Phần I

XÁC SUẤT

Chương 1.

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

§1. CÁC KHÁI NIỆM

1. Phép thử và biến cố

Hiện tượng ngẫu nhiên là hiện tượng trong các điều kiện như nhau nhưng có thể có kết cục khác nhau và không thể đoán trước được kết cục nào chắc chắn sẽ xuất hiện. Chẳng hạn : Giá của một mã chứng khoán trong phiên giao dịch tiếp theo là một hiện tượng ngẫu nhiên, bởi vì nó có thể nhận 2 kết cục khác nhau là tăng hoặc không tăng. Ta không biết chắc kết cục nào sẽ xuất hiện. Để nghiên cứu hiện tượng ngẫu nhiên, người ta làm thí nghiệm bằng cách quan sát kết cục của nó. Trong lí thuyết xác suất ta hiểu "thí nghiệm" theo nghĩa rộng hơn, đó là phép thử.

Phép thử là việc thực hiện một nhóm điều kiện xác định để quan sát một hiện tượng ngẫu nhiên có xuất hiện hay không.

Trong thực hành, ta gọi "phép thử" đơn giản là "thí nghiệm".

Không gian mẫu của phép thử là tập hợp tất cả các kết cục có thể của phép thử

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) của phép thử là tập con của không gian mẫu của phép thử này. Biến cố thường được kí hiệu bằng các chữ cái : A, B, C,...

Ví dụ 1.1 : a) Tung một đồng tiền (được xem là phép thử), các biến cố ngẫu nhiên là S = "mặt sấp xuất hiện", N = "mặt ngửa xuất hiện". Không gian mẫu của phép thử $\Omega = \{S, N\}$.

b) Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ một lô hàng để kiểm tra (phép thử), các biến cố là : A = "lấy được phế phẩm", B = "không lấy được phế phẩm". Không gian mẫu của phép thử $\Omega = \{A, B\}$.

c) Mua ngẫu nhiên 2 bóng đèn cũng là phép thử. Đặt A_i = "bóng đèn đã mua lần thứ i bị hỏng", $\overline{A}_i$ = "bóng đèn đã mua lần thứ i không hỏng", i = 1, 2. Không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \left\{A_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2\right\}.$$

2. Các loại biến cố và sự liên hệ

Giả sử ta đã thực hiện một phép thử nào đó, trong phép thử này ta có các loại biến cố như sau :

• Biến cố chắc chắn, kí hiệu Ω, là biến cố nhất định xuất hiện trong phép thử. Ví dụ : Biến cố "xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 7" hay biến cố "xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 1" khi gieo một con xúc xắc là Ω.

• Biến cố không thể, kí hiệu $\varnothing$, là biến cố nhất định không xuất hiện trong phép thử. Ví dụ : Biến cố "mặt sấp và mặt ngửa cùng xuất hiện" khi gieo một đồng tiền là $\varnothing$.

Cho các biến cố A và B.

• Sự kéo theo : Ta nói A kéo theo B, kí hiệu $A \subset B$, nếu A xuất hiện thì B xuất hiện. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

• Sự tương đương (còn gọi là biến cố tương đương) : A tương đương với B, kí hiệu A = B, nếu A xuất hiện thì B xuất hiện và ngược lại.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

• Biến cố *tổng* (còn gọi là tổng) của A và B, kí hiệu A + B hay $A \cup B$, là biến cố xuất hiện nếu *có ít nhất một trong các* biến cố A, B xuất hiện (hay "A *hoặc* B xuất hiện") trong phép thử.

Trong Ví dụ 1.1.c) nếu đặt biến cố A = "chỉ có 1 bóng hỏng", B = "có 2 bóng hỏng" thì biến cố C = "có bóng hỏng" = A + B.

• Biến cố *tích* (còn gọi là tích) của A và B, kí hiệu A.B (hay AB), là biến cố xuất hiện nếu A và B *cùng xuất hiện đồng thời trong phép thử.*

Trong Ví dụ 1.1.c) biến cố B = "có 2 bóng hỏng" là biến cố tích A_1A_2.

• Sự *xung khắc* : A xung khắc với B nếu A và B *không thể xuất hiện đồng thời* trong phép thử, nghĩa là $A.B = \varnothing$.

Trong *Ví dụ 1.1.* c) biến cố A = "chỉ có 1 bóng hỏng", B = "có 2 bóng hỏng" là hai biến cố xung khắc.

• Biến cố đối của A, kí hiệu $\overline{A}$ (đọc là A đối), là biến cố "*không* A".

Ta có : $\overline{A}$ = "*không* A" và $\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A.\overline{A} = \varnothing. \end{cases}$

• Biến cố hiệu của A và B, kí hiệu A\B, là biến cố A xuất hiện và B không xuất hiện, nghĩa là $A \backslash B = A.\overline{B}$.

Ngoài ra, ta còn có một số loại biến cố sau :

• Biến cố sơ cấp là biến cố không thể biểu diễn được thành tổng của các biến cố khác.

• Mọi biến cố ngẫu nhiên A bất kì đều biểu diễn được thành tổng của các biến cố sơ cấp nào đó. Các biến cố sơ cấp này là biến cố thuận lợi cho A. Biến cố chắc chắn **Ω** là tổng của mọi biến cố sơ cấp có thể.

• Các biến cố đồng khả năng là các biến cố có cùng khả năng xuất hiện như nhau trong một phép thử.

Các biến cố cũng là các tập hợp. Do đó, ta cũng có thể suy ra các tính chất của biến cố từ các tính chất tương tự của tập hợp. Chẳng hạn :

• $A + A = A$; $A.A = A$; $A\Omega = A$; $A + B = B + A$;
  $A.B = B.A$; $A + (B + C) = (A + B) + C$; ...

• $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$; $A \subset A + B$; $A.B \subset A$; ...

• $A + B = A + B.\overline{A}$.

• $A.(B + C) = A.B + A.C$.

• $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$; $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$; ...

Ví dụ 1.2 : Ba xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào một con thú.

1) Hãy xác định phép thử của ví dụ này.

2) Gọi biến cố A_i = "xạ thủ thứ i bắn trúng thú", i = 1, 2, 3.

Hãy biểu diễn qua A_i các biến cố sau :

A = "thú bị trúng đạn",

B = "thú bị trúng 3 viên đạn",

C = "xạ thủ thứ nhất bắn trúng thú, 2 xạ thủ còn lại bắn trượt",

D = "thú bị trúng 1 viên đạn",

E = "thú không bị trúng đạn".

GIẢI : 1) "Ba xạ thủ mỗi người cùng bắn 1 viên đạn vào con thú" là phép thử. Phép thử được thực hiện khi bắn xong.

2) Ta có $\overline{A_i}$ = "xạ thủ thứ i không bắn trúng thú".

A = "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng thú" = $A_1 + A_2 + A_3$.

B = "cả 3 xạ thủ đều bắn trúng thú" = $A_1.A_2.A_3$.

$C = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

D = "có 1 xạ thủ bắn trúng thú và 2 xạ thủ bắn trượt đồng thời"

$= A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

E = "cả ba xạ thủ đều bắn không trúng thú" = $\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$

hay $E = \overline{A} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$.

Trong ví dụ này các biến cố nào là xung khắc ; kéo theo ; chắc chắn ; không thể ?

Trong tính toán xác suất nhiều khi chúng ta phải tìm số lượng các biến cố sơ cấp dẫn đến áp dụng các kết quả của giải tích tổ hợp.

3. Giải tích tổ hợp

3.1. Quy tắc cộng và quy tắc nhân

a) Quy tắc cộng :

– Quy tắc cộng cho 2 khả năng. Để làm được việc A có thể thực hiện theo 2 khả năng (không thực hiện được đồng thời) :

- Khả năng thứ nhất có : n cách
- Khả năng thứ hai có : m cách

Suy ra có n + m cách làm được việc A.

– Tương tự, quy tắc cộng cho k khả năng với khả năng thứ i có n_i cách thì có tất cả $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ khả năng.

b) Quy tắc nhân

– Quy tắc nhân cho 2 bước (2 giai đoạn) như sau :

Để làm được việc A cần thực hiện qua 2 bước :

- Bước 1 có n cách
- Bước 2 có m cách

Suy ra có n.m cách làm việc A.

– Tương tự, quy tắc nhân cho k bước, bước i có n_i cách, thì có tất cả : $n_1.n_2\ldots n_k$ cách.

3.2. Tổ hợp chập k của n phần tử

Là một bộ k phần tử (lấy từ n phần tử) thoả mãn hai tính chất sau :

• khác nhau

• không kể thứ tự.

Số tổ hợp chập k của n phần tử : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0! = 1$; $n! = 1.2\ldots n$.

Ví dụ 1.3 : Một hộp có 5 bi đỏ, 6 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy từ hộp ra :

a) 3 bi.

b) 3 bi trong đó có 2 bi đỏ.

c) 3 bi trong đó có bi đỏ ?

GIẢI : a) Việc lấy 3 bi từ hộp tương ứng với 1 tổ hợp chập 3 của 11 phần tử (việc thay đổi thứ tự các bi lấy ra không làm thay đổi kết cục). Do đó có $C_{11}^3 = 165$ cách lấy 3 bi từ hộp.

b) Việc lấy 3 bi có 2 bi đỏ tương đương lấy bi theo 2 bước :

• Bước 1 : lấy 2 bi đỏ, có $C_5^2 = 10$ (cách)

• Bước 2 : lấy 1 bi vàng, có 6 (cách)

Theo quy tắc nhân, có 10.6 = 60 (cách).

c) Việc lấy 3 bi có bi đỏ có các khả năng sau :

– Lấy 3 bi có 1 bi đỏ, tương đương :

• Bước 1 : lấy 1 bi đỏ, có 5 (cách)

• Bước 2 : lấy 2 bi vàng, có $C_6^2 = 15$ (cách)

Theo quy tắc nhân, có 5.15 = 75 (cách)

– Lấy 3 bi có 2 bi đỏ, có : 60 (cách)

– Lấy 3 bi đỏ, có : $C_5^3 = 10$ (cách)

Theo quy tắc cộng, có 75 + 60 + 10 = 145 (cách).

Ta cũng có thể giải như sau : Lấy số cách lấy 3 bi từ hộp trừ đi số cách lấy 3 bi không đỏ (3 bi vàng) : $C_{11}^3 - C_6^3 = 145$.

3.3. Chỉnh hợp chập k của n phần tử

Là một bộ k phần tử (lấy từ n phần tử) thoả mãn hai tính chất sau :

• khác nhau,

• có kể thứ tự.

– Số chỉnh hợp chập k của n phần tử : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Ví dụ 1.4 : Cho 4 chữ số : 1, 2, 3, 4, có bao nhiêu cách lập một số :

a) Có 3 chữ số khác nhau từ các chữ số trên.

b) Có 3 chữ số từ các chữ số trên.

GIẢI : a) Nếu ta lấy các chữ số 1, 3, 4 thì ta có thể lập được các số như 134, 314, ... Do các chữ số hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị khác nhau nên thứ tự của các phần tử được kể đến. Vì vậy việc lập một số có 3 chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên tương ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử.

Số các số đó là $A_4^3 = 24$.

b) Ta thấy số 111 thoả mãn bài toán, như vậy tính chất thứ nhất của tổ hợp và chỉnh hợp đều không thoả mãn.

Gọi số đó là $\overline{a_1a_2a_3}$, để lập được một số này ta tiến hành theo các bước :

- Bước 1 lấy a_1 có 4 cách,
- Bước 2 lấy a_2 có 4 cách,
- Bước 3 lấy a_3 có 4 cách.

Theo quy tắc nhân, có $4.4.4 = 4^3 = 64$ cách lập các số.

NHẬN XÉT :

– Tổ hợp hay chỉnh hợp liên quan tới việc lấy một bộ các phần tử.

– Tính chất 1 cho ta nhận biết cách lấy một bộ phần tử có là tổ hợp hay chỉnh hợp không.

– Ta phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp từ tính chất 2.

3.4. Hoán vị của n phần tử

Hoán vị của n phần tử là một cách sắp thứ tự n phần tử hay nó là một chỉnh hợp chập n của n phần tử.

– Số hoán vị của n phần tử : $P_n = n!$ ($= A_n^n$).

3.5. Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

§2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Một biến cố có xuất hiện hay không khi thực hiện phép thử là không thể đoán trước được. Tuy nhiên, vấn đề mà ta có thể quan tâm tới là *mức độ xuất hiện nhiều hay ít* của biến cố này trong phép thử. Khái niệm xác suất được hình thành để nghiên cứu vấn đề này. Sau đây là các định nghĩa về xác suất.

1. Định nghĩa cổ điển về xác suất

a) Định nghĩa 1.1 : Nếu trong một phép thử có n biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xuất hiện, trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của A, kí hiệu P(A), là một số, bằng tỉ số $\frac{m}{n}$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số biến cố (sơ cấp) thuận lợi cho A}}{\text{Số biến cố (sơ cấp) có thể của phép thử}}$$

– Các tính chất suy ra từ định nghĩa :

- $P(\varnothing) = 0$ (không có biến cố thuận lợi cho $\varnothing$),
- $P(\Omega) = 1$ (có n biến cố thuận lợi cho Ω),
- $0 \le P(A) \le 1$ (vì $0 \le m \le n$),
- $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$.

– Ý nghĩa của xác suất : Xác suất của biến cố là một số nằm giữa 0 và 1 *đặc trưng cho khả năng xuất hiện* của biến cố trong phép thử. Xác suất càng lớn (càng gần 1) thì biến cố càng nhiều khả năng xuất hiện ; Xác suất càng nhỏ (càng gần 0) thì biến cố càng ít khả năng xuất hiện trong phép thử.

Ví dụ 1.5 : Một hộp có 7 chính phẩm và 3 phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ hộp để kiểm tra, tính xác suất lấy được phế phẩm.

b) Lấy ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từng sản phẩm ra 2 sản phẩm từ hộp (nghĩa là lấy lần đầu 1 sản phẩm ghi kết quả sau đó trả lại hộp rồi lại lấy lần thứ hai), tính xác suất lấy được 2 phế phẩm.

c) Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại lần lượt từng sản phẩm ra 2 sản phẩm từ hộp, tính xác suất lấy được 2 phế phẩm.

d) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp, tính xác suất lấy được 2 phế phẩm.

GIẢI : a) Gọi A = "lấy được 1 phế phẩm" ; m = 3 ; n = 10, do đó $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$.

b) B = "lấy lần lượt có hoàn lại được 2 phế phẩm".

Phép thử "lấy lần lượt có hoàn lại từng sản phẩm ra 2 sản phẩm" được tiến hành qua 2 bước :

Bước 1 : lấy sản phẩm thứ nhất, có 10 cách.

Bước 2 : lấy sản phẩm thứ hai, có 10 cách (vì lấy hoàn lại).

Suy ra số khả năng có thể của phép thử $n = 10.10 = 100$.

Tương tự, số khả năng thuận lợi cho biến cố B : $m = 3.3 = 9$.

Vậy $P(B) = \dfrac{9}{100} = 0{,}09$.

c) C = "lấy lần lượt không hoàn lại được 2 phế phẩm".

Phép thử "lấy lần lượt không hoàn lại ra 2 sản phẩm" được thực hiện qua 2 bước :

Bước 1 : lấy sản phẩm thứ nhất, có 10 cách,

Bước 2 : lấy sản phẩm thứ hai, có 9 cách (vì lấy không hoàn lại).

Suy ra số khả năng có thể của phép thử $n = 10.9 = 90$.

Tương tự, số khả năng thuận lợi lấy lần lượt từng sản phẩm không hoàn lại được 2 phế phẩm từ hộp là $m = 3.2 = 6$.

Vậy $P(C) = \dfrac{6}{90} = 0{,}0667$.

d) D = "lấy được 2 phế phẩm".

Mỗi cách lấy 2 phế phẩm từ hộp tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 3 phần tử, do đó có : $m = C_3^2 = 3$ cách.

Mỗi cách lấy 2 sản phẩm từ hộp tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử, do đó có : $n = C_{10}^2 = 45$ cách. Ta có :

$$P(D) = \frac{3}{45} \approx 0{,}0667.$$

NHẬN XÉT : Qua Ví dụ 1.5, ta thấy các phép thử (cách lấy sản phẩm) khác nhau thì cách tính xác suất khác nhau.

b) Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa cổ điển về xác suất

– Ưu điểm : Tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần phải tiến hành phép thử.

– Hạn chế : Định nghĩa cổ điển đòi hỏi phép thử phải có hữu hạn các biến cố sơ cấp và tính đồng khả năng của các biến cố sơ cấp. Đòi hỏi này không phù hợp với các phép thử không có tính chất đó. Vì vậy cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

2. Định nghĩa xác suất theo thống kê

a) Tần suất và xác suất

Định nghĩa 1.2 (Tần suất của một biến cố) : Nếu lặp lại phép thử n lần trong đó có m lần xuất hiện biến cố A thì tần suất xuất hiện A trong dãy n phép thử, kí hiệu $f_n(A)$, là tỉ số $\frac{m}{n}$, $\left(f_n(A) = \frac{m}{n}\right)$.

Lặp lại phép thử nhiều lần thì tần suất $f_n(A)$ dần tới một số xác định nào đó [xem Hệ quả 2, Định lí 2.3, Ch.2], số này được gọi là xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A) ; như vậy $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(A)$. Từ đây, trong thực hành người ta xác định xác suất của một biến cố theo thống kê như sau :

- Khi n đủ lớn, xác suất P(A) của biến cố A được lấy là $f_n(A)$:

$$P(A) \approx f_n(A). \qquad (1.1)$$

Chú ý : Trong ứng dụng, tùy từng lĩnh vực người ta xác định giá trị n đủ lớn phù hợp.

Ví dụ 1.6 : a) Để tìm xác suất tăng giá của một mã chứng khoán, người ta theo dõi qua 2000 phiên thấy có 600 phiên mã chứng khoán này tăng giá, khi đó người ta coi xác suất tăng giá của mã chứng khoán này là 600/2000 = 0,3.

b) Hãy tìm tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng gồm nhiều sản phẩm. Biết rằng người ta kiểm tra ngẫu nhiên lần lượt 1000 sản phẩm của lô hàng này thấy có 5 phế phẩm.

GIẢI : Tỉ lệ phế phẩm của lô hàng là xác suất của biến cố sau đây đổi ra phần trăm :

A = "lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của lô hàng được phế phẩm".

Từ định nghĩa xác suất theo thống kê trong thực hành ta có :

$$P(A) \approx f_n(A) = \frac{5}{1000} = 0{,}005 = 0{,}5\%.$$

Vậy tỉ lệ phế phẩm của lô hàng là 0,5%.

b) Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa xác suất theo thống kê

– Ưu điểm : Không đòi hỏi phép thử có hữu hạn biến cố và không đòi hỏi các biến cố phải đồng khả năng ; tính xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.

– Nhược điểm : Đòi hỏi phải lặp lại phép thử nhiều lần. Điều này trong nhiều bài toán thực tế là không thể thực hiện được vì hạn chế kinh phí làm phép thử và các hạn chế khác.

- Để khắc phục hạn chế của định nghĩa cổ điển của xác suất, người ta còn đưa ra định nghĩa hình học của xác suất : coi các kết cục đồng khả năng của một phép thử có thể biểu diễn bằng một hình hình học H nào đó, các kết cục thuận lợi cho biến cố A được biểu diễn bằng hình $G \subset H$ và :

$$P(A) = \frac{\text{độ đo miền G}}{\text{độ đo miền H}}.$$

Độ đo có thể là số đo biểu thị độ dài, diện tích, thể tích.

• Định nghĩa tổng quát nhất của xác suất là định nghĩa xác suất theo tiên đề do nhà toán học Kolmogorov người Nga đưa ra năm 1933. Từ đó, xác suất được phát triển như một ngành của Toán học. Nội dung của nó như sau :

Giả sử Ω là không gian mẫu của một phép thử.

– Họ $\mathcal{F}$ các tập con của Ω được gọi là $\sigma-$ đại số (đọc là xích ma đại số) các biến cố nếu thoả mãn các điều kiện sau :

i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

ii) Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;

iii) Nếu $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ thuộc $\mathcal{F}$ thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

– Một hàm xác định trên $\mathcal{F}$ cho tương ứng mỗi biến cố $A \in \mathcal{F}$ với một số $P(A)$ được gọi là xác suất nếu thoả mãn các điều kiện sau :

i) Mọi $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Mọi dãy các biến cố thuộc $\mathcal{F}$ đôi một xung khắc với nhau $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ thì $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Khi đó $P(A)$ được gọi là xác suất của A và bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được gọi là không giar xác suất.

3. Nguyên lí xác suất nhỏ, xác suất lớn

– Nguyên lí xác suất nhỏ : Trong thực tế có thể coi một biến cố có xác suất rất nhỏ bằng α (gần 0) không xuất hiện trong một phép thử.

Như vậy, nếu trong một phép thử biến cố đó xuất hiện thì ta coi xác suất xuất hiện nó lớn hơn α.

– Nguyên lí xác suất lớn : Trong thực tế có thể coi một biến cố có xác suất rất lớn bằng β (gần 1) nhất định xuất hiện trong một phép thử.

Tuỳ từng lĩnh vực áp dụng mà α có thể được lấy là 0,05 ; 0,01 ; ..., β có thể được lấy là 0,95 ; 0,99 ; ...

§3. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

Các công thức tính xác suất cho phép chuyển việc tính toán xác suất trực tiếp bằng định nghĩa của một biến cố phức tạp, khó tính toán, về tính các xác suất của các biến cố khác đơn giản, dễ tính toán hơn.

1. Công thức cộng xác suất

a) Cho các biến cố tổng quát :

• A, B tuỳ ý : $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$. (1.2)

• A_1, A_2, A_3 :

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \tag{1.3}$$

• $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1.A_2 \ldots A_n). \tag{1.4}$$

b) Cho các biến cố xung khắc :

• A, B *xung khắc* ($A.B = \varnothing$) : $P(A+B) = P(A) + P(B)$; (1.5)

• $A_1, A_2, ..., A_n$ *xung khắc từng đôi* ($A_i.A_j = \varnothing$, $i \neq j$) :

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.6}$$

c) Công thức xác suất của biến cố đối :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.7}$$

Ví dụ 1.7 : Một hộp có 10 bi trong đó có 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp. Tính xác suất sao cho trong 3 bi lấy ra có ít nhất một bi đỏ.

GIẢI : Cách 1. Gọi A = "lấy 3 bi có ít nhất 1 bi đỏ", A_i = "lấy 3 bi có i bi đỏ", i = 0,1, 2, 3.

Các biến cố A_0, A_1, A_2, A_3 xung khắc từng đôi và $A = A_1 + A_2 + A_3$ do đó :

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{4.C_6^2}{C_{10}^3} + \frac{6.C_4^2}{C_{10}^3} + \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 0{,}8333.$$

Cách 2. Sử dụng biến cố đối ta có : $\overline{A} = A_0$. Do đó

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 0{,}8333.$$

Ví dụ 1.8 : Một lớp học có 60 học sinh trong đó có 28 em giỏi Toán, 30 em giỏi Lí, 32 em giỏi Ngoại ngữ, 15 em vừa giỏi Toán vừa giỏi Lí, 10 em vừa giỏi Lí vừa giỏi Ngoại ngữ, 12 em vừa giỏi Toán vừa giỏi Ngoại ngữ, có 2 em giỏi cả 3 môn. Gọi ngẫu nhiên 1 học sinh của lớp. Tính xác suất gọi được em giỏi ít nhất 1 môn.

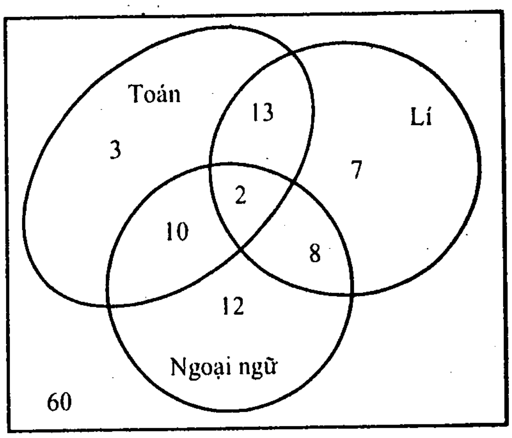
GIẢI : Gọi T = "học sinh được gọi giỏi Toán" ; L = "học sinh được gọi giỏi Lí" ; N = "học sinh được gọi giỏi Ngoại ngữ". Ta có :

A = "học sinh được gọi giỏi ít nhất 1 môn" = T + L + N. Các biến cố T, L, N không xung khắc nên :

$$P(A) = P(T) + P(L) + P(N) - P(TL) - P(TN) - P(LN) + P(TLN)$$

$$= \frac{28}{60} + \frac{30}{60} + \frac{32}{60} - \frac{15}{60} - \frac{12}{60} - \frac{10}{60} + \frac{2}{60} = 0{,}9167.$$

Cách 2. Dùng biểu đồ Venn như hình vẽ, tính số lượng nằm trong miền giao của các hình, xuất phát từ miền giao nhiều nhất.



Từ hình bên, ta có : $P(A) = \frac{55}{60} \approx 0{,}9167.$

Nếu dùng biểu đồ Venn ta dễ dàng tính được :

Xác suất gọi được em chỉ giỏi Toán là :

$$\frac{3}{60} = 0{,}05.$$

Xác suất gọi được em giỏi đúng 2 môn là :

$$P(C) = \frac{31}{60} = 0{,}5167.$$

Ví dụ 1.9 : Một cửa hàng bán một loại TV trong đó tỉ lệ có chất lượng tiếng bị kém là 5%, tỉ lệ có chất lượng hình bị kém là 7%, tỉ lệ kém chất lượng của cả tiếng và hình là 4%. Có người mua một TV của cửa hàng. Tính xác suất mua được TV không bị mắc cả hai lỗi trên.

GIẢI : Gọi A = "TV được mua không mắc cả hai lỗi"

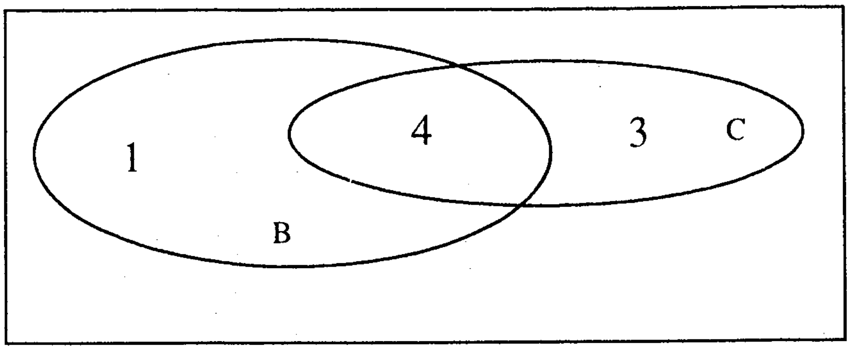
B = "TV bị kém chất lượng tiếng" ; C = "TV bị kém chất lượng hình".

Ta có : $A = \overline{B}.\overline{C} = \overline{B + C}$ vì vậy :

$$P(A) = P\left(\overline{B + C}\right) = 1 - P(B + C) = 1 - (P(B) + P(C) - P(B.C))$$

$$= 1 - (0{,}05 + 0{,}07 - 0{,}04) = 0{,}92.$$

Cách 2. Dùng biểu đồ Venn (xem hình)



$$P(B + C) = 1\% + 4\% + 3\% = 8\%,$$

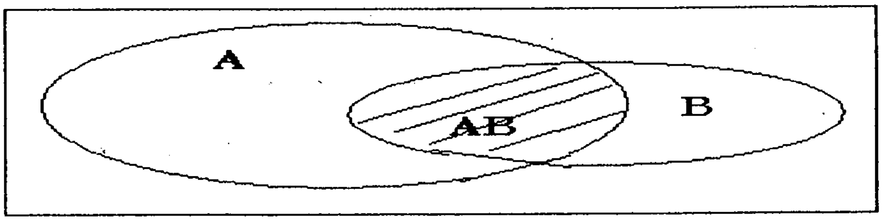
$$P(A) = 1 - P(B + C) = 92\%.$$

2. Xác suất có điều kiện, sự độc lập về xác suất, công thức nhân xác suất

2.1. Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 1.3 : Cho hai biến cố A, B. Xác suất có điều kiện của A với điều kiện B, kí hiệu $P(A \mid B)$, là xác suất của A được tính trong điều kiện B đã xuất hiện. Tương tự, ta có $P(B \mid A)$.

Như vậy, xác suất có điều kiện $P(A|B)$ là tỉ số giữa số khả năng thuận lợi của A (trong B) với tất cả các khả năng của B.



Gọi n_{AB}, n_A, n_B là số khả năng thuận lợi cho AB, A, B tương ứng, n là số khả năng có thể của phép thử thì xác suất điều kiện được tính theo 2 cách :

Cách 1. Dùng định nghĩa 1.3 :

$$P(A \mid B) = \frac{n_{AB}}{n_B} \ ; \ (P(B \mid A) = \frac{n_{AB}}{n_A}) \tag{1.8}$$

Cách 2. Sử dụng công thức :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A.B)}{P(B)} \text{ nếu } P(B) > 0 \ ; \tag{1.9}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B.A)}{P(A)} \text{ nếu } P(A) > 0. \tag{1.10}$$

Dễ dàng suy ra công thức (1.8), (1.9) từ định nghĩa cổ điển của xác suất và định nghĩa xác suất có điều kiện (hay biểu đồ Venn) như sau :

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(A.B)}{P(B)}.$$

Tương tự ta cũng có công thức (1.9).

• Xác suất điều kiện P(A|B) cho phép chúng ta sử dụng thông tin về sự xuất hiện của biến cố B để dự báo khả năng xuất hiện biến cố A.

• Xác suất có điều kiện cũng có tính chất như một xác suất :

$$0 \le P(A|B) \le 1 \;;\; P(B|B) = 1 \;;\; P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)\;;$$

$$P((A_1 + A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) \text{ nếu } A_1A_2 = \varnothing.$$

Ví dụ 1.10 : Một hộp có 10 vé trong đó có 3 vé có thưởng. Tính xác suất người thứ hai bốc được vé trúng thưởng, biết rằng người đầu đã bốc được một vé trúng thưởng (mỗi người chỉ được bốc một vé).

GIẢI : Gọi A = "người thứ nhất bốc được vé trúng thưởng",

B = "người thứ hai bốc được vé trúng thưởng". Như vậy xác suất của B sau khi A đã xuất hiện là :

$$P(B|A) = \frac{2}{9} \approx 0{,}2222.$$

Ví dụ 1.11 : Một cuộc điều tra về sở thích mua sắm quần áo của dân cư trong một vùng. Trong số 500 người được điều tra có : 240 nam, trong đó có 136 người thích mua sắm, 260 nữ, trong đó có 224 người thích mua sắm.

a) Tính xác suất người được chọn điều tra ngẫu nhiên là nữ.

b) Giả sử chọn được một người nữ của vùng. Tính xác suất người đó thích mua sắm.

GIẢI : Ta lập bảng :

	Thích mua sắm	**Không thích mua sắm**
Nam	136	104
Nữ	224	36

a) Gọi N = "người được chọn là nữ". Khi đó P(N) = 260/500 = 0,52

b) Gọi T = "người được chọn thích mua sắm". Ta tính xác suất của T khi N đã xuất hiện, nghĩa là tính xác suất người được chọn thích mua sắm trong số những người nữ theo 2 cách :

Cách 1 : Tính trực tiếp bằng định nghĩa : $P(T|N) = 224/260 = 0{,}8615$.

Cách 2 : Sử dụng hệ thức (1.9) :

$$P(T|N) = \frac{P(NT)}{P(N)} = \frac{(224/500)}{(260/500)} = \frac{224}{260} = 0{,}8615.$$

2.2. Sự độc lập về xác suất

Định nghĩa 1.4 : Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu $P(A \mid B) = P(A)$ hoặc $P(B \mid A) = P(B)$ (sự xuất hiện hay không của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện biến cố kia).

Từ Định nghĩa 1.4 và công thức (1.8) suy ra :

- A, B độc lập $\Leftrightarrow P(A.B) = P(A).P(B)$.

Ngoài ra ta còn có khái niệm :

- $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập từng đôi nếu :

  $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$ $(i \neq j)$; $i, j = \overline{1,n}$.

- $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là độc lập trong toàn bộ nếu :

  $P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right)$ với mọi tập con $i_1, i_2, ..., i_k$ của $\{1, 2, ..., n\}$.

Việc kiểm tra tính độc lập trong nhiều bài toán là khó. Do đó, đôi khi người ta thừa nhận nó dựa vào thực tế.

Ví dụ 1.12 : Chứng minh A, B độc lập khi và chỉ khi $\overline{A}$, B độc lập.

GIẢI : Ta có $B = \Omega.B = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B$,

AB, $\overline{A}B$ xung khắc, do đó : $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$

$\Leftrightarrow P(B) = P(A)P(B) + P(\overline{A}B)$ (do A, B độc lập)

$\Leftrightarrow P(\overline{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)\,P(\overline{A})$.

Như vậy A, B độc lập thì $\overline{A}$, B độc lập.

Ngược lại $\overline{A}$, B độc lập $\Rightarrow$ A, B độc lập vì $A = \overline{\overline{A}}$.

2.3. Công thức nhân xác suất

a) Cho các biến cố tùy ý

- A, B tuỳ ý : $P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$; (1.11)
- $A_1, A_2, ..., A_n$ tuỳ ý :

  $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)...\,P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1})$.

b) Cho các biến cố độc lập

• A, B độc lập : $P(AB) = P(A)P(B)$; (1.12)

• $A_1, A_2, ..., A_n$ độc lập (trong toàn bộ)

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

Ví dụ 1.13 : Một xưởng có 2 máy hoạt động độc lập. Trong một ngày làm việc, xác suất để 2 máy này bị hỏng tương ứng là 0,1 ; 0,05. Tính xác suất trong một ngày làm việc, xưởng có :

a) 2 máy hỏng ; b) một máy hỏng ; c) có máy hỏng.

GIẢI : Gọi A_i = "máy i hỏng trong một ngày làm việc", i = 1, 2. A_1, A_2 độc lập ; A = "có 2 máy hỏng" ; B = "có 1 máy hỏng" ; C = "có máy hỏng".

a) $P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}1.0{,}05 = 0{,}005$ (A_1, A_2 độc lập).

b) $B = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$, $A_1\overline{A_2}$ và $\overline{A_1}A_2$ xung khắc

$P(B) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2)$ (do tính độc lập).

$\Rightarrow P(B) = 0{,}1(1 - 0{,}05) + (1 - 0{,}1)0{,}05 = 0{,}14.$

c) Cách 1. $C = A_1 + A_2$; $P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$.

Do A_1, A_2 độc lập : $P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$

$= 0{,}1 + 0{,}05 - 0{,}1.0{,}05 = 0{,}145.$

Cách 2. $\overline{C} = \overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1}.\overline{A_2}$, $P(\overline{C}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})$

$P(C) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}9.0{,}95 = 0{,}145.$

Cách 3. $C = A + B$, A và B xung khắc suy ra $P(C) = P(A) + P(B) = 0{,}145.$

Ví dụ 1.14 : Một hộp có 9 bi trong đó có 3 bi đỏ. Chia ngẫu nhiên số bi trong hộp lần lượt thành 3 phần, mỗi phần 3 bi. Tính xác suất để mỗi phần đều có bi đỏ.

GIẢI : Gọi A = "bi của hộp được chia thành 3 phần, mỗi phần 3 bi có 1 bi đỏ".

A_i = "phần i có 3 bi trong đó có 1 bi đỏ". Ta có :

$A = A_1A_2A_3$, các biến cố này không độc lập, do đó :

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{C_3^1.C_6^2}{C_9^3}\cdot\frac{C_2^1.C_4^2}{C_6^3}\cdot 1 \approx 0{,}3214.$$

Ví dụ 1.15 : Một sản phẩm xuất xưởng phải qua 3 lần kiểm tra. Xác suất để một phế phẩm bị loại ở lần kiểm tra đầu là 0,8 ; nếu lần kiểm tra đầu không bị loại thì xác suất nó bị loại ở lần kiểm tra thứ hai là 0,9, tương tự nếu lần thứ hai nó cũng không bị loại thì ở lần kiểm tra thứ ba xác suất nó bị loại là 0,95.

a) Tính xác suất để một phế phẩm bị loại qua 3 lần kiểm tra.

b) Giả sử một phế phẩm bị loại sau 3 lần kiểm tra.Tính xác suất để phế phẩm này bị loại ở lần kiểm tra thứ hai.

GIẢI : a) Gọi A = "phế phẩm bị loại qua 3 lần kiểm tra"

A_i = "phế phẩm bị loại ở lần kiểm tra thứ i", i = 1, 2, 3.

Ta có : $A = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, các biến cố trong tổng xung khắc

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

Do $\overline{A}_2 \subset \overline{A}_1$ ($\overline{A}_2$ xuất hiện thì $\overline{A}_1$ xuất hiện) suy ra $\overline{A}_1\overline{A}_2 = \overline{A}_2$,

$$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(A_3|\overline{A}_2) = 0{,}95,$$

$$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = 1 - P(A_2|\overline{A}_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Ta tính được P(A) = 0,999.

Ta cũng có thể tính : $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)$.

$$P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) = P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2|\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2\right) = 0{,}2.0{,}1.0{,}05 = 0{,}001$$

$\Rightarrow P(A) = 0{,}999$.

b) Biến cố phế phẩm bị loại ở lần kiểm tra thứ hai là $\overline{A}_1A_2$.

Vì $\overline{A}_1A_2 \subset A$, ta có :

$$P(\overline{A}_1A_2 \mid A) = \frac{P(\overline{A}_1A_2A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2.0{,}9}{0{,}999} = 0{,}1802.$$

3. Công thức Bernoulli

a) Dãy n phép thử Bernoulli là dãy n phép thử thoả mãn 3 điều kiện sau :

i) Các phép thử của dãy độc lập với nhau (nghĩa là các biến cố xuất hiện trong các phép thử khác nhau là độc lập với nhau).

ii) Trong mỗi phép thử chỉ có biến cố A hoặc $\overline{A}$ xuất hiện.

iii) Xác suất xuất hiện A trong mọi phép thử của dãy là bằng nhau : P(A) = p ; do đó $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$.

Ví dụ 1.16 : Sau đây là dãy các phép thử Bernoulli.

1) Một máy sản xuất lần lượt từng sản phẩm. Xác suất mỗi lần máy sản xuất ra phế phẩm là 0,08. Cho máy sản xuất 15 sản phẩm (15 phép thử Bernoulli).

2) Một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên có hoàn lại lần lượt từng sản phẩm ra 100 sản phẩm (100 phép thử Bernoulli).

3) Xác suất để một mã chứng khoán tăng giá trong mỗi phiên giao dịch là 10%. Xét 10 phiên giao dịch liên tiếp của mã chứng khoán này (10 phép thử Bernoulli).

b) Bài toán đưa đến công thức Bernoulli.

Bài toán : Cho dãy n phép thử Bernoulli với xác suất xuất hiện biến cố A trong mỗi phép thử là p. Tìm xác suất của biến cố A_k = "Có k lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử Bernoulli đã cho".

Kí hiệu xác suất này là $P_n(k)$, nó được cho bởi

Công thức Bernoulli :

$$P_n(k) = C_n^k.p^k.q^{n-k}, \text{ với } p = P(A),\ q = 1 - p. \quad (1.13)$$

Thật vậy, A_k = "A xuất hiện k lần trong dãy n phép thử Bernoulli". Mỗi biến cố $AA\overline{A}A\ldots A$ (gồm k chữ A và n–k vị trí còn lại là $\overline{A}$) có các biến cố thành phần độc lập (vì xuất hiện trong các phép thử khác nhau) do đó xác suất của biến cố này là $p^k q^{n-k}$. Số biến cố dạng này tương ứng với số cách xếp k chữ A (không kể thứ tự) vào dãy và n–k chữ $\overline{A}$ vào các vị trí còn lại, do đó có C_n^k biến cố. Đây là các biến cố thuận lợi cho A_k và xung khắc từng đôi, theo công thức cộng xác suất cho các biến cố xung khắc suy ra :

$$P_n(k) = C_n^k.p^k.q^{n-k}.$$

Ví dụ 1.17 : Một máy sản xuất lần lượt từng sản phẩm. Xác suất mỗi lần máy sản xuất ra sản phẩm loại A là 0,7.

a) Cho máy sản xuất 10 sản phẩm. Tính xác suất để trong các sản phẩm này có 2 sản phẩm loại A.

b) Máy cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để xác suất của biến cố "trong các sản phẩm máy sản xuất ra có ít nhất một sản phẩm loại A" lớn hơn 0,85.

GIẢI : a) Máy sản xuất ra 10 sản phẩm tương ứng là dãy 10 phép thử Bernoulli với xác suất xuất hiện sản phẩm loại A là P(A) = 0,7. Xác suất cần tính là $P_{10}(2) = C_{10}^2 .(0,7)^2.(0,3)^8 = 0,0014$.

b) Giả sử máy phải sản xuất ít nhất n sản phẩm để thoả mãn điều kiện đã cho. Đây là dãy n phép thử Bernoulli với xác suất xuất hiện sản phẩm loại A là 0,7. Kí hiệu xác suất của biến cố có ít nhất một sản phẩm loại A là $P_n(k \geq 1)$ thì :

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - 0,3^n > 0,85$$

$$\Leftrightarrow 0,3^n < 0,15 \Leftrightarrow n\ln(0,3) < \ln(0,15) \Leftrightarrow n > 1,57.$$

Vậy cần sản xuất ít nhất 2 sản phẩm.

4. Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

a) Nhóm đầy đủ các biến cố

Định nghĩa 1.5 : Nhóm các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$ của một phép thử được gọi là một nhóm đầy đủ nếu thoả mãn hai tính chất :

i) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega,$ (1.14)

ii) $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. (1.15)

Điều kiện (1.14), (1.15) có nghĩa là : Trong mỗi phép thử chắc chắn có 1 và chỉ 1 biến cố của nhóm đầy đủ xuất hiện.

Ví dụ :

– $\{A, \overline{A}\}$ là một nhóm đầy đủ.

– Trong phép thử lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm trong 3 sản phẩm được một máy sản xuất, các biến cố A_i = "lấy được sản phẩm thứ i của máy", i = 1, 2, 3 lập thành một nhóm đầy đủ.

– Trong phép thử lấy ngẫu nhiên 2 bi từ một hộp 10 bi trong đó có 3 bi đỏ, các biến cố A_i = "trong 2 bi lấy ra có i bi đỏ", i = 0,1, 2 lập thành một nhóm đầy đủ.

– Trong phép thử tung 3 đồng tiền, các biến cố A_i = "có i mặt sấp xuất hiện", i = 0,1, 2, 3 lập thành một nhóm đầy đủ.

b) Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

Định lí 1.1 : Nếu trong một phép thử có biến cố A xảy ra đồng thời với một trong các biến cố của nhóm đầy đủ $A_1, A_2, ..., A_n$ thì khi đó các công thức sau được thiết lập :

• Công thức xác suất đầy đủ :

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(A \mid A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i) \; ; \qquad (1.16)$$

• Công thức Bayes : $P(A_i|A) = \dfrac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}$. (1.17)

Chứng minh. Ta có :

$$A = A.\Omega \overset{do(1.14)}{=} A.(A_1 + \cdots + A_n) = AA_1 + AA_2 + \cdots + AA_n,$$

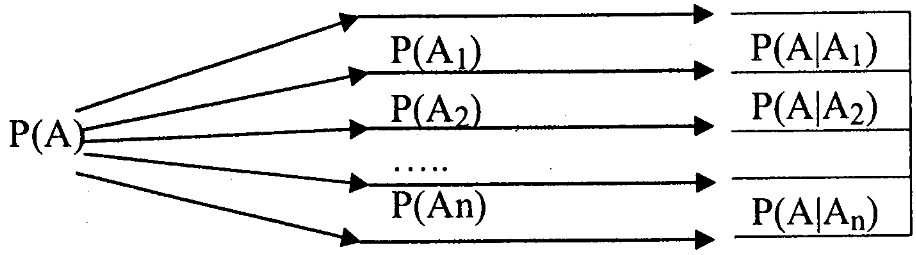
$(AA_i)(AA_j) = \varnothing$ ($i \neq j$, do (1.15)). Từ đó :

• $P(A) = P(AA_1) + P(AA_2) + \cdots + P(AA_n)$

$$= P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(A \mid A_n),$$

• $P(A_i \mid A) = \dfrac{P(A_iA)}{P(A)} = \dfrac{P(A_i)P(A|A_i)}{P(A)} = \dfrac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}$.

– Công thức xác suất đầy đủ cho ta cách tính xác suất của một biến cố qua xác suấ các biến cố của một nhóm đầy đủ. Xác suất này được tính theo các khả năng xuất hiệı biến cố của một nhóm đầy đủ, được mô tả qua hình vẽ sau :



– Công thức Bayes (còn có tên công thức xác suất hậu nghiệm) cho biết khả năn (xác suất) xuất hiện các biến cố A_i của nhóm đầy đủ khi biến cố A đã xuất hiện. Nó ch dự báo khả năng xuất hiện các biến cố A_i khi A xuất hiện.

Ví dụ 1.18 : Một công ty bảo hiểm chia dân cư (đối tượng bảo hiểm) làm 3 loại ít rủi ro ; rủi ro trung bình ; rủi ro cao. Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ dân gặp rủi ro tron một năm tương ứng với các loại trên là : 0,05 ; 0,08 ; 0,12 và có 60% dân cư thuộc loại rủi ro ; 30% dân cư thuộc loại rủi ro trung bình và 10% dân cư thuộc loại rủi ro cao.

a) Tìm tỉ lệ dân cư gặp rủi ro sau một năm cố định nào đó của vùng.

b) Nếu một người gặp rủi ro trong năm thì khả năng người đó thuộc loại ít rủi ro là bao nhiêu ?

GIẢI : a) Gọi A = "chọn ngẫu nhiên một người dân của vùng là người gặp rủi ro trong năm" ; A_1, A_2, A_3 tương ứng là các biến cố : Người dân được chọn thuộc loại ít rủi ro ; rủi ro trung bình ; rủi ro cao. A_1, A_2, A_3 là nhóm đầy đủ. Xác suất của A được tính theo các khả năng A_1, A_2, A_3 xuất hiện và theo công thức xác suất đầy đủ :

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + P(A_3)P(A \mid A_3)$$
$$= 0{,}6.0{,}05 + 0{,}3.0{,}08 + 0{,}1.0{,}12 = 0{,}066 = 6{,}6\%.$$

b) Thực chất ta cần tìm xác suất một người thuộc loại ít rủi ro trong số những người đã bị rủi ro trong năm, nghĩa là cần tính xác suất của A_1 trong điều kiện biến cố A đã xảy ra. Áp dụng công thức Bayes ta có :

$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1).P(A|A_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6.0{,}05}{0{,}066} = 0{,}4545\,.$$

Ví dụ 1.19 : Có 2 hộp sản phẩm, hộp thứ nhất có 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm ; hộp thứ hai có 12 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm để kiểm tra, nếu toàn là chính phẩm thì mua hộp đó.

a) Tính xác suất khách hàng mua hộp sản phẩm.

b) Giả sử khách hàng đã mua hộp sản phẩm. Khả năng khách hàng mua hộp nào nhiều hơn ?

GIẢI : a) Gọi A = "hộp sản phẩm được mua" = "lấy 2 sản phẩm, toàn chính phẩm".

A_i = "lấy được hộp thứ i", i = 1, 2 ; A_1, A_2 là một nhóm đầy đủ.

Theo công thức xác suất đầy đủ : $P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2)$

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{C_7^2}{C_{10}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C_8^2}{C_{12}^2} = 0{,}4455.$$

b) Ta so sánh các xác suất :

$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1).P(A|A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{C_7^2}{C_{10}^2}}{0{,}4455} = 0{,}5238\,,$$

$$P(A_2 \mid A) = \frac{P(A_2).P(A|A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{C_8^2}{C_{12}^2}}{0,4455} = 0,4762\,.$$

Vì $P(A_1 \mid A) > P(A_2 \mid A)$ nên ta kết luận : Nếu khách hàng đã mua hộp sản phẩm thì nhiều khả năng hơn người đó mua hộp 1.

Ví dụ 1.20 : Một công ty chuẩn bị cho ra thị trường một loại sản phẩm mới. Kết quả từ các lần thử nghiệm trước cho thấy 40% sản phẩm mới của công ty là thành công, còn 60% là không thành công. Trước khi sản phẩm mới được đưa ra thị trường, một nhân viên nghiên cứu thị trường được tiến hành để xác định khả năng ưa thích hay không của người tiêu dùng đối với sản phẩm đó. Theo thống kê thì 80% sản phẩm mới của công ty thành công khi phỏng vấn nhận được câu trả lời "thích", còn 30% sản phẩm mới không thành công khi phỏng vấn nhận được câu trả lời "thích". Tìm tỉ lệ thành công của sản phẩm trong số những khách hàng trả lời "thích" sản phẩm khi phỏng vấn.

GIẢI : Gọi A = "khách hàng trả lời thích sản phẩm khi phỏng vấn".

A_1 = "sản phẩm mới thành công", A_2 = "sản phẩm mới không thành công". A_1, A_2 là một nhóm đầy đủ. Theo công thức xác suất đầy đủ :

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) = 0,4.0,8 + 0,6.0,3 = 0,5 = 50\%.$$

Theo công thức Bayes, xác suất thành công của sản phẩm trong số những khách hàng trả lời "thích" sản phẩm khi phỏng vấn là :

$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1).P(A|A_1)}{P(A)} = \frac{0,4.0,8}{0,5} = 0,64 = 64\%.$$

Ví dụ 1.21 : Một thiết bị gồm 3 loại linh kiện loại 1, 2, 3. Chúng chiếm tương ứng 35%, 25%, 40% tổng số linh kiện của thiết bị. Tỉ lệ thiết bị bị hỏng tương ứng là 15%, 25%, 5%. Thiết bị đang hoạt động bỗng nhiên bị hỏng. Theo bạn, nhiều khả năng nhất linh kiện loại nào bị hỏng (giả sử các linh kiện không hỏng đồng thời) ?

GIẢI : Gọi A = "thiết bị bị hỏng khi đang hoạt động" ; A_i = "linh kiện của thiết bị thuộc loại i bị hỏng", i = 1, 2, 3 ; A_1, A_2, A_3 là một nhóm đầy đủ. Xác suất linh kiện loại 1 bị hỏng khi thiết bị bị hỏng là :

$$P(A_1 \mid A) = \frac{P(A_1).P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i)} = \frac{0,35.0,015}{0,35.0,015 + 0,25.0,025 + 0,4.0,05} = 0,1667\,.$$

Tương tự, $P(A_2 \mid A) = 0,1984$; $P(A_3 \mid A) = 0,6349$.

Như vậy $P(A_3 \mid A)$ lớn nhất do đó nhiều khả năng nhất linh kiện loại 3 bị hỏng.

Ý nghĩa thực tế : Khi thiết bị hỏng cần kiểm tra linh kiện loại 3 trước, do vậy cần bố trí linh kiện này tại vị trí dễ tháo lắp.