Chương 1

Tính xác suất của một biến cố

Ở mức độ cơ bản, để tính xác suất của một biến cố ta thấy có các cách sau:

- Tính bằng định nghĩa (cổ điển, hình học);
- Dùng công thức cộng và nhân xác suất;
- Dùng công thức xác suất đầy đủ và Bayes;
- Dùng công thức Bernoulli.

Có bài toán có thể dùng được vài cách, nhưng có bài chỉ có thể dùng được một cách nào đó, vì vậy khi tiếp cận với từng cách tính bạn đọc cần lưu ý tới các đặc điểm dấu hiệu của nó để nhận dạng được mô hình.

Trước hết cần phải nhắc lại rằng: *Xác suất của biến cố A được ký hiệu P(A), là một con số nói lên khả năng xảy ra biến cố A,là phần xác định của biến cố ngẫu nhiên A, trong nhiều tình huống xác suất còn được hiểu là một tỷ lệ nào đó.* Vì xác suất là con số nói lên khả năng xảy ra, chính vì vậy mà con số này chỉ cần nằm trong đoạn từ 0 đến 1 (Trong đời thường người ta không nói "khả năng ngày mai trời mưa là âm 10%" và khi nói "Em này 100% đỗ" thì mọi người đều hiểu rằng em này chắc chắn đỗ (100% = 1), nghĩa là trong đời thường người ta dùng một con số dưới dạng phần trăm, phần nghìn từ 0 đến 100% để biểu thị khả năng xảy ra một hiện tượng nào đó).

1.1 Tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

Với giả thiết về tính đồng khả năng của các biến cố sơ cấp, theo định nghĩa cổ điển P(A) được tính như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Số biến cố sơ cấp (bcsc) thuận lợi cho biến cố A}}{\text{Số trường hợp (bcsc) có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện}}$$

Như vậy để tìm P(A) ta chỉ cần tìm 2 con số ở tử và mẫu số với sự trợ giúp của giải tích tổ hợp. Đối với nhiều người học, tính P(A) bằng định nghĩa cổ điển là bài toán khó. Tôi xin nêu một cách phân tích và tính toán như sau:

Số có thể có của phép thử phụ thuộc vào phép thử, thế mà để tìm con số này nhiều bạn đã bỏ qua, không quan tâm gì đến phép thử của bài toán là thế nào. Đó là một sai lầm. Khi tìm số các trường hợp thuận lợi nếu ta đưa vào nhiều loại phép thử quá thì cũng làm cho bài toán rối lên.

Vì vậy khi giải bài toán này, đề nghị bạn hãy tư duy theo các bước như sau:

- Hãy trả lời cho được: Ở đây phép thử là thế nào? Chưa trả lời được điều này thì đừng vội đi tìm số có thể hay số thuận lợi làm gì, vì nếu tìm, bạn sẽ chỉ theo cảm tính, cho nên dễ bị sai hoặc không lý giải rõ ràng được.

Thực ra nếu phải dùng đến giải tích tổ hợp để tìm, thì phép thử của bài toán có thể đưa về chỉ có 2 loại. Đó là một lần thực hiện hay nhiều lần thực hiện? Bạn hãy đọc kỹ đầu bài để trả lời đúng câu hỏi này. (Bạn cần phân biệt số lần thực hiện với số cách thực hiện. Chẳng hạn nếu lấy ra k phần tử từ một tập gồm n phần tử ($k \le n$), mà thứ tự của các phần tử không có ý nghĩa gì thì đó là lấy theo nghĩa tổ hợp, tức là một lần thực hiện (lấy cùng lúc hay lấy đồng thời). Số cách để thực hiện là C_n^k). Số cách của hoán vị, số cách thực hiện theo nghĩa của chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp,... đều có thể tìm được bằng cách dùng tổ hợp và luật tích (Xem [1]). Như vậy bạn hãy chọn lấy một trong hai loại phép thử chứ không phải phức tạp gì. Xác định được phép thử rồi, bạn sẽ trả lời được ngay:

- Số cách có thể của phép thử là bao nhiêu?

- Số thuận lợi cho biến cố A là bao nhiêu? Để tìm số thuận lợi cho A ta chỉ cần gắn ràng buộc của A vào phép thử, hạn chế bớt số trường hợp có thể, dẫn đến số trường hợp thuận lợi cho A. (Cách tìm như vậy sẽ dễ hơn là cách đưa vào một phép thử mới).

Với cách phân tích như trên, về giải tích tổ hợp ta chỉ cần dùng đến tổ hợp và luật tích (thế là đủ), không cần quan tâm đến hoán vị, chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp,... Lý giải cho điều đó, bạn đọc có thể xem trong [1].

Ví dụ 1. Lấy ngẫu nhiên ra 8 con bài từ bộ tú lơ khơ 52 con. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Lấy được 5 con màu đỏ.

b) Lấy được 1 con cơ, 2 con rô, 3 con pic.

c) Lấy được 1 con at, 2 con J, 3 con 9 và 2 con 2.

d) Lấy được 3 con chủ bài (3 con cùng một chất đã xác định trước).

Lời giải: Ở đây phép thử là: Lấy cùng lúc ra 8 con bài (nghĩa là 1 lần thực hiện) theo nghĩa của tổ hợp. Vậy số cách có thể là:

$$C_{52}^{8} = \frac{52.51.50.49.48.47.46.45.}{8.7.6.5.4.3.2} = 752538150$$

Gọi A = {Lấy được 5 con màu đỏ trong 8 con bài lấy ra}

= {Lấy được 5 con đỏ và 3 con đen}

Để A xảy ra ta phải thực hiện 2 bước: Lấy ra 5 con đỏ từ 26 con đỏ và lấy ra 3 con đen từ 26 con đen. Số cách tương ứng là: C_{26}^{5} và C_{26}^{3}. Theo luật tích, số trường hợp thuận lợi cho A là:

$$C_{26}^{5}.C_{26}^{3} = 171028000$$

Do đó P(A)=171028000/ 752538150 =0,227268

Tương tự B={Lấy được 1 con cơ, 2 con rô, 3 con pic và 2 con nhep}

Để tìm số thuận lợi cho B ta phải thực hiện 4 bước:

Lấy 1 con cơ trong số 13 con cơ. Có $C_{13}^{1} = 13$ cách.

Lấy 2 con rô trong số 13 con rô. Có $C_{13}^{2} = 13.12/2 = 78$ cách.

Tương tự có $C_{13}^{3} = 13.12.11/3.2.1 = 286$ cách lấy ra 3 con pic và $C_{13}^{2} = 78$ cách lấy ra 2 con nhép. Vậy số thuận lợi cho B là: 13.78.286.78=22620312

$$P(B) = 22620312 / 752538150 = 0,03006$$

$$P(C) = \frac{C_4^1.C_4^2.C_4^3.C_4^2}{C_{52}^8} = 4.6.4.6 / 75253815$$

$$= 0,0000007654$$

$$P(D) = \frac{C_{13}^3.C_{39}^5}{C_{52}^8} = 286.575757 / 752538150 = 0,2188148$$

Ví dụ 2. Công ty kinh doanh nước sạch quay số thưởng trên máy tính cho các hoá đơn đã thanh toán bằng cách dùng hàm random chọn ngẫu nhiên 1 số trong 10 chữ số từ 0 đến 9. Số hoá đơn gồm 7 chữ số. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Số hoá đơn trúng thưởng (hđtt) là số chẵn.

b) Số hoá đơn trúng thưởng có chữ số 9 đầu tiên và các chữ số khác nhau.

c) Số hđtt có chữ số 9 đầu tiên, các chữ số còn lại khác nhau và là số lẻ.

d) Số hđtt có chữ số 8 đầu tiên và là một số đối xứng.

e) Số hđtt có 4 chữ số liên tiếp trùng với năm sinh của chủ hoá đơn.

f) Số hđtt có đúng 4 chữ số trùng nhau.

g) Số hđtt có đúng 4 chữ số trùng nhau và có chữ số 9 đầu tiên.

h) Số hđtt có tổng của 3 chữ số cuối lớn hơn 24 .

Lời giải: 7 chữ số của hoá đơn đều cấu tạo từ 10 chữ số: 0,1,2,...8,9. Nhưng ở đây không phải lấy 1 lần ra 7 chữ số từ 10 chữ số, bởi lẽ lấy cùng lúc thì 7 chữ số lấy ra đều phải khác nhau (không có số nào được trùng lại), trong khi đó số hoá đơn có thể có nhiều chữ số trùng nhau. Phép thử ở đây là: 7 lần chọn, mỗi lần chọn 1 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9. Vậy số có thể của phép thử là: $C_{10}^1.C_{10}^1....C_{10}^1=10^7$.

Ký hiệu các biến cố ở các câu a), b),...., g), h) là A,B,...,G,H tương ứng. Số trường hợp thuận lợi tương ứng là:

Thứ tự phép thử:		I	II	III	IV	V	VI	VII	Σ
Số th.lợi cho b/cố	A:	10.	10.	10	10	10	10	C_5^1	$\Rightarrow 10^6.5$
Số th.lợi -nt-	B:	1.	9.	8.	7	6	5	4	$\Rightarrow$ 60480
Số -nt-	C:	1.	9.	8.	7	6	5	5	$\Rightarrow$ 75600
Số -nt-	D:	1.	10.	10.	10.	1.	1.	1	$\Rightarrow$ 1000
Số -nt-	E:	1.	1.	1.	1.	10.	10.	10.4	$\Rightarrow$ 400
Số -nt-	F:	10.	1.	1.	1.	9.	9.	$9.C_7^4$	$\Rightarrow$255150

Số -nt- G: $1.\ 1.\ 1.\ 1.\ 9.\ 9.\ 9.C_6^3$

$1.\ 9.\ 1.\ 1.\ 1.\ 9.\ 9.C_6^4 \Rightarrow 25515$

Số -nt- H: $10.\ 10.\ 10.\ 10.\ 10 \Rightarrow 100000$

Làm các phép chia cho số có thể 10000000 ta nhận được các xác suất cần tìm:

P(A)= 0,50	P(B)= 0,006048	P(C) = 0,00756
P(D) = 0,0001	P(E) = 0,00004	P(F)=0,025515
P(G) = 0,0025515	P(H) = 0,01	

Bây giờ ta giải thích cách tìm số các trường hợp thuận lợi.

Để thuận lợi cho A chữ số hàng đơn vị phải là số chẵn. Do đó có 5 cách chọn. Các chữ số còn lại, số cách chọn vẫn như số có thể, tức là 10.

Để thuận lợi cho B chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ II có 9 cách chọn (phải trừ chữ số 9), chữ số thứ III có 8 cách chọn (trừ 2 chữ số đã chọn), v.v...

Để thuận lợi cho C chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ VII có 5 cách chọn (vì có 5 chữ số lẻ, không phải trừ chữ số 9), (thoả mãn tính lẻ trước dễ tìm hơn), chữ số thứ II có 9 cách chọn (vì chỉ trừ chữ số thứ VII đã chọn), chữ số thứ III có 8 cách chọn, v.v...

Để thuận lợi cho D chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ VII có 1 cách chọn (phải chọn chữ số 8 vì để đối xứng), chữ số thứ II có 10 cách chọn (vì không có ràng buộc gì), nhưng chữ số thứ VI lại chỉ có 1 cách (chọn chữ số mà chữ số thứ II đã chọn, để đối xứng), v.v...

Để thuận lợi cho E: Giả sử 4 vị trí đầu trùng với năm sinh của chủ hoá đơn. Năm sinh chưa biết, nhưng là một số xác định, vậy mỗi chữ số chỉ có một cách chọn, chữ số thứ V có 10 cách (vì không có ràng buộc gì), chữ số thứ VI có 10 cách, thứ VII có 10 cách. Nhưng năm sinh có thể ở 4 vị trí đầu tiên hoặc 4 vị trí liên tiếp từ vị trí II đến vị trí V, hoặc từ vị trí IV đến vị trí VII, tức là có 4 trường hợp.

Để thuận lợi cho F: Giả sử 4 vị trí đầu là 4 vị trí có chữ số trùng nhau. Khi đó vị trí I có 10 cách chọn, 3 vị trí sau đều có 1 cách chọn (phải chọn chữ số đã chọn ở vị trí I). Chữ số vị trí V có 9 cách chọn (phải trừ 1 chữ số trùng nhau đã chọn), chữ số vị trí VI có 9 cách, vị trí VII cũng có 9 cách (chỉ trừ 1 chữ số trùng nhau), 4 chữ số trùng nhau không nhất thiết ở 4 vị trí đầu, mà ở 4 vị trí tuỳ ý trong 7 vị trí, nên ta có $C_7^4 = 35$ cách.

Để thuận lợi cho G ta phải xét 2 trường hợp: chữ số trùng nhau là chữ số 9, khi đó số cách là:$1.1.1.1.9.9.9.C_6^3$ (vì vị trí đầu tiên là cố định, còn chọn 3 vị trí có thể thay đổi trong 6 vị trí); hoặc chữ số trùng nhau không phải là chữ số 9, khi đó số cách là:$1.9.1.1.1.9.9.C_6^4$ (vì 4 chữ số trùng nhau có thể ở trong 4 vị trí trong 6 vị trí).

Để thuận lợi cho H: Chữ số thứ I đến thứ IV đều có 10 cách (vì không có ràng buộc gì), còn 3 chữ số cuối có một ràng buộc chung với nhau là có tổng >24. Ba chữ số ấy chỉ có thể là: 999 (có 1 trường hợp), 998 (có 3 trường hợp), 997 (có 3 trường hợp 997;979;799), 988 (có 3 trường hợp). Vậy có 10 trường hợp.

Ví dụ 3. Đoàn tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau; mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Tất cả cùng lên toa II.

b) Tất cả cùng lên một toa.

c) Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III.

d) Toa I có 4 người.

e) Hai hành khách A và B cùng lên một toa.

f) Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người.

Lời giải: Ở đây bài toán không quan tâm đến chỗ ngồi mà chỉ quan tâm đến toa. Phép thử ở đây là: Mỗi người chọn cho mình một toa. Do đó có 12 lần thực hiện (ai không chọn thì người đó không lên tàu). Mỗi lần chọn là chọn 1 trong 3 toa nên có $C_3^1 = 3$ cách chọn. (Cho mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống để tất cả cùng lên một toa cũng được (cho bài toán đỡ phức tạp)). Theo luật tích ta có số có thể của phép thử là: 3^{12}.

Kí hiệu các biến cố ở các câu a),b),...,e) tương ứng là A,B,...,E,F.

Số trường hợp thuận lợi (thtl) cho A là: 1.1.1....1=1.

(Mỗi người chỉ có 1 cách chọn là chọn toa II).

Số thtl cho B là: $C_3^1 .1.1...1=3$.

(Người đầu tiên có 3 cách chọn, vì không có ràng buộc gì, còn những người khác chỉ có 1 cách chọn là chọn toa mà người đầu đã chọn).

Số thtl cho C là: $C_{12}^4 . C_8^5 . C_3^3 = 12! / 4!\ 5!\ 3!$

(Phải có được 4 người (ai cũng được) trong số 12 người lên toa I, nên số cách là C_{12}^4, 5 người trong số còn lại lên toa II, nên số cách là C_8^5, v.v... Theo luật tích ta có số cần tìm).

Ta có kết quả tổng quát hơn như sau: *Số cách chia n phần tử ra thành k nhóm nhỏ với số phần tử trong mỗi nhóm là $n_1,..,n_k$, tất nhiên $n_i \geq 1$ và $n_1+..+n_k = n$. Theo tổ hợp ta có số cách cần tìm là:* $C_n^{n1} . C_{n-n1}^{n2} ... 1 = n! / (n_1! n_2! .. n_k!)$ (Ở đây thứ tự các nhóm là cố định trước và các phần tử luôn được coi là khác nhau, thậm chí chúng giống nhau hoàn toàn (còn nếu thứ tự nhóm thay đổi (như câu f) và không có sự phân biệt các phần tử hoàn toàn như nhau thì kết quả sẽ không phải như vậy).

Số thtl cho D là: $C_{12}^4 . 2^8$.

(Ta chọn 4 người trong số 12 người lên toa I, có C_{12}^4 cách. 8 người kia lên 2 toa còn lại, có 2^8 cách).

Số thtl cho E là: $3.1.3.3...3 = 3^{11}$.

(Người chọn trước sẽ có 3 cách chọn, người chọn sau sẽ chỉ có 1 cách, 10 người kia không có điều kiện gì nên mỗi người có 3 cách).

Số thtl cho F là 3! 12! / (4!5!3!).

(Tương tự như câu c) nhưng không nhất thiết theo một thứ tự là 4 - 5- 3, mà theo thứ tự bất kỳ cũng được; tức là ta có 3! cách đổi chỗ 3 vị trí cho nhau)

Vậy: $P(A) = 1/3^{12}$; $P(B) = 3/3^{12}$

$P(C) = 12!/(4!\,5!\,3!\,3^{12})$; $P(D) = C_{12}^4\, 2^8/3^{12}$;

$P(E) = 1/3$; $P(F) = 12!/(4!5!\,3^{12})$.

Ví dụ 4. Thang máy của một khách sạn 10 tầng xuất phát từ tầng 1 với 5 khách chờ vào thang máy lên tầng. Mỗi khách đều có chủ ý của họ, nhưng ta không biết, nên coi như mỗi khách chọn tầng một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Tất cả cùng lên tầng V.

b) Tất cả cùng ra một tầng.

c) 5 người ra 5 tầng khác nhau.

d) 5 người ra 4 tầng khác nhau.

e)* 5 người ra 3 tầng khác nhau.

Lời giải: Ở đây phép thử là: mỗi người chọn một tầng cho mình nên có 5 lần thực hiện (phép thử lại thuộc mô hình ví dụ 2). Mỗi lần thực hiện có 9 cách chọn (vì đang ở tầng I vào thang máy lên tầng, nên không ai chọn tầng I nữa). Do đó theo luật tích số cách thực hiện sẽ là: $9.9.9.9.9 = 9^5 = 59049$.

Tương tự như câu a);b) ví dụ 3 số thtl cho câu a) và b) là: 1 và 9.

Tương tự như câu b) ví dụ 2 số thtl cho câu c) là: 9.8.7.6.5 = 15120.

5 người ra 4 tầng khác nhau, nghĩa là có 2 người cùng ra một tầng (2 người này có một người chọn tầng, một người đi theo). Bài toán quy về có 4 người ra 4 tầng khác nhau, nên số cách sẽ là: 9.8.7.6; nhưng lại có C_5^2= 10 cách ghép 2 người ra cùng một tầng, vì vậy số thtl cho câu d) là: 9.8.7.6.10 = 30240. (Có thể lý luận cách khác như sau: Giả sử A và B ra cùng tầng, 3 người còn lại C,D,E ra 3 tầng khác nhau và khác tầng của A và B, khi đó số cách là: 9.1.8.7.6; nhưng cặp ra cùng tầng không nhất thiết là A và B, mà có thể là các cặp khác, và có C_5^2 cặp như vậy).

5 người ra 3 tầng khác nhau, tức là 5 người chia thành 3 nhóm: hoặc là 2 nhóm 2 và 1 nhóm 1 hoặc 1 nhóm 3 và 2 nhóm 1. Mỗi nhóm coi như 1 người khổng lồ. Ba người khổng lồ ra 3 tầng khác nhau, nên số cách là: 9.8.7. Nhưng ta lại có $C_5^1 . C_4^2/2$ + C_5^3 = 25 cách ghép 5 người thành 3 người "khổng lồ". Vì vậy số thtl cho câu e) là: 9.8.7.25 = 12600. (Để được 2 nhóm 2 và 1 nhóm 1 ta chọn ra 1 người (C_5^1 cách), còn lại 4 người chia hai nhóm, mỗi nhóm 2 người, sẽ có C_4^2 /2 = 3 cách (vì trong C_4^2 = 6 cách sẽ có 3 cách trùng lại)).

Các xác suất cần tìm tương ứng là:

$P(A) = 1 / 9^5$ $\quad$ $P(B) = 9 / 9^5 = 0{,}000152$

$P(C) = 15120 / 9^5 = 0{,}256$ $\quad$ $P(D) = 30240 / 9^5 = 0{,}512$

$P(E) = 12600 / 9^5 = 0{,}2134$.

Ví dụ 5. Viết 5 chữ số 1,2,3,4,5 lên 5 quả cầu như nhau. Chọn hú hoạ liên tiếp ra 3 quả cầu và xếp theo thứ tự từ trái qua phải, ta được một số gồm 3 chữ số. Tìm xác suất để nhận được số chẵn.

Lời giải: Rõ ràng ở đây phép thử là 3 lần thực hiện, mỗi lần lấy 1 quả trong số còn lại và xếp theo thứ tự từ trái qua phải. Do đó số có thể của phép thử là: 5.4.3 = 60 cách.

Số thtl của biến cố "nhận được số chẵn" là: 4.3.1 + 4.3.1 = 4.3.1.2 = 24. (Nhiều bạn đọc sẽ tìm ra con số 24 nhưng cách lập luận thì sai hẳn: Có 2 cách lấy ra được chữ số chẵn, còn lại có 4 cách lấy được chữ số thứ I, 3 cách lấy ra chữ số thứ II. Lập luận như vậy là không bám vào phép thử của bài toán. Số tìm được không phải là số thtl của biến cố "nhận được số chẵn" ứng với phép thử đang xét, vì phép thử ở đây chữ số hàng đơn vị (mà để thuận lợi cho biến cố đang xét, thì nó phải là chữ số chẵn) phải được lấy sau khi đã lấy 2 số đầu, còn theo cách lý luận trên thì chữ số hàng đơn vị lại lấy đầu tiên!).

Cách lập luận đúng là như sau: Để thuận lợi thì chữ số thứ III phải chẵn, tức là chữ số 2 hoặc 4. Nếu chữ số thứ III là 2 thì khi lấy chữ số thứ I và II ta phải loại bỏ chữ số 2 ra, vì vậy chữ số thứ I chỉ có 4 cách lấy; chữ số thứ II chỉ còn 3 cách và chữ số thứ III có 1 cách duy nhất là chọn chữ số 2. Tương tự nếu chữ số thứ III là 4 thì số cách thực hiện là: 4.3.1.

Vậy P(nhận được số chẵn) = 4.3.1.2 / 5.4.3 =0,40.

(Cũng có bạn sẽ tìm ra P(nhận được số chẵn) = 2 / 5 = 0,40; nhưng 5 và 2 không phải là số có thể và số thuận lợi ứng với phép thử này, mà là số có thể và số thuận lợi ứng với phép thử: chọn ngẫu nhiên 1 chữ số trong 5 chữ số).

Một lần nữa bạn đọc thấy: Phép thử có thể đưa về một trong 2 loại và ta chỉ cần dùng tổ hợp và luật tích.

Như trên đã nêu, trong nhiều tình huống, xác suất chọn được phần tử mang dấu hiệu A chính là tỷ lệ các phần tử dấu hiệu A trong tập đang xét. Chẳng hạn, trong một lớp gồm 100 sinh viên, trong đó có 45 nữ. Rõ ràng P(Chọn ngẫu nhiên một người, được nữ sinh viên) = C^1_{45} / C^1_{100} = 45 / 100. Phân số này cũng chính là tỷ lệ nữ trong lớp.

Ví dụ 6. Trong một làng tỷ lệ người bị mắc bệnh dịch phải đi cấp cứu là 10%. Khả năng ta gặp một người trong làng phải đi cấp cứu vì bệnh dịch là 9%. Hãy tìm tỷ lệ người trong làng bị mắc bệnh trong đợt dịch này?

Lời giải: Gọi p là tỷ lệ người trong làng bị mắc bệnh dịch, N là số dân trong làng. Khi đó ta có:

Số người bị mắc bệnh trong làng: p.N

Số người bị mắc bệnh phải đi cấp cứu: 0,1 pN

P(Gặp người trong làng phải đi cấp cứu vì bệnh dịch) = 0,1pN/N = 0,1p = 0,09. Do đó p = 0,09 / 0,1 = 0,90 =90%.

(Cách giải khác là dùng công thức cộng, nhân xác suất (xem 1.3)).

Bài tập

1. Một lô hàng gồm 100 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 20 sản phẩm. Tìm xác suất để cho trong 20 sản phẩm lấy ra:

a) Có 5 phế phẩm

b) Bị cả 10 phế phẩm

c) Có đúng 5 chính phẩm

2. Trong năm 2000, Phòng CSGT- CATP Hà Nội đã xử lý 5934 sinh viên và 2008 học sinh vi phạm luật lệ giao thông.

(Báo An ninh Thủ đô số 541, ngày 21/12/2000).

Một buổi sáng, trên đường Nguyễn Trãi người ta thấy có 18 người đang bị CSGT xử lý về vi phạm luật lệ giao thông, trong đó có 11 sinh viên, 4 học sinh và 3 người dân lớn tuổi. Làm phép chọn ngẫu nhiên từ 18 người trên ra 5 người. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Chọn phải cả 5 sinh viên.

b) Chọn phải 3 sinh viên, 2 học sinh.

c) Chọn phải 2 sinh viên, 2 học sinh và 1 người dân lớn tuổi.

d) Không có sinh viên nào trong 5 người được chọn ra.

e) Gặp ít nhất 1 sinh viên trong 5 người chọn ra.

3. Một tổ gồm 10 người, trong đó có 5 nam và 5 nữ, tổ chức liên hoan, ngồi quanh bàn tròn. Mọi người ngồi vào chỗ một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau:

a) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau

b) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau và 2 bạn A và B ngồi cạnh nhau

c) Xét tình huống 10 người ngồi theo hàng ngang

4. Rút ngẫu nhiên ra 5 con bài từ bộ tam cúc gồm 32 con. Tìm xác suất sao cho trong 5 con bài rút ra:

a) có 1 con tướng, 1 con sỹ, 2 con xe và 1 con tốt

b) có thể lập được "ngũ tử "

c) có thể lập được "tứ tử " (4 con tốt cùng màu)

d) có thể lập được 1 bộ ba " xe- pháo- mã "

e) có 3 con màu đỏ và 2 con màu đen

f) Nếu chia ngẫu nhiên bộ bài thành 2 phần bằng nhau, thì xác suất để nhận được số con màu đỏ bằng số con màu đen là bao nhiêu?

5. Một em bé có 2 bi trắng và 4 bi đỏ được để trong một cái hộp. Em rút hú hoạ từng bi một cho đến bi cuối cùng. Tìm xác suất để viên bi cuối cùng là bi đỏ.

6. Một người mua buôn 15 tivi. Anh ta sẽ đồng ý chấp nhận mua lô tivi 15 chiếc này, nếu anh ta kiểm tra ngẫu nhiên 4 chiếc, thấy không có chiếc nào bị khuyết tật. Chủ hàng đưa ra một lô hàng 15 tivi trong đó có 3 chiếc bị khuyết tật.

a) Khả năng chủ hàng gặp may trong việc bán lô hàng này là bao nhiêu?

b) Khả năng người mua từ chối không mua lô hàng là bao nhiêu?

c) Nếu chủ hàng gài vào đó 1 chiếc khuyết tật, hoặc 5 chiếc khuyết tật thì khả năng chủ hàng bán được lô hàng này sẽ thay đổi thế nào?

7. Ở Hạ nghị viện của một bang có 20 nghị sĩ thuộc Đảng Cộng hoà, có 10 nghị sĩ thuộc Đảng Dân chủ. Cần lập một tiểu ban gồm 5 nghị sĩ. Tìm xác suất để tiểu ban được chọn ngẫu nhiên có:

a) Có 3 nghị sĩ thuộc Đảng Cộng hoà, 2 thuộc Đảng Dân chủ.

b) Cả 5 nghị sĩ thuộc vào một đảng.

8. Một đoàn tàu điện gồm 3 toa. Có 5 hành khách chờ lên tàu. Mỗi người chọn cho mình một toa một cách ngẫu nhiên và độc lập. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất một hành khách mới lên tàu (xem [7]).

9. Một người bỏ ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ vào đúng phong bì của nó (xem [7]).

10. Một em bé có 5 miếng bìa hình thức như nhau với các chữ N, N, A, H, H. Tìm xác suất để trong khi sắp ngẫu nhiên em bé thu được chữ “Nhanh”.

11. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tìm xác suất sao cho:

a) Tổng số nốt ở 2 mặt trên của 2 con xúc xắc bằng 8.

b) Hiệu số nốt ở 2 mặt trên của 2 con xúc xắc có trị số tuyệt đối bằng 2.

c) Số nốt ở mặt trên 2 con xúc xắc bằng nhau.

d) Số nốt ở 2 mặt trên của 2 con xúc xắc lập thành một số gồm 2 chữ số. Tìm xác suất để nhận được số:

- chia hết cho 9;
- chia hết cho 5 ;
- chia hết cho 3.

12. Biển đăng ký xe máy loại 50 cm^3 ở Hà Nội gồm 3 phần. Phần đầu là chỉ số vùng Hà Nội: số 29. Phần giữa là 3 chữ số. Phần cuối gồm 2 chữ cái.

a) Tính xem có thể lập được bao nhiêu biển đăng ký xe máy loại 50 cm^3 ở Hà Nội.

b) Giả sử ta chọn ngẫu nhiên một biển đăng ký. Tìm xác suất để nhận được biển gồm:

- 3 chữ số 468
- 3 chữ số tạo thành một số chia hết cho 5
- 3 chữ số tạo thành một số có tổng lớn hơn 24.

13. Trong buổi gặp mặt các bạn cùng học với nhau hồi lớp 10, có 5 cặp vợ chồng có mặt. Chọn ngẫu nhiên từ 10 người ra 3 người. Tìm xác suất để 3 người chọn ra không có cặp vợ chồng nào?

1.2 Tính xác suất bằng định nghĩa hình học

Giả sử một điểm được ném ngẫu nhiên vào miền S (khả năng điểm đó rơi vào mọi điểm trong miền S là như nhau). Tìm xác suất để điểm đó rơi vào miền A – miền con của S ($A \subseteq S$). Khi đó theo định nghĩa hình học P(A) được tính như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền A}}{\text{Độ đo của miền S}}$$

trong đó độ đo được hiểu là:

- độ dài nếu miền S thuộc R^1, tức là miền S là một khoảng hay một đoạn nào đó;

- diện tích nếu miền S thuộc R^2, tức là S là miền con nào đó trong mặt phẳng;

- thể tích nếu miền S thuộc R^3, tức là S là miền con nào đó trong không gian.

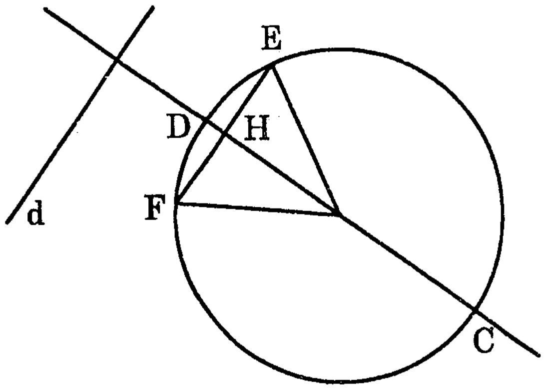
Để giải loại bài toán này đòi hỏi ta phải mô hình hoá được bài toán và xác định được miền S cũng như miền A (đây là điểm khó của bài toán).

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng cho đường tròn bán kính R cố định và đường thẳng d. Kẻ ngẫu nhiên các đường thẳng song song với d và cắt đường tròn đã cho. Tìm xác suất để cát tuyến nhận được có độ dài nhỏ hơn R?

Lời giải: Qua tâm O của đường tròn ta kẻ đường thẳng vuông góc với d, nhận được đường kính CD. Đường thẳng // d và cắt đường tròn sẽ phải vuông góc với đường kính CD tại một điểm nào đó trong đoạn CD. Vậy miền S sẽ là đoạn CD. (Kẻ đường thẳng ngẫu nhiên thoả mãn đầu bài là tương đương với chọn ngẫu nhiên một điểm trên đoạn CD). Dựng tam giác đều OEF như hình vẽ (Hình 1). Dễ dàng thấy miền A sẽ là đoạn HD.

Vậy xác suất cần tìm là:

$$2.(R - R\sqrt{3}/2) / 2R = 1 - \sqrt{3}/2$$



Hình 1

Ví dụ 2. Bài toán 2 người gặp nhau. Giả sử 2 người hẹn gặp nhau tại một địa điểm xác định vào khoảng thời gian từ 19 giờ đến 20 giờ, theo quy tắc sau: Mỗi người đến (và chắc chắn đến) địa điểm hẹn trong khoảng thời gian trên một cách độc lập với nhau, chờ 20 phút trong phạm vi không quá 20 giờ, nếu không thấy người kia đến thì bỏ đi. Tìm xác suất để 2 người gặp nhau.

Lời giải: Gọi X và Y là thời điểm đến điểm hẹn của mỗi người. Rõ ràng X và Y đều là một điểm ngẫu nhiên trong đoạn [19, 20], tức là $19 \le X \le 20$; $19 \le Y \le 20$.

Miền S là hình vuông cạnh là 1.

Để 2 người gặp nhau thì $|X - Y| \le 20$ phút = 1/3 giờ, nên miền A là:

$\{ (X,Y) \in S: |X-Y| \le 1/3 \}$

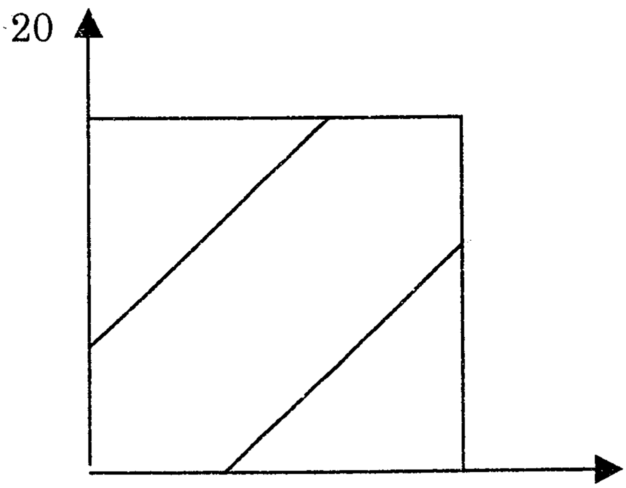
(Hình 2).

Diện tích miền S bằng 1.

Diện tích miền A bằng:

$1 - 2.(1/2).(2/3).(2/3) = 5/9.$

Vậy $P(A) = 5/9 = 0{,}555$



Hình 2

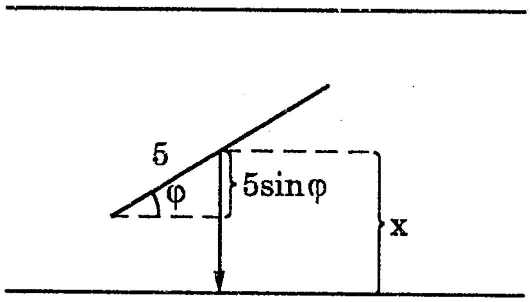
Ví dụ 3. Một cửa sổ có các chấn song, song song cách đều nhau 10 cm. Một em bé dùng một đoạn thẳng dài 8 cm ném qua cửa sổ. Tìm xác suất để đoạn thẳng va chạm phải một trong các chấn song cửa sổ. Giả thiết em bé ném trúng cửa sổ và ta bỏ qua bề dày của các chấn song. (Ví dụ này được mô phỏng từ bài toán cổ điển của Buffon).

Lời giải: Gọi φ là góc lập giữa đoạn thẳng và các chấn song:

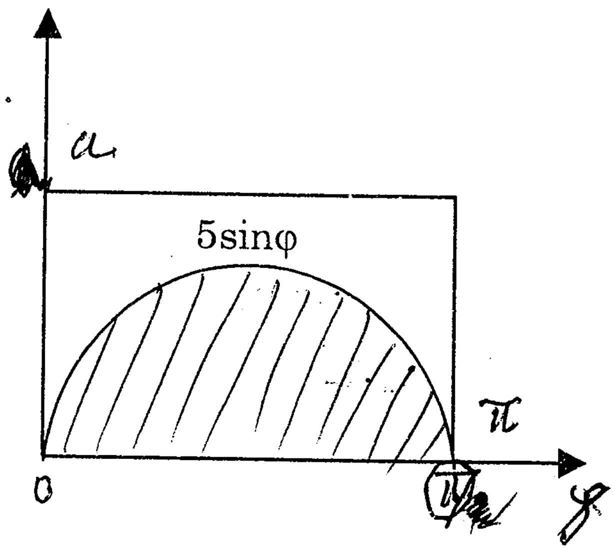
$0 \le \varphi \le \pi$ (vì ta không quan tâm đến hướng của đoạn thẳng, mà chỉ quan tâm đến phương của nó). Kí hiệu x là khoảng cách từ tâm của đoạn thẳng đến đường song song (chấn song) gần nhất: $0 \le x \le 10/2$ .Ta chỉ quan tâm đoạn thẳng cắt đường song song, còn cắt ở đâu ta không quan tâm. Do đó dùng 2 biến φ và x như trên là đủ để xác định.

Miền S là: $\{(\varphi, x): 0 \le \varphi \le \pi \,;\, 0 \le x \le 5\}$.

Để đoạn thẳng cắt đường song song thì x phải nhỏ hơn 5sinφ (xem hình 3), nên miền A là: $A = \{(\varphi, x) \in S: 0 \le x \le 5\sin\varphi\}$, (xem hình 4).



Hình 3



Hình 4

Diện tích miền A: $5\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = -5\cos\varphi \,\Big|_0^{\pi} = 10.$

Diện tích miền S: 5π.

Vậy $P(A) = 10 / 5\pi = 2 / \pi$.

(Nếu độ dài đoạn thẳng lớn hơn khoảng cách giữa các đường song song, chẳng hạn độ dài bằng 12, thì đường cong $x = 5\sin\varphi$ sẽ cắt đường $x = 5$ tại 2 điểm. Khi đó để tìm diện tích miền A tích phân từ 0 đến π phải tách thành 3 đoạn).

Bài tập

1. Gieo hú hoạ một điểm lên trên một đoạn thẳng có độ dài 30 cm. Tìm xác suất để điểm đó rơi vào một đoạn con có độ dài 10 cm hoàn toàn nằm trong đoạn đã cho.

2. Ném một đồng xu có bán kính 1 cm lên mặt phẳng, mà trên đó có kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau với khoảng cách là 5 cm. Tìm xác suất để đồng xu cắt đường thẳng song song.

3. Gieo ngẫu nhiên một điểm trong vòng tròn bán kính R. Tìm xác suất để điểm đó rơi vào

a) Trong hình vuông nội tiếp vòng tròn

b) Trong tam giác đều nội tiếp vòng tròn (Xem [5])

4. Cho hình vuông với các đỉnh A(0,0), B(0,1), C(1,0) và D(1,1). Gieo ngẫu nhiên một điểm M(X,Y) trong hình vuông đó.

a) Chứng minh rằng: $P(X<x, Y<y) = P(X<x) . P(Y<y)$.

b) Tìm $P(|X - Y| < z)$ với $0 \le z \le 1$.

c) Tìm $P(XY < z)$ với $0 \le z \le 1$.

d) Tìm $P(\max(X,Y) < z)$ với $0 \le z \le 1$ (xem [5]).

5. Cho một đoạn thẳng với độ dài a. Chọn ngẫu nhiên trên đoạn này 2 điểm, khi đó đoạn thẳng được chia thành 3 đoạn nhỏ. Tìm xác suất để 3 đoạn thẳng thu được sẽ lập thành một tam giác. (Xem [5]).

6. Trên đoạn [0,1] chọn ngẫu nhiên 2 số. Tìm xác suất nhận được 2 số thoả mãn: $x + y \le 1$ và $x.y \ge 2/9$.

1.3 Tính xác suất bằng cách dùng công thức cộng và nhân xác suất

Trước tiên ta nhắc lại vài khái niệm cần thiết về quan hệ của các biến cố:

- Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B, và kí hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì suy ra B xảy ra.

- Hai biến cố A và B được gọi là tương đương và kí hiệu $A = B$, nếu A kéo theo B và B kéo theo A.

- Tổng của 2 biến cố A và B là một biến cố, được kí hiệu là $A \cup B$, sao cho biến cố tổng xảy ra khi và chỉ khi hoặc A xảy ra hoặc B xảy ra (khi nói A xảy ra, thế còn B thì thế nào? Mọi khẳng định về B đều không được, vì vậy có thể nói là không biết hoặc không khẳng định được gì cả).

Tổng của 2 biến cố $A \cup B$ tương đương với biến cố sau, mà rất hay được dùng trong xác suất: { Có ít nhất một biến cố xảy ra}. Nhưng nếu 2 biến cố A và B xung khắc thì tổng $A \cup B$ tương đương với biến cố:

{Có đúng một biến cố xảy ra}.

- Tích của 2 biến cố A và B là một biến cố, được kí hiệu là AB, sao cho biến cố tích xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B xảy ra. (Không nên hiểu biến cố tích là biến cố mà A và B đồng thời xảy ra hoặc A và B cùng xảy ra, hoặc là phần chung của A và B. Chẳng hạn, trong phiên toà xử những kẻ ăn trộm, A và B không cùng tham gia với nhau, có đủ bằng chứng để Toà kết tội A và B ăn trộm. Nếu Toà kết tội "A ăn trộm và B ăn trộm" thì A và B sẽ không phản đối được. Nhưng nếu Toà kết luận "A và B cùng ăn trộm" hoặc "A và B đồng thời ăn trộm" thì họ có thể cãi lại).

- Hai biến cố A và B được gọi xung khắc với nhau nếu AB tương đương với biến cố không thể: $AB = \phi$, hoặc nói cách khác tương đương là: nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

- Biến cố đối lập của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$, nếu A và $\overline{A}$ xung khắc và $A \cup \overline{A} = \Omega$.

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu biến cố này có xảy ra hay không đều không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố kia. Rõ ràng nếu A, B độc lập với nhau thì A, $\overline{B}$ hoặc $\overline{A}$, B hoặc $\overline{A}$, $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

- Xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra cũng là một con số nói lên khả năng xảy ra biến cố A trong tình huống biến cố B đã xảy ra, được kí hiệu là P(A/B). Xác suất có điều kiện P(A/B) cũng có các tính chất cơ bản như xác suất tuyệt đối P(A).

- Công thức cộng xác suất:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1)$$

Nếu A,B xung khắc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2)$$

Đặc biệt:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \quad (3)$$

- Công thức nhân xác suất

$$P(AB) = P(A).P(B/A) \quad (4)$$

Nếu A,B độc lập

$$P(AB)= P(A).P(B) \qquad (5)$$

Mở rộng (1) và (4) cho 3 biến cố:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)- P(BC)+P(ABC) \qquad (6)$$

$$P(ABC)= P(A).P(B/A).P(C/AB) \qquad (7)$$

Từ công thức (4) ta suy ra:

$$P(A/B)= P(AB) / P(B) \text{ (Với điều kiện } P(B) \neq 0) \qquad (8)$$

Nhận xét: Khi dùng công thức cộng và nhân xác suất để tìm xác suất, bạn đọc lưu ý rằng loại bài toán này sẽ có 2 loại biến cố: Biến cố bài toán đã cho và biến cố cần tìm xác suất (phải nhận ra được chúng). Do đó phải đặt tên cho các biến cố đã cho để dùng (nếu các biến cố đã cho đó chưa được kí hiệu). Sau đó ta phải biểu diễn các biến cố cần tìm xác suất qua các biến cố đã cho. Bạn đọc lưu ý rằng ta chỉ có công thức xác suất của biến cố tổng và biến cố tích, cho nên việc biểu diễn biến cố cần tìm xác suất qua các biến cố đã cho chủ yếu là dùng phép tính tổng, tích và đối lập. Khi biểu diễn biến cố cần tìm xác suất, nếu bạn đọc diễn đạt nó hoặc dạng tương đương với nó thành lời, mà bạn dùng đến *chữ hoặc* thì bạn nên nghĩ về quan hệ tổng, còn nếu bạn dùng đến *chữ và* thì bạn nên nghĩ về quan hệ tích, sau đó kiểm tra lại. Biểu diễn được rồi, bạn chỉ còn việc áp dụng các công thức đã có.

Ví dụ 1. Tham gia thế vận hội Olimpic Sydney 2000, môn Taekwondo nữ hạng 57 kg đoàn Việt Nam có 2 vận động viên tham gia. Đó là Trần Hiếu Ngân và Nguyễn Thị Mai. Khả năng lọt vào vòng chung kết của mỗi người tương ứng là: 90% và 70% (Ngân và Mai không cùng một bảng trong vòng đấu loại). Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Cả 2 lọt vào vòng chung kết.

b) Có ít nhất một người lọt vào vòng chung kết.

c) Chỉ có Ngân lọt vào vòng chung kết.

d) So với thực tiễn xảy ra thì kết quả tính toán trên có gì mâu thuẫn? Tại sao?

Lời giải: Bài toán cho 2 biến cố và có 4 biến cố cần tìm xác suất. Hai biến cố bài toán đã cho là: "Ngân lọt vào vòng chung kết" và "Mai lọt vào vòng chung kết". Ta ký hiệu tương ứng là biến cố N và M. N và M độc lập và không xung khắc, P(N) = 0,90; P(M) = 0,70. Ở đâu ra hai con số này? Hai con số này được tìm theo phương pháp chuyên gia hoặc theo định nghĩa thống kê. Tức là các chuyên gia trong lĩnh vực này, qua theo dõi quá trình thi đấu của các vận động viên, nắm được trình độ và khả năng của họ và khả năng của các đối thủ tham gia thi đấu, các chuyên gia đưa ra các khả năng như trên (trước khi Thế vận hội diễn ra, qua các phương tiện thông tin đại chúng, ta thấy giới chuyên môn nhận định rằng: Ở Thế vận hội này, huy chương chỉ có thể hy vọng ở môn Taekwondo, còn các môn khác là để các vận động viên cọ sát, học hỏi và cố gắng vượt thành tích của chính mình ở trong nước). (Còn ở đây là tôi tự đưa ra, mang tính chất ví dụ).

Còn 4 biến cố phải tìm xác suất chính là 4 câu hỏi a), b), c), d) mà ta sẽ ký hiệu tương ứng là các biến cố; A, B, C, D. Rõ ràng ta có các biểu diễn sau:

A = {Cả hai lọt vào vòng chung kết} = N.M

B = {Có ít nhất một người lọt vào vòng chung kết}= $N \cup M$

C = {Chỉ có Ngân lọt vào vòng chung kết} = N. $\overline{M}$

({Cả 2 lọt vào} nghĩa là {Ngân lọt vào *và* Mai lọt vào}. {Có ít nhất một người lọt vào} chính là tổng. Còn {chỉ có Ngân lọt vào} nghĩa là {Ngân lọt vào *và* Mai không lọt vào}).

Áp dụng (1) và (5) ta nhận được:

P(A) = P(M.N) = P(M). P(N)= 0,9.0,7 = 0,63 = 63%

$P(B) = P(N \cup M) = P(N) + P(M) - P(NM)$

$= 0{,}9+0{,}7-0{,}63 = 0{,}97 = 97\%$

$P(C) = P(N\bar{M}) = P(N).P(\bar{M}) = 0{,}9.(1-0{,}7) = 0{,}27 = 27\%$.

Nhìn vào kết quả tính được ta thấy gần như chắc chắn sẽ có ít nhất một người lọt vào vòng chung kết. Khả năng "chỉ có Ngân lọt vào còn Mai bị loại" là nhỏ nhất trong 3 tình huống trên, nhỏ hơn một nửa khả năng "cả hai lọt vào". Thông thường thì tình huống C ít có khả năng xảy ra nhất. Thế mà trên thực tế tình huống C lại xảy ra. Điều đó có gì mâu thuẫn? Nếu khả năng lọt vào vòng chung kết của Ngân và Mai là 90% và 70% là đúng thì các khả năng tính được trên là chính xác. Còn thực tế tình huống C xảy ra là vì Mai bị loại do trọng tài phạt vì tinh thần thi đấu (Mai đã dẫn điểm và ở hiệp cuối trọng tài đánh giá là thi đấu không tích cực?), và đó là tình huống không bình thường và chưa được tính đến khi tính P(C). Như vậy nếu không có tình huống trọng tài phạt Mai, thì A đã xảy ra và C không xảy ra.

Ví dụ 2. Có 2 lô hàng cũ. Lô I có 10 cái tốt, 2 cái hỏng. Lô II có 12 cái tốt, 3 cái hỏng. Từ mỗi lô lấy ngẫu nhiên ra một cái. Tìm xác suất để:

a) Nhận được 2 cái tốt.

b) Nhận được 2 cái cùng chất lượng.

c) Nếu lấy từ cùng một lô ra 2 cái thì nên lấy từ lô nào để được 2 cái tốt với khả năng cao hơn.

Lời giải: Ở đây câu a), b) cùng một phép thử, còn câu c) ứng với một phép thử khác.

Gọi T_i = {Sản phẩm lấy từ lô i là loại tốt}, i = 1,2.

Ta có: A = {Nhận được 2 cái tốt} = $T_1.T_2$

$P(A) = P(T_1 T_2) = P(T_1) P(T_2) = (10/12).(12/15) = 0{,}667$.

B = {Nhận được 2 cái cùng chất lượng} = $T_1 T_2 \cup \bar{T}_1 \bar{T}_2$

T_1 và T_2 không xung khắc nhưng tích (T_1T_2) và $(\bar{T}_1 \bar{T}_2)$ xung khắc, cho nên theo (2) và (5) ta có:

$P(B) = P(T_1)\, P(T_2) + P(\bar{T}_1)\, P(\bar{T}_2)$

$=10/12.\ 12/15 + 2/12.\ 3/15 = 0,70.$

Với câu c) phép thử là lấy một lần theo nghĩa tổ hợp. Theo định nghĩa cổ điển dễ dàng ta tính được xác suất lấy được 2 cái tốt từ lô I: $C_{10}^2 / C_{12}^2 = 45/66 = 0,682$ và từ lô II: $C_{12}^2 / C_{15}^2 = 66/105 = 0,629$. Vậy nên lấy từ lô I sẽ nhận được 2 cái tốt với khả năng cao hơn.

Ví dụ 3. Một cơ quan có 3 chiếc xe ô tô. Khả năng có sự cố của mỗi xe tương ứng là: 5%; 20%; 10%. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Cả 3 xe ô tô cùng bị sự cố.

b) Có ít nhất một xe hoạt động tốt.

c) Có đúng một xe hoạt động tốt.

d) Cả 3 xe ô tô cùng hoạt động tốt.

e) Có không quá 2 xe ô tô bị sự cố.

Lời giải: Bài toán cho 3 biến cố:

A_i = {Xe ô tô thứ i bị sự cố}; i= 1,2,3.

3 biến cố này không xung khắc nhưng độc lập.

$P(A_1)= 0,05$; $P(A_2)= 0,20$; $P(A_3)= 0,10$.

Ta biểu diễn các biến cố cần tìm xác suất qua các biến cố đã cho.

A= {Cả 3 ô tô cùng bị sự cố}= $A_1 A_2 A_3$

$\Rightarrow P(A)=P(A_1A_2 A_3)= P(A_1)P(A_2).P(A_3)=0,05.0,2.0,1=0,001.$

B ={Có ít nhất một xe hoạt động tốt}= $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$

Có thể dùng công thức (6) để tìm P(B), nhưng như thế hơi dài:

$\bar{B}$ = {Không có xe nào hoạt động tốt} = {Cả 3 xe bị sự cố} = A.

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

C = {Có đúng một xe hoạt động tốt}

$= A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$

$P(C)=0{,}05.0{,}8.0{,}9 +0{,}95.0{,}2.0{,}9 + 0.95.0{,}8.0{,}1=0{,}283$.

D = {Cả 3 xe ô tô hoạt động tốt} = $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$

$P(D) = P(\bar{A}_1).P(\bar{A}_2).P(\bar{A}_3)= 0{,}95.0{,}8.0{,}9= 0{,}684$.

E = {Có không quá 2 xe bị sự cố} = {Có ít nhất 1 xe hoạt động tốt} = B $\Rightarrow P(E) = P(B) = 0{,}999$.

Để thấy rõ quan hệ giữa các biến cố, ta xem sơ đồ sau:

Số xe bị sự cố Số xe hoạt động tốt

$$\begin{array}{lcl} \left.\begin{array}{l}0\\1\\2\end{array}\right\} \sim E & == & B \sim \left\{\begin{array}{l}3 \sim D\\2\\1\end{array}\right. \\ 3 \quad \sim A & == & \bar{B} \sim 0 \end{array}$$

Ví dụ 4. Một người săn thỏ ở trong rừng. Khả năng anh ta bắn trúng thỏ trong mỗi lần bắn là tỷ lệ nghịch với khoảng cách bắn. Anh ta bắn lần đầu ở khoảng cách 20 mét với xác suất trúng thỏ là 50%. Nếu bị trượt, anh ta bắn viên thứ II ở khoảng cách 30 mét. Nếu lại trượt nữa, anh ta cố bắn viên thứ III ở khoảng cách 50 mét. Tìm xác suất để người thợ săn bắn được thỏ trong cuộc đi săn này.

Lời giải: Bài toán đã cho 3 biến cố:

T_i = {Thợ săn bắn trúng thỏ ở lần bắn thứ i}, i = 1,2,3. Ba biến cố này không độc lập. Theo bài ra ta có: $P(T_1) = k/20 = 0{,}50$. Suy ra hằng số tỷ lệ k là 10. Do đó $P(T_2 / \bar{T}_1)= 10/30 = 1/3$;

$P(T_3 / \bar{T}_2)= 10 / 50 = 0{,}20$.

Gọi T = {Thợ săn bắn trúng thỏ trong cuộc đi săn này}

$$T = T_1 \cup \overline{T}_1 T_2 \cup \overline{T}_1 \overline{T}_2 T_3$$

Theo công thức (2) ta có:

$P(T) = P(T_1) + P(\overline{T}_1 T_2) + P(\overline{T}_1 \overline{T}_2 T_3) =$

$= 0{,}50 + P(\overline{T}_1).P(T_2/\overline{T}_1) +$

$+ P(\overline{T}_1).P(\overline{T}_2/\overline{T}_1).P(T_3/\overline{T}_1 \overline{T}_2)$

$= 0{,}50 + (1-0{,}5).(1/3) + (1-0{,}5).(1-1/3).0{,}20 = 22/30 = 0{,}733$

(Theo tính chất của xác suất có điều kiện, ta có:

$P(\overline{T}_2 / \overline{T}_1) = 1 - P(T_2 / \overline{T}_1) = 1 - 1/3 = 2/3$; còn $\overline{T}_1 \overline{T}_2 = \overline{T}_2$ nên $P(T_3 / \overline{T}_1 \overline{T}_2) = P(T_3 / \overline{T}_2) = 0{,}20$).

Một số bạn đọc sẽ biểu diễn $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$; nghĩa là thỏ bị bắn trúng ít nhất một lần. Ở đây thỏ chỉ bị bắn trúng một lần, vì thỏ đã bị bắn trúng rồi, không ai lại bắn nữa!.

Phép thử của bài toán này là: Bắn cho tới khi được thỏ thì thôi hoặc bắn tới lần thứ ba thì thôi. Cho nên các biến cố sơ cấp của phép thử là: T_1 ; $\overline{T}_1 T_2$; $\overline{T}_1 \overline{T}_2 T_3$; $\overline{T}_1 \overline{T}_2 \overline{T}_3$. Các biến cố $\overline{T}_1$;T_2 ;T_3 đều không phải là các biến cố sơ cấp của phép thử.

Nhiều khi để tìm xác suất của biến cố A, nhưng ta thấy phức tạp quá thì nên nghĩ về biến cố đối lập $\bar{A}$, sau đó dùng công thức (3). Ở đây cũng vậy. Ta tìm biến cố đối lập $\overline{T}$

$\overline{T}$ = {Thỏ sống sót sau cuộc đi săn này}= $\overline{T}_1 \overline{T}_2 \overline{T}_3$.

Vậy $P(\overline{T}) = P(\overline{T}_1).P(\overline{T}_2/\overline{T}_1).\ P(\overline{T}_3/\overline{T}_1 \overline{T}_2) =$

$= (1 - 0{,}5).(1- 1/3).\ (1 - 0{,}2) = 4/15 = 0{,}267$;

cho nên $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - 0{,}267 = 0{,}733$.

Bài tập

1. Ba người cùng bắn vào bia, mỗi người bắn một viên.

A_i = {Người thứ i bắn trúng tâm}. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua A_i; i=1,2,3.

a) Chỉ có người thứ nhất bắn trúng (nghĩa là trúng tâm).

b) Có ít nhất một người bắn trúng.

c) Cả 3 người đều bắn trúng.

d) Người đầu bắn trúng, người thứ ba bắn trượt.

e) Có đúng một người bắn trúng.

f) Có đúng 2 người bắn trúng.

g) Có ít nhất 2 người bắn trúng.

h) Không có ai bắn trúng.

i) Có không quá 2 người bắn trúng.

Hãy tính xác suất của các biến cố trên, nếu cho biết khả năng bắn trúng tâm của mỗi người tương ứng là 60%;80%; 70%.

2. Gieo liên tiếp một đồng tiền cân đối đồng chất cho đến khi nào xuất hiện mặt sấp thì dừng lại.

a) Hãy mô tả các biến cố sơ cấp của phép thử trên

b) Tính xác suất sao cho phải gieo đến lần thứ ba.

3. Một lô hàng có tỷ lệ chính phẩm là 95%. Lấy liên tiếp ra 2 sản phẩm. Tìm xác suất để nhận được:

a) Cả 2 chính phẩm

b) Có ít nhất 1 chính phẩm

c) Chỉ có cái thứ 2 là chính phẩm

d) Có đúng 1 chính phẩm

4. Một công nhân trong công việc lắp ráp cần sử dụng đến ốc và vít. Anh ta có 2 hộp, 1 hộp ốc với tỷ lệ chính phẩm là 85%, 1 hộp vít với tỷ lệ chính phẩm là 90%. Chọn ngẫu nhiên 1 ốc và 1 vít, tìm khả năng anh ta nhận được 1 bộ ốc vít tốt.

5. Một chi tiết được gia công qua 3 công đoạn nối tiếp nhau và chất lượng chi tiết chỉ được kiểm tra sau khi đã được gia công xong. Xác suất gây ra khuyết tật cho chi tiết ở các công đoạn tương ứng là 0,2 ; 0,15 và 0,10. Tìm xác suất để sau khi gia công:

a) Chi tiết có khuyết tật.

b) Chi tiết bị ít nhất 2 khuyết tật.

c) Chi tiết bị cả 3 khuyết tật.

d) Chi tiết không bị khuyết tật nào.

e) Chi tiết bị không quá 1 khuyết tật.

6. Tín hiệu thông tin được phát 3 lần với xác suất thu được ở mỗi lần phát là 0,40.

a) Tìm xác suất để nơi thu nhận được tín hiệu đó.

b) Nếu muốn xác suất thu được tín hiệu thông tin lên 90% thì phải phát bao nhiêu lần?(Xem [5])

7. Trong điều trị bệnh lao có hiện tượng kháng thuốc. Gọi A là hiện tượng "kháng INH của vi khuẩn lao", B là hiện tượng "kháng PAS của vi khuẩn lao", C là "kháng Streptomycin của vi khuẩn lao". Qua theo dõi ta biết khả năng kháng INH của vi khuẩn lao là 20%, nghĩa là P(A)= 0,20. Tương tự P(B)= 0,40; P(C) = 0,30. Việc kháng các loại thuốc khác nhau là độc lập với nhau. Nếu phối hợp cả 3 loại thuốc thì khả năng khỏi bệnh là bao nhiêu?

8. Một lô thỏ gồm 3/4 thỏ có gen dị hợp tử Xt, 1/4 thỏ có gen dị hợp tử Xx, X là gen màu xám (gen trội), t là gen màu trắng (gen lặn). Bắt ngẫu nhiên từng con một ra 2 thỏ.

a) Tìm xác suất để 2 thỏ cùng gen

b) Giả sử 2 thỏ bắt được có 1 thỏ đực và 1 thỏ cái. Cặp thỏ này sinh được 4 con thỏ xám. Tìm xác suất để cặp bố mẹ cùng gen Xt, cùng gen Xx.

9. Trong một trận không chiến giữa máy bay ta và máy bay địch, máy bay ta bắn trước với xác suất trúng là 0,50. Nếu bị trượt, máy bay địch bắn trả lại với xác suất trúng là 0,40. Nếu không bị trúng đạn, máy bay ta lại bắn trả với xác suất trúng 0,30. Tìm xác suất:

a) Để máy bay địch bị rơi trong cuộc không chiến này.

b) Để máy bay ta bị rơi trong cuộc không chiến trên.

10. Trên một bảng quảng cáo người ta mắc 2 hệ thống bóng đèn. Hệ thống I gồm 2 bóng mắc nối tiếp. Hệ thống II gồm 2 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng đèn sau 6 giờ thắp sáng liên tục là 15% và việc hỏng của các bóng coi như độc lập. Tìm xác suất:

a) Hệ thống I bị hỏng (được hiểu là hệ thống này không sáng nữa)

b) Hệ thống II không bị hỏng

c) Cả hai hệ thống bị hỏng

d) Chỉ có hệ thống I bị hỏng

11. Một khoa điều trị có 3 bệnh nhân nặng với xác suất cần cấp cứu trong mỗi ca trực của các bệnh nhân tương ứng là 50%; 60%; 80%. Tìm các khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Không bệnh nhân nào phải cấp cứu

b) Có ít nhất một người phải cấp cứu

c) Chỉ có 1 bệnh nhân phải cấp cứu

d) Cả 3 bệnh nhân đều phải cấp cứu

e) Có 2 bệnh nhân phải cấp cứu

12. Trở lại ví dụ 6 (I.1). Hãy giải bài toán này bằng phương pháp dùng công thức cộng, nhân xác suất.

13. Để dập tắt nạn dịch sâu róm thông lâm trường đã tiến hành phun thuốc diệt sâu 3 lần liên tiếp trong một tuần. Theo kết quả thử nghiệm thì khả năng sâu bị chết sau lần phun thứ nhất là 50%; nếu sâu sống sót thì khả năng bị chết sau lần phun thứ hai là 70%; tương tự sau lần phun thứ ba là 90%.

a) Tính xác suất sâu bị chết sau đợt phun thuốc này.

b) Nếu tính đến vấn đề kinh tế và môi trường, lâm trường chỉ phun 2 lần thôi thì liệu có thể trả lời về sự cố " có tái dịch trở lại " được không? Vì sao?.

14.[*)] Một máy bay gồm ba bộ phận có tầm quan trọng khác nhau. Muốn bắn rơi máy bay thì chỉ cần có 1 viên đạn bắn trúng bộ phận thứ nhất, hoặc 2 viên đạn bắn trúng bộ phận thứ hai, hoặc có 3 viên bắn trúng bộ phận thứ ba. Nếu viên đạn đã trúng máy bay thì khả năng viên đạn trúng vào các bộ phận tương ứng là: 15%; 30% và 55%. Tìm xác suất để máy bay bị rơi nếu:

a) Có 1 viên đạn trúng.

b) Có 2 viên đạn trúng.

c) Có 3 viên đạn trúng.

d) Có 4 viên đạn trúng (xem [5]).

1.4 Tính xác suất bằng công thức xác suất đầy đủ và Bayes

Giả sử ta có nhóm đầy đủ các biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (nghĩa là 2 biến cố bất kỳ đều xung khắc với nhau và tổng của n biến cố này tương đương với biến cố chắc chắn: $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$).Biến cố A cần tìm xác suất quan hệ với nhóm đầy đủ như sau: Biến cố A xảy ra thì suy ra xảy ra một biến cố B_i nào đó; còn ngược lại nếu xảy ra biến cố B_i nào đó thì chưa thể khẳng định A xảy ra. Khi đó P(A) được tính như sau:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A/Bi)$$

(Công thức xác suất đầy đủ)

$P(B_k / A) = P(B_k).\ P(A/B_k) / P(A)$ (Công thức Bayes)

(k=1,...,n)

Nhận xét: Cái khó khi tính xác suất bằng công thức xác suất đầy đủ và Bayes là phải nhận được mô hình bài toán và phải chỉ ra được nhóm đầy đủ các biến cố.

Trước hết ta thấy rằng nhóm đầy đủ là không duy nhất. Chẳng hạn B_1,B_2,B_3 là nhóm đầy đủ thì B_1, $\overline{B}_1$; B_2, $\overline{B}_2$;... cũng đều là các nhóm đầy đủ. Vấn đề là ta phải chọn nhóm đầy đủ nào có quan hệ với biến cố A phù hợp như mô hình?.

Nếu bài toán đề cập đến 2 phần, biến cố A liên quan trực tiếp đến phần sau thì nhóm đầy đủ cần tìm chính là các trường hợp có thể xảy ra ở phần đầu. Nếu phép thử gồm 2 bước hay 2 giai đoạn; biến cố A cần tìm xác suất liên quan trực tiếp đến bước sau hay giai đoạn sau thì nhóm đầy đủ cần tìm chính là các trường hợp có thể của bước một hay giai đoạn một. Ta sẽ đem nhận xét này vận dụng vào các ví dụ dưới đây.

Việc tính xác suất có điều kiện đã được đề cập đến ở I.3. Có thể thấy có 3 cách tính xác suất có điều kiện:

1. Cách tính trực tiếp (ta nên diễn đạt bằng lời biến cố cần tìm xác suất có điều kiện, thì sẽ thấy đề bài đã cho hoặc dễ tính được).

2. Dùng công thức Bayes (phải ở trong mô hình xs đầy đủ)

3. Dùng định nghĩa (công thức (8) I.3).

Ví dụ 1. Một nhà máy có 3 phân xưởng cùng sản xuất ra một loại sản phẩm. Sản phẩm của phân xưởng I chiếm 40% sản lượng của nhà máy. Tương tự, phân xưởng II và phân xưởng III chiếm 30%. Tỷ lệ chính phẩm của từng phân xưởng tương ứng là 94%, 96% và 95%.

a) Tìm tỷ lệ chính phẩm chung của toàn nhà máy?

b) Lấy ngẫu nhiên từ lô sản phẩm của nhà máy ta bị cái phế phẩm. Hãy đoán xem phế phẩm đó là do phân xưởng nào làm ra?

Lời giải: Đây là mô hình tương đối phổ biến. Bài toán này đề cập đến 2 phần: phân xưởng của nhà máy và sản phẩm chính phẩm. Việc tìm tỷ lệ chính phẩm chung của nhà máy tương đương với việc tính xác suất của biến cố: {Lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm, được chính phẩm}=A. Biến cố A liên quan trực tiếp đến phần chính phẩm. Theo nhận xét trên nhóm đầy đủ sẽ là:

B_i = {Sản phẩm của phân xưởng i}; i=1,2,3.

Bạn đọc tự kiểm tra lại các điều kiện của nhóm đầy đủ và quan hệ giữa A với nhóm này sẽ thấy phù hợp mô hình.

(Bạn đọc lưu ý việc đặt biến cố. Nhiều bạn hay đặt {Khả năng lấy được sản phẩm của phân xưởng i}, hoặc {Lấy được sản phẩm chính phẩm của phân xưởng i},... Thêm chữ "khả năng" hoặc "chính phẩm" vào là sai !). Vậy ta có:

$P(B_1)=0,40$; $P(B_2)= 0,30$; $P(B_3)= 0,30$;

$P(A/B_1)= 0,94$; $P(A/B_2)= 0,96$; $P(A/B_3)= 0,95$

$P(A) = 0,4.0,94 + 0,3.0,96 + 0,3.0,95 = 0,949 = 94,9\%$

(Ở đây các xác suất có điều kiện được tính trực tiếp. Diễn đạt thành lời: $P(A/B_1)$ là xác suất để lấy ra một chính phẩm với điều kiện các sản phẩm này do phân xưởng I làm ra hoặc là xác suất để lấy ra một chính phẩm từ lô sản phẩm của phân xưởng I; theo đầu bài ta có ngay 0,94).

Để trả lời câu b) ta dùng công thức Bayes.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,949 = 0,051.$

$P(B_1/\overline{A}) = P(B_1)\ P(\overline{A}/B_1)\ /P(\overline{A}) = 0,4.0,06/0,051 = 0,4706$

$P(B_2/\overline{A}) = 0,3.0,04\ /\ 0,051 = 0,2353$

$P(B_3/\overline{A}) = 0,3.0,05\ /\ 0,051 = 0,2941$

Vậy ta nên đoán phế phẩm lấy ra là của phân xưởng I làm ra. Trả lời như vậy khả năng đúng là cao nhất.

Ví dụ 2. Trong một làng tỷ lệ nam: nữ là 12:13. Khả năng mắc bệnh bạch tạng ở nam là 0,6%; ở nữ là 0,35%.

a) Tính tỷ lệ mắc bệnh bạch tạng chung của cả làng?

b) Gặp trong làng một người không mắc bệnh. Tìm xác suất để người đó là nam? Là nữ?

Lời giải: Bài toán cũng thuộc mô hình trên. Bài toán đề cập đến 2 phần: phân loại giới tính trong làng và mắc bệnh bạch tạng.

Tỷ lệ mắc bệnh chung trong làng chính là xác suất {gặp (chọn) trong làng một người mắc bệnh}; kí hiệu là A. Giới tính trong làng có 2 loại, nên nhóm đầy đủ có 2 biến cố: B và $\overline{B}$, trong đó

B = {Gặp được nam trong làng}.

a) $P(B)=12/25$; $P(\overline{B})=13/25$; $P(A/B)=0,006$; $P(A/\overline{B})=0,0035$

$\Rightarrow P(A) = 12/25.\ 0,006 + 13/25.\ 0,0035 = 0,0047 = 0,47\%$

b) $P(\overline{A}) = 1 - 0,0047 = 0,9953$

$P(B/\overline{A}) = 12/25.(1 - 0,006)/\ 0,9953 = 0,4794$

Do đó $P(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - 0,4794 = 0,5206$

(Các xác suất có điều kiện đều được tính trực tiếp và một lần Bayes khi tính $P(B/\overline{A})$).

Ví dụ 3. Có 2 lô sản phẩm. Lô I có 10 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lô II có 16 chính phẩm và 4 phế phẩm. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Sau đó trong 2 sản phẩm thu được ta lại lấy hú hoạ ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm?

Lời giải: Phép thử ở đây gồm 2 bước, cho nên nhóm biến cố đầy đủ gồm 4 trường hợp có thể của bước I.

Đặt C_i = {Sản phẩm lấy ra từ lô i là chính phẩm}; i = 1,2.

Khi đó $B_1 = C_1 C_2$; $B_2 = C_1 \overline{C}_2$; $B_3 = \overline{C}_1 C_2$; $B_4 = \overline{C}_1 \overline{C}_2$

Ta có $P(B_1) = P(C_1 C_2) = P(C_1).P(C_2) = 10/12.\ 16/20 = 160/240$

Tương tự $P(B_2) = P(C_1 \overline{C}_2) = 10/12.\ 4/20 = 40/240$

$P(B_3) = 2/12.16/20 = 32/240$

$P(B_4) = 2/12.\ 4/20 = 8/240$

Đặt A = {Sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm}.

Ta có $P(A/B_1) = 1$ (Lấy ra 1 sản phẩm (sp) từ 2 chính phẩm thì chắc chắn được chính phẩm, nên xác suất (xs) bằng 1).

$P(A/B_2) = 1/2$; $P(A/B_3) = 1/2$ (Lấy ra 1 sp từ 2 sp, trong đó có 1 chính phẩm và 1 phế phẩm, nên xs bằng 1/2).

$P(A/B_4) = 0$ (Lấy từ 2 phế phẩm ra 1 sp thì không thể được chính phẩm, nên xs = 0).

Vậy $P(A) = (1/240).(160.1 + 40.\ 1/2 + 32.\ 1/2 + 8.0)$

$= 196/240 = 0{,}8167.$

Ví dụ 4. Có 2 lô gà giống. Lô I gồm 15 con, trong đó có 3 con trống. Lô II gồm 20 con, trong đó có 4 con trống. Một con từ lô II nhảy sang lô I. Từ lô I ta bắt ngẫu nhiên ra 1 con. Tìm xác suất để con gà bắt ra là gà trống?.

Lời giải: Phép thử gồm 2 bước. Bước I: con gà nhảy sang. Bước II: con gà bắt ra. Biến cố A = {Con gà bắt ra là trống}. Bước I có

2 trường hợp có thể, nên nhóm đầy đủ có 2 biến cố: B và $\overline{B}$, trong đó B = {Con gà nhảy từ lô II sang là trống}. Dễ dàng có được lời giải sau:

$P(B) = 4/20 = 0{,}2 \quad P(\overline{B}) = 0{,}8$

$P(A/B) = 4/16$ (Bắt ra 1 con từ lô I, mà lô I bây giờ có 16 con trong đó có 4 trống).

$P(A/\overline{B}) = 3/16$ (Lô I bây giờ có 16 con, trong đó có 3 trống).

$P(A) = 0{,}2.\ 4/16 + 0{,}8.\ 3/16 = 0{,}20.$

Ví dụ 5. Một hộp có 10 quả bóng bàn, trong đó có 6 quả còn mới. Hôm qua nhóm tập đã lấy ra 3 quả để chơi, sau đó trả lại vào hộp. Hôm nay nhóm tập lại lấy ra 3 quả. Tìm xác suất để 3 quả bóng lấy ra hôm nay đều là bóng mới?.

Lời giải: Ở đây phép thử gồm 2 bước: Hôm qua lấy ra 3 quả và hôm nay lấy ra 3 quả. Biến cố A = {Ba quả bóng lấy ra hôm nay là mới}. Do đó nhóm đầy đủ gồm 4 trường hợp có thể xảy ra ở bước I (3 quả lấy ra hôm qua):

Gọi B_i = {3 quả bóng lấy ra hôm qua có i quả mới}, i = 0,1,2,3.

Ta có $P(B_i) = C_6^i\, C_4^{3-i} / C_{10}^3$; i = 0,1,2,3. (Các xs này được tính theo cổ điển (mô hình ví dụ 1 (I.1)- phép thử là 1 lần thực hiện).

$P(A/B_i) = C_{6-i}^3 / C_{10}^3$, i = 0,1,2,3.

Theo công thức xs đầy đủ ta có:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} \left(C_6^i\, C_4^{3-i} / C_{10}^3\right).\left(C_{6-i}^3 / C_{10}^3\right) = 700/(120)^2$$

$$= 0{,}0486.$$

Ví dụ 6. Có một bệnh nhân mà bác sỹ chẩn đoán mắc bệnh A với xác suất 70%, mắc bệnh B với xác suất 30%. Để có thêm thông tin chẩn đoán bác sỹ đã cho xét nghiệm sinh hoá. Sau 3 lần thử thấy có 1 lần dương tính, biết rằng khả năng dương tính của mỗi lần xét nghiệm đối với bệnh A và B tương ứng là 10% và 30%. Hãy cho biết nên chẩn đoán bệnh nhân mắc bệnh naò?

Lời giải: Bài toán gồm 2 bước: loại bệnh và xét nghiệm dương tính. Nếu chỉ xét nghiệm 1 lần thì bài toán thuộc mô hình cơ bản với biến cố A là {Xét nghiệm thấy dương tính}. Cái khó ở đây là xét nghiệm 3 lần thấy có 1 lần dương tính, nên biến cố A = {Thấy dương tính sau 3 lần xét nghiệm}. Bước một liên quan đến loại bệnh, nên có 2 biến cố của nhóm đầy đủ:

B = {Bệnh nhân mắc bệnh B}, $\overline{B}$ = {Bệnh nhân mắc bệnh A}.

Ta phải tính 2 xs có điều kiện $P(B/A), P(\overline{B}/A)$. Ở đây ta dùng công thức Bayes.

$P(B) = 0,3 \qquad P(\overline{B}) = 0,7$

$P(A/B) = 0,3.0,7.0,7 + 0,7.0,3.0,7 + 0,7.0,7.0,3 =$

$= 3.\ 0,3.0,7.0,7 = 0,441$

(mục sau ta thấy xs này = $P_3(1;0,3)$)

$P(A/\overline{B}) = 3.\ 0,1.0,9.0,9 = 0,243$

Vậy $P(A) = 0,3.\ 0,441 + 0,7.\ 0,243 = 0,3024$

Do đó $P(B/A) = 0,3.\ 0,441 / 0,3024 = 0,4375$

$P(\overline{B}/A) = 0,7.\ 0,243 / 0,3024 = 0,5625.$

Nên chẩn đoán bệnh nhân mắc bệnh A thì khả năng đúng cao hơn.

Ví dụ 7*). Có 2 lô sản phẩm. Lô I gồm 90% chính phẩm. Lô II có tỷ lệ phế phẩm/chính phẩm là 1/4. Lấy ngẫu nhiên ra 1 lô, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm ta được chính phẩm. Trả sản phẩm này trở lại lô của nó. Từ lô này ta lại lấy ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để lấy phải phế phẩm.

Lời giải: Để giải bài toán này ta áp dụng công thức xs đầy đủ, Bayes 2 lần. Lần I với nhóm đầy đủ gồm 2 biến cố: B, $\overline{B}$, trong đó B = {Lấy ra lô 1}; P(B) = 1/2 = 0,5.

A = {Lấy được chính phẩm}.

$P(A/B) = 0,9$; $P(A/\overline{B}) = 4/5 = 0,8$

$P(A) = 0,5.0,9 + 0,5.0,8 = 0,85$

$P(B/A) = 0,5.0,9 / 0,85 = 0,5294$ (~9/17)

$P(\overline{B}/A) = 0,5.0,8 / 0,85 = 0,4706$ (~8/17)

Vậy sau lần lấy thứ nhất ta được chính phẩm thì chính phẩm này được lấy ra từ lô 1 với xs 0,5294, còn từ lô 2 với xs 0,4706; điều đó có nghĩa là lần thứ 2 lô 1 được lấy ra với xs 0,5294; lô 2 được lấy ra với xs 0,4706.

Mà $P(\overline{A}/B) = 0,1$; $P(\overline{A}/\overline{B}) = 1/5 = 0,2$; cho nên

$P(\overline{A}) = 0,5294.0,1 + 0,4706.0,2 = 0,1471$.

Ví dụ 8. Tỷ lệ cha mắt đen, con mắt đen là 0,782; cha mắt đen, con mắt xanh là 0,079; cha mắt xanh, con mắt đen là 0,089; cha mắt xanh, con mắt xanh là 0,05.

a) Tìm khả năng con mắt đen biết rằng cha mắt đen?

b) Tìm khả năng con mắt xanh biết rằng cha mắt xanh?

Lời giải: Các xs cần tìm đều là các xs có điều kiện.

P(Con mắt đen / Cha mắt đen) = P(Con mắt đen và cha mắt đen) / P (Cha mắt đen) = 0,782 / (0,782 + 0,079) = 0,9082.

(Vì P(Cha mắt đen) = P(cha mắt đen và con mắt đen) + P(cha mắt đen và con mắt xanh) = 0,782 + 0,079 = 0,861).

Tương tự P(Con mắt xanh / Cha mắt xanh) = P(Con mắt xanh và cha mắt xanh) / P(Cha mắt xanh)= 0,05 / (1- 0,861) = 0,3597.

Ví dụ 9. Ta xét các gia đình có 2 con. Khả năng sinh con gái trong mỗi lần sinh là ~ 0,51, các lần sinh là độc lập. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có 2 con ta được:

a) Gia đình có con gái đầu, con trai thứ hai.

b) Gia đình có con thứ hai là trai, biết rằng đứa thứ nhất là gái.

c) Gia đình có con thứ hai là trai, biết rằng họ có ít nhất một con gái.

Lời giải: Gọi T_i = {Đứa con thứ i là trai}; i = 1,2.

A = {Con gái đầu, con trai thứ hai}

B = {Có ít nhất một con gái}

a) Ta có $A = \overline{T}_1 T_2 \Rightarrow P(A) = 0{,}51.0{,}49 = 0{,}2499$

b) Đây là xác suất có điều kiện, không thể tính trực tiếp hay dùng công thức Bayes được, ta phải dùng công thức xác suất có điều kiện. Ta cần tính

$$P(T_2/\ \overline{T}_1) = P(\overline{T}_1T_2) / P(\overline{T}_1) =$$

$$= P(A) / P(\overline{T}_1) = 0{,}2499/0{,}51 = 0{,}49$$

(Vì các lần sinh là độc lập, nên $P(T_2 / \overline{T}_1) = P(T_2)$; nghĩa là thông tin đứa đầu là gái đã không làm thay đổi khả năng sinh con trai ở lần sinh thứ hai)

c) Ta cần tính $P(T_2 /B)$.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\text{Không có con gái nào}) =$

$= 1 - P(\text{Cả 2 con đều là trai}) = 1 - 0{,}49.0{,}49 = 0{,}7599.$

$P(T_2 /B) = P(T_2B) / P(B) = P(T_2\ \overline{T}_1) / P(B) = P(A) /P(B) =$

$= 0{,}2499 / 0{,}7599 = 0{,}3289.$

Ví dụ 10*). Ba khẩu súng cùng bắn vào một mục tiêu. Có 2 viên đạn trúng đích. Tìm xác suất để cho viên đạn do người thứ 1 bắn là trúng đích, biết rằng xác suất trúng đích của từng người tương ứng là 0,6; 0,8; 0,9.

Lời giải: Gọi T_i = {Người thứ i bắn trúng đích}, i = 1,2,3.

A = {Có 2 người bắn trúng đích}

Ta cần tính $P(T_1 /A)$.

$A = T_1 T_2 \overline{T}_3 \cup T_1 \overline{T}_2 T_3 \cup \overline{T}_1 T_2 T_3$

P(A) = 0,6.0,8.0,1 + 0,6.0,2.0,9 + 0,4.0,8.0,9 = 0,444

AT_1 = {Người thứ 1 bắn trúng và 2 người kia có 1 người bắn trượt} $= T_1(\overline{T}_2 T_3 \cup T_2 \overline{T}_3)$

$P(AT_1)$ = 0,6.0,2.0,9 + 0,6.0,8.0,1=0,156

$P(T_1 /A)$ = 0,156 / 0,444 = 0,3513.

Bài tập

1. Ta có 10 hộp bi, trong đó 4 hộp loại I, mỗi hộp có 3 bi trắng và 5 bi đỏ; 3 hộp loại II, mỗi hộp có 4 bi trắng, 6 bi đỏ; 3 hộp loại III, mỗi hộp có 2 bi trắng, 5 bi đỏ.

a) Rút hú hoạ ra một hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên ra một bi.Tìm xác suất để được bi đỏ.

b) Rút hú hoạ một hộp và từ đó lấy ra một bi, ta được bi trắng. Tìm xác suất để viên bi đó rút ra từ hộp loại II (xem [5]).

2. Trứng gà nở với xác suất là 0,80. Nếu trứng nở thì khả năng nở ra gà mái và gà trống là như nhau.

a) Cho ấp 1 quả. Tìm xác suất nở ra gà mái.

b) Cho ấp 2 quả. Tìm xác suất nở ra 2 con mái; ra 1 trống, 1 mái.

3. Có 30 xạ thủ, chia thành 4 nhóm.

Nhóm I gồm 6 người, xs bắn trúng đích của mỗi người là 0,8.

Nhóm II gồm 9 người, xs - nt - 0,7.

Nhóm III gồm 12 người, xs tương ứng là 0,6.

Nhóm IV gồm 3 người, xs tương ứng là 0,4.

a) Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ từ 30 xạ thủ này. Tính xác suất bắn trúng đích của xạ thủ được chọn ra?

b) Xạ thủ được chọn ra bắn thử một viên và bị trượt. Hỏi xạ thủ này có khả năng thuộc nhóm nào nhất?

c) Chọn ngẫu nhiên mỗi nhóm một xạ thủ. Mỗi người bắn thử một viên. Tính xác suất để cả 4 người bắn trượt; để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

4. Ta biết rằng các trẻ sinh đôi có thể là sinh đôi thật (do 1 trứng sinh ra), trong trường hợp này chúng cùng giới; hoặc giả sinh đôi (do 2 trứng sinh ra), trong trường hợp đó xác suất để chúng cùng giới là 1/2. Ta giả thiết rằng đã biết xác suất p sao cho trong một họ đã cho hai trẻ sinh đôi là sinh đôi thật.

a) Tìm xác suất để cho hai trẻ sinh đôi là sinh đôi thật, biết rằng chúng cùng giới.

b) Tìm xác suất để cho hai trẻ sinh đôi là giả sinh đôi, biết rằng chúng khác giới (Xem [1]).

5. Biết rằng tỷ lệ người mắc bệnh Z ở một địa phương là 2%. Người ta sử dụng một phản ứng mà nếu người bị bệnh thì phản ứng luôn luôn dương tính, nếu không bị bệnh thì phản ứng có thể dương tính với xác suất là 0,2.

a) Tìm xác suất phản ứng dương tính.

b) Tìm tỷ lệ người bị bệnh, tỷ lệ người không bị bệnh trong nhóm người có phản ứng dương tính.

c) Qua phương pháp thử này ta có thể ước lượng tỷ lệ mắc bệnh là bao nhiêu?

6. Có 3 người tham gia râm hom. Cô A râm 3,5 vạn hom. Tỷ lệ hom sống là 80%. Cô B râm 4,5 vạn hom với tỷ lệ hom sống là 75%. Cô C râm 2 vạn hom với tỷ lệ hom sống là 85%.

a) Tính tỷ lệ hom sống chung của cả nhóm 3 người này.

b) Tính tỷ lệ hom sống của cô B trong số hom sống của cả nhóm.

c) Chọn ngẫu nhiên 1 hom, được hom sống. Tìm xác suất hom đó không phải do cô A râm.

(Trích từ đề thi TS SĐH của Trường ĐH Lâm Nghiệp năm 2001).

7. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có 95% sản phẩm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Trong quá trình kiểm nghiệm, xác suất để chấp nhận một sản phẩm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật là 98% và khả năng chấp nhận một sản phẩm không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật là 4%. Tìm xác suất để một sản phẩm qua kiểm nghiệm được chấp nhận là sản phẩm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật? Hoặc tương đương là tính tỷ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn kỹ thuật sau khi đã qua khâu kiểm nghiệm (Xem [5]).

8. Một người có 3 chỗ ưa thích như nhau để câu cá. Xác suất câu được cá ở những chỗ đó tương ứng là 0,6;0,7 và 0,8. Biết rằng ở mỗi một chỗ người đó đã thả câu 3 lần và chỉ câu được 1 con cá. Tìm xác suất để cá câu được ở chỗ thứ nhất? (xem [4]).

9. Trong trò chơi hái hoa có thưởng có 10 phiếu hoa, trong đó có 5 phiếu hoa có thưởng. Ba người đầu tiên tham gia trò chơi, mỗi người hái một phiếu hoa (tất nhiên hoa nào đã được hái thì sẽ không còn trên cây nữa). Hãy chứng tỏ rằng khả năng hái được phiếu hoa có thưởng của 3 người là như nhau (mặc dù có người hái trước, người hái sau).

10. Một chiếc máy bay có thể xuất hiện ở vị trí A với xác suất 2/3 và ở vị trí B với xác suất 1/3. Có ba phương án bố trí 4 khẩu pháo bắn máy bay như sau:

Phương án I: 3 khẩu đặt tại A, 1 khẩu tại B.

Phương án II: 2 khẩu tại A, 2 khẩu tại B.

Phương án III: 1 khẩu tại A, 3 khẩu tại B.

Biết rằng xác suất bắn trúng máy bay của mỗi khẩu pháo là 0,70 và các khẩu pháo hoạt động độc lập với nhau. Hãy chọn phương án tốt nhất? (xem [7])

11. Có hai tổ. Tổ I có 6 nam, 4 nữ. Tổ II có 3 nam, 7 nữ. Cần lập một nhóm gồm 3 người từ 2 tổ này. Để khách quan từ mỗi tổ ta chọn ngẫu nhiên ra 1 người, sau đó trong số còn lại của 2 tổ ta chọn ngẫu nhiên ra 1 người.

a) Tìm xác suất để người thứ ba được chọn ra là nam?

b) Tìm xác suất để người thứ ba được chọn ra thuộc tổ II?

12. Giả sử có ba lô hàng, mỗi lô có 20 sản phẩm (sp), với số sp tốt tương ứng của mỗi lô là 20,15,10. Lấy ngẫu nhiên ra một lô (khả năng lấy ra của các lô là như nhau), rồi từ đó lấy hú hoạ ra 1 sp thì được sp tốt. Trả sp đó lại lô hàng vừa lấy ra, sau đó lại lấy tiếp 1 sp thì được sp tốt. Tìm xác suất để các sp được lấy ra từ lô thứ III? (xem [5]).

13. Trẻ sinh đôi cùng giới gấp đôi trẻ sinh đôi khác giới. Xác suất sinh đôi khác giới trong các trường hợp là như nhau. Tìm xác suất để đứa thứ hai là trai biết rằng đứa thứ nhất trong cặp sinh đôi là trai?. Cho biết khả năng sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,49.

14. Xét các gia đình có 2 con. Các lần sinh là độc lập và khả năng sinh con gái trong mỗi lần sinh là 0,51 (xs này được lấy bằng tần suất đẻ con gái theo kết quả điều tra dân số năm 1976).

a) Tính xác suất để gia đình này có 2 con gái.

b) Tính xác suất để gia đình này có 2 con gái, biết rằng họ có ít nhất một con gái.

15. Một cuộc thi có 3 vòng. Vòng I lấy 90% thí sinh. Vòng II lấy 80% thí sinh đã qua vòng I. Vòng III lấy với tỷ lệ 70% của thí sinh vòng II.

a) Tính tỷ lệ thí sinh lọt qua cả 3 vòng.

b) Tính xác suất để một thí sinh bị loại ở vòng II nếu biết rằng thí sinh này bị loại.

1.5 Tính xác suất theo công thức Bernoulli

Một điểm rất quan trọng để dùng được công thức Bernoulli là phải nhận ra được dãy phép thử Bernoulli. Dãy Bernoulli thường lặn trong các bài toán, ta phải lôi được nó ra. Muốn vậy phải hiểu rõ định nghĩa dãy Bernoulli. Đó là n phép thử độc lập, mỗi phép thử xuất hiện hoặc biến cố A hoặc biến cố $\bar{A}$ (một số ít bạn đọc ngộ nhận là mỗi phép thử có 2 biến cố sơ cấp! Biến cố A là gì thì tuỳ từng bài toán cụ thể ta sẽ hiểu được người ta muốn quan tâm tới biến cố nào), khả năng xảy ra biến cố A là như nhau đối với mọi phép thử, tức là P(A) (= p) không phụ thuộc vào thứ tự phép thử (như vậy trong n phép thử không có bất kỳ một ràng buộc gì về việc biến cố A phải xuất hiện ở phép thử nào).

- Tính xác suất để trong n phép thử Bernoulli biến cố A xảy ra m lần:

$$P_n(m;p) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \text{ ; } m = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (9)$$

- Số có khả năng nhất: Số nguyên m_0 ($0 \le m_0 \le n$) được gọi là số có khả năng nhất nếu xác suất tương ứng với nó là lớn nhất:

$$P_n(m_0;p) = \max_{0\le m\le n} P_n(m;p)$$

Quy tắc tìm:

- Nếu np + p - 1 là một số nguyên thì $m_0 = np + p - 1$ và np + p.

- Nếu np + p - 1 là một số thập phân thì $m_0 = [np + p - 1\} + 1$; tức là số nguyên bé nhất nhưng lớn hơn số thập phân đó.

Ví dụ 1. Theo kết quả điều tra về bệnh lao, tỷ lệ người bị lao ở vùng nọ là 0,001. Tìm xác suất để khi khám cho 10 người:

a) Có 2 người bị lao.

b) Không có ai bị lao.

c) Có 9 người không bị lao.

d) Có ít nhất 1 người bị lao.

e) Số người không bị lao có khả năng nhất.

Lời giải: Khám cho 10 người chính là 10 phép thử Bernoulli với biến cố A = {Gặp người bị lao} và p = 0,001. Do đó ta có:

a) $P_{10}(2;0,001) = C_{10}^{2}\,(0,001)^2\,(0,999)^8$.

b) $P_{10}(0;0,001) = (0,999)^{10}$.

c) $P_{10}(9;0,999) = P_{10}(1;0,001) = C_{10}^{9}\,(0,999)^9\,(0,001)$

$= C_{10}^{1}\,(0,001)(0,999)^9$.

d) $P_{10}(m \geq 1;\ 0,001) = 1 - P_{10}(0;0,001) = 1 - (0,999)^{10}$.

e) Ta có $10.0,999 + 0,999 - 1 = 9,989$; suy ra $m_0 = 10$.

Ví dụ 2. Một bài thi trắc nghiệm (multiple choice test) gồm 100 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, còn trả lời sai thì không được điểm. Một sinh viên lười học, nên không nắm được bài, đã làm bài bằng cách chọn hú hoạ một phương án trả lời. Tìm xác suất để sinh viên này:

a) Đạt được kết quả (đạt 50 điểm trở lên).

b) Không đạt yêu cầu (được dưới 50 điểm).

Lời giải: Sinh viên trả lời 100 câu hỏi theo cách trên chính là 100 phép thử Bernoulli với A = {Trả lời đúng} và p = P(A) = 1/4 = 0,25. Do đó ta có:

a) $P_{100}(m \geq 50; 0,25) = P_{100}(50 \leq m \leq 100; 0,25) =$

$$= \sum_{m=50}^{100} C_{100}^{m} (0,25)^{m} (0,75)^{100-m}.$$

(Phần sau ta sẽ biết cách tính xấp xỉ xác suất trên như sau:

$\sim \Phi((100-25)/\sqrt{100.0,25.0,75}) - \Phi((50-25)/4,33) \sim$

$\sim 1 - 1 \sim 0$).

b) $P_{100}(m < 50; 0,25) = \sum_{m=0}^{49} C_{100}^{m} (0,25)^{m}(0,75)^{100-m}.$

(Dùng xấp xỉ ta được $\sim \Phi((50-25)/4,33) - \Phi((0-25)/4,33) \sim$

$\sim 1 - 0 \sim 1$).

Ví dụ 3. Một chiến sỹ tự vệ tập bắn súng, xác suất bắn trúng tâm trong mỗi lần bắn là 0,30. Hỏi phải bắn ít nhất bao nhiêu viên để với xác suất không bé hơn 80% chiến sỹ này bắn trúng tâm ít nhất 1 viên?.

Lời giải: Gọi số đạn chiến sỹ này cần bắn là n. Thực hiện bắn n viên đạn vào tâm chính là n phép thử Bernoulli với A = {Bắn trúng tâm} và p = 0,3. Ta có:

$$P_n(m \geq 1; 0,3) = 1 - P_n(0; 0,3) = 1 - (0,7)^n \geq 0,8.$$

Suy ra $(0,7)^n \leq 0,2$. Nhẩm ra ta được n = 5.

Nhận xét: Lấy ra k phần tử từ một tập gồm n phần tử, nếu không nói gì đặc biệt thì đó là cách lấy theo nghĩa tổ hợp.

Nhưng lấy ra k phần tử từ một tập không chỉ rõ số phần tử, mà chỉ cho một tỷ lệ nào đó thì phải hiểu đó là cách lấy ra từng phần tử một và sự khác nhau giữa việc lấy có trả lại hay không trả lại không cần quan tâm đến (có thể số phần tử quá lớn, sự khác nhau có thể bỏ qua hoặc ý của đầu bài là bỏ qua sự khác nhau đó để cho đơn giản).

Bài tập

1. Trong một cuộc thi bắn súng quốc tế, mỗi xạ thủ bắn 60 viên đạn vào bia. Xạ thủ Việt Nam bắn trúng tâm với xs 0,92. Tìm xác suất để:

a) Xạ thủ Việt Nam bắn trúng tâm cả 60 viên.

b) Xạ thủ Việt Nam bị trượt ngoài tâm 2 viên.

c) Xạ thủ này bị trượt ngoài tâm ít nhất 1 viên.

d) Tìm số viên trúng tâm có khả năng nhất. Tính xác suất tương ứng?.

2. Một bác sỹ có tiếng về chữa một bệnh nào đó. Xác suất chữa khỏi bệnh là 8/10. Có người nói rằng cứ 10 người đến chữa thì chắc chắn có 8 người khỏi bệnh. Điều khẳng định đó có đúng không?.Vì sao?.

3. Hai đấu thủ chơi cờ ngang tài ngang sức thi đấu với nhau. Hỏi khả năng thắng 2 ván trong 4 ván có cao hơn khả năng thắng 3 ván trong 6 ván hay không?.

4. Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, trả lời sai bị trừ 1 điểm. Một học sinh học yếu làm bài bằng cách chọn hú hoạ một phương án để trả lời. Tính xác suất để:

a) Học sinh này được 13 điểm.

b) Học sinh này bị điểm âm (xem [7]).

5. Một công ty xây dựng cần mua 10000 viên gạch men của xưởng gạch men Thanh Tân. Theo hợp đồng, khi nhập hàng công ty sẽ kiểm tra ngẫu nhiên 100 viên, nếu thấy bị không quá 3 viên thứ phẩm thì chấp nhận lô hàng, nếu thấy có trên 3 viên thứ phẩm thì trả lô hàng. Xưởng gạch đem giao lô hàng với tỷ lệ thứ phẩm là 5%.

a) Tìm khả năng xưởng gạch gặp may trong việc giao lô hàng này (tức là khả năng lô hàng không bị công ty trả về).

b) Nếu kiểm tra ngẫu nhiên 100 viên thấy không có viên nào thứ phẩm, công ty sẽ thanh toán mỗi viên 1500đ (lô hàng được xếp loại A); nếu thấy có 1 viên thứ phẩm, lô hàng xếp loại B với 3% số viên chỉ được thanh toán 1000đ / 1 viên; nếu thấy 2 hoặc 3 viên thứ phẩm lô hàng bị xếp loại C với 10% số viên chỉ được thanh toán 1000đ / 1 viên. Chi phí vận chuyển hàng 1 lượt là 500.000đ.

Nếu anh (chị) là người giao lô hàng, anh (chị) hãy đoán xem khả năng nào sẽ xảy ra đối với lô hàng trên là cao nhất. Nếu xảy ra tình huống đó anh (chị) có chấp nhận giao lô hàng hay đem về?

6. Một khẩu pháo bắn vào một mục tiêu với xác suất trúng là 0,60. Tìm xác suất mục tiêu bị tiêu diệt sau 3 lần bắn liên tiếp, biết rằng khả năng mục tiêu bị tiêu diệt khi có 1, 2 và 3 viên trúng tương ứng là 0,2; 0,5 và 0,8 (xem [6]).