vì tập mở.)
(6) Tính đạo hàm Dc và kiểm tra rằng tại mọi điểm $(t_1,t_2) \in (0,1)^2$ thì $Dc(t_1,t_2)$ là đơn ánh.
(7) Chứng tỏ tập ảnh $S = c((0,1)^2)$ là một đa tạp 2 chiều trong $\mathbb{R}^4$.
(8) Gọi μ là dạng thể tích trên S. Tính kéo lui $c^*\mu$.
(9) Thiết lập công thức tích phân bội để tính diện tích của S. Hãy ước lượng diện tích này.

4.0.3. Cho Ω là một tập con mở bị chặn của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Chứng tỏ Ω là một đa tạp n-chiều trong $\mathbb{R}^n$.

4.0.4. Giả sử biên tôpô $\partial\Omega$ là một đa tạp $(n-1)$-chiều. Chứng tỏ $\overline{\Omega}$ là một đa tạp n-chiều có biên là $\partial\Omega$.

4.0.5. Gọi ν là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial\Omega$. Giả sử trường vectơ F trơn trên $\overline{\Omega}$. Viết $dx = \mu_\Omega$ và $dS = \mu_{\partial\Omega}$. Từ công thức Stokes hãy chứng tỏ:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS. \tag{4.0.6}$$

4.0.7. Viết $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$. Giả sử hàm thực f trơn trên $\overline{\Omega}$. Từ (4.0.6) hãy chứng tỏ:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i \, dS. \tag{4.0.8}$$

4.0.9. Giả sử hàm thực g trơn trên $\overline{\Omega}$. Từ (4.0.8) hãy chứng minh *công thức tích phân từng phần*:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu_i \, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx. \tag{4.0.10}$$

4.0.11. Ta viết $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$, đạo hàm của f theo hướng ν. Nhắc lại toán tử Laplace Δ được cho bởi $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Từ (4.0.8) hãy chứng minh *công thức Green*:

$$\int_\Omega \Delta f \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} \, dS. \tag{4.0.12}$$

Chương 5

Bổ đề Poincaré

5.0.1. ĐỊNH LÍ (bổ đề Poincaré). *Mọi dạng trơn đóng trên đa tạp thắt được là khớp.*

5.1. Chứng minh bổ đề Poincaré

Giả sử $M \subset R^n$ là đa tạp thắt được. Xét tích $M \times [0;1]$, gọi là mặt trụ với đáy M. Xét hai đồng luân $i_0, i_1 : M \to M \times [0,1]$ xác định bởi

$$i_0(x) = (x,0),$$

$$i_1(x) = (x,1).$$

Phép đồng luân tương ứng từ i_0 tới i_1 là

$$\begin{array}{rccc} i: & [0;1] \times M & \to & M \times [0;1] \\ & (t,x) & \to & (x;t). \end{array}$$

Ta có $i(x;0) = i_0(x)$; $i(x;1) = i_1(x)$.

Tiếp theo ta xét toán tử:

$$F : \Omega^{k+1}(M \times [0;1]) \to \Omega^k(M),\ k \in \{0;1;2;....;n\},$$

với

$$\gamma = \sum_I f_I(x;t)dx_I + \sum_J g_J(x;t)dt dx_J \in \Omega^{k+1}$$

(γ là dạng bậc $k+1$, I là bộ $k+1$ chỉ số, J là bộ k chỉ số) thì

$$F\gamma = \sum_I \left(\int_0^1 g_J(x;t)dt \right) dx_J \in \Omega^k(M).$$

Bây giờ ta chứng minh bổ đề Poincaré theo các bước sau.

Bước 1:

5.1.1. MỆNH ĐỀ. *$i_1^*\gamma - i_0^*\gamma = Fd\gamma + dF\gamma$ (hay $i_1^* - i_0^* = Fd + dF$).*

CHỨNG MINH. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp $\gamma = f(x;t)dx_I$: Khi đó $F\gamma = 0$ (do γ không chứa dt) $\Rightarrow dF\gamma = 0$. Trong khi đó

$$d\gamma = \left(\frac{\partial f}{\partial t}dt\right)dx_I + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)dx_I,$$

suy ra

$$Fd\gamma = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x;t)\,dt\right)dx_I = [f(x;1) - f(x;0)]\,dx_I$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} i_1^*\gamma - i_0^*\gamma &= i_1^* f dx_I + i_0^* f dx_I = [(f \circ i_1) - (f \circ i_0)]\,d\varphi_I \\ &= [f(x;1) - f(x;0)]\,d\varphi_{i_1} d\varphi_{i_2} ... d\varphi_{i_{k+1}}. \end{aligned}$$

Nhắc lại ở đây $M \xrightarrow{i_1,i_0} M \times [0;1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M$, $(x;t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t) \in M \times [0;1]$, $\varphi_i(x) = x_i$, $i = 1,2,...,n$. Đặt $\varphi_{n+1}^1(x) = 1$, $\varphi_{n+1}^0(x) = 0$, ta có:

$$i_1(x) = (x;1) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), \varphi_{n+1}^1(x)\right)$$

$$i_0(x) = (x;0) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}^0(x)\right)$$

$$\begin{aligned} d\varphi_{j_1}.d\varphi_{j_2}\ldots d\varphi_{j_{k+1}} &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{j_1}}{\partial x_i} dx_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{j_2}}{\partial x_i} dx_i\right)\ldots\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{j_{k+1}}}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= dx_{j_1}.dx_{j_2}\ldots dx_{j_{k+1}} = dx_I. \end{aligned}$$

Suy ra $i_1^*\gamma - i_0^*\gamma = \left[f(x;1) - f(x;0)\right] dx_I$. Vậy $i_1^*\gamma - i_0^*\gamma = Fd\gamma + dF\gamma$.

Trường hợp $\gamma = g(x;t)\,dt dx_J$: Ta có $F\gamma = \left(\underbrace{\int_0^1 g(x;t)dt}_{\text{hàm theo } x}\right) dx_J$, suy ra

$$\begin{aligned} dF\gamma &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 g(x;t)dt\right) dx_i\right) dx_J = \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i\right] dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i dx_J. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} d\gamma = d(g dt dx_J) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t) dx_i\right) dt dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i dx_J \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t) dx_i dt dx_J \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t) dt dx_i dx_J. \end{aligned}$$

Suy ra

$$Fd\gamma = -\left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i\right] dx_J = -\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x;t)dt\right) dx_i dx_J.$$

Từ đó ta có $Fd\gamma + dF\gamma = 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned} i_1^*\gamma - i_0^*\gamma = i_1^*(g dt dx_J) - i_0^*(g dt dx_J) &= (g \circ i_1)\, d\varphi_{n+1}^1 d\varphi_J - (g \circ i_0)\, d\varphi_{n+1}^0 d\varphi_J \\ &= g(x;1)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial 1}{\partial x_i} dx_i\right) d\varphi_J - g(x;0)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial 0}{\partial x_i} dx_i\right) d\varphi_J = 0. \end{aligned}$$

Vậy $i_1^*\gamma - i_0^*\gamma = Fd\gamma + dF\gamma$ trong trường hợp này. □

Bước 2:

5.1.2. MỆNH ĐỀ (công thức đồng luân). *Cho các ánh xạ $\phi_0, \phi_1 : M \longrightarrow N$ (N là đa tạp) và $\phi : M \times [0;1] \longrightarrow N$ là phép đồng luân từ ϕ_1 tới ϕ_0. Khi đó với α là dạng bậc $k+1$ trên N, ta có:*

$$\phi_0^* \alpha - \phi_1^* \alpha = F\phi^* d\alpha + dF\phi^* \alpha.$$

CHỨNG MINH. Xét sơ đồ $M \xrightarrow{i_0, i_1} M \times [0;1] \xrightarrow{\phi} N$. $\forall x \in M$ ta có: □

$$(\phi \circ i_0)(x) = \phi(i_0(x)) = \phi(x, 0) = \phi_0(x)$$

$$(\phi \circ i_1)(x) = \phi(i_1(x)) = \phi(x, 1) = \phi_1(x).$$

Suy ra $\phi_0 = \phi \circ i_0, \phi_0 = \phi \circ i_0$, và

$$\begin{cases} \phi_0 * \alpha = (\phi \circ i_0) * \alpha = i_0 * \phi * \alpha \\ \phi_1 * \alpha = (\phi \circ i_1) * \alpha = i_1 * \phi * \alpha. \end{cases}$$

Đặt $\gamma = \phi^* \alpha$ là dạng bậc $k+1$ trên $M \times [0;1]$. Áp dụng kết quả ở bước 1, ta có:

$$\begin{aligned} \phi_1^* \alpha - \phi_0^* \alpha &= i_1^* \gamma - i_0^* \gamma \\ &= Fd\gamma - dF\gamma \\ &= Fd\phi^* \alpha - dF\phi^* \alpha \\ &= F\phi^* d\alpha - dF\phi^* \alpha. \end{aligned}$$

Bước 3:

5.1.3. MỆNH ĐỀ. *Xét $\phi_0, \phi_1 : M \longrightarrow M$ và $\phi : M \times [0;1] \longrightarrow M$ là những phép đồng luân từ ϕ_0 tới ϕ_1. Đồng thời ϕ là phép co rút vào $x_0 \in M$, nghĩa là ϕ trơn, $\phi(x;0) = x_0, \forall x \in M$. Khi đó, với α là dạng bậc k đóng trên M với $k \geq 1$ thì α khớp trên M, có $\beta = F\phi^* \alpha$ là dạng bậc $k-1$ trên M thoả mãn $d\beta = \alpha$.*

CHỨNG MINH. Giả sử $\alpha = \sum_I f_I(x) d\varphi_I$, ta có

$$\begin{aligned} \phi_1^* \alpha &= (\phi \circ i_1)^* \alpha \\ &= \sum_I [f_I \circ (\phi \circ i_1)](x) d\varphi_I \\ &= \sum_I f_I [\phi \circ i_1(x)] d\varphi_I \\ &= \sum_I f_I [\phi(x;1)] d\varphi_I \\ &= \sum_I f_I(x) d\varphi_{i_1}.d\varphi_{i_2}...d\varphi_{i_k} \\ &= \sum_I \left[f_I(x). \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial x_j} dx_j. \frac{\partial \varphi_{i_2}}{\partial x_j} dx_j ... \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial x_j} dx_j \right] \\ &= \sum_I f_I(x) dx_{i_1}.dx_{i_2}...dx_{i_k} \\ &= \sum_I f_I(x) d\varphi_I \end{aligned}$$

Vậy $\phi_1^*\alpha = \alpha$. Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}
\phi_0^*\alpha &= (\phi \circ i_0)^*\alpha = \sum_I f_I\left[\phi(x;0)\right] d\varphi_I \\
&= \sum_I \left[f_I \circ (\phi \circ i_0)\right](x)\, d\varphi_I \\
&= \sum_I f_I\left[\phi \circ i_0(x)\right] d\varphi_I \\
&= \sum_I f_I(x_0)\, d\varphi_{i_1}.d\varphi_{i_2}...d\varphi_{i_k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bây giờ, đặt $\beta = F\phi^*\alpha$ và áp dụng kết quả ở bước 2, ta có:

$$\begin{aligned}
& \phi_1^*\alpha - \phi_0^*\alpha &= \; & F\phi^* d\alpha + dF\phi^*\alpha \\
\Leftrightarrow \; & \alpha - 0 &= \; & 0 + d\beta \\
\Leftrightarrow \; & \alpha &= \; & d\beta.
\end{aligned}$$

Vậy, với α là dạng bậc $k \geq 1$, đóng thì α khớp. Do đó, nếu α là dạng đóng trên đa tạp co rút được thì α khớp và bổ đề Poincaré được chứng minh xong. □

5.2. Ví dụ

5.2.1. VÍ DỤ. Trên $\mathbb{R}^n$, cho $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx_i$ là dạng bậc một đóng. Xét toán tử $F : \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0;1]) \longrightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ xác định như sau: Với $\gamma = \sum_I f_I(x;t)\, dx_I + \sum_J g_I(x;t)\, dt dx_J \in \Omega$ thì $F\gamma = \sum_J \left[\int_0^1 g_I(x;t)\, dt\right] dx_J$

Xét $\phi : R^n \times [0;1] \longrightarrow R^n$ xác định như sau: $\phi(x;t) = tx$, ta có $\phi(x;0) = O_{R^n}, \phi(x;1) = x$. Đặt $\beta = F\phi * \alpha$ thì theo bổ đề Poincare', ta có $\alpha = d\beta$, nghĩa là α khớp.

Ta tìm hàm β như sau. Ta có:

$$\begin{aligned}
\phi * \alpha &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \phi)\, d\varphi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i\left[\phi(tx)\right] d\varphi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(tx)\, d(tx_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(tx)(x_i dt + t dx_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(tx)\, x_i dt + \sum_{i=1}^{n} f_i(tx)\, t dx_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= F\phi * \alpha \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 f_i(tx)\, x_i dt\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\, dt
\end{aligned}$$

Bây giờ, áp dụng trên R^2, với $\alpha = ydx + xdy$ là dạng bậc một đóng. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,t) &= t(x,y) = (tx,ty) \\
\phi*\alpha &= (ty.xdt + tx.ydt) + (ty.tdx + tx.tdy) \\
&= 2xytdt + t^2ydx + t^2xdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= F\phi*\alpha \\
&= \int_0^1 2xytdt \\
&= xy
\end{aligned}$$

Ta có ngay $d\beta = \alpha$, nghĩa là α khớp.

Tài liệu tham khảo

[Sja06] Reyer Sjamaar, *Manifolds and differential forms*, 2006, Cornell University. (document), 1.3.4