

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет система управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО КУСОВОЙ ПРОЕКТЕ  
по дисциплине  
«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Студент:  
*Группа R33362*

*Хюинь Тан Куонг*

Предподаватель:  
*Научный сотрудник*

*Пашенко Артем Витальевич*

Санкт-Петербург 2024

# Оглавление

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА</b>                                 | <b>3</b>  |
| 1.1      | Вывод уравнений . . . . .   | 3         |
| 1.2      | Точки равновесия . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Линеаризация . . . . .  | 5         |
| <b>2</b> | <b>АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ</b>   | <b>6</b>  |
| 2.1      | Анализ матриц . . . . .   | 6         |
| 2.2      | Передаточные функции . . . . .  | 7         |
| 2.3      | Линейное моделирование . . . . .  | 8         |
| 2.4      | Нелинейное моделирование . . . . .  | 10        |
| <b>3</b> | <b>СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ</b>                              | <b>14</b> |
| 3.1      | Синтез регулятора по состоянию . . . . .  | 14        |
| 3.2      | Исследование регулятора по состоянию . . . . .                                  | 16        |
| 3.3      | Синтез наблюдателя . . . . .  | 19        |
| 3.4      | Исследование наблюдателя . . . . .  | 21        |
| 3.5      | Синтез регулятора по выходу . . . . .   | 23        |
| <b>4</b> | <b>СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕ-<br/>НЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ</b> | <b>26</b> |
| 4.1      | Синтез регулятора по состоянию . . . . .  | 26        |
| 4.2      | Исследование регулятора по состоянию . . . . .                                  | 28        |
| 4.3      | Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление . . . . .           | 29        |
| 4.4      | Синтез наблюдателя . . . . .  | 31        |
| 4.5      | Синтез регулятора по выходу . . . . .   | 33        |
| <b>5</b> | <b>СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА</b>                              | <b>36</b> |
| 5.1      | Синтез линейно-квадратичного регулятора . . . . .                               | 36        |
| 5.2      | Исследование линейно-квадратичного регулятора . . . . .                         | 38        |
| 5.3      | Синтез фильтра Калмана . . . . .  | 41        |
| 5.4      | LQG для линейной модели . . . . .   | 42        |
| 5.5      | LQG для нелинейной модели . . . . .   | 43        |
| <b>6</b> | <b>СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ</b>   | <b>45</b> |
| 6.1      | Решение задачи компенсации . . . . .  | 45        |
| 6.2      | Решение задачи слежения . . . . .   | 49        |

## Глава 1

# ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

### 1.1 Вывод уравнений

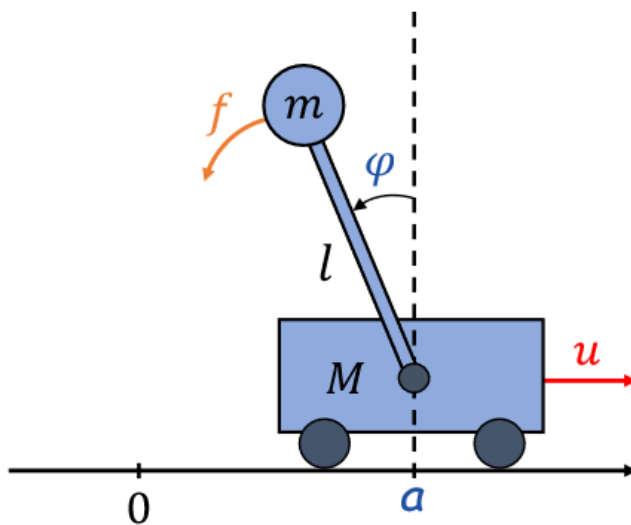


Рис. 1.1: Перевернутый маятник на тележке

Положение тележки

$$\begin{cases} x_c = a \end{cases} \quad (1.1)$$

Положение маятника

$$\begin{cases} x_m = a - l \sin \varphi \\ y_m = l \cos \varphi \end{cases} \quad (1.2)$$

Скорость маятника

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \dot{a} - l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y}_m = -l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad (1.3)$$

Потенциальная энергия

$$V = mgy_m = mgl \cos \varphi \quad (1.4)$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}M\dot{a}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) \\
 &= \frac{1}{2}M\dot{a}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{a}^2 - 2l\dot{\varphi}\dot{a}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) \\
 &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{a}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{\varphi}\dot{a}\cos\varphi \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{a}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{\varphi}\dot{a}\cos\varphi - mgl\cos\varphi \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Система математических уравнений по методу Эйлера – Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial a} = u \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = f \end{cases} \quad (1.7)$$

Вычислим частные и полные производные

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = (M+m)\dot{a} - ml\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) = (M+m)\ddot{a} - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} - ml\dot{a}\cos\varphi \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{a}\cos\varphi + ml\dot{a}\dot{\varphi}\sin\varphi \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.13)$$

Подставив (1.8)...(1.13) в (1.7), получим систему математических уравнений системы

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{a} - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{a}\cos\varphi - mgl\sin\varphi = f \end{cases} \quad (1.14)$$

Из этого мы получаем

$$\begin{cases} \dot{a} &= \frac{d}{dt}a \\ \ddot{a} &= \frac{l u + f \cos(\varphi) - l^2 m \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + g l m \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{l (-m \cos(\varphi)^2 + M + m)} \\ \dot{\varphi} &= \frac{d}{dt}\varphi \\ \ddot{\varphi} &= \frac{M f + f m + l m u \cos(\varphi) + g l m^2 \sin(\varphi) - l^2 m^2 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + M g l m \sin(\varphi)}{l^2 m (-m \cos(\varphi)^2 + M + m)} \end{cases} \quad (1.15)$$

## 1.2 Точки равновесия

Обозначим вектор состояния системы  $x$

$$x = [a \quad \dot{a} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]^T$$

Точки равновесия объекта при  $u, f \equiv 0$

$$x_0 = [a \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T - \text{когда маятник стоит вертикально}$$

$$x_0 = [a \quad 0 \quad \pi \quad 0]^T - \text{когда маятник направлен прямо вниз}$$

Мы видим, что точка равновесия не зависит от начального положения тележки

### 1.3 Линеаризация

Чтобы линеаризовать систему, предполагаем, что  $\varphi$  маленький, тогда можем аппроксимировать:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1, \quad \dot{\varphi}^2 \approx 0$$

Из (1.14) получаем уравнение линеаризации системы следующим образом:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{a} - ml\ddot{\varphi} &= u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{a} - mgl\varphi &= f \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} \ddot{a} &= \frac{gm}{M}\varphi + \frac{u}{M} + \frac{1}{Ml}f \\ \ddot{\varphi} &= \frac{glm^2 + Mglm}{Ml^2m}\varphi + \frac{1}{Ml}u + \frac{M+m}{Ml^2m}f \end{cases} \quad (1.17)$$

Получим математическую модель в виде

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1.18)$$

где

$$x = [a \quad \dot{a} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]^T$$

$$f = [f]$$

$$y = [y_1 \quad y_2]^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{gm}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{glm^2 + Mglm}{Ml^2m} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Ml^2m} \end{pmatrix}$$

## Глава 2

# АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

### 2.1 Анализ матриц

Данно для линейной системы

$$M = 0.5 \text{ кг}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad m = 2 \text{ кг}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2$$

Мы получаем что

$$A = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 39.20 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 49.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 2.00 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ 2.50 \end{bmatrix}$$

Из этого мы получаем что  $\delta(A) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 7.00 \\ -7.00 \end{bmatrix}$  и множество собственных векторов матрицы A

$$M = \begin{bmatrix} 1.000 & -1.000 & 0.088 & -0.088 \\ 0.000 & 0.000 & 0.618 & 0.618 \\ 0.000 & 0.000 & 0.110 & -0.110 \\ 0.000 & 0.000 & 0.773 & 0.773 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Из собственных чисел мы видим что система не устойчива. То значит линейная система тоже неустойчивость.

Матрица управляемости системы:

$$U = \begin{bmatrix} 0.000 & 2.000 & 0.000 & 78.400 \\ 2.000 & 0.000 & 78.400 & 0.000 \\ 0.000 & 2.000 & 0.000 & 98.000 \\ 2.000 & 0.000 & 98.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(U) = 4$$

⇒ Система полностью управляема.  
Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 39.200 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 49.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 39.200 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 49.000 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank}(V) = 4$$

⇒ Система полностью наблюдаема

## 2.2 Передаточные функции

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Cx \end{cases}$$

Мы используем следующую формулу (из первой лекции) для преобразования системы из формы вход-состояние-выход в форму ввода-вывода.

$$W_{u \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$W_{f \rightarrow y}(s) = C(sI - A)^{-1}D$$

Из этого мы получаем что:

$$\begin{aligned} W_{u \rightarrow y}(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \left( \frac{\frac{2}{s^2} - \frac{392}{5(49s^2 - s^4)}}{\frac{2}{s^2 - 49}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f \rightarrow y}(s) &= C(sI - A)^{-1}D \\ &= \left( \frac{\frac{2}{s^2} - \frac{98}{5(49s^2 - s^4)}}{\frac{2}{s^2 - 49}} \right) \end{aligned}$$

Пусть m — высшая степень числителя, а n — высшая степень знаменателя.

Динамический порядок рассчитывается следующим образом:  $\max(m, n)$

- $W_{u \rightarrow y}$ : 6
- $W_{f \rightarrow y}$ : 6

Относительный динамический порядок рассчитывается следующим образом:  $n - m$

- $W_{u \rightarrow y}$ : 2
- $W_{f \rightarrow y}$ : 2

$$\text{Значения полюсов для } W_{u \rightarrow y} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ 7.000 \\ 0.000 \\ -0.000 \\ -0.000 \\ -0.000 \\ 7.000 \\ -7.000 \end{bmatrix} \text{ и для } W_{f \rightarrow y} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ 7.000 \\ 0.000 \\ -0.000 \\ -0.000 \\ -0.000 \\ 7.000 \\ -7.000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Значения нулей } W_{u \rightarrow y} = 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} 0.1043 \\ -0.1043 \end{bmatrix} \text{ и для } W_{f \rightarrow y} = \emptyset$$

### Микровывод:

Чем больше динамический порядок тем более "инерционной" является система.

Если передаточная матричная функция удовлетворяет условия физической реализуемости то относительный порядок дает нам знания что как быстро изменения входного сигнала.

Значения полюсов играют важную роль в анализе и проектировании линейных систем управления. Это значение определит моды решение свободного движения линейных систем. Кроме того, также можно определить, является ли система устойчивой или нет.

В передаточной функции системы нули представляют собой частоты или значения, при которых частотная характеристика системы равна нулю. Другими словами, нули — это точки на графике Боде или Найквиста, где входной сигнал полностью устраняется.

## 2.3 Линейное моделирование

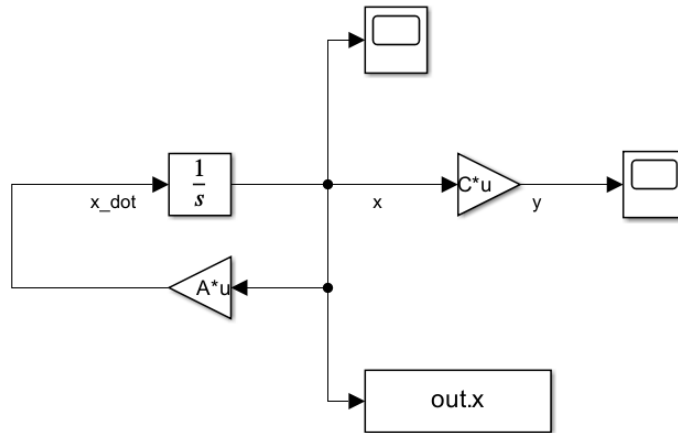


Рис. 2.1: Графика моделирования свободного движения линеаризованного объекта

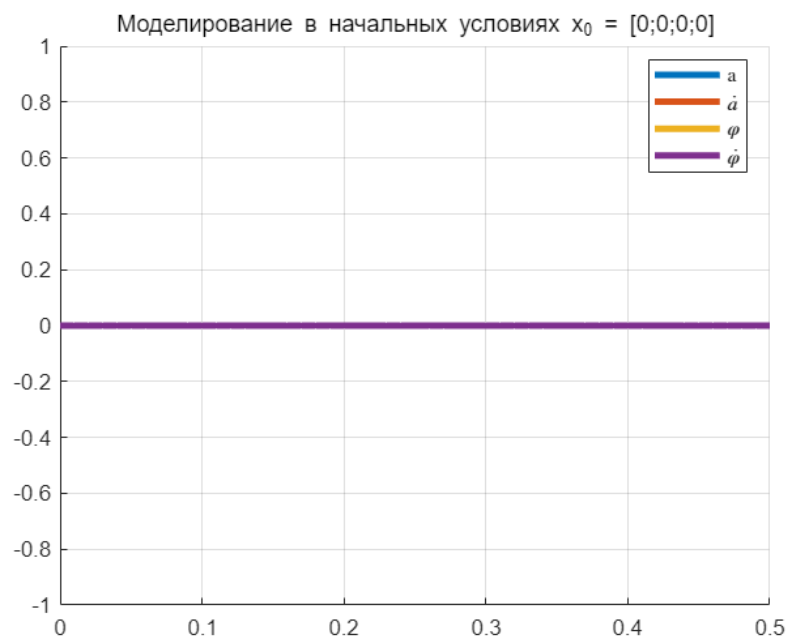


Рис. 2.2: График вектора состояния  $x(t)$

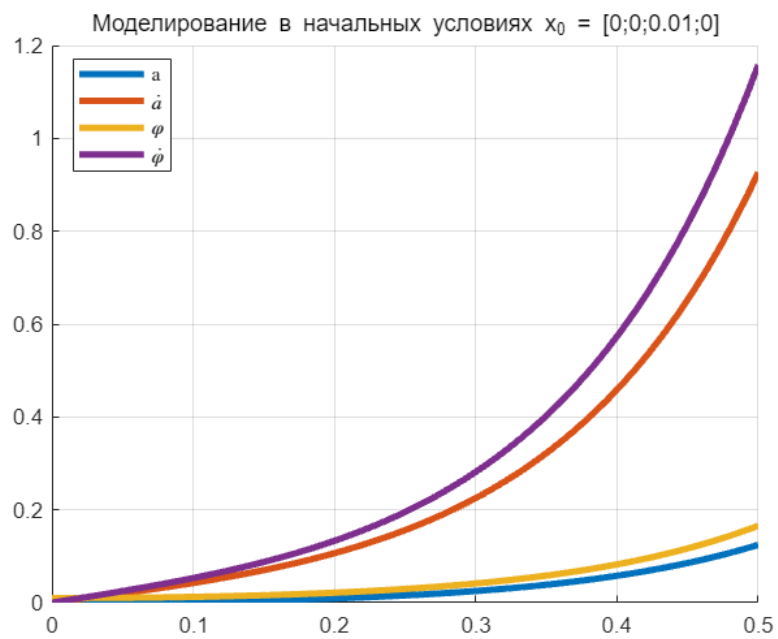


Рис. 2.3: График вектора состояния  $x(t)$

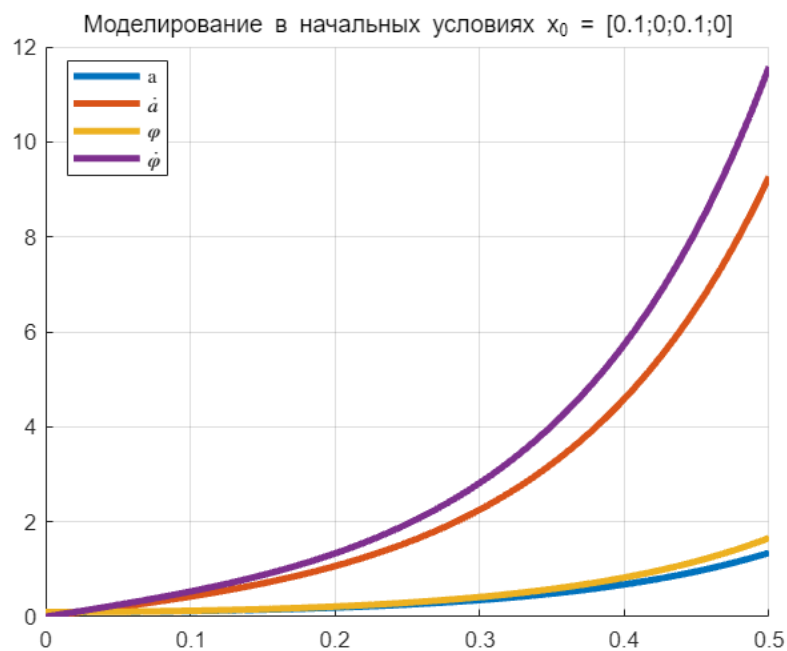


Рис. 2.4: График вектора состояния  $x(t)$

## 2.4 Нелинейное моделирование

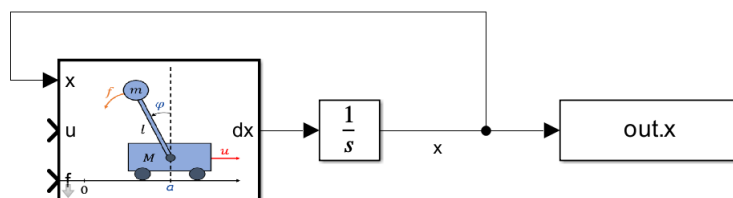


Рис. 2.5: Графика моделирования свободного движения нелинейной системы

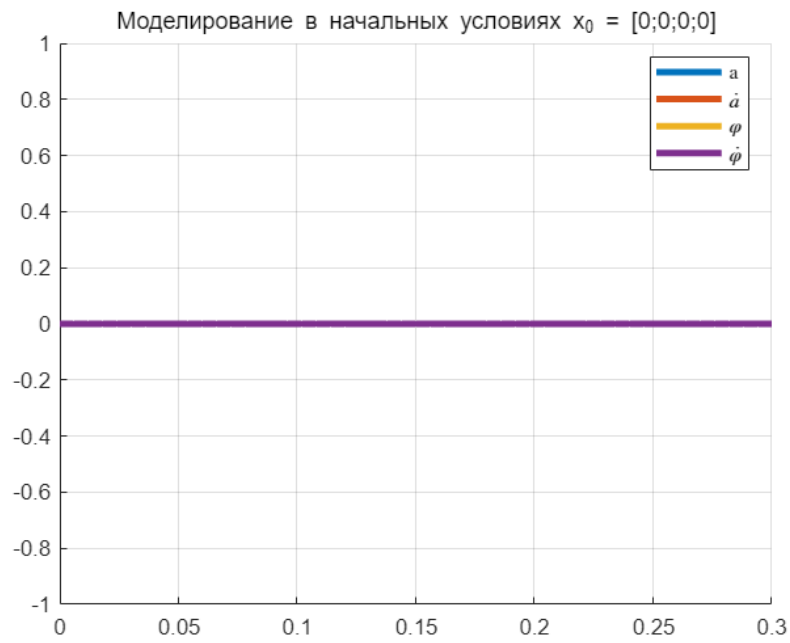


Рис. 2.6: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы

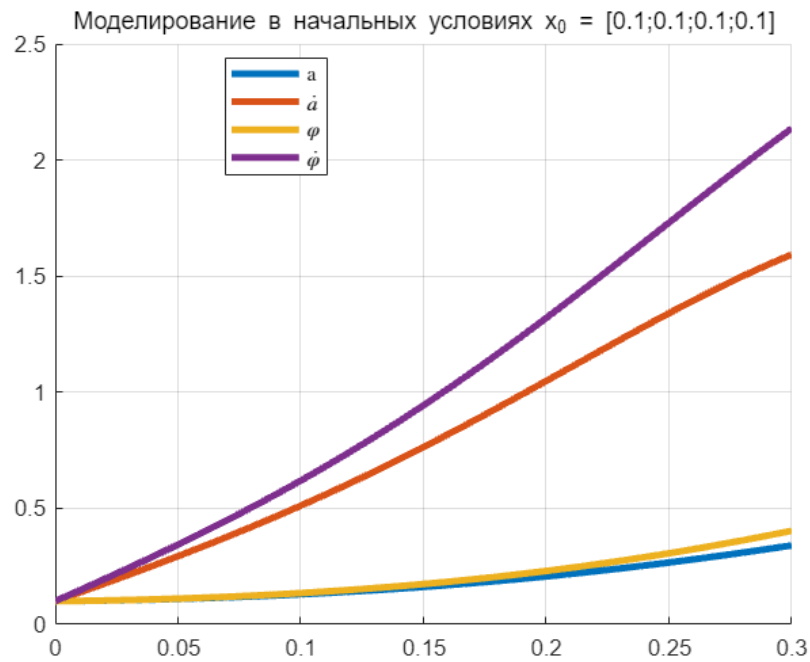


Рис. 2.7: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы

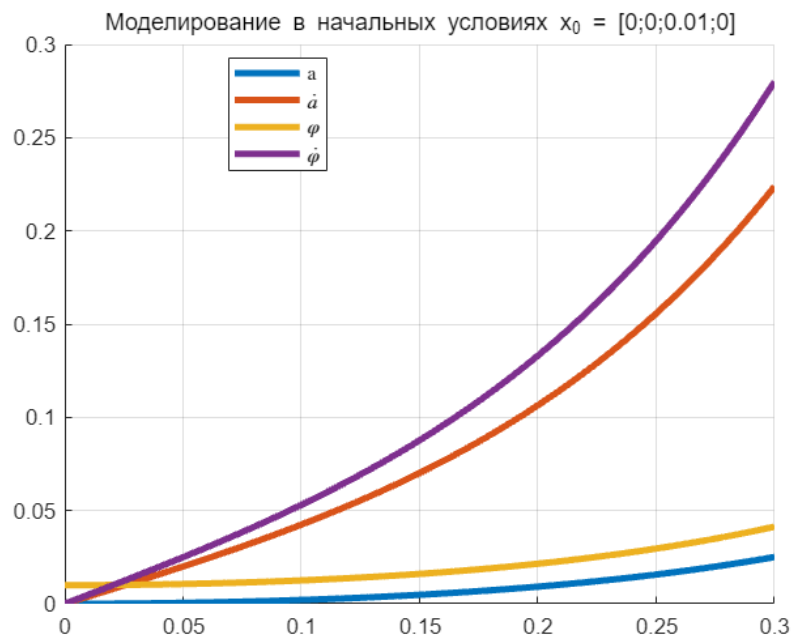


Рис. 2.8: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы

Мы видим что при малом времени моделирования системы. Состояний нелинейной системы и линейной системы похож друг друга.

Рассмотрим при большом времени моделирования. Мы получаем графика моделирования как показан ниже:

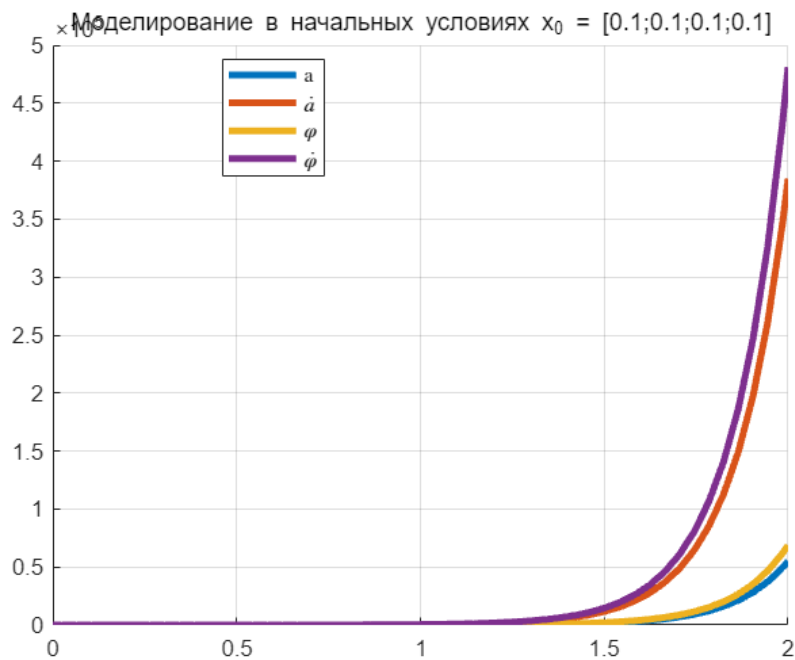


Рис. 2.9: График вектора состояния  $x(t)$  линейной системы

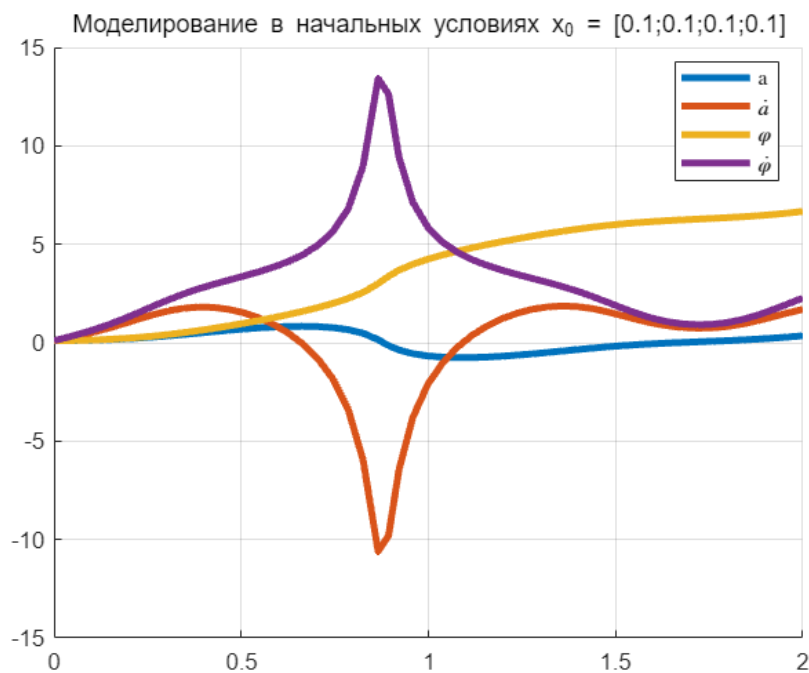


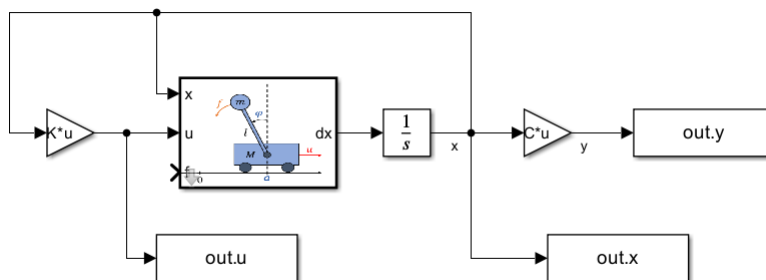
Рис. 2.10: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы

Из рисунков 2.9 и 2.10 мы видим, что при большом времени моделирования выходное состояние линейной системы и нелинейной системы совершенно различно

# СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

### Уравнения модального регулятора

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$G = \begin{bmatrix} -3.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & -1.000 \end{bmatrix}, \quad Y = [1.000 \quad 1.000 \quad 1.000 \quad 1.000]$$
$$K = \begin{bmatrix} 1.531 & 2.347 & -42.531 & -7.347 \end{bmatrix}$$


14

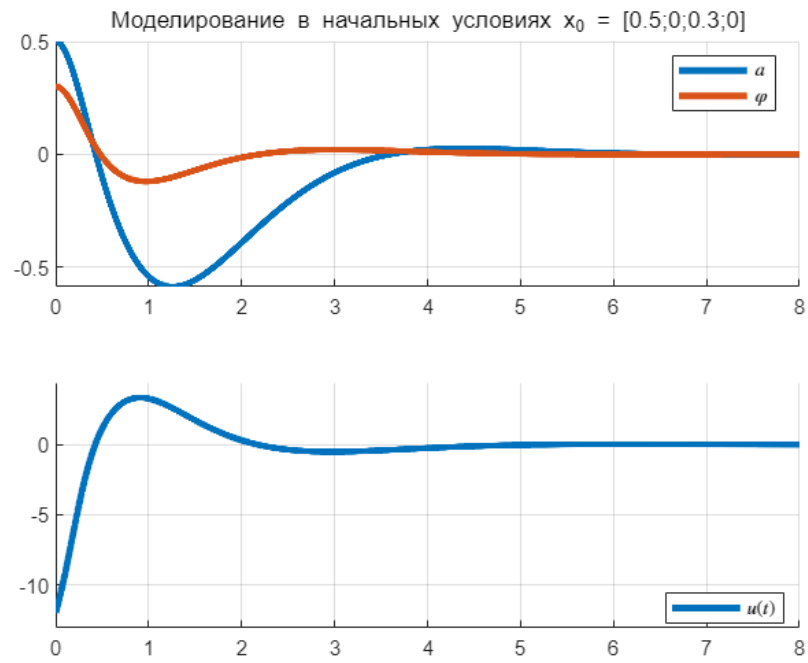


Рис. 3.2: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы с малым начальным углом

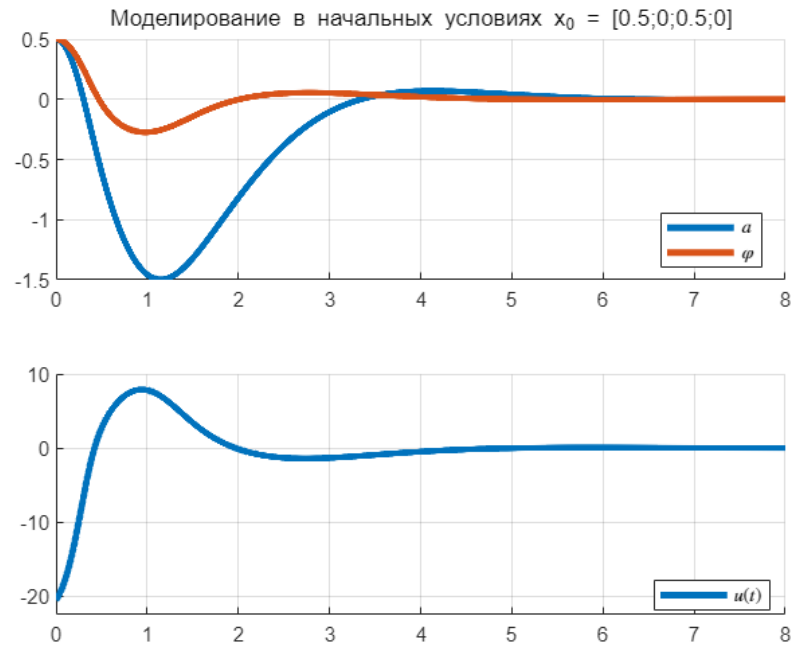


Рис. 3.3: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы со средним начальным углом

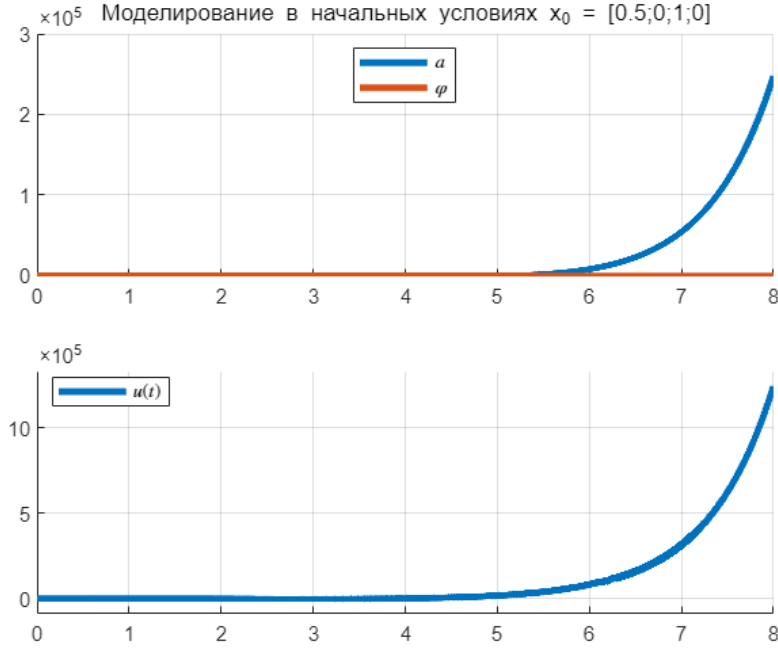


Рис. 3.4: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы с большим начальным углом

Так мы видим что регулятор работает только с малыми и очень маленькими начальными значениями. При больших значениях регулятор работает очень плохо и система неустойчива.

## 3.2 Исследование регулятора по состоянию

Я выбрал набор регуляторов  $G_1, G_2, G_3, G_4$ :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \\
 G_2 &= \begin{bmatrix} -3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \\
 G_3 &= \begin{bmatrix} -5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \\
 G_4 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Посмотрим результаты моделирования для различных собственных чисел

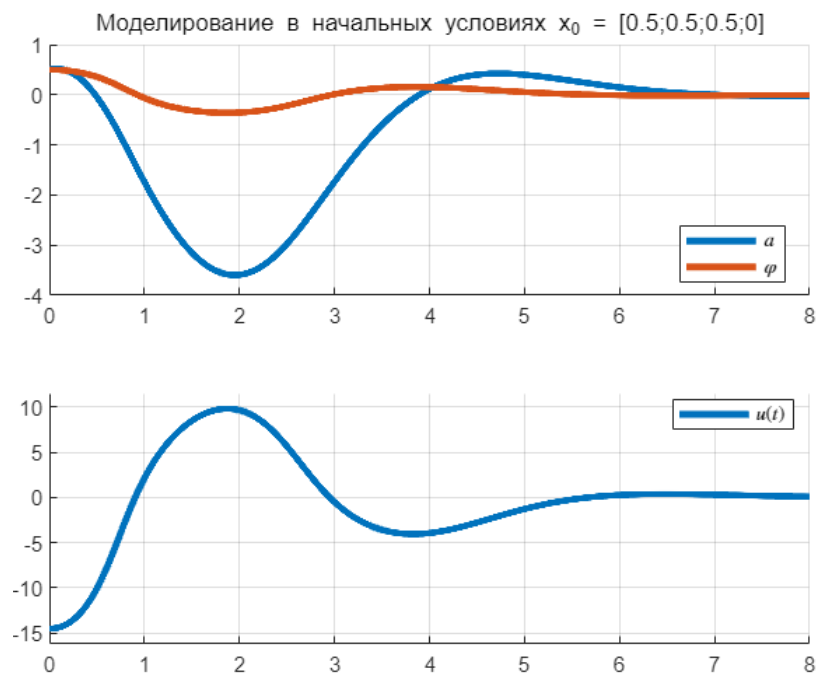


Рис. 3.5: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором  $G_1$

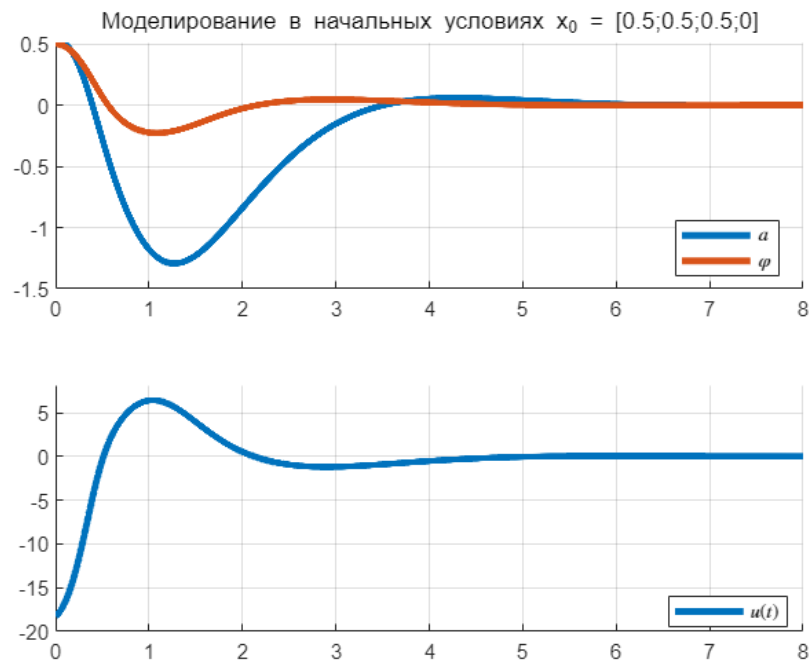


Рис. 3.6: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором  $G_2$

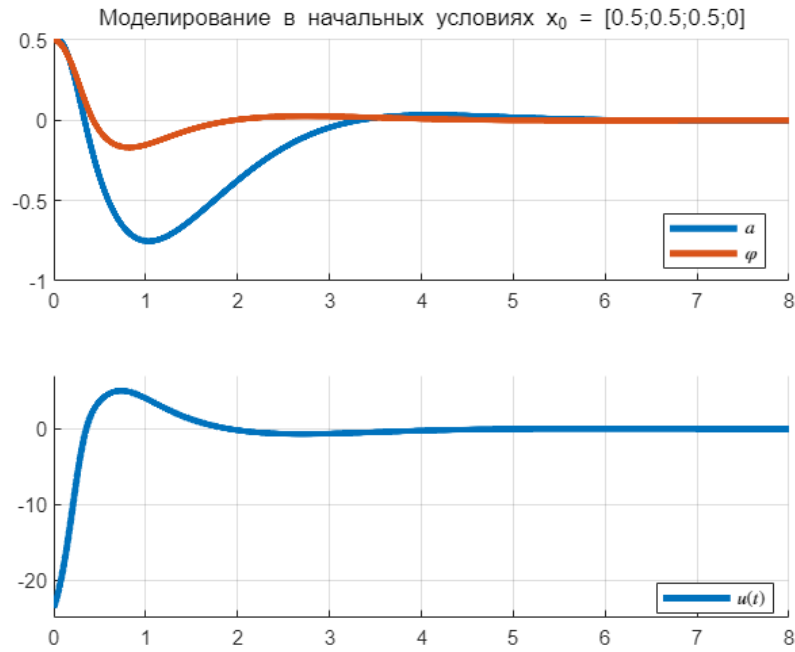


Рис. 3.7: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором  $G_3$

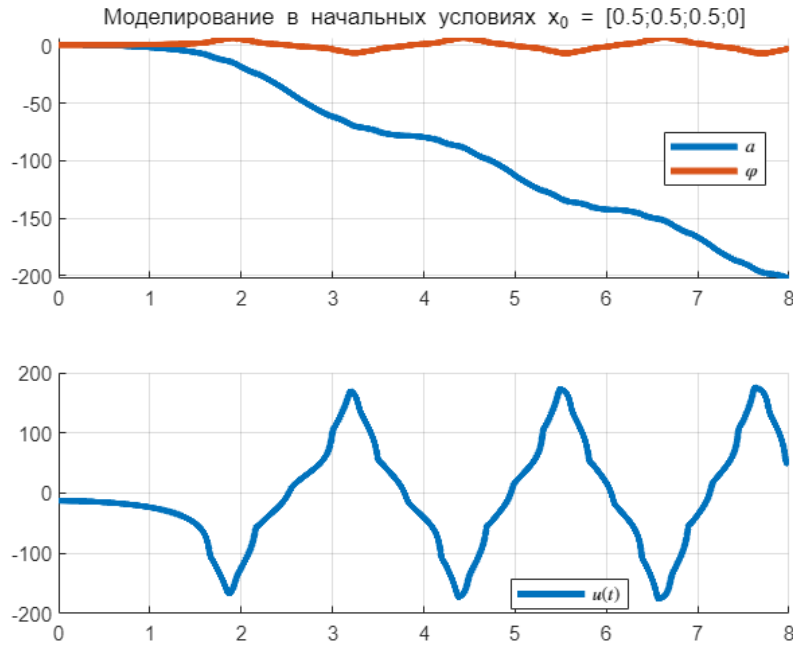


Рис. 3.8: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором  $G_4$

Я выбрал что собственные числа матриц  $G_3 > G_2 > G_1$

Мы видим что чем больше значения собственных чисел тем больше значения максимального отклонения маятников от вертикали и чем меньше значения максимального горизонтального смещения тележки. Чем больше значения собственных чисел тем больше значения максимального значения управляющего сигнала. Система сходится быстрее когда мы выбрали допустимые большие значения собственных чисел.

Фактом является то, что если собственные значения выбраны слишком малыми, система не может быть устойчивой, даже если все собственные значения замкнутой системы  $(A + BK)$  от-

рицательны. Примером этого является регулятор  $G_4$ .

### 3.3 Синтез наблюдателя

Уравнения модального наблюдателя

$$\begin{cases} \Gamma Q = QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases} \quad (3.2)$$

Я выбрал:

$$G = \begin{bmatrix} -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -5.0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Решим уравнения Сильвестра мы получаем L:

$$L = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.9 \\ -125.3 & -125.3 \\ -29.9 & -29.9 \\ -209.7 & -209.7 \end{bmatrix}$$

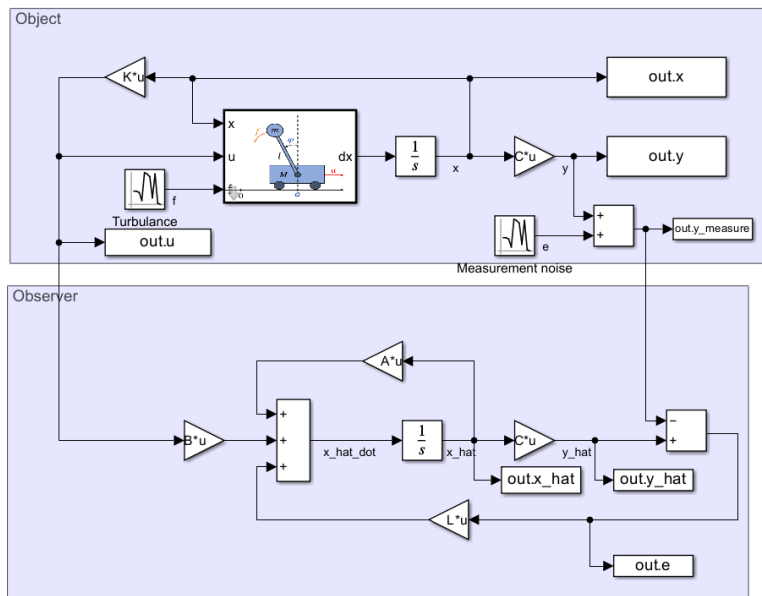


Рис. 3.9: Схема моделирования нелинейных систем с наблюдателями

Моделируем

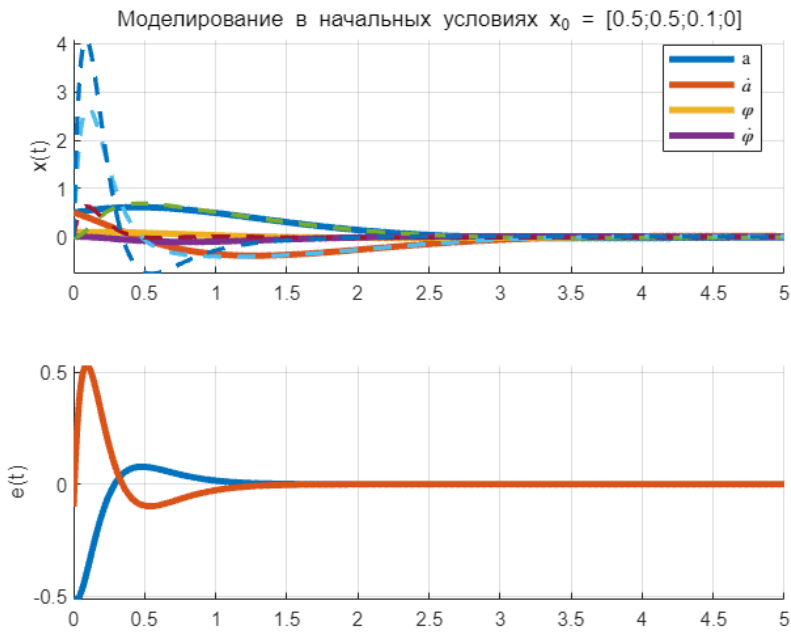


Рис. 3.10: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  наблюдателя с малым стартовым углом

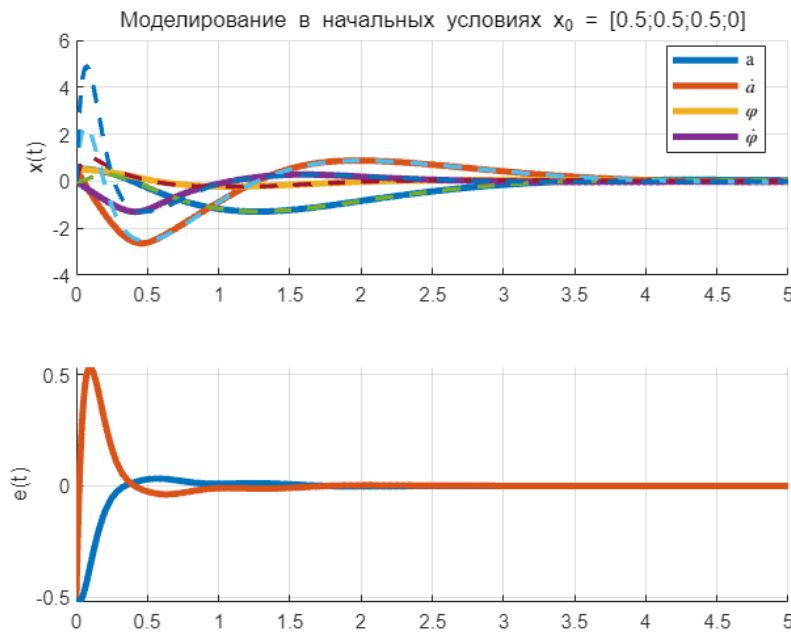


Рис. 3.11: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  наблюдателя со средним стартовым углом

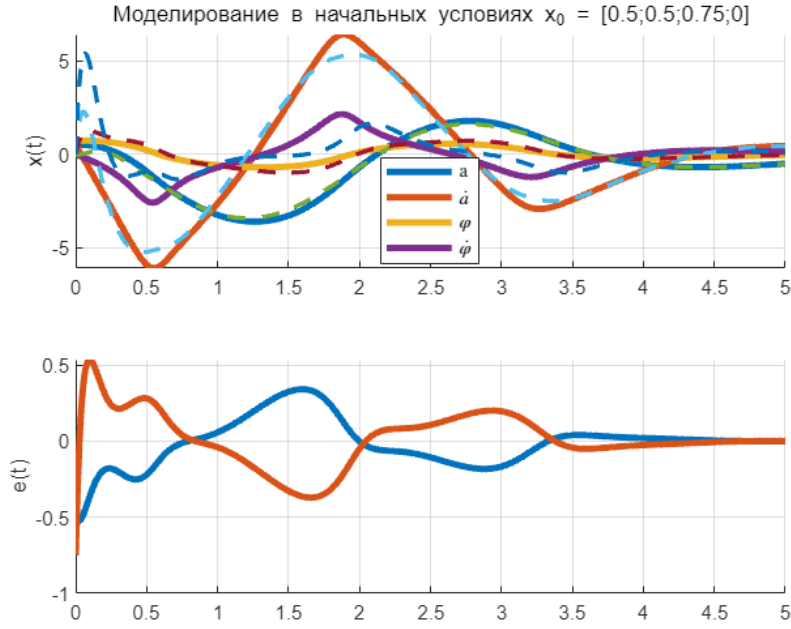


Рис. 3.12: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  наблюдателя с большим стартовым углом

Так мы видим что наблюдатель системы работает хорошо при малых значениях начальных условиях и плохо работает при больших значениях начальных условиях

### 3.4 Исследование наблюдателя

Я выбрал набор наблюдателя  $G_1, G_2, G_3$ :

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -15.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -20.0 & .0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -25.0 \end{bmatrix}$$

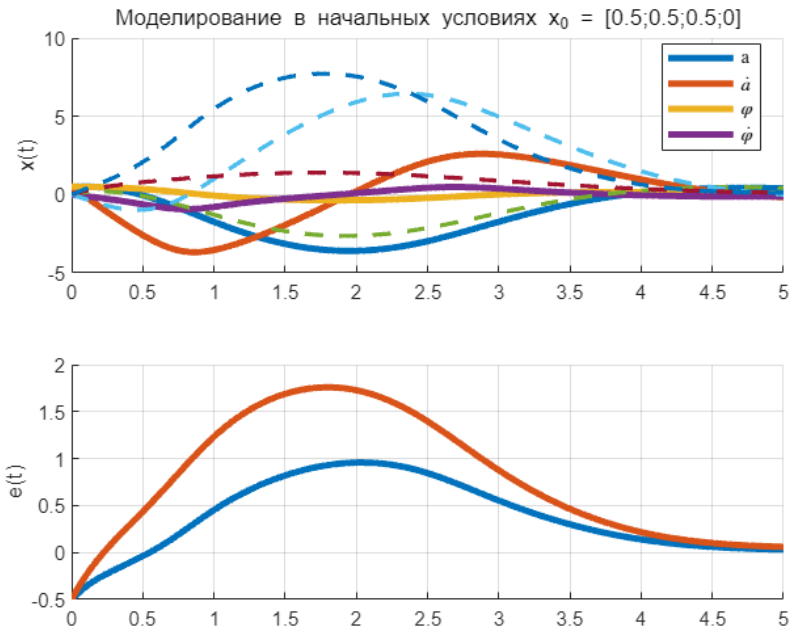


Рис. 3.13: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы с наблюдателем  $G_1$

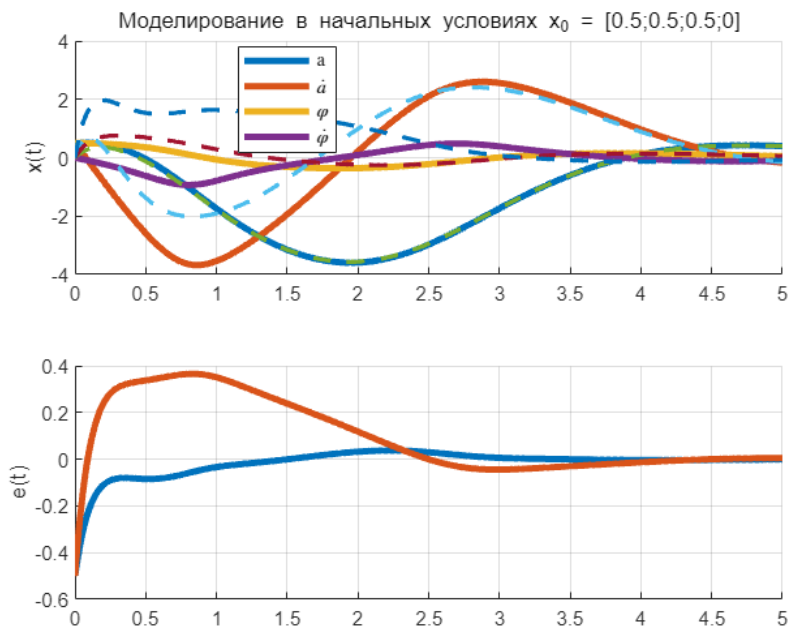


Рис. 3.14: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы с наблюдателем  $G_2$

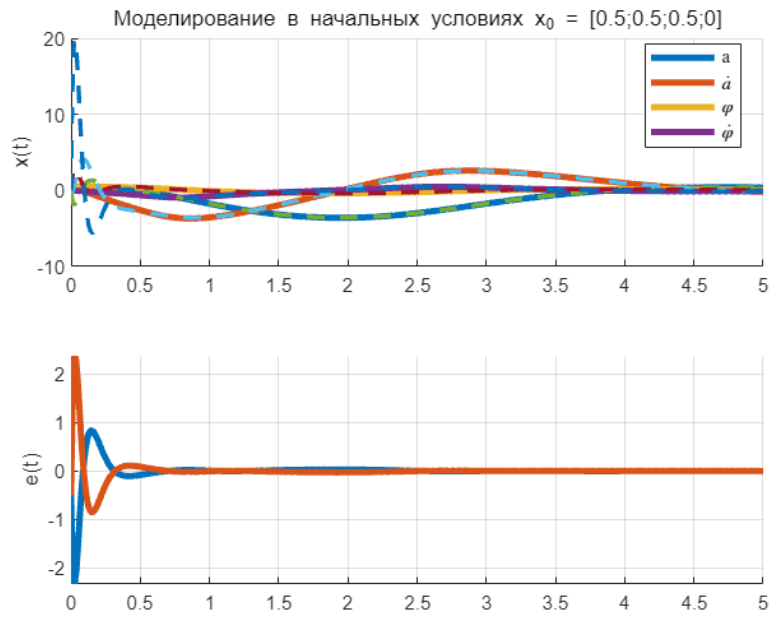


Рис. 3.15: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы с наблюдателем  $G_3$

Мы видим, что при наборе наблюдателей с большими собственными значениями скорость сходимости выше, но плохой стороной является то, что начальная ошибка также высока. Поэтому нам нужно взвешенно подбирать коэффициенты для наблюдателя.

### 3.5 Синтез регулятора по выходу

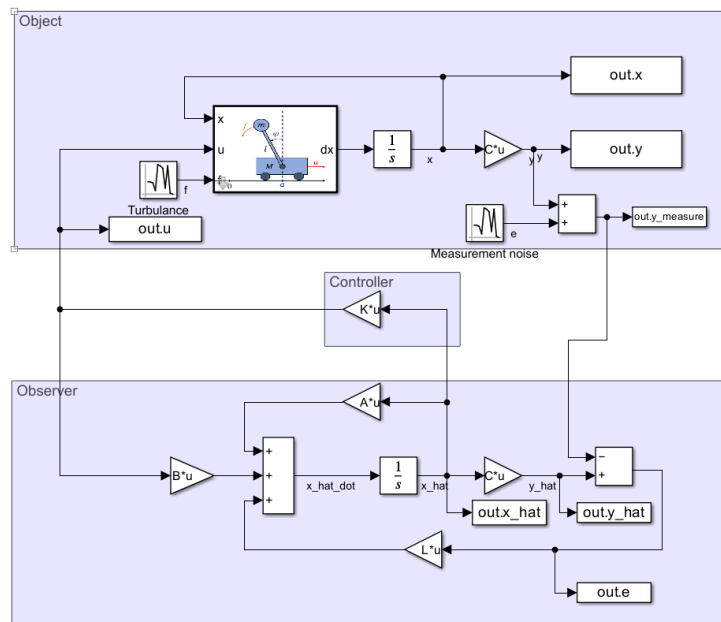


Рис. 3.16: Схема моделирования регулятором по выходу

Я решил зафиксировать один коэффициент для наблюдателя и несколько наборов коэффициентов для регулятора.

Для наблюдателя:

$$G_o = \begin{bmatrix} -5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -6.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

Для регуляторов:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} -3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} -5.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -6.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.0 \end{bmatrix}$$

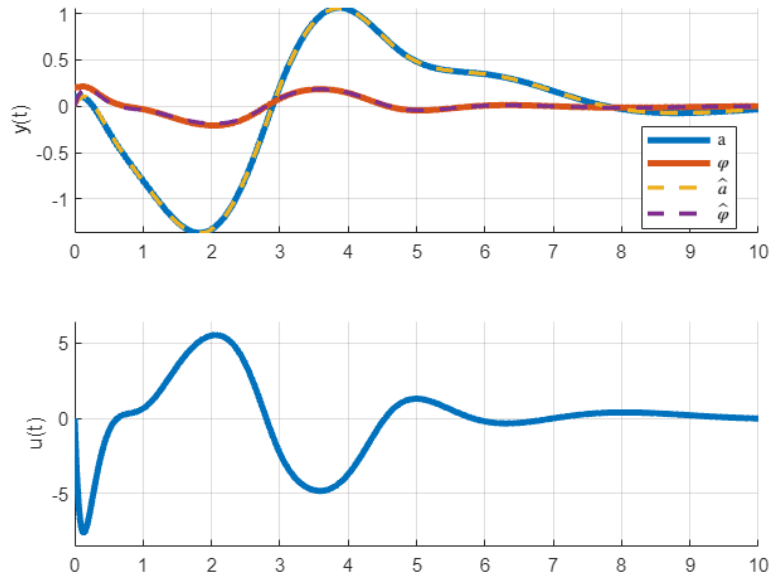


Рис. 3.17: График  $y(t)$  и  $u(t)$  системы с регулятором  $G_1$

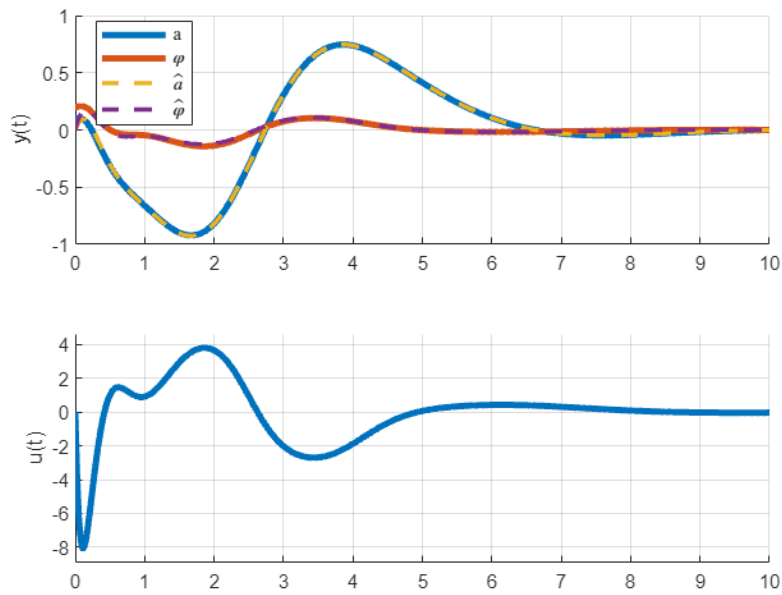


Рис. 3.18: График  $y(t)$  и  $u(t)$  системы с регулятором  $G_2$

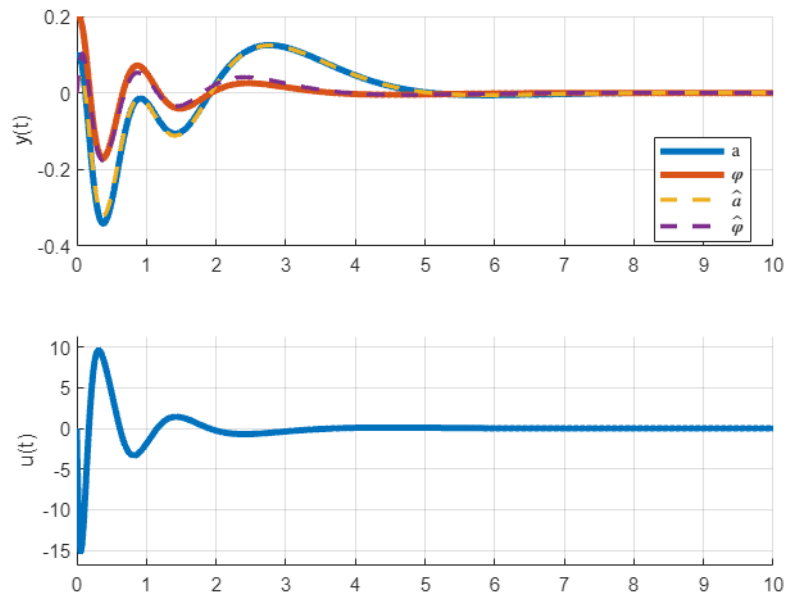


Рис. 3.19: График  $y(t)$  и  $u(t)$  системы с регулятором  $G_3$

Когда мы увеличиваем значение отдельных значений в регуляторе, скорость сходимости будет увеличиваться вместе с увеличением значения управляющего сигнала. Другое дело, что когда мы удаляем моды, вызывающие колебания в регуляторе, это также делает систему менее колебательной.

На мой взгляд, регулятор  $G_3$  хорош тем, что у него малое время сходимости, сигнал управления не слишком велик и имеет небольшие колебания.

## Глава 4

# СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

### 4.1 Синтез регулятора по состоянию

Неравенства для синтеза регулятора с заданной степенью устойчивости:

$$\begin{cases} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0, \\ P > 0, \\ K = YP^{-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

Я выбрал  $\alpha = 0.5$ , решив линейное неравенство 4.1, получим матрицу регулятора  $K$ , обеспечивающую скорость сходимости больше 0,5.

$$K = [6.7 \quad 12.0 \quad -92.8 \quad -19.7]$$

Далее мы протестируем этот регулятор в разных начальных условиях.

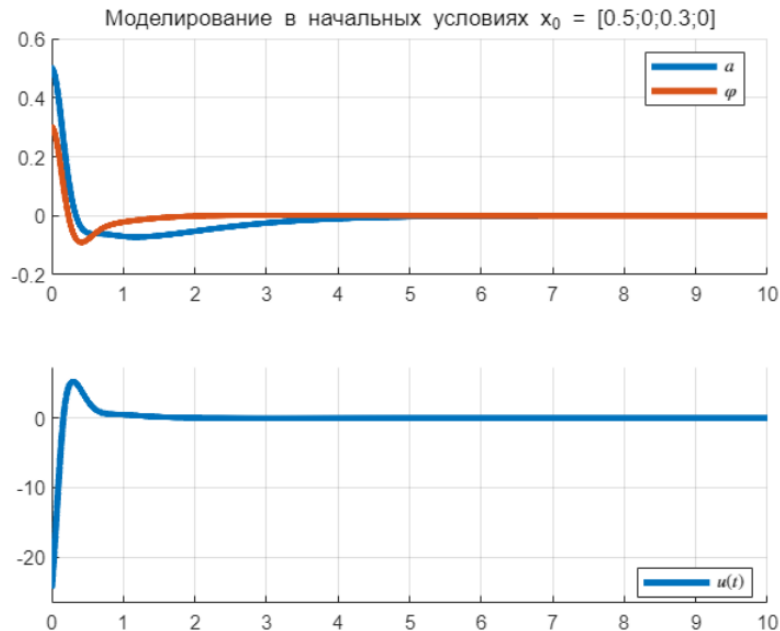


Рис. 4.1: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае малого начального угла

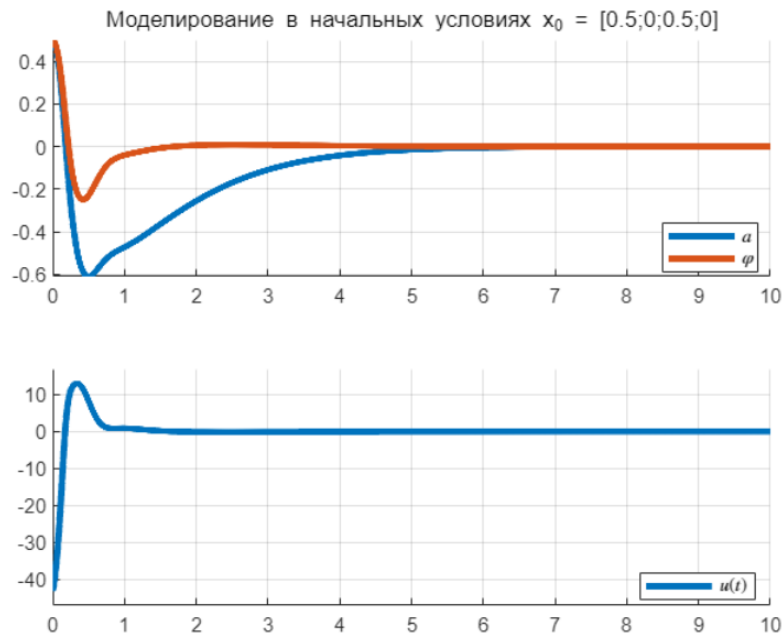


Рис. 4.2: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае среднего начального угла

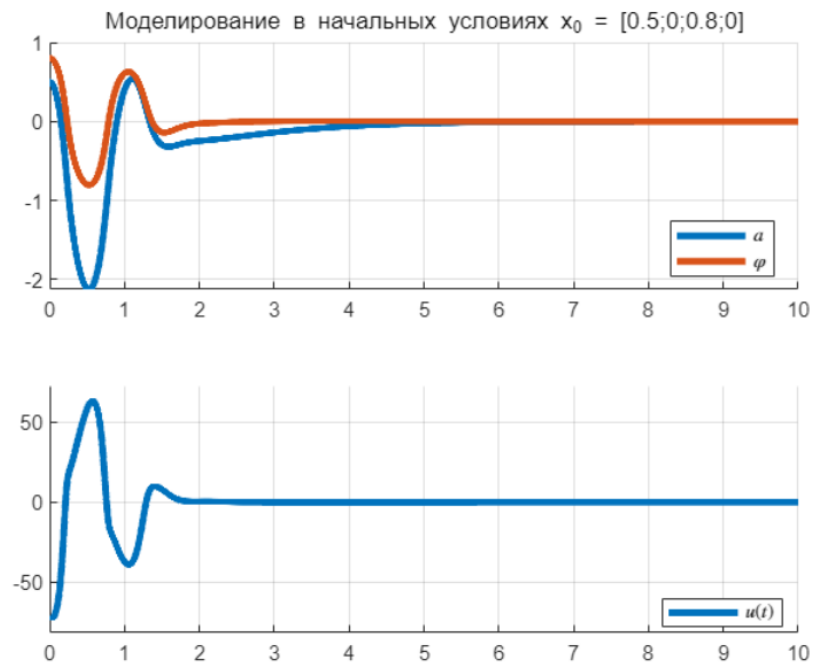


Рис. 4.3: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае большого начального угла

Мы видим, что в случае большого начального угла разница между линейной моделью и нелинейной моделью больше. Поэтому более низкая производительность регулятора вполне объяснима.

## 4.2 Исследование регулятора по состоянию

Переходим к синтезу регуляторов с разным уровнем устойчивости  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 1$  и оценить их при одинаковых начальных условиях

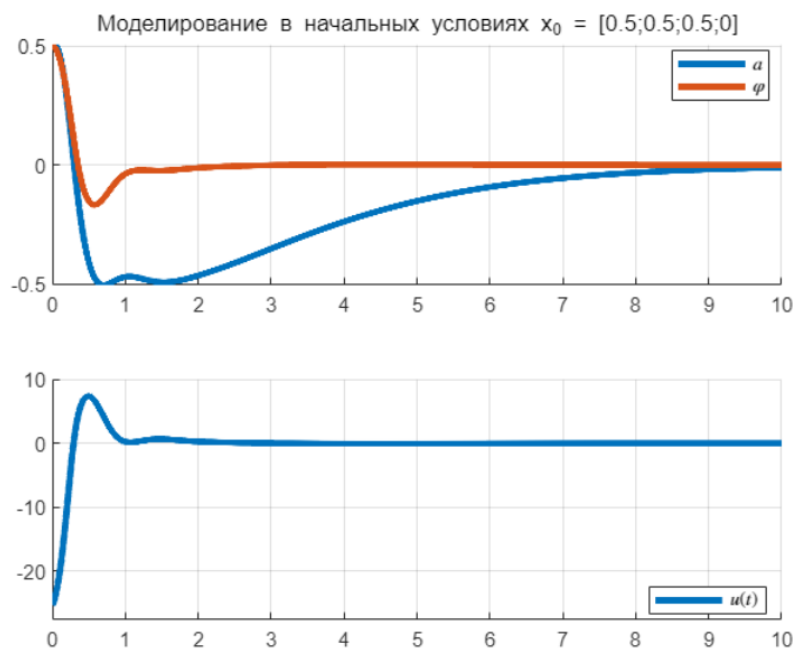


Рис. 4.4: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором со степенью устойчивости  $\alpha = 0.1$

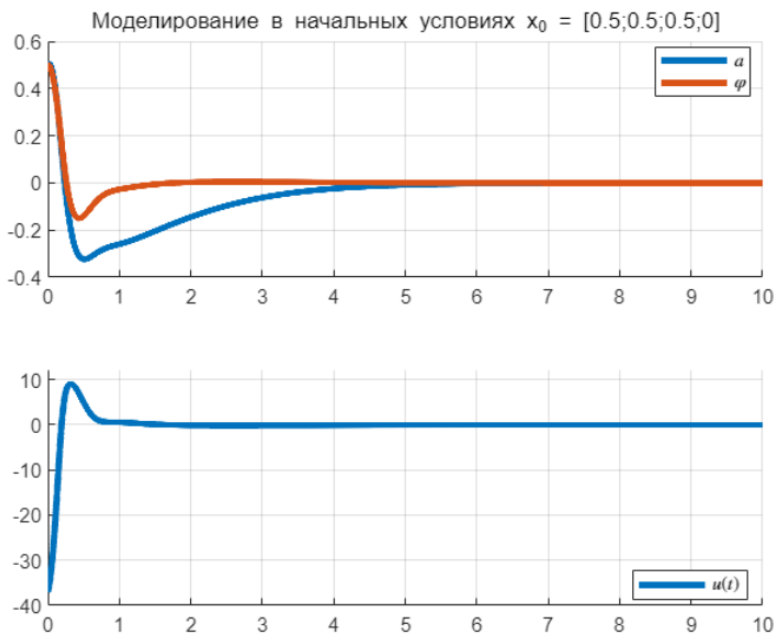


Рис. 4.5: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором со степенью устойчивости  $\alpha = 0.5$

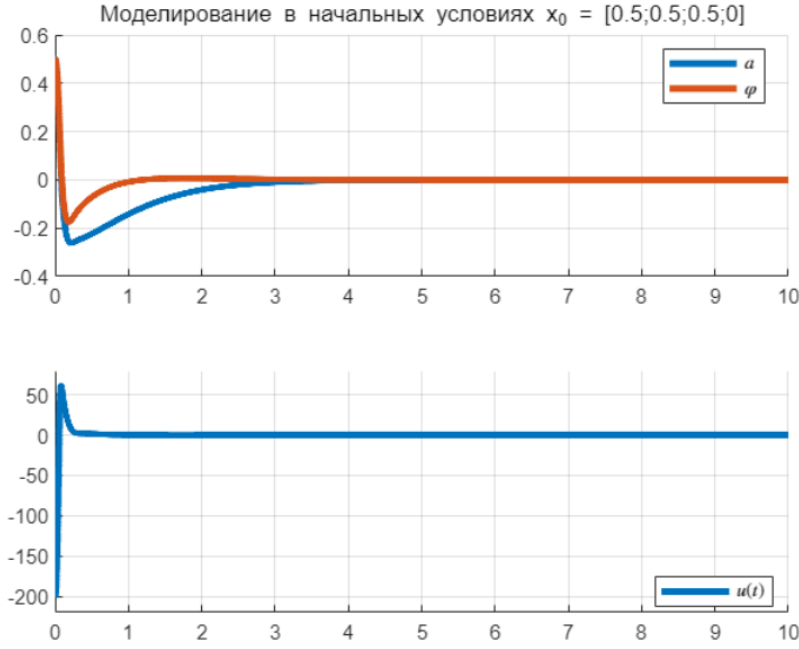


Рис. 4.6: График вектора состояния  $x(t)$ ,  $u(t)$  нелинейной системы с регулятором со степенью устойчивости  $\alpha = 1.0$

Мы видим, что хотя выбранные нами уровни стабильности сильно различаются, глядя на график, они не имеют слишком большой разницы. Это объясняется тем, что когда мы решаем линейное неравенство LMI без ограничения на управляющий сигнал, компьютер возвращает нам любой регулятор, который удовлетворяет большой скорости сходимости на том уровне, который я ему дал.

Глядя на график, мы видим, что у регулятора с большей степенью устойчивости максимальное значение отклонения тележки и отклонения маятника меньше.

### 4.3 Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление

Далее мы синтезируем регулятор, который минимизирует управляющий сигнал, сохраняя при этом скорость сходимости с заданными начальными условиями.

$$\begin{cases} P > 0, PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY < 0, \\ \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} > 0; \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix} > 0; \\ \text{minimize } \gamma, \\ K = YP^{-1} \end{cases} \quad (4.2)$$

Я выбрал  $\alpha = 1$ . Мы протестируем этот регулятор при разных начальных условиях линейной и нелинейной модели.

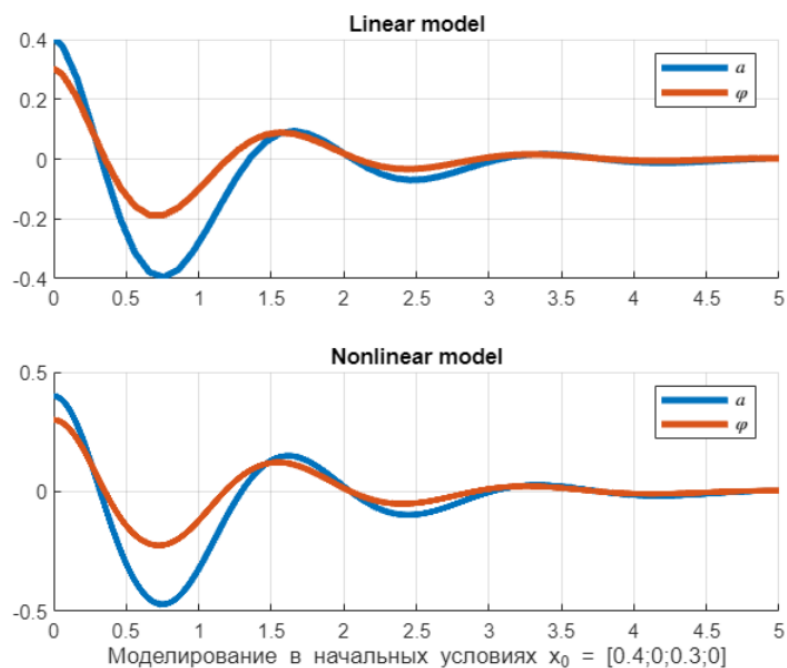


Рис. 4.7: График вектора состояния  $x(t)$  линейных и нелинейных систем в случае малых начальных углов

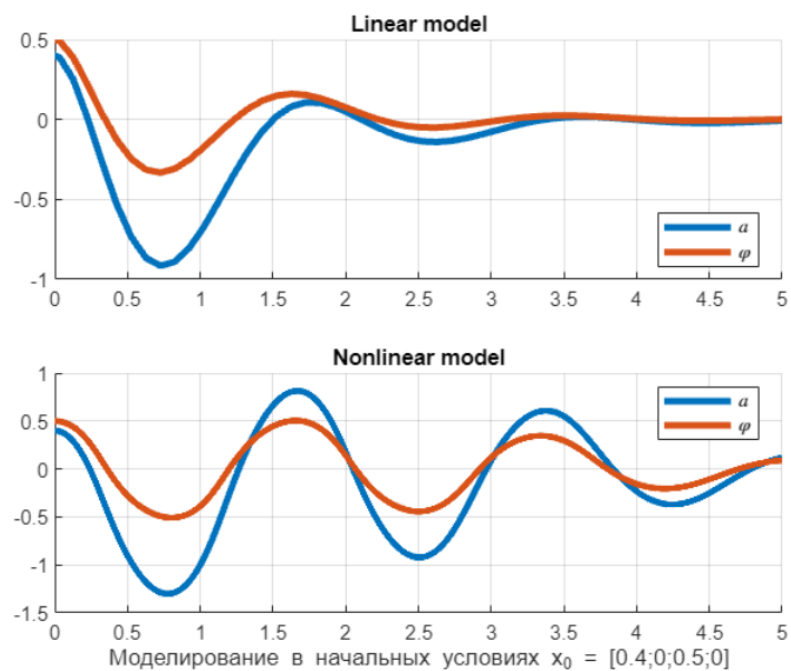


Рис. 4.8: График вектора состояния  $x(t)$  линейной и нелинейной системы в случае среднего начального угла

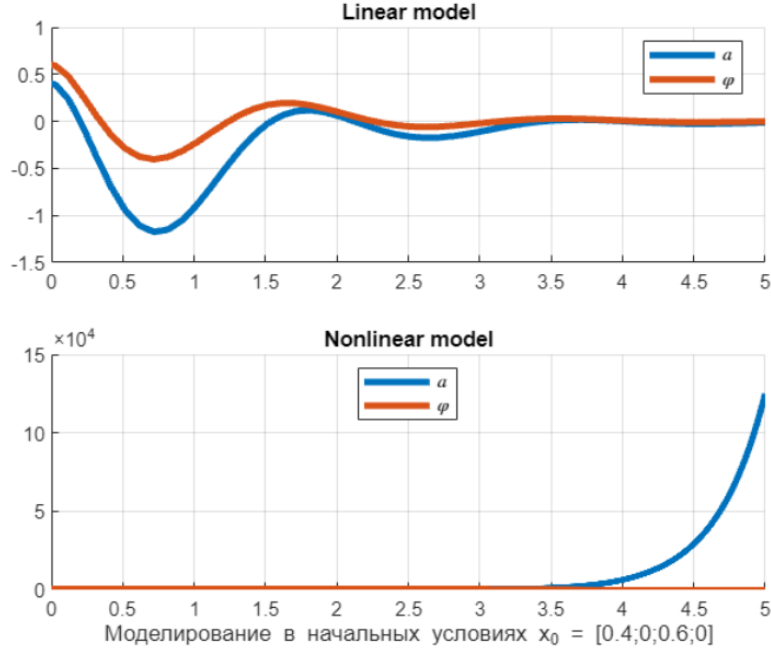


Рис. 4.9: График вектора состояния  $x(t)$  линейных и нелинейных систем в случае больших начальных углов

Глядя на график, мы видим, что регулятор работает очень хорошо для линейной модели, даже несмотря на большой начальный угол. А вот у нелинейной модели регулятор работает хуже, на третьем графике система даже нестабильна.

## 4.4 Синтез наблюдателя

Неравенства для синтеза наблюдателя

$$\begin{cases} Q > 0, \\ A^T Q + Q A + 2\alpha Q + C^T Y^T + Y C < 0, \\ L = Q^{-1} Y \end{cases} \quad (4.3)$$

Далее мы приступаем к синтезу наблюдателя, обеспечивающего скорость сходимости  $\alpha > 1$ , и тестируем его при различных начальных условиях.

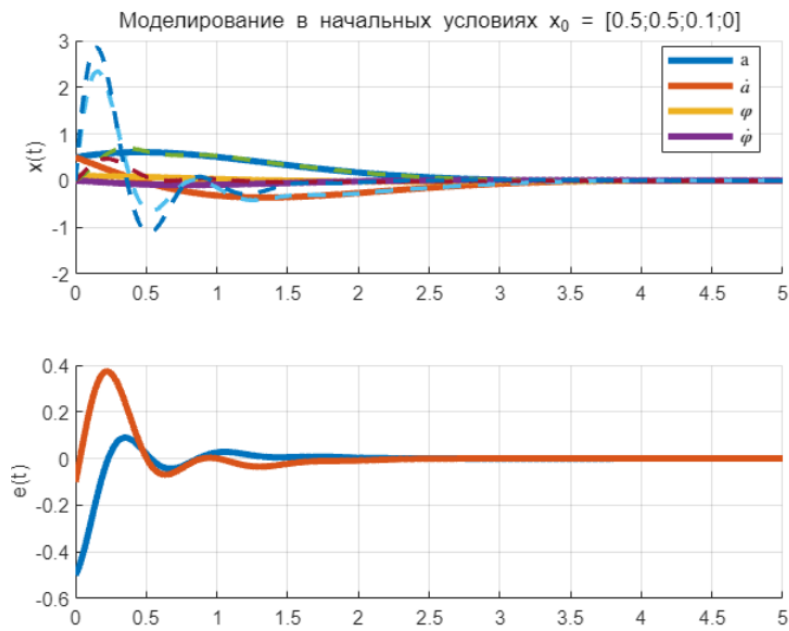


Рис. 4.10: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы с малым начальным углом отклонения

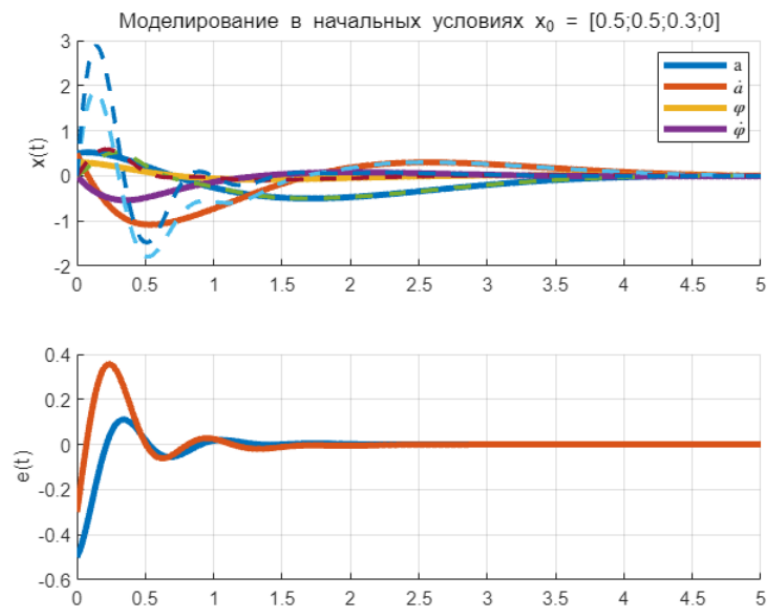


Рис. 4.11: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы со средним начальным углом отклонения

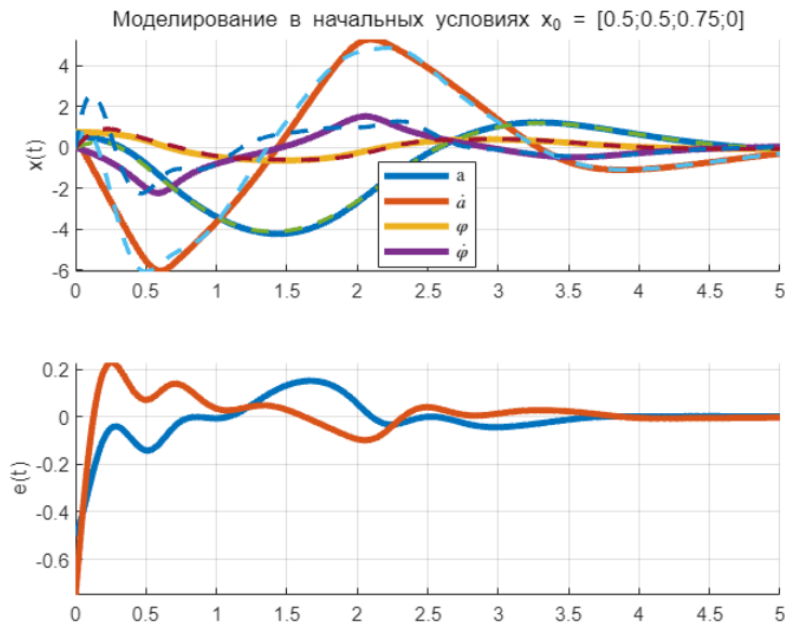


Рис. 4.12: График  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$  системы с большим начальным углом отклонения

Глядя на график, мы видим, что по мере увеличения начального угла отклонения разница между линейной моделью и нелинейной моделью становится больше. Следовательно, и регулятор, и наблюдатель работают хуже с увеличением начального угла отклонения.

## 4.5 Синтез регулятора по выходу

Далее приступим к синтезу регулятора по выходу. Я выбираю скорость сходимости  $\alpha = .5$  для наблюдателя чтобы начальная ошибка не была слишком велика и скорость сходимости находилась на приемлемом уровне. Я выбираю скорость сходимости  $\alpha = 0.7$  для регулятора. Далее мы протестируем систему при различных начальных условиях.

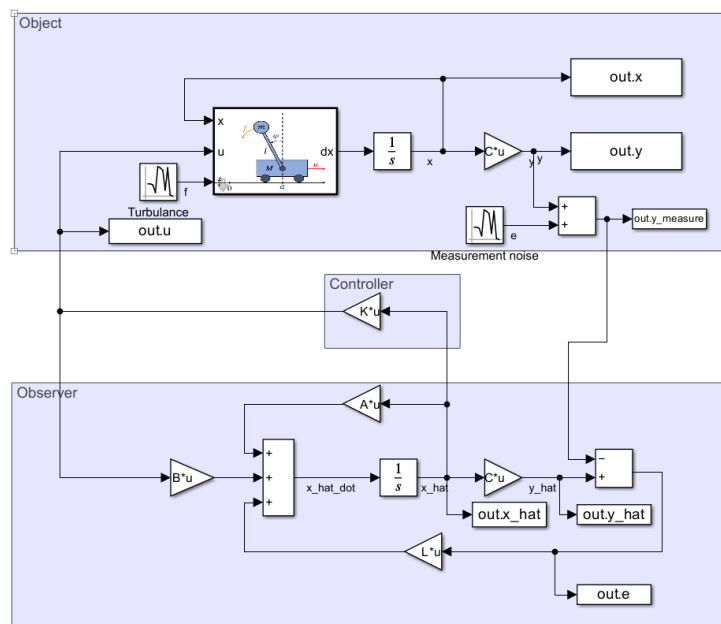


Рис. 4.13: Схема моделирования регулятором по выходу

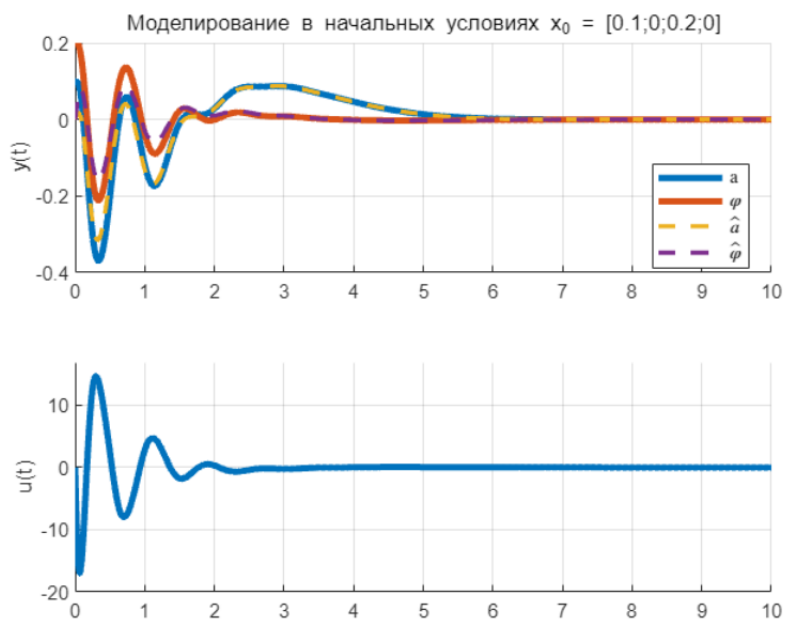


Рис. 4.14: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае малого начального угла

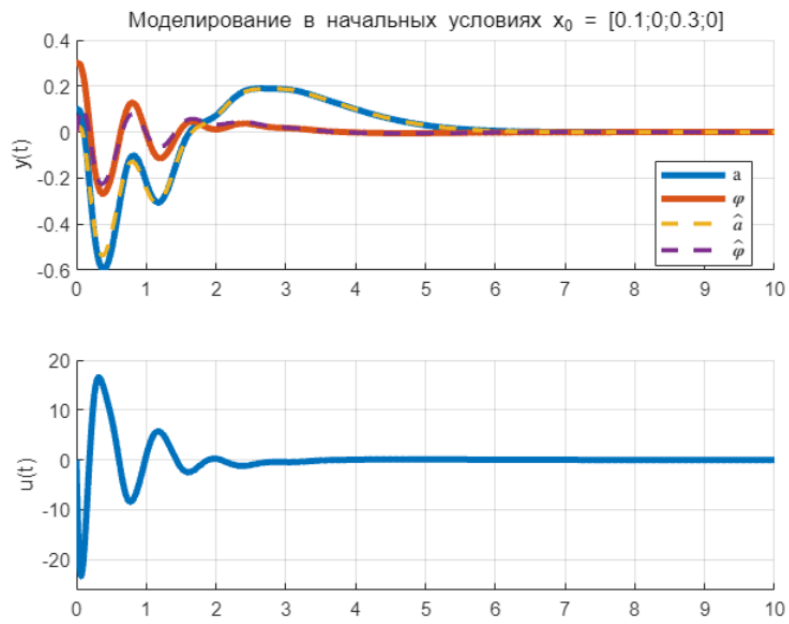


Рис. 4.15: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае среднего начального угла

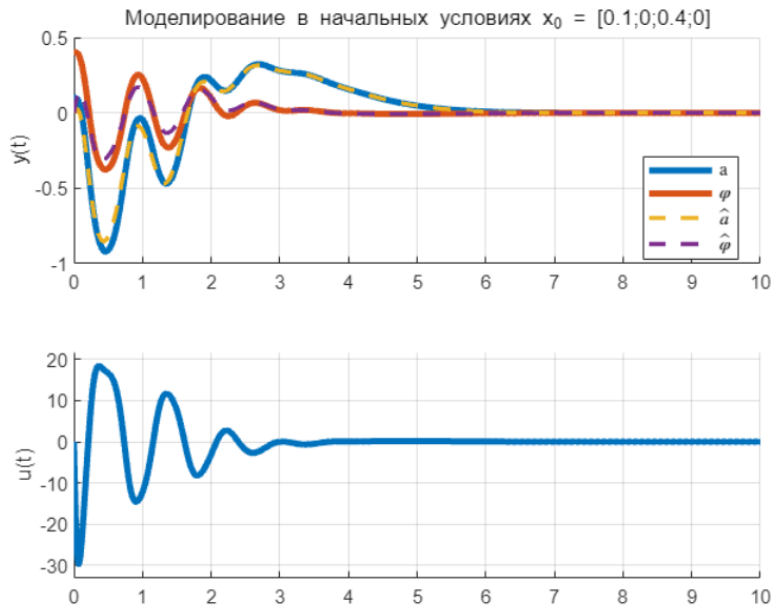


Рис. 4.16: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае большого начального угла

Мы видим, что и регулятор, и наблюдатель работают хорошо.

## Глава 5

# СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА: LQR И ФИЛЬТР КАЛМАНА

### 5.1 Синтез линейно-квадратичного регулятора

Для получения LQR требуется минимизировать функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

, где минимальное значение  $J = x_0^T P x_0$

Запишем уравнение Риккати:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Только одно решение уравнения будет положительно определено с соответствующим регулятором, сводящим систему в ноль, если  $Q \geq 0, R > 0, (A, B)$  стабилизируема,  $(Q, A)$  наблюдаема.

Регулятор  $K$ :

$$K = -R^{-1}B^T P$$

Выбрал матрицы  $Q$  и  $R$ , так что время и энергия имеют одно и то же значение:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

Далее мы протестируем этот регулятор в разных начальных условиях.

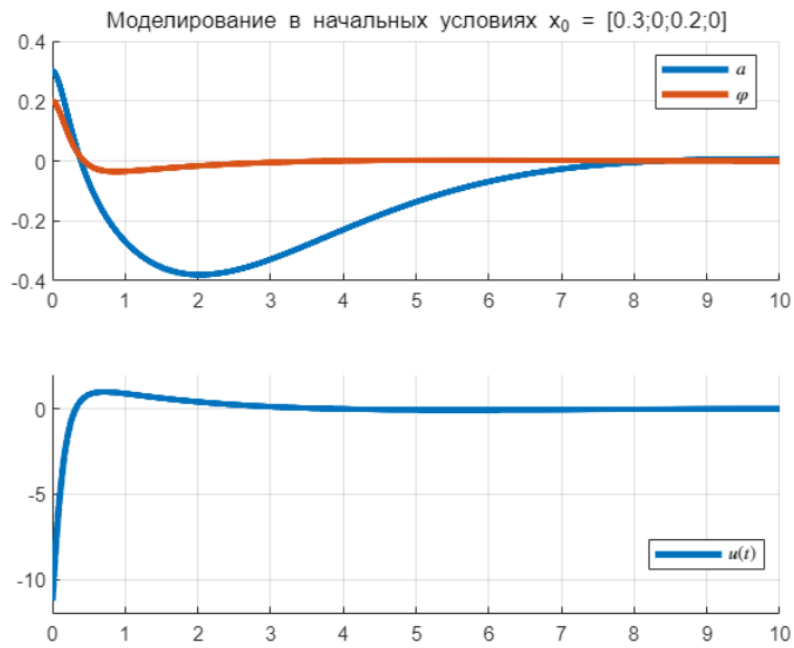


Рис. 5.1: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае малого начального угла

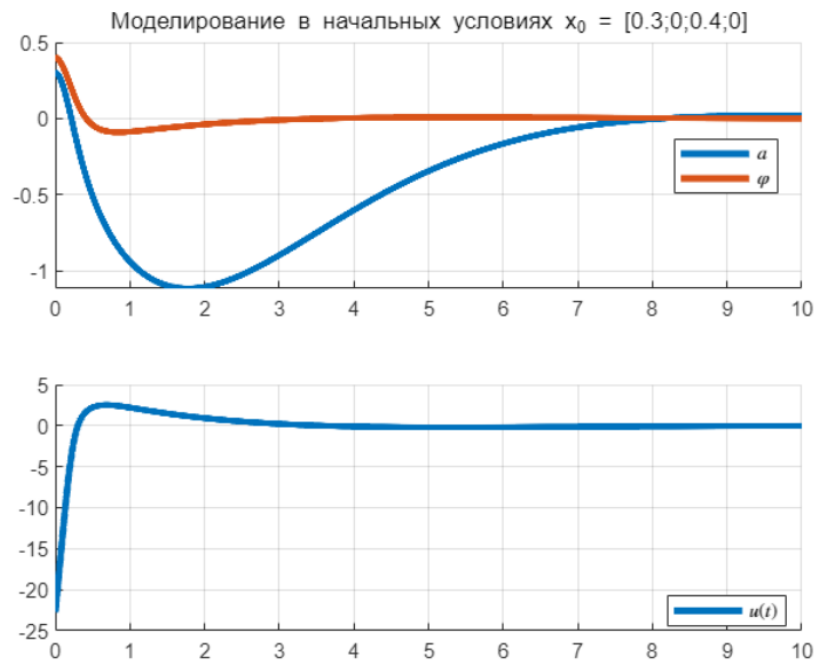


Рис. 5.2: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае среднего начального угла

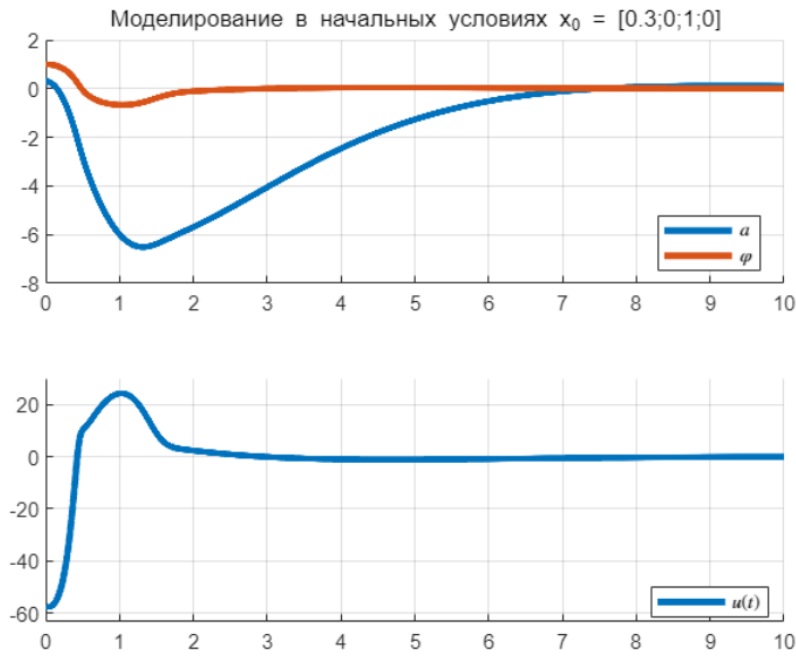


Рис. 5.3: График вектора состояния  $x(t)$  нелинейной системы в случае большого начального угла

Как мы видим, система работает очень хорошо при всех трех начальных условиях. Интересно то, что регулятор, выбранный методом LQR, способен работать с большим начальным углом отклонения, чем регуляторы, выбранные двумя способами выше.

## 5.2 Исследование линейно-квадратичного регулятора

Далее мы выберем четыре пары матриц Q и R.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = [1], \quad \text{- Время и энергия одинаково важны} \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = [1], \quad \text{- Положение тележки очень важно} \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = [1], \quad \text{- Угол отклонения маятника является наиболее важным.} \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_4 = [\mathbf{10}], \quad \text{- Энергия – самое важное}
 \end{aligned}$$

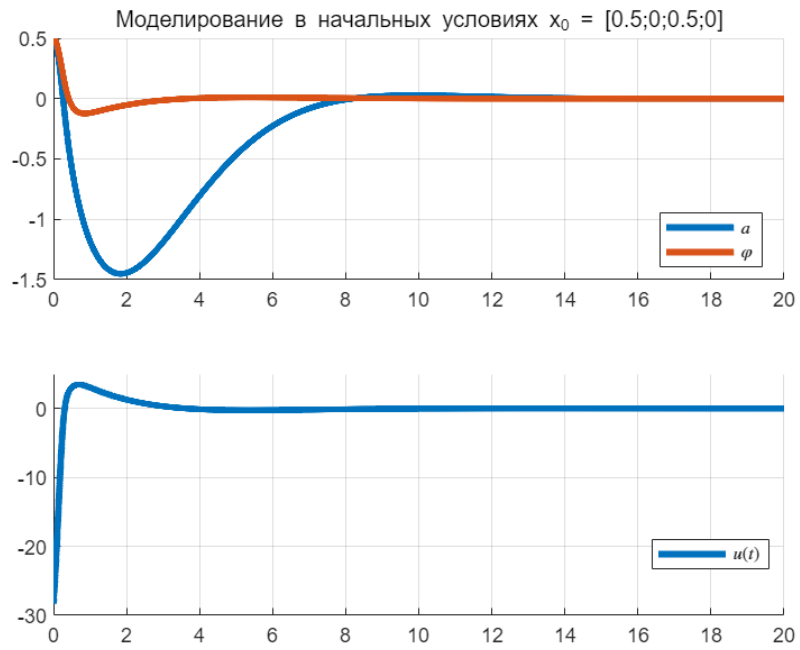


Рис. 5.4: Система с регулятором имеют одинаково важные затраты времени и энергии.

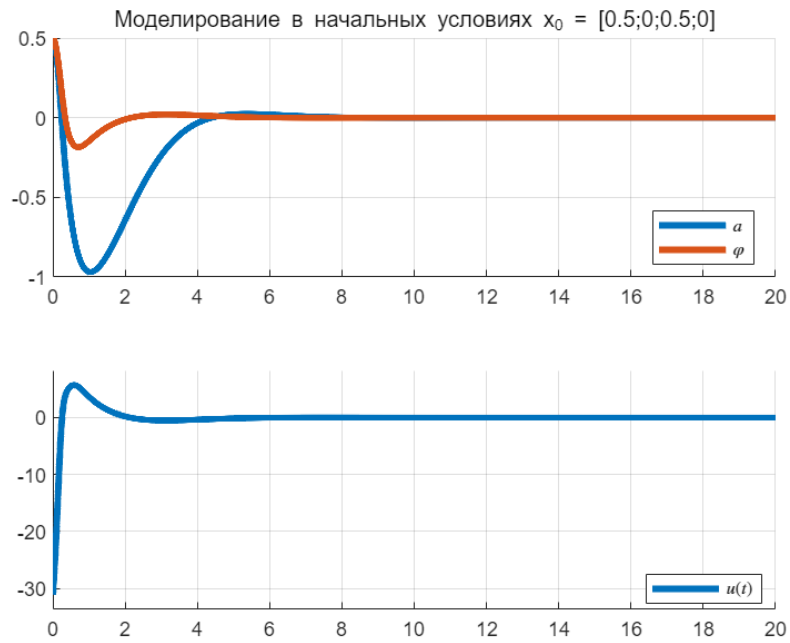


Рис. 5.5: Система с регулятором означает, что положение тележки является наиболее важным

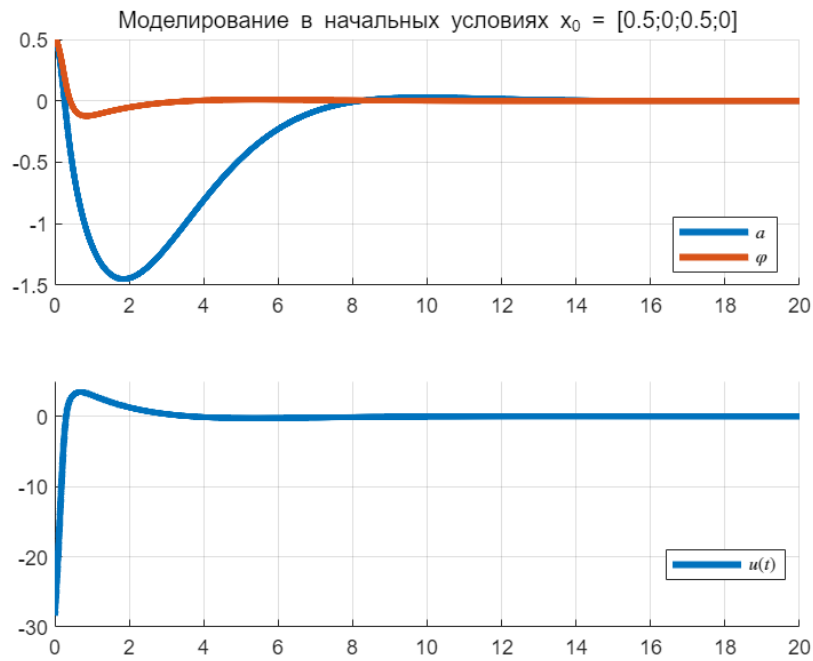


Рис. 5.6: Система с регулятором означает, что угол отклонения маятника является наиболее важным.

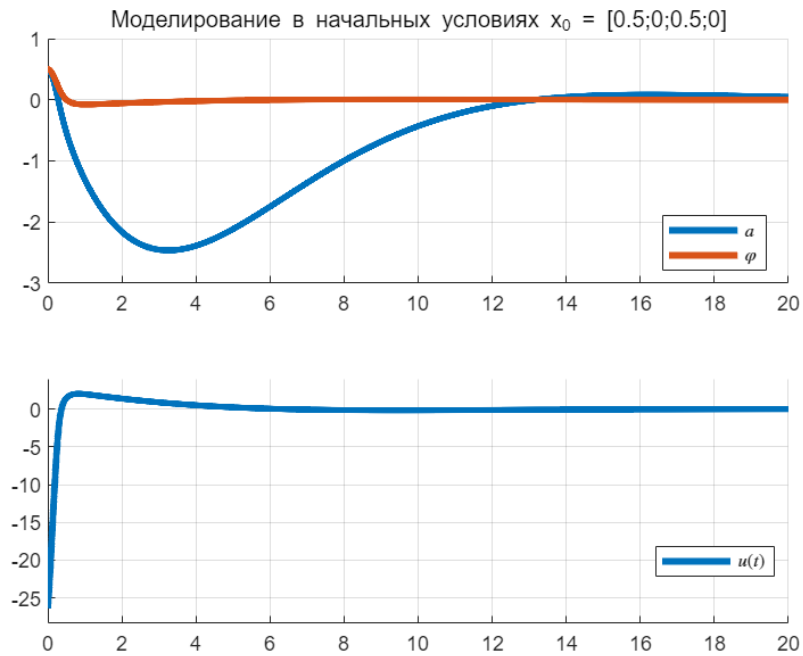


Рис. 5.7: Система с регулятором, где количество энергии является наиболее важным

Из графиков видно, что регуляторы работают очень хорошо и полностью соответствуют исходным критериям проектирования.

### 5.3 Синтез фильтра Калмана

Уравнения фильтра Калмана:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}$$

В котором матрицы Q и R будут определять чувствительность фильтра к шумовым сигналам. Предположим, что все компоненты  $f, \xi$  примерно одинаковы.

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

У нас случайные сигналы  $f$  и  $\xi$

$$\begin{cases} f - \text{белый шум, } f^2 \approx Q \\ \xi - \text{белый шум, } \xi^2 \approx R \end{cases}$$

Предположим, мы угадали значения  $f_{guess}$  и  $\xi_{guess}$ . Вместо того, чтобы напрямую выбирать значения матриц Q и R, мы хотим выбрать значения для матриц Q и R, через два значения  $f_{guess}$  и  $\xi_{guess}$ , которые мы угадали.

$$\begin{cases} f_{guess}^2 \approx \det(Q) = q^4 \\ \xi_{guess}^2 \approx \det(R) = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q \approx \sqrt{f_{guess}} \\ r \approx \xi_{guess} \end{cases}$$

Мы проведем моделирование в лучшем случае, где мы правильно спрогнозируем стандартное отклонение шума  $f_{guess} = f = 0.01$ ,  $\xi_{guess} = \xi = 0.01$ .

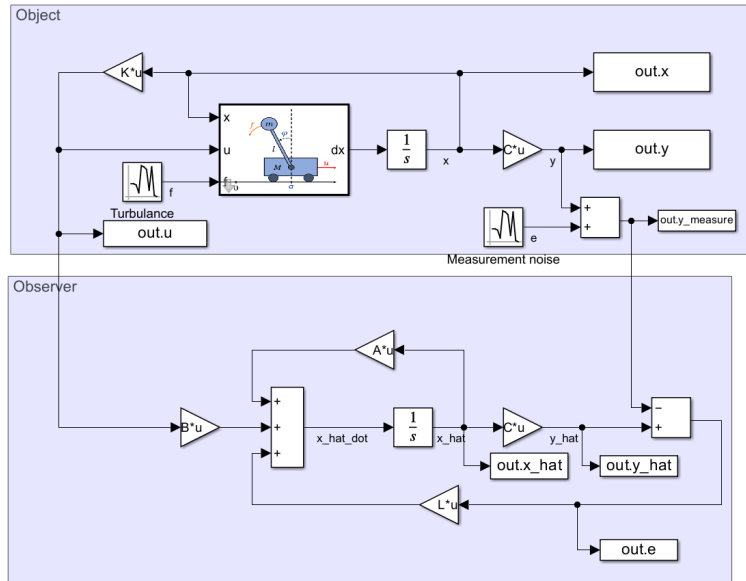


Рис. 5.8: Схема моделирования

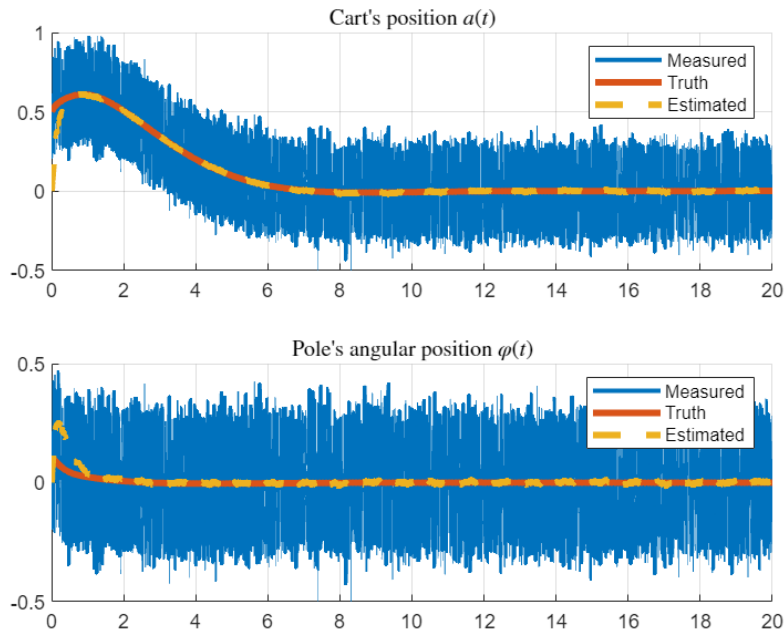


Рис. 5.9: Нелинейная система с наблюдателем фильтра Калмана

## 5.4 LQG для линейной модели

В этом разделе нам нужно построить регулятор и наблюдатель для линейной системы. Я буду использовать того же наблюдателя, что и в разделе 5.3, и регулятор, который имеет одинаково важные затраты времени и энергии.

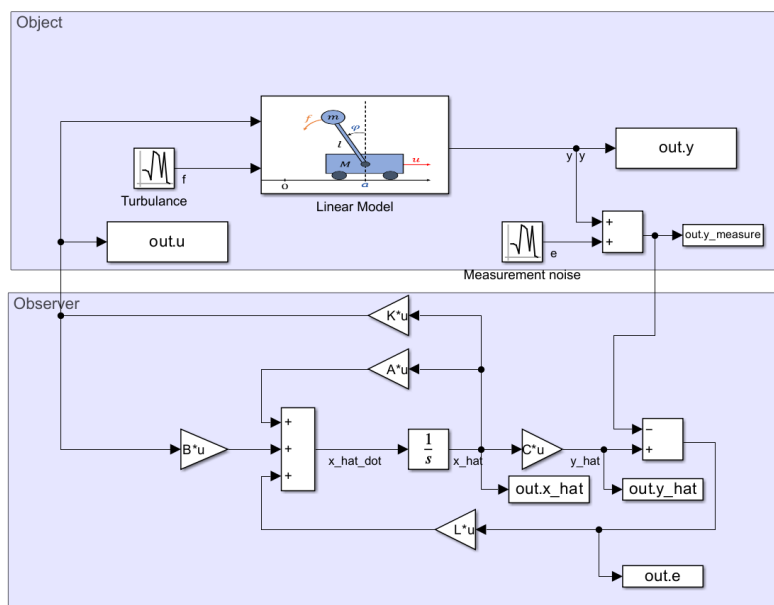


Рис. 5.10: Схема моделирования линейной системы

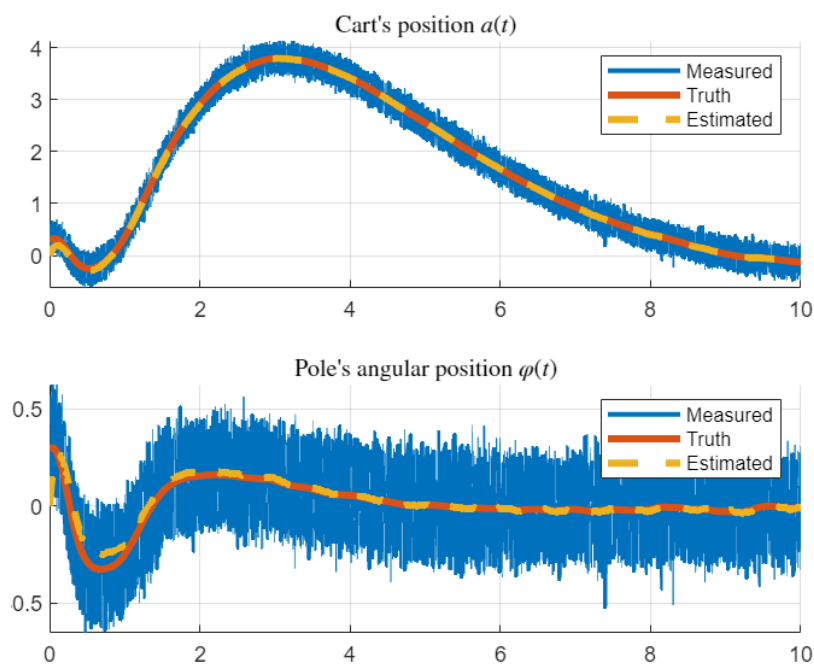


Рис. 5.11: График положения транспортного средства и положения маятника линейной системы с регулятором LQG

## 5.5 LQG для нелинейной модели

В этом разделе нам нужно построить регулятор и наблюдатель для линейной системы. Я буду использовать того же наблюдателя, что и в разделе 5.3, и регулятор, который имеет одинаково важные затраты времени и энергии.

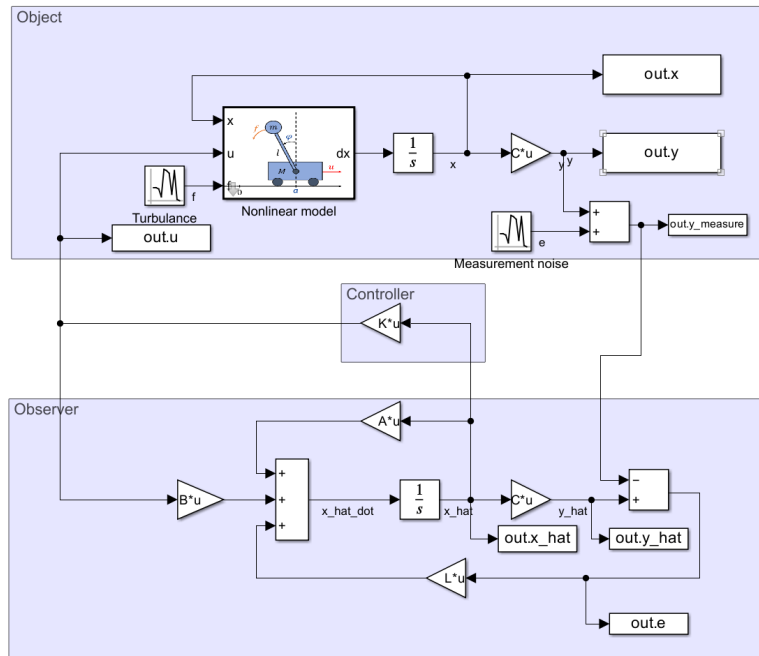


Рис. 5.12: Схема моделирования нелинейной системы

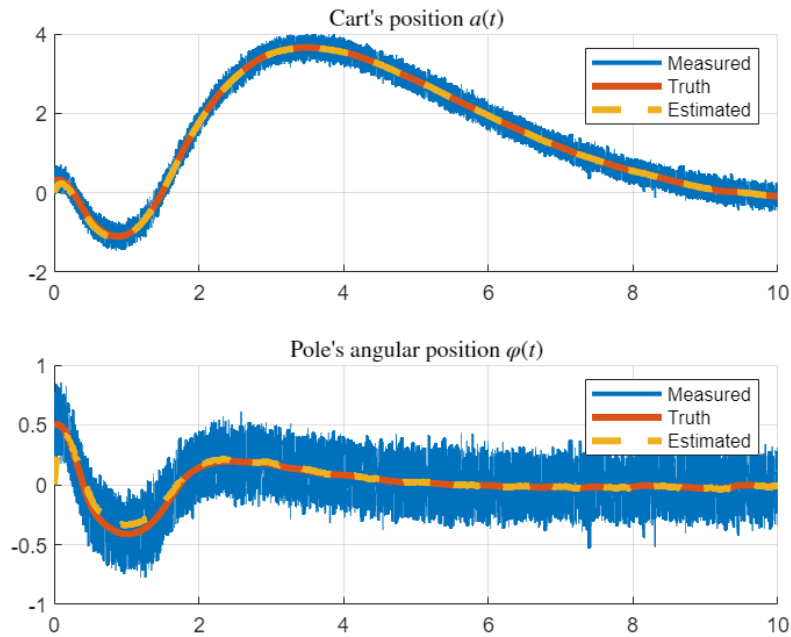


Рис. 5.13: График положения транспортного средства и положения маятника нелинейной линейной системы с регулятором LQG

Мы видим, что регулятор LQG хорошо работает как в линейных, так и в нелинейных системах.

## Глава 6

# СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ

Чтобы облегчить решение задач, я перепису уравнения, представляющие систему, так, чтобы между уравнениями, приведенными в лекции, и нашей системой была согласованность.

Объект управления:

$$\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w \quad (6.1)$$

где:

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \\ B_1 &= B \end{aligned}$$

Внешний сигнал:

$$\dot{w} = A_2w \quad (6.2)$$

Цель управления:

$$z = C_2x + D_2w, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (6.3)$$

И для решения двух вышеуказанных задач нам потребуется построить регулятор, состоящий из двух компонентов: обратной связи и прямой связи.

$$u = K_1x + K_2w$$

Уравнения следящего регулятора:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \\ K_1P + K_2 = Y \end{cases} \quad (6.4)$$

### 6.1 Решение задачи компенсации

В задаче компенсации мы спроектируем регулятор, способный компенсировать внешние возмущения и поддерживать асимптотически устойчивую систему.

Задача компенсации:

$$B_2 \neq 0, \quad D_2 = 0 \quad (6.5)$$

и  $w$  - внешнее возмущение

Модель возмущения:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{w}_5 \\ \dot{w}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Внешняя сила, которую я выбираю, представляет собой сумму трех осциллирующих сигналов разных частот.

$$f = w_1 + w_3 + w_5, \rightarrow Y_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Матрица  $B_2$  будет рассчитываться следующим образом:

$$B_2 = DY_f \quad (6.8)$$

Мы хотим, чтобы тележка двигалась вперед и назад, сохраняя при этом маятник неподвижным.

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

И поскольку это задача компенсации, матрица  $D_2$  будет равна 0.

Первый шаг — выбрать  $K_1$  любым методом, я выберу  $K_1$  методом LQR. Второй шаг — решить уравнение 6.4 и найти  $K_2$

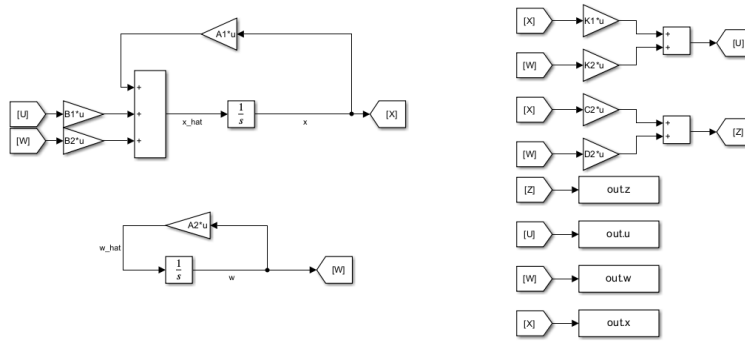


Рис. 6.1: Схема моделирования линейной системы

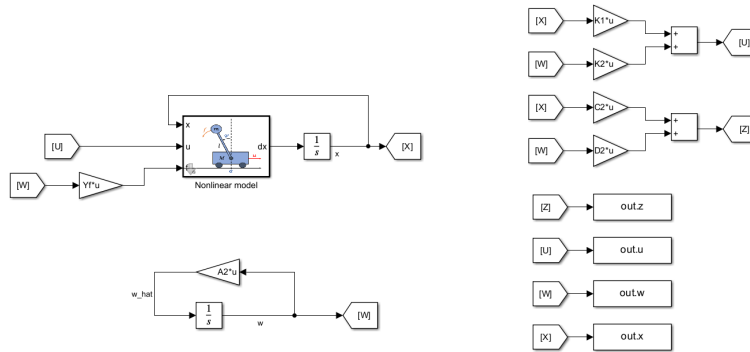


Рис. 6.2: Схема моделирования нелинейной системы

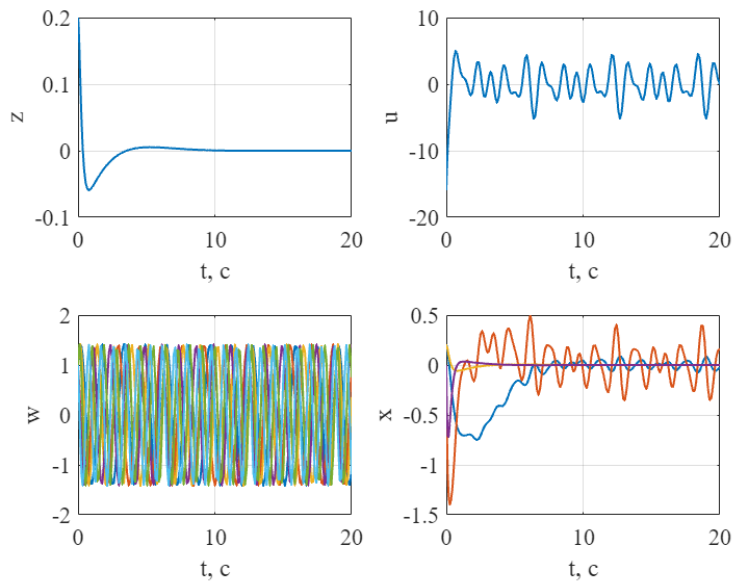


Рис. 6.3: Результаты моделирования **линейной** системы

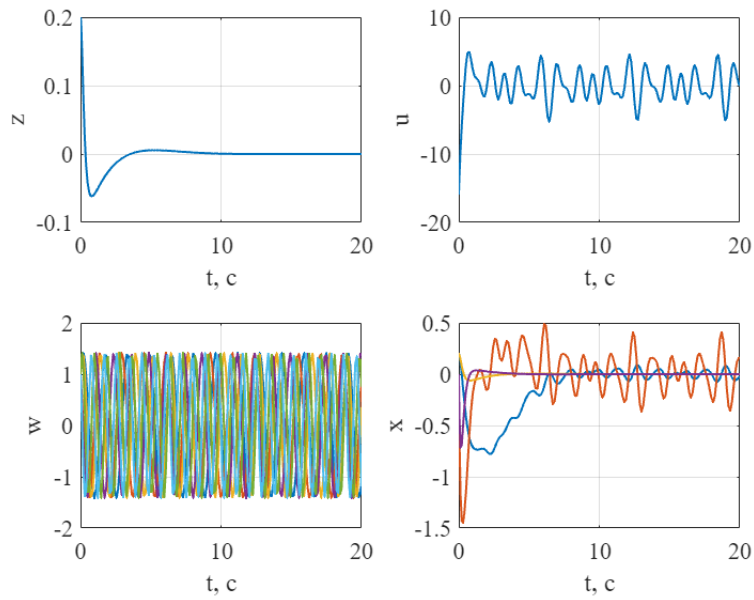


Рис. 6.4: Результаты моделирования **нелинейной** системы

Мы видим, что регулятор очень хорошо устраняет внешние силы. На графике мы видим, что тележка движется вперед и назад, сохраняя при этом маятник сбалансированным по вертикали.

Мы попробуем **удалить компонент прямой связи** в регуляторе.

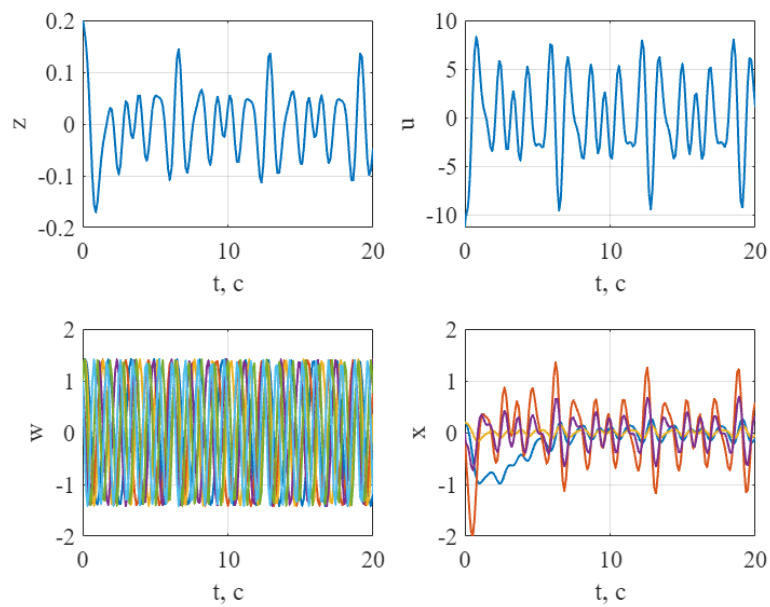


Рис. 6.5: Результаты моделирования **линейной** системы

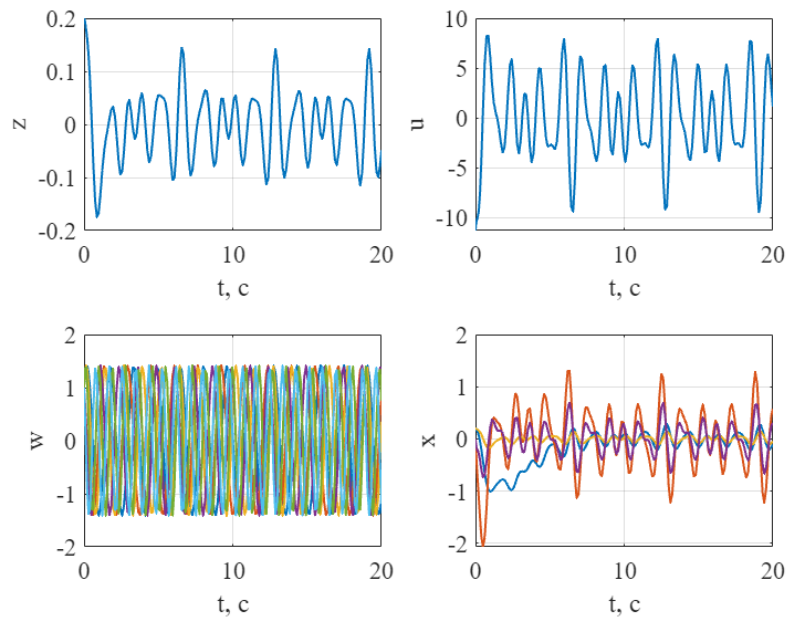


Рис. 6.6: Результаты моделирования **нелинейной** системы

Мы видим, что после удаления упреждающей составляющей в регуляторе угол отклонения маятника непрерывно колеблется.

## 6.2 Решение задачи слежения

Для решения задачи слежения нам нужно будет спроектировать регулятор так, чтобы угол отклонения маятника точно соответствовал желаемому сигналу. В целом задачи аналогичны задачам компенсации, с той лишь разницей, что нам нужно будет перевыбрать некоторые матрицы.

$$Y_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{потому что нет внешних сил}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{соответствует положению маятника}$$

$$D_2 = 0.05 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

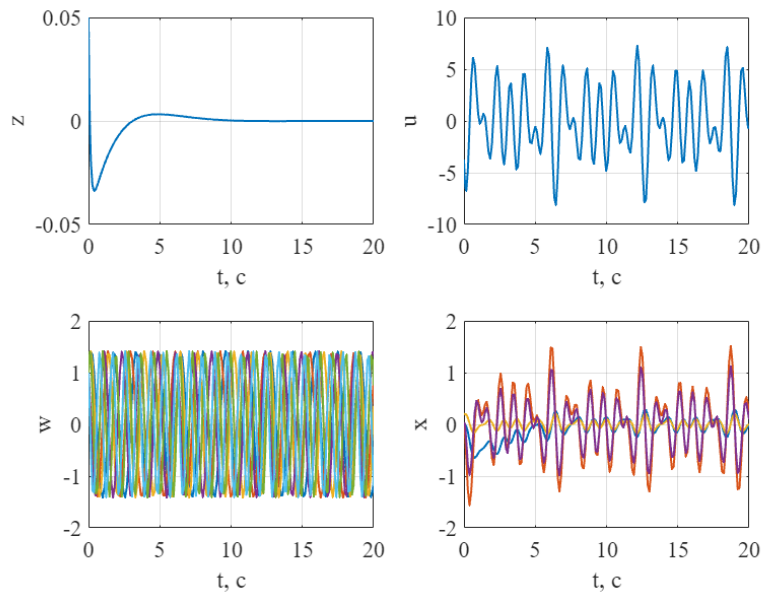


Рис. 6.7: Результаты моделирования линейной системы

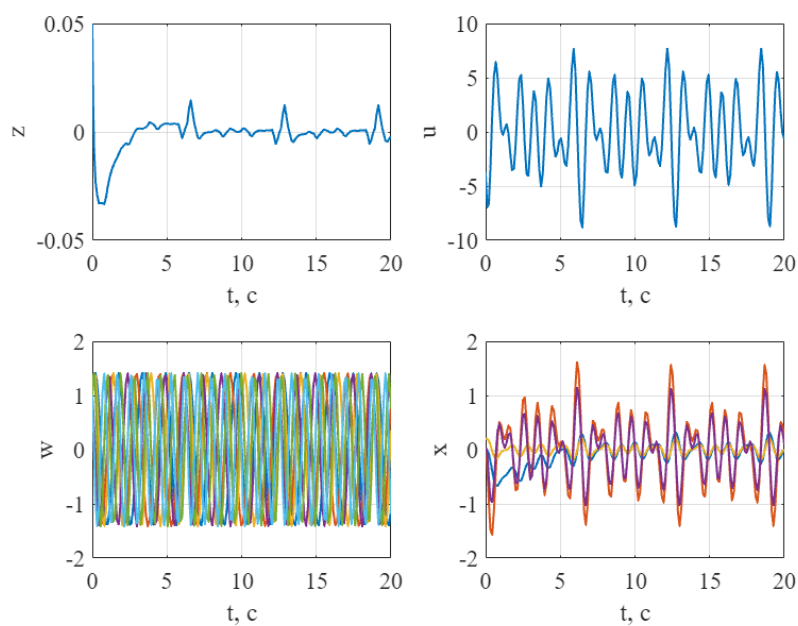


Рис. 6.8: Результаты моделирования нелинейной системы

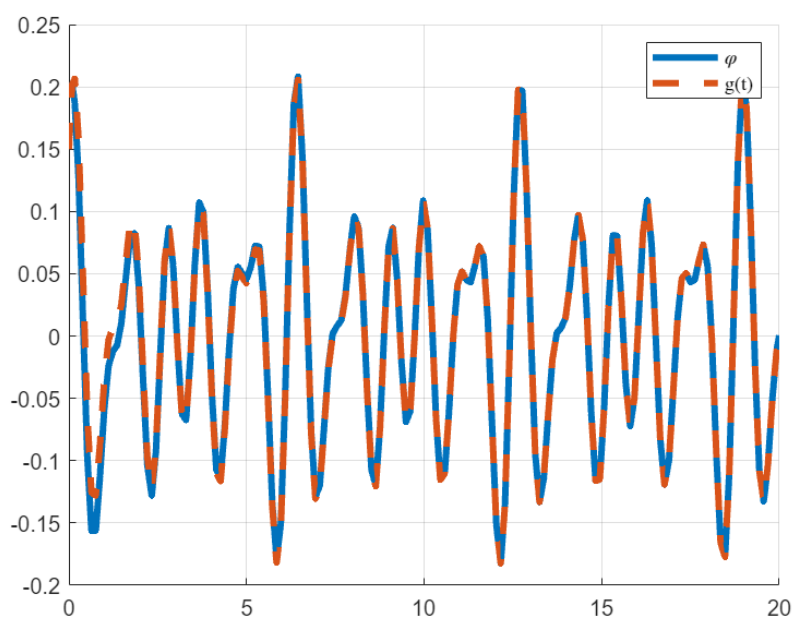


Рис. 6.9:  $\varphi$  и желаемый сигнал  $g(t)$

Мы попробуем **удалить компонент прямой связи** в регуляторе.

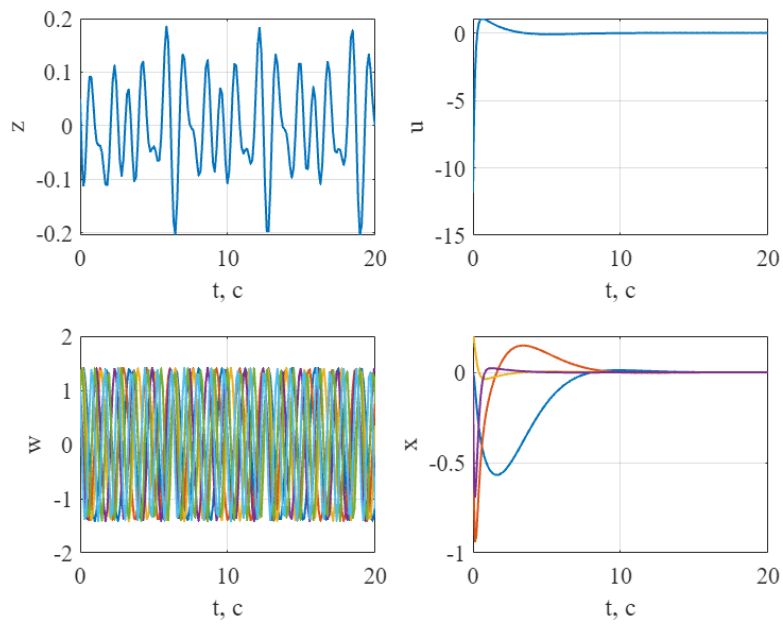


Рис. 6.10: Результаты моделирования линейной системы

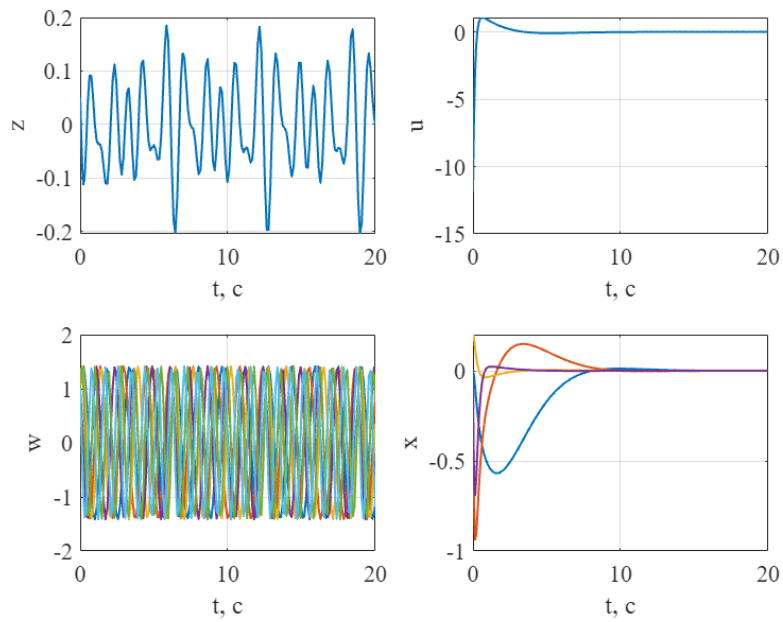


Рис. 6.11: Результаты моделирования нелинейной системы

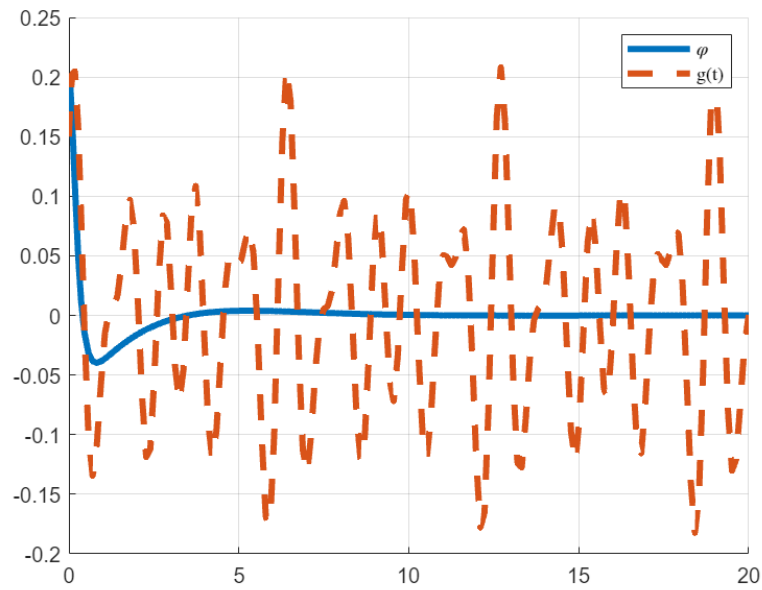


Рис. 6.12:  $\varphi$  и желаемый сигнал  $g(t)$

Как мы видим, регулятор, имеющий компонент прямой связи, выполняет поставленную задачу. регулятор без компонента прямой связи не может следовать желаемому сигналу.