Weekly Report

Prepared by: Huy Quang Nguyen

Date: 24/10/2025

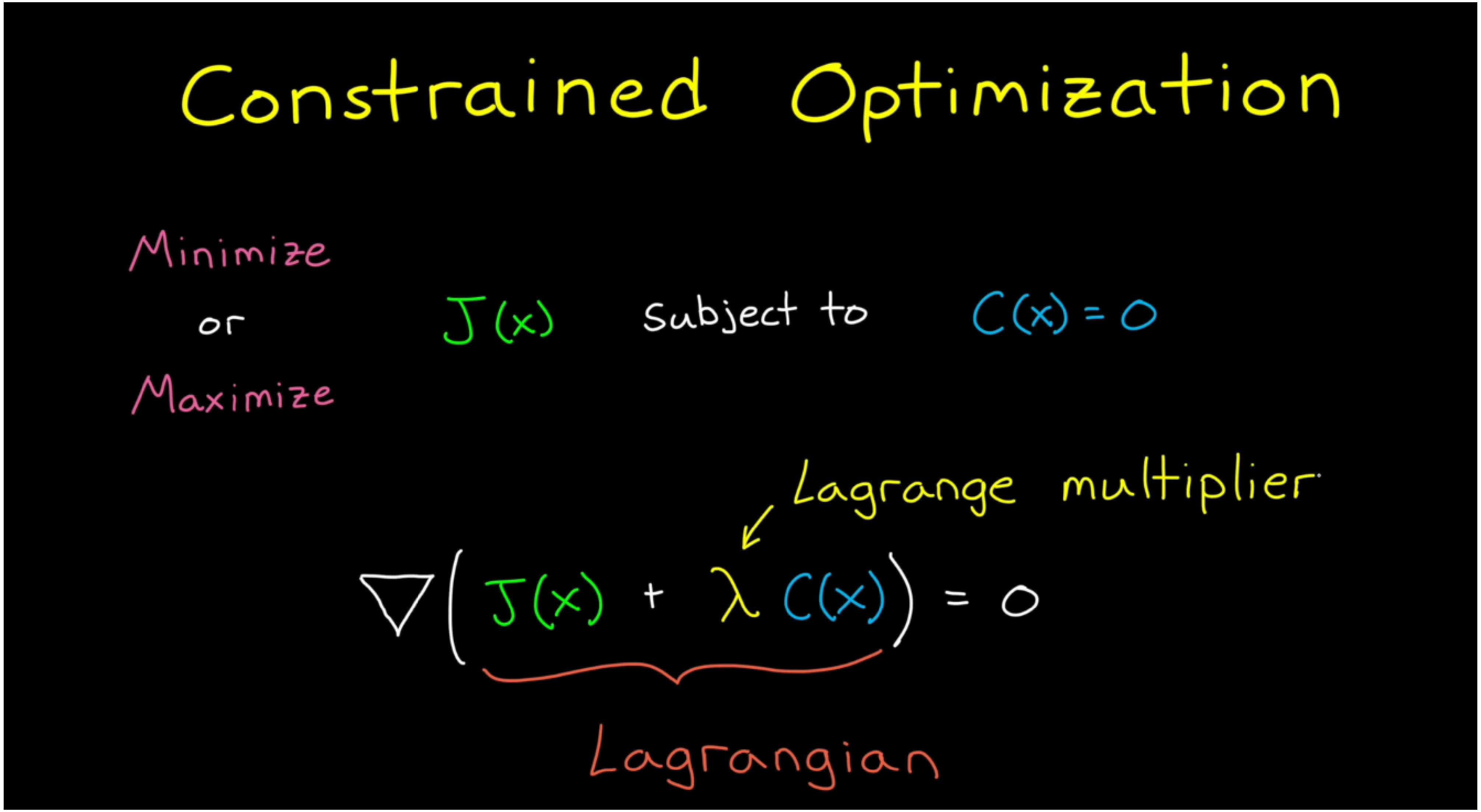
Accomplishments

- **Completed Tasks:**
    - Mô phỏng quadrotor bay từ A tới B
    - Xây dựng QP

Tasks in Progress

- Tìm hiểu kĩ hơn về QP
- Sửa lại mô phỏng quad, cấu trúc code

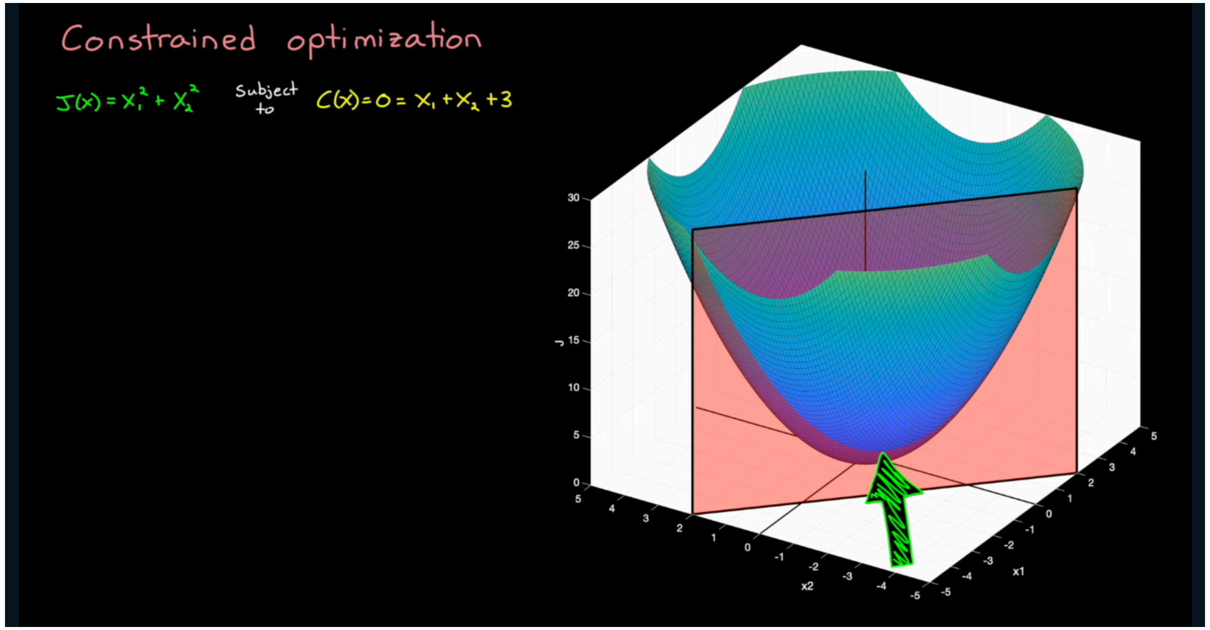
Lagrange multiplier

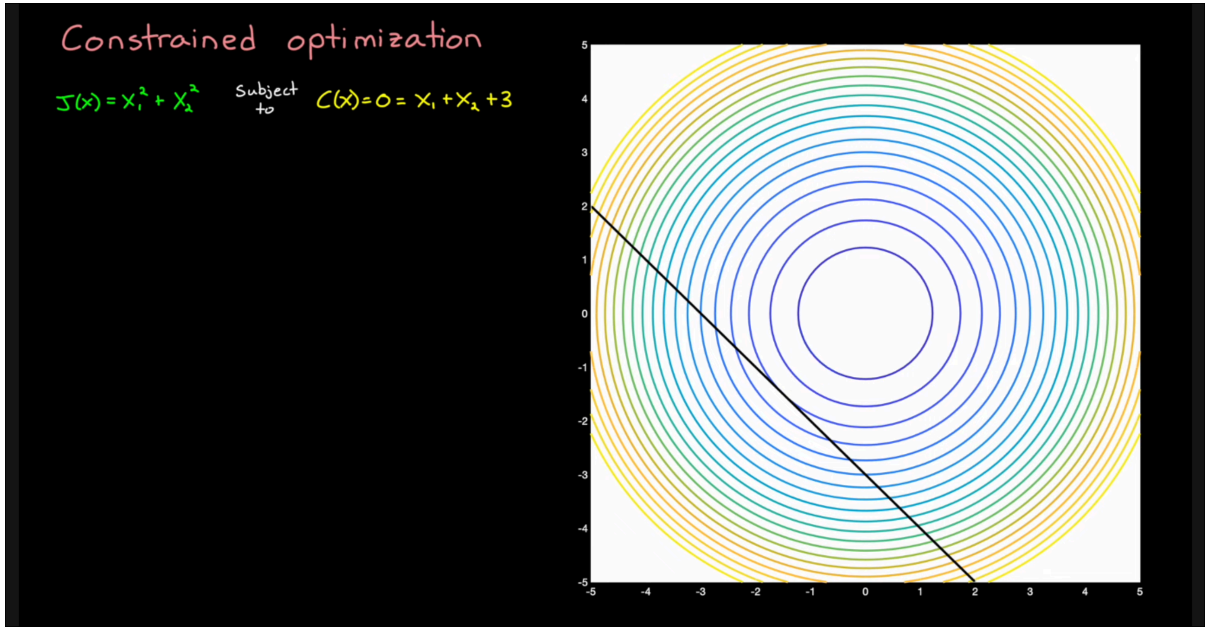


- Source : [Constrained Optimization]

Tối ưu có ràng buộc

- **Hàm mục tiêu:** $J(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- **Hàm ràng buộc:** $C(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 3 = 0$
- Source : Constrained Optimization


Constrained optimization
J(x) = x₁² + x₂²
Subject to
C(x) = 0 = x₁ + x₂ + 3
x2
x1
J


Constrained optimization
J(x) = x₁² + x₂²
Subject to
C(x) = 0 = x₁ + x₂ + 3

Constrained optimization

$J(x) = x_1^2 + x_2^2$ subject to $C(x) = 0 = x_1 + x_2 + 3$

Gradient of the constraint

$$\nabla C(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

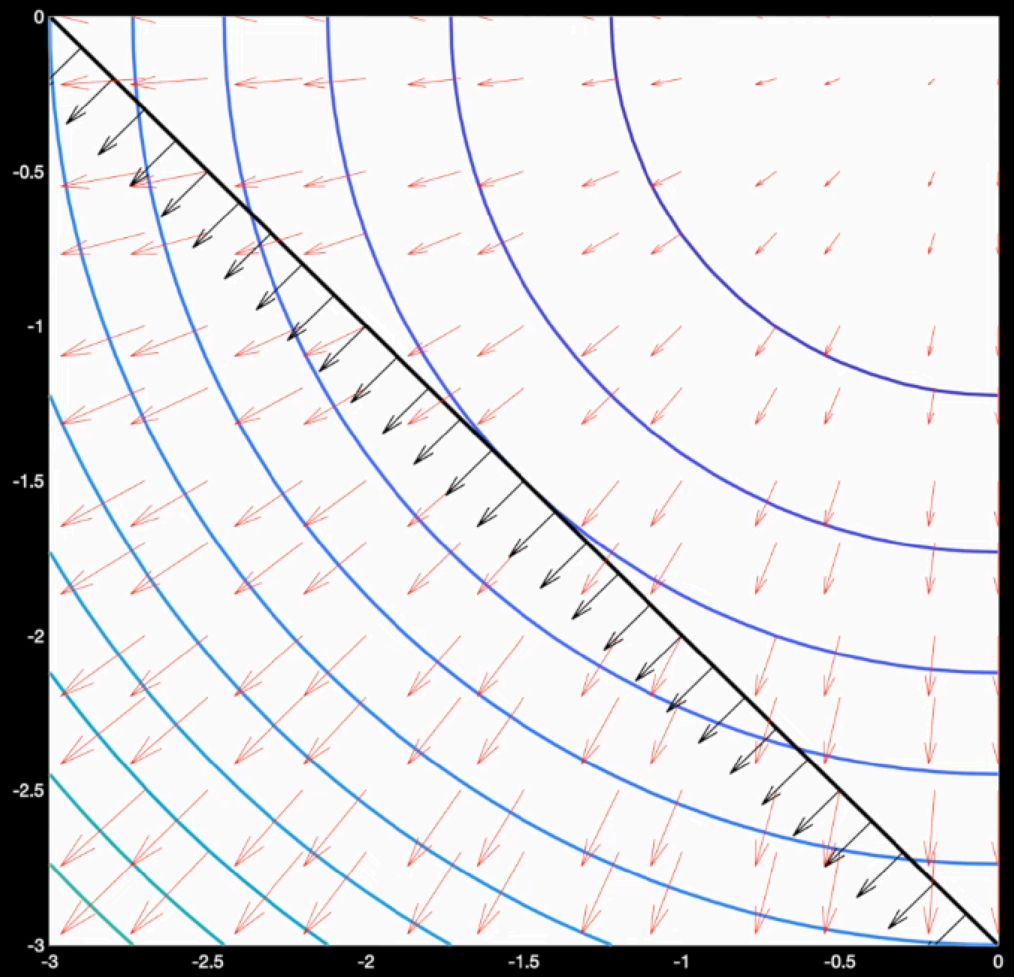
$\nabla J(x)$ is parallel to $\nabla C(x)$

$$\nabla J(x) = \lambda \nabla C(x)$$

scale to make equal

$$\nabla \big(J(x) + \lambda C(x) \big) = 0$$

Gives us the stationary points



Convex Optimization

- Source : Visually Explained

What is Optimization?

Tối ưu hóa là quá trình **tìm kiếm phương án tốt nhất** nhằm mục đích:

- **Tối thiểu hóa (Minimize):** Chi phí, rủi ro, thời gian, sai số.
- **Tối đa hóa (Maximize):** Lợi nhuận, hiệu suất, độ bền.

Components

1. **Biến quyết định (Decision Variables)** x
   - Là những thứ bạn có thể kiểm soát/thay đổi (ví dụ: vị trí con tàu).
2. **Hàm mục tiêu (Objective Function)** $f(x)$
   - Là thứ bạn muốn tối thiểu/tối đa hóa (ví dụ: `min c^T * x`).
3. **Ràng buộc (Constraints)** $g(x), h(x)$
   - Là các quy tắc, giới hạn x phải tuân theo (ví dụ: $g(x) \leq 0$).

Problems

Bài toán KHÔNG ràng buộc

- `min f(x)`
- *Cách giải:* Đi theo hướng dốc nhất (ngược gradient, $-\nabla f$).

Bài toán CÓ ràng buộc

- `min f(x)` *sao cho* $g(x) \leq 0$.
- *Vấn đề:* Phải "kiểm tra" ranh giới, không thể đi tự do.
- *Giải pháp:* Hàm phạt, KKT

From Constraint to Penalty Function

Ý tưởng: Thay ràng buộc bằng penalty

Hàm mục tiêu mới = $f(x) + P(x)$

- $P(x) = 0$ (nếu x an toàn)
- $P(x) = +\infty$ (nếu x vi phạm)

$\implies$ Thuật toán sẽ *tự động* tránh vùng vi phạm.

Cons

1. **Hàm phạt 0/Vô cùng: * Không liên tục (discontinuous)**.
    - Không thể lấy Gradient $\implies$ thuật toán hỏng.
2. **Hàm phạt Tuyến tính** $u \cdot g(x)$**:**
    - **Liên tục**
    - *Nhược điểm:* Kết quả tối ưu bị **phụ thuộc vào độ dốc** u.

Convexity

- **Tập hợp lồi:** Đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ luôn nằm bên trong tập hợp (Không có "lỗ" hay "vết lõm").
- **Hàm lồi:** Đồ thị có dạng "cái bát" (luôn cong lên). Epigraph (vùng phía trên) là tập hợp lồi.

Why is Convexity "Magical"?

Mọi Local Minimum = Global Minimum.

- **Bài toán KHÔNG lồi (⛰️):**
    - Có thể bị "mắc kẹt" ở cực tiểu cục bộ.
- **Bài toán LỒI (🥣):**
    - Chỉ cần đi xuống dốc (theo gradient) là sẽ tìm thấy nghiệm toàn cục.

Consequence of the Tangent Definition

Vì hàm lồi luôn nằm *trên* tiếp tuyến:

- Nếu ta tìm được điểm x^* mà tiếp tuyến **nằm ngang** (tức là $\nabla f(x^*) = 0$) thì x^* **chắc chắn** là cực tiểu toàn cục.

Kết luận: Với hàm lồi, $\min f(x) \implies$ giải $\nabla f(x) = 0$.

Principle of Duality

Primal vs. Dual

1. Bài toán Gốc (Primal Problem)

- `min f(x)` (Tối thiểu chi phí)
- *sao cho* $g(x) \leq 0$.

2. Bài toán Đối ngẫu (Dual Problem)

- `max g(u)` (Tối đa hóa "giá" của ràng buộc).
- Biến đối ngẫu u chính là "mức phạt" / "giá" của ràng buộc.

Strong Duality

Luôn có: **Giá trị tối ưu Dual** $\leq$ **Giá trị tối ưu Primal** (Duality Gap).

Khi bài toán là Convex $\implies$ **Strong Duality:**
Giá trị tối ưu Dual = Giá trị tối ưu Primal

Ý nghĩa: Có thể giải bài toán Đối ngẫu (dễ hơn) để tìm nghiệm cho bài toán Gốc.

Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Conditions

Building KKT: The Lagrangian Function

Kết hợp mục tiêu và ràng buộc thành **Hàm Lagrangian** $\mathcal{L}(x, u)$:

$$\mathcal{L}(x, u) = f(x) + u \cdot g(x)$$

- $f(x)$: Chi phí gốc.
- u: Hệ số Lagrange
- $g(x)$: Ràng buộc.

KKT mô tả "điểm cân bằng" (saddle point) của hàm $\mathcal{L}$.

KKT Conditions

1. Cân bằng Gradient (Stationarity)

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, u^*) = 0$$

- Tức là: $\nabla f(x^*) = -u^* \nabla g(x^*)$
- **Trực giác:** "Lực" từ mục tiêu (∇f) và "lực" từ ràng buộc (∇g) phải **cân bằng và ngược hướng** nhau.

KKT Conditions

2. Khả thi Gốc (Primal Feasibility)

$$g(x^*) \le 0$$

- **Ý nghĩa:** Nghiệm x^* phải tuân thủ ràng buộc ban đầu.

3. Khả thi Đối ngẫu (Dual Feasibility)

$$u^* \ge 0$$

- **Ý nghĩa:** "Mức phạt" u^* phải **không âm** (để là "phạt" chứ không phải "thưởng").

KKT Conditions

4. Bù yếu (Complementary Slackness)

$$u^* \cdot g(x^*) = 0$$

- **Logic:** Tích của "giá" và "mức độ vi phạm" phải bằng 0.
- **Case 1: Ràng buộc KHÔNG hiệu lực (Inactive)**
    - x^* nằm *bên trong* $\implies g(x^*) < 0$.
    - $\implies$ Ràng buộc "dư thừa", nên "giá" của nó $u^* = 0$.
- **Case 2: Ràng buộc CÓ hiệu lực (Active)**
    - x^* nằm *trên ranh giới* $\implies g(x^*) = 0$.
    - $\implies$ Ràng buộc có tác dụng, nên "giá" của nó $u^* \geq 0$.