Chương 6 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. Khái niệm

Dạng tổng quát:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Với x là biến số, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ là các đạo hàm các cấp của $y = y(x)$.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình đó.

Ví dụ :

$$y'' + y = 0$$

Là phương trình vi phân cấp 2 có nghiệm là $y = \sin(x)$ hoặc $y = C.\sin(x)$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Trong đó $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), b(x)$ là những hàm cho trước.

II. Phương trình vi phân cấp 1

1. Khái niệm

a. **Dạng:** $F(x, y, y') = 0$ (1) hoặc $y' = f(x, y)$ (2)

Nếu từ (1) ta tìm được hàm số $y = y(x, C)$ với C là hằng số tùy ý thì $y = y(x, C)$ gọi là nghiệm tổng quát của (1).

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của (1) mà tìm được một hệ thức dạng: $\Phi(x, y, C) = 0$ nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn thì hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của (1).

Nếu cho C trong nghiệm tổng quát của (1) một giá trị xác định C_0 thì ta được nghiệm riêng của (1), tức là $y = y(x, C_0)$ là nghiệm riêng của (1).

Tương tự nếu cho C trong tích phân tổng quát của (1) một giá trị xác định C_0 thì ta được tích phân riêng của (1), tức là $\Phi(x, y, C_0) = 0$ là tích phân riêng của (1).

Nếu khi giải (1) có những nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát thì giọ là nghiệm kỳ dị (hay nghiệm ngoại lai)

Ví dụ : Xét phương trình $y' - yx = 0 \Leftrightarrow y' = yx$

Ta thấy $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ là nghiệm tổng quát của phương trình, $y = -e^{\frac{x^2}{2}}$ là nghiệm riêng.

Nếu ta biểu diễn nghiệm tổng quát dưới dạng hệ thức $y - Ce^{\frac{x^2}{2}} = 0$ thì ta được tích phân tổng quát, cho $C = -1$ thì ta có $y + e^{\frac{x^2}{2}} = 0$ là tích phân riêng.

b. Bài toán Cauchy

Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình $y' = f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu: $y(x_0) = y_0$ với x_0, y_0 cho trước $(y|_{x=x_0} = y_0)$

Định lý 1.1

Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục tại lân cận điển (x_0, y_0) thì bài toán Cauchy luôn có nghiệm. Hơn nữa nếu $f'_y(x, y)$ liên tục tại lân cận điển (x_0, y_0) thì bài toán Cauchy tồn tại duy nhất nghiệm.

2. Phương trình vi phân cấp một biến số phân ly

Là phương trình có thể tách rời mỗi biến một vế

a. Dạng 1:

$$y' = f(x).g(y) \quad (2.1)$$

Phương pháp giải

Nếu $g(y) \neq 0$ thì ta có

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Suy ra tích phân tổng quát :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Nếu $g(y) = 0$ có nghiệm $y = b$ thì $y = b$ là nghiệm của phương trình

Ví dụ : Giải phương trình

$$y' = x(1 + y^2)$$

Giải:

Chia 2 vế cho $1 + y^2$ ta có

$$\frac{dy}{1+y^2} = xdx$$

Suy ra tích phân tổng quát

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int xdx + C$$

$$\Leftrightarrow arctgy = \frac{x^2}{2} + C$$

b. Dạng 2 :

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \qquad (2.2)$$

Phương pháp giải

Ta có tích phân tổng quát :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Ví dụ : Giải phương trình

$$\cos(y) \,.\, y' = x$$

Giải.

$$\cos(y)\, dy = xdx$$

Ta có tích phân tổng quát :

$$\int \cos(y)\, dy = \int xdx + C$$

$$siny = \frac{x^2}{2} + C$$

c. Dạng 3 :

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \qquad (2.3)$$

Phương pháp giải

Nếu $f_2(x)g_1(y) \neq 0$ chia 2 vế cho $f_2(x)g_1(y) \neq 0$ thì ta có :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Suy ra tích phân tổng quát :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$$

Nếu từ $g_1(y) = 0$ ta có nghiệm $y = b$ thì đây là nghiệm riêng của phương trình

Nếu từ $f_2(x) = 0$ ta có nghiệm $x = a$ thì đây là nghiệm riêng của phương trình

Ví dụ : Giải phương trình vi phân

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

Giải

Chia 2 vế cho $(1 + y^2)(1 + x^2)$ phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0$$

Tích phân tổng quát :

$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx + \int \frac{y}{1 + y^2}dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}ln(1 + y^2) = C$$

d. Dạng 4 :

$$y' = f(ax + by + c) \qquad (2.4)$$

Phương pháp giải

Nếu $b = 0$ hoặc $a = 0$ ta có dạng (2.1)

Nếu $ab \neq 0$, đặt $z = ax + by + c$ ta có :

$$z' = bf(z) + a$$

Đây là dạng (2.1)

Ví dụ : Giải phương trình

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1$$

Giải

Phương trình đã cho viết lại thành

$$y' = (x + y)^2 - 1$$

Đặt $z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y' = 1 + z^2 - 1$

$$\Leftrightarrow z' = z^2$$

Nếu $z \neq 0$ chia 2 vế cho z^2 ta có :

$$\frac{dz}{z^2} = dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -x + C$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{C - x}$$

Nghiệm tổng quát

$$y = \frac{1}{C - x} - x$$

Nếu $z = 0 \Leftrightarrow y = -x$, đây là nghiệm kỳ di của phương trình.

3. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

Dạng :

$$y' = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3.1)$$

Phương pháp giải

Đặt $u = \frac{y}{x}$ suy ra $y = ux$ nên $y' = u + u'x$, thay vao ta có:

$$u'x = \varphi(u) - u$$

Nếu $\varphi(u) - u \neq 0$, ta có :

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Suy ra tích phân tổng quát :

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Nếu $\varphi(u) - u = 0$ có nghiệm $u = a$ thì $y = ax$ là nghiệm

Nếu Nếu $\varphi(u) - u \equiv 0$ thì phương trình trở thành

$$y' = \frac{y}{x}$$

Có nghiệm $y = Cx$

Chú ý 1: Muốn kiểm tra phương trình $y' = f(x, y)$ có phải đẳng cấp cấp 1 không ta có thể kiểm tra $f(tx,ty) = f(x,y), \forall t$ thì cho $t = \frac{1}{x}$ ta có $f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi(\frac{y}{x})$

Ví dụ : Giải phương trình

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

Giải

Đặt $u = \frac{y}{x}$ ta có $y = ux$ và $y' = u'x + u = u + e^u$

Suy ra :

$$u'x = e^u$$

hay

$$e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế ta có :

$$C - e^{-u} = lnx$$

$$\Leftrightarrow C = e^{-\frac{y}{x}} + lnx$$

Chú ý 2:

Phương trình

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$$

Có thê đưa về dạng biến số phân ly

Trường hợp 1 :Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ thì đặt

$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

Với α, β là nghiệm của hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, khi đó :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

Thay vào ta có :

$$z' = f(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_{12} t + b_2 z})$$

Đây là phương trình đẳng cấp cấp 1.

Trường hợp 2 :Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ thì $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ ta đặt :

$$z = a_2 x + b_2 y$$

Ta có :

$$z' = a_2 + b_2 f(\frac{kz + c_1}{z + c_2})$$

Đây là phương trình biến số phân ly.

Ví dụ : Giải phương trình vi phân

$$(x + y - 2)dx - (x - y + 4)dy = 0$$

Giải

Nếu $x - y + 4 \neq 0$ phương trình đã cho tương đương với :

$$y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}$$

Do $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ nên giải hệ :

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = z + 3 \end{cases} \Rightarrow z' = \frac{t + z}{t - z}$$

Đặt $u = \frac{z}{t}$ ta có $z = ut$ và

$$z' = u't + u = \frac{1 + u}{1 - u}$$

$$\Leftrightarrow u't = \frac{u^2 + 1}{1 - u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{dt}{t}$$

Lấy tích phân 2 vế

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{dt}{t} + lnC$$

$$\Leftrightarrow arctgu - ln\sqrt{1+u^2} = ln(Ct)$$

$$\Leftrightarrow arctgu = ln(Ct\sqrt{1+u^2})$$

$$\Leftrightarrow e^{arctgu} = Ct\sqrt{1+u^2}$$

Thay $u = \frac{z}{t}$ ta có

$$e^{arctg\frac{z}{t}} = C\sqrt{z^2+t^2}$$

Thay $z = y - 3$ và $t = x + 1$ ta được tích phân tổng quát

$$e^{arctg\frac{y-3}{x+1}} = C\sqrt{(y-3)^2+(x+1)^2}$$

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

a. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

Dạng :

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (4.1)$$

Với $p(x)$ là hàm cho trước.

Phương pháp giải

Có nghiệm tổng quát là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

b. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất

Dạng :

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (4.2)$$

Với $\mathrm{p(x), q(x)}$ là các hàm cho trước.

Phương pháp giải

Có nghiệm tổng quát là

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx)$$

Chú ý : Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất có thể viết

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx = y_1 + y_2$$

Với y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng và y_2 là nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số đối voi y_1.

Ví dụ : Giải phương trình

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

Giải

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}(C + \int e^{-\int \frac{1}{x}dx}x^2 dx)$$

$$y = x\left(C + \int xdx\right) = x(C + \frac{x}{2})$$

5. Phương trình Becnuly

Dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \qquad (5.1)$$

Phương pháp giải

Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì đây là phương trình tuyến tính

Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ bằng cách chia cả 2 vế cho y^α và đặt $z = y^{1-\alpha}$ ta có :

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ví dụ : Giải phương trình vi phân

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$$

Giải

Chia 2 vế cho y^4 ta có

$$y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-3} = x^2$$

Đặt $z = y^{-3}$ ta có $z' = -3y^{-4}y'$, thay vào phương trình ta có :

$$z' - \frac{3}{x}z = -3x^2$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 theo z nên có nghiệm tổng quát :

$$z = e^{\int\frac{3}{x}dx}(C - 3\int e^{-\int\frac{3}{x}dx}x^2dx)$$

$$\Leftrightarrow z = Cx^3 - 3x^3lnx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^3} = Cx^3 - 3x^3lnx$$

6. Phương trình vi phân toàn phần

Dạng :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (6.1)$$

Với $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D và thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (6.2)$$

Phương pháp giải

Khi đó tích phân tổng quát có dạng :

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

Hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

Với $(x_0, y_0) \in D$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$$

Giải

$$P = 4xy^2 + y, Q = 4x^2y + x$$

Do

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 8xy + 1, \qquad \forall (x,y)$$

Nên đây là phương trình vi phân toàn phần, chọn $x_0 = y_0 = 0$ ta có tích phân tổng quát

$$\int_0^x (4xy^2 + y)\,dx + \int_0^y (4.0^2 y + 0)dy = C$$

$$2x^2y^2 + xy = C$$

Chú ý :

Nếu điều kiện (6.2) không thỏa mãn thì $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ không phải là vi phân toàn phần. Khi đó ta có thể tìm được hàm $h(x,y)$ sao cho phương trình

$$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0 \qquad (6.3)$$

Là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó nghiệm tổng quát của (6.1) và (6.3) là như nhau.

Hàm số $h(x,y)$ gọi là thừa số tích phân được tìm dựa vào đẳng thức

$$\frac{\partial (hP)}{\partial y} = \frac{\partial (hQ)}{\partial x}$$

Nói chung, không có phương pháp tổng quát nào để tìm thừa số tích phân, ta chỉ xét hai trương hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = g(x)$$

Thì thừa số tích phân

$$h(x,y) = h(x) = e^{\int g(x)dx}$$

Trường hợp 2: Nếu

$$\frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)} = g(y)$$

Thì thừa số tích phân

$$h(x,y) = h(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0$$

Giải

$$P = y, Q = -(4x^2y + x) \Rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -8xy - 1$$

Do

$$\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = -\frac{2}{x}$$

Nên ta tìm

$$h(x,y) = h(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

Phương trình đã cho có cùng nghiệm tổng quát với phương trình

$$\frac{y}{x^2}dx - \left(4y + \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

Đây là phươg trình toàn phần, lấy $x_0 = 1, y_0 = 0$ ta có tích phân tổng quát:

$$\int_1^x \frac{0}{x^2}dx - \int_0^y \left(4y + \frac{1}{x}\right)dy = C$$

$$2y^2 + \frac{y}{x} = C$$

7. Phương trình Clairaut

Dạng :

$$y = xy' + f(y') \qquad (7.1)$$

Trong đó f là một hàm khả vi

Phương pháp giải

Đặt $y' = t$ ta có $y = xt + f(t)$. Lấy đạo hàm 2 vế đối với biến x ta có :

$$y' = t + x\frac{\partial t}{\partial x} + f'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = t$$

Hay

$$\left(x + f'(t)\right)\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

Suy ra :

Nếu $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ thì $t = C$ nên nghiêm tổng quát là

$$y = Cx + f(C)$$

Nếu $x = -f^{'}(t)$ thì $y = -tf^{'}(t) + f(t)$ ta có nghiệm kỳ dị cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = -f^{'}(t) \\ y = -tf^{'}(t) + f(t) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$y = xy^{'} - \frac{1}{4}(y')^2$$

Giải

Đây là phương trình Clairaut với $f(y^{'}) = \frac{1}{4}(y^{'})^2$. Thực hiện như trên ta có nghiệm tổng quát là

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2$$

Và nghiệm kỳ dị là :

$$\begin{cases} y = tx - \frac{1}{4}t^2 \\ x = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

8. Phương trình Lagrange

Dạng:

$$y = xg(y^{'}) + f(y^{'}) \qquad (8.1)$$

Trong đó g, f là các hàm khả vi.

Phương pháp giải

Đặt $t = y'$ ta có$y = xg(t) + f(t)$, lấy đạo hàm 2 vế theo x ta có:

$$y^{'} = g(t) + xg^{'}(t)\frac{\partial t}{\partial x} + f^{'}(t)\frac{\partial t}{\partial x} = t$$

Suy ra:

$$[g(t) - t]\frac{\partial x}{\partial t} + xg^{'}(t) = -f^{'}(t)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1theo hàm x, giải phương trình trên ta có

$$x = \varphi(t, C)$$

Suy ra nghiệm tổng quát tìm được dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \varphi(t, C)g(t) + f(t) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$y = xy'^2 + y'^2$$

Giải

Đặt $t = y'$ ta có $y = xt^2 + t^2$, lấy đạo hàm 2 vế ta có :

$$y' = t^2 + 2xt\frac{\partial t}{\partial x} + 2t\frac{\partial t}{\partial x} = t$$

Hay

$$(t^2 - t)\frac{\partial x}{\partial t} + 2xt = -2t$$

Nếu $t^2 - t \neq 0$, chia 2 vê cho $t^2 - t$ ta có :

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{2}{t-1}x = \frac{2}{1-t}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 nên có nghiệm tổng quát :

$$x = e^{-\int\frac{2}{t-1}dt}\left(C + \int e^{\int\frac{2}{t-1}dt}\frac{2}{1-t}dt\right)$$

$$x = \frac{C}{(t-1)^2}$$

Suy ra nghiệm tổng quát dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(t-1)^2} \\ y = \dfrac{C}{(t-1)^2}t^2 + t^2 \end{cases}$$

9. Một số dạng khác

a. **Dạng** $x = \varphi(y')$ (9.1)

Phương pháp giải

Đặt $t = y' = \frac{dy}{dx}$ khi đó ta có $x = \varphi(t)$ nên $dx = \varphi'(t)dt$

Suy ra $dy = tdx = t\varphi'(t)dt$

Nên $y = \int t\varphi'(t)dt + C$

Vậy nghiệm tổng quát tìm được dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\varphi'(t)dt + C \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$x = siny' + cosy'$$

Giải

Đặt $t = y'$ ta có $x = sint + cost$ nên $dx = (cost - sint)dt$, suy ra

$$dy = tdx = t(cost - sint)dt$$

$$y = \int t(cost - sint)dt$$

$$y = (t-1)sint + (t+1)cost + C$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = sint + cost \\ y = (t-1)sint + (t+1)cost + C \end{cases}$$

b. **Dạng** $y = \varphi(y')$ (9.2)

Phương pháp giải

Đặt $t = y'$ ta có $y = \varphi(t)$ nên $dy = \varphi'(t)dt$. Mặt khác

$$dx = \frac{dy}{t} = \frac{\varphi'(t)dt}{t}$$

Suy ra

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + C$$

Vậy nghiêm tổng quát tìm được dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y = \frac{(y')^2}{e^{y'}}$$

Giải

Đặt $t = y'$ ta có $y = \frac{t^2}{e^t}$ suy ra $dy = (2te^{-t} - t^2e^{-t})dt$

Nên $dx = \frac{dy}{t} = (2 - t)e^{-t}dt$

Suy ra

$$x = \int (2 - t)e^{-t}dt + C = (t - 1)e^{-t} + C$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = (t - 1)e^{-t} + C \\ y = \dfrac{t^2}{e^t} \end{cases}$$

III. Phương trình vi phân cấp 2

1. Khái niệm

Dạng: $F(x, y, y', y'') = 0$ (3) hoặc $y'' = f(x, y, y')$ (4)

Nếu từ (3) ta tìm được hàm số $y = y(x, C_1, C_2)$ với C_1, C_2 là hằng số tùy ý thì $y = y(x, C_1, C_2)$ gọi là nghiệm tổng quát của (3).

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của (3) mà tìm được một hệ thức dạng: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn thì hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của (3).

Nếu cho C_1, C_2 trong nghiệm tổng quát của (3) một giá trị xác định a, b thì ta được nghiệm riêng của (3), tức là $y = y(x, a, b)$ là nghiệm riêng của (3).

Tương tự nếu cho C_1, C_2 trong tích phân tổng quát của (3) một giá trị xác định a, b thì ta được tích phân riêng của (3), tức là $\Phi(x, y, a, b) = 0$ là tích phân riêng của (3).

Nếu khi giải (3) có những nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát thì giọ là nghiệm kỳ dị (hay nghiệm ngoại lai).

2. Các phương trình vi phân cấp 2 giải được bằng phương pháp hạ cấp

a. Dạng:

$$y'' = f(x) \qquad (2.1)$$

Phương pháp giải

Lấy tích phân 2 lần liên tiếp ta có nghiệm tổng quát

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' = x^2 + xe^x + 1$$

Giải

$$y = \int \left(\int (x^2 + xe^x + 1)dx + C_1 \right) dx + C$$

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + xe^x + C_1 x + C_2$$

b. Dạng

$$y'' = f(x, y') \qquad (2.2)$$

Phương pháp giải

Đặt $z = y'$, phương trình đã cho được đưa về dạng:

$$z' = f(x, z)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1, giải phương trình này ta tìm được z rồi từ đó tìm được y.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' = x - \frac{y'}{x}$$

Giải

Đặt $z = y'$ ta có:

$$z' = x - \frac{z}{x}$$

$$\Leftrightarrow z' + \frac{z}{x} = x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 nên có nghiệm tổng quát :

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left(C_1 + \int e^{\int \frac{1}{x}dx} x dx \right) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

Do đó :

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

Nên :

$$y = \int (\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x})dx + C_2 = \frac{x^3}{9} + C_1 ln|x| + C_2$$

c. Dạng

$$y'' = f(y, y') \qquad (2.3)$$

Phương pháp giải

Đặt $y' = t$, coi y là biến của hàm t, tức là $t = t(y)$, ta có :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy}\frac{dy}{dx} = t'.t = f(y, t)$$

Suy ra :

$$t' = \frac{f(y, t)}{t}$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1, giải được ra t rồi từ đó tìm được y

Ví dụ : Giải phương trình :

$$yy'' - y'^2 = 0$$

Giải

Đặt $y' = t$ suy ra$y'' = t't$, thay vào ta có:

$$yt't - t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow yt't = t^2$$

Nếu $t = 0 \Rightarrow y = C_1$

Nếu $t \neq 0$

$$\frac{dt}{t} = \frac{dy}{y}$$

Lấy tích phân 2 vế ta có:

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dy}{y}$$

$$t = C_1 y$$

Ta có

$$y' = C_1 y$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx$$

Lấy tích phân ta có:

$$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx + lnC_2$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

d. Phương trình vi phân cấp 2 đẳng cấp đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Dạng :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (2.4)$$

Trong đó F là hàm đẳng cấp cấp m đối với y, y', y'', tức là

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, z)$$

Phương pháp giải

Đặt $y' = yz$ với z là hàm của x, ta có :

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

Thay vào ta có :

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'))$$

$$\Leftrightarrow y^m F(x, 1, z, z^2 + z') = 0$$

$$\Leftrightarrow F(x, 1, z, z^2 + z') = 0$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ : Giải phương trình

$$3y'^2 = 4yy'' + y^2$$

Giải

Đặt $y' = yz$ với z là hàm của x, ta có :

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

Thay vào ta có :

$$3y^2z^2 = 4y^2(z^2 + z' + 1)$$

Nếu $y \neq 0$ ta có :

$$z' = -\frac{z^2+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{z^2+1} = -\frac{dx}{4}$$

Lấy tích phân 2 vế ta có :

$$arctgz = -x + C_1$$

$$\Rightarrow z = tg(C_1 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = tg(C_1 - x)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int tg(C_1 - x)dx + lnC_2$$

$$\Leftrightarrow lny = 4lncos(C_1 - x) + lnC_2$$

$$y = C_2cos^4(C_1 - x)$$

3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

a. Định nghĩa

Dạng :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (5)$$

Trong đó $a_0(x), a_1(x), f(x)$là các hàm liên tục

Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (6)$$

Là phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất, ngược lại gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất.

Nếu $a_0(x), a_1(x)$ là các hằng số thì gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng.

b. Các định lý về cấu trúc nghiệm

Định lý 1 :

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm của (6) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của (6), hơn nữa nếu $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính $(y_1(x)/y_2(x) \neq const)$ thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của (6).

Định lý 2 :

Nếu đã biêt một nghiêm riêng $y_1(x) \not\equiv 0$ của (6) thì nghiệm riêng $y_2(x)$ khác của (6) tìm được bằng cách đặt $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Chú ý : Sử dung công thức Liouville ta có :

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Định lý 3

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất (5) bằng nghiệm tổng quát của phương trình (6) cộng với nghiệm riêng của (5).

Định lý 4 (nguyên lý chồng chất nghiệm)

Nếu $\overline{y_i}$ là nghiệm riêng của phương trình $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_i(x)$ thì $\bar{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2} + \cdots + \overline{y_m}$ là nghiệm riêng của phương trình :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$$

Định lý 5 (Phương pháp biến thiên hàng số Lagrange)

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của (6) thì phương trình (4) nghiệm riêng dạng $\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là các hàm thỏa mãn :

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

Giải

Theo công thức Liouville, ta tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1 bằng cách đặt

$$y_2(x) = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1x + C_2(x^2 - 1)$$

Ví dụ : Giải phương trình :

$$x^2(lnx - 1)y'' - xy' + y = 0$$

Biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y_1 = x^\alpha$.

Giải

Để tìm α ta tính $y'_1 = \alpha x^{\alpha-1}, y''_1 = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, thay vào phương trình đã cho ta có :

$$x^2(lnx - 1)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - x\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha = 0$$

$$x^\alpha(\alpha(\alpha-1)lnx + 1 - \alpha^2) = 0, \forall x$$

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1) = 0 \\ 1 - \alpha^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y_1 = x$. Theo công thức Liouville ta có nghiệm riêng thứ 2 :

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2(lnx-1)}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{lnx - 1}{x^2}dx = -x\int (lnx-1)d(\frac{1}{x})$$

$$y_2 = -x\frac{1}{x}(lnx - 1) + x\int \frac{1}{x^2}dx = -lnx$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = C_1x - C_2lnx$$

Ví dụ : Giải phương trình :

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

Giải

Xét phương trình thuần nhất tương ứng :

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

Ta thấy $y_1 = 1$là một nghiệm riêng, theo công thức Liouville ta có nghiệm riêng thứ 2 là :

$$y_2 = \int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx = x^2$$

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là :

$$C_1 + C_2 x^2$$

Bây giờ ta tìm nghiệm riêng $\bar{y}$ của phương trình

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

Bằng cách đặt $\bar{y} = C_1(x) + C_2(x)x^2$

Trong đó C_1, C_2 thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} C'_1(x)1 + C'_2(x)x^2 = 0 \\ C'_2(x)2x = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 \\ C'_2(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\frac{1}{6}x^3 \\ C_2(x) = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Nên $\bar{y} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xx^2 = \frac{1}{3}x^3$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với nghiệm riêng của nó:

$$y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

c. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

Dạng tổng quát:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (3.1)$$

Với a_1, a_0 là các hằng số.

Phương pháp giải

Bước 1: ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (3.2)$$

Bước 2: ta tìm một nghiệm riêng của phương trình (3.1) đã cho.

Bước 3: nghiệm tổng quát của phương trình đã cho bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) với nghiệm riêng của nó.

Giải phương trình tuyến tính thuần nhất (3.2)

Xét phương trình đặc trưng:

$$k^2 + a_1 k + a_0 = 0 \qquad (3.3)$$

Nếu phương trình có:

- Hai nghiệm phân biệt $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát của (3.2) là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

- Có nghiệm kép k_0 thì nghiệm tổng quát của (3.2) là:

$$y = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x}$$

- Có nghiệm phức: $\alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của (3.2) là:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Giải

Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng nên có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đặc trưng có nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Giải

Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng nên có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Vậy phương trình đặc trưng có nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Giải

Phương trình đã cho là phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng nên có phương trình đặc trưng:

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} k = -1 - 2i \\ k = -1 + 2i \end{matrix}\right.$$

Vậy phương trình đặc trưng có nghiệm tổng quát là:

$$y = e^{-x}(C_1 cos(2x) + C_2 sin(2x))$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.1)

- Phương pháp chung là dựa vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng rồi sử dung phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để tìm nghiệm riêng, tuy nhiên trong vài trường hợp đặc biệt của hàm $f(x)$ (ở vế phải) ta có thể tìm nghiệm riêng một cách đơn giản hơn

Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, với $P(x)$ là đa thức bậc n.

- Nếu α không là nghiệm của đa thức đặc trưng (3.3) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.1) dưới dạng:

$$y = e^{\alpha x}Q(x)$$

Với $Q(x)$ là đa thức bậc n chưa biết, để tìm $Q(x)$ ta thay y vào phương trình (3.1) rồi đồng nhất hệ số sẽ tìm được các hệ số của $Q(x)$.

- Nếu α là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng (3.3) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.1) dưới dạng:

$$y = xe^{\alpha x}Q(x)$$

- Nếu α là nghiệm kép của đa thức đặc trưng (3.3) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.1) dưới dạng:

$$y = x^2 e^{\alpha x}Q(x)$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' - 2y' + y = 1 + x$$

Giải

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trình thuần nhất

Xét phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

Có nghiệm kép $k = 1$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho

Do $f(x) = e^{0x}(1 + x)$ nên $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$y = e^{0x}(a + bx) = a + by$$

$$\Rightarrow y' = b, y'' = 0$$

Thay vào phương trình ta có:

$$0 - 2b + a + bx = 1 + x$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm riêng của phương trình đã cho là:

$$y = 3 + x$$

Bước 3: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho là:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 3 + x$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(2x + 3) + 5$$

Giải

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trình thuần nhất

Xét phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

Có 2 nghiệm $k_1 = 1, k_2 = 2$ nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(2x + 3) + 5$$

Do $f(x) = e^x(2x+3) + e^0 5 = f_1(x) + f_2(x)$ nên nghiệm riêng y của phương trình đã cho là tổng của y_1, y_2

vớiy_1 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(2x+3)$

và y_2 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - 3y' + 2y = 5$

Do $f_1(x) = e^x(2x+3)$ nên $\alpha_1 = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, ta tìm y_1 dạng:

$$y_1 = xe^x(a+bx)$$

$$\Rightarrow y'_1 = xe^x(a+bx) + e^x(a+bx) + bxe^x$$

$$\Rightarrow y''_1 = xe^x(a+bx) + 2e^x(a+bx) + 2bxe^x + 2be^x = 2y'_1 - y_1$$

Thay vào phương trình ta có:

$$2y'_1 - y_1 - 3y'_1 + 2y_1 = e^x(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow e^x(a+bx) + bxe^x = -e^x(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 2bx + a = -2x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$y_1 = xe^x(-3-x)$$

Do $f_2(x) = e^{0x}5$ nên $\alpha_2 = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm y_1 dạng:

$$y_2 = e^{0x}c = c$$

$$\Rightarrow y'_2 = 0, y''_2 = 0$$

Thay vào phương trình ta có:

$$0 - 3.0 + 2c = 5$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

Vậy ta có:

$$y_2 = \frac{5}{2}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình đãcho là

$$y = y_1 + y_2 = xe^x(-3 - x) + \frac{5}{2}$$

Bước 3: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^x(-3 - x) + \frac{5}{2}$$

Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)cos(\beta x) + Q(x)sin(\beta x))$, với $P(x), Q(x)$ là các đa thức bậc n, m.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của đa thức đặc trưng (3.3) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.1) dưới dạng:

$$y = e^{\alpha x}(H(x)cos(\beta x) + L(x)sin(\beta x))$$

Với $H(x), L(x)$ là các đa thức có bằng $max(n; m)$ chưa biết, để tìm $H(x), L(x)$ ta thay y vào phương trình (3.1) rồi đồng nhất hệ số sẽ tìm được các hệ số của $H(x), L(x)$.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của đa thức đặc trưng (3.3) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.1) dưới dạng:

$$y = xe^{\alpha x}(H(x)cos(\beta x) + L(x)sin(\beta x))$$

Ví dụ: Giải phương trình:

$$y'' + y = 4xsinx$$

Giải

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y'' + y = 0$$

Có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0$$

Có nghiệm phức $k = \pm i$ nên nghiệm tổng quát có dạng:

$$y = e^{0x}\left(C_1cos(x) + C_2sin(x)\right) = C_1cos(x) + C_2sin(x)$$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Do $f(x) = 4xsinx = e^{0x}(0.cos(x) + 4xsin(x))$ nên $\alpha \pm \beta = 0 \pm i = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng có dạng:

$$y = xe^{0x}\left((a + bx)cos(x) + (c + dx)sin(x)\right) = (ax + bx^2)cos(x) + (cx + dx^2)sin(x)$$

$$y' = (a + (2b + c)x + dx^2)cos(x) + (c + (2d - a)x - bx^2)sin(x)$$

$$y'' = (2b + 2c + (4d - a)x - bx^2)cos(x) + (2d - 2a - (4b + c)x - dx^2)sin(x)$$

Thay vào phương trình ta có:

$$(2b + 2c + 4dx)cos(x) + (2d - 2a - 4bx)sin(x) = 4xsin(x)$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} 2b + 2c + 4dx = 0 \\ 2d - 2a - 4bx = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ 4d = 0 \\ 2d - 2a = 0 \\ -4b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra nghiệm riêng là

$$y = xsin(x) - x^2cos(x)$$

Bước 3: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1cos(x) + C_2sin(x) + xsin(x) - x^2cos(x)$$