ĐH QUỐC GIA HN **ĐH CÔNG NGHỆ**

Đề thi môn: **GIẢI TÍCH I**
Lớp K52 CQ-C, Đ, V, H, M

Thời gian: 150 phút không kể thời gian phát đề.

(Đề số 1)

Câu 1. *(2 điểm).* Với điều kiện nào hàm số $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) liên tục khi $x = 0$;
b) có đạo hàm hữu hạn khi $x = 0$;
c) có đạo hàm liên tục khi $x = 0$?.

Câu 2. *(2 điểm).* Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^{\mu} x}{x^2} \qquad (\mu - \text{thực}).$
2. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{(x^x)-1}.$

Câu 3. *(3 điểm).*

1. Tìm diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $\rho = a\sin 3\varphi$ (hình 3 lá).
2. Tính độ dài đường cong $\rho = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$ khi $0 < \rho < a.$

Câu 4. *(1 điểm).* Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\text{arctg x}}{x^n.\sqrt{x+100}}dx.$$

Câu 5. *(2 điểm).*

1. Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa của x và tìm miền hội tụ của chuỗi đó: $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4x+3}$
2. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ thành chuỗi các cosin trong khoảng $(0, \pi)$.

ĐH QUỐC GIA HN | *Đề thi môn:* **GIẢI TÍCH I**

ĐH CÔNG NGHỆ | **Lớp K52 CQ-C, Đ, V, H, M**

Thời gian: 150 phút không kể thời gian phát đề.

(Đề số 2)

Câu 1. *(2 điểm).* Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

Xác định giá trị trung bình c của công thức số gia hữu hạn (theo định lí Lagrange) đối với hàm $f(x)$ trên đoạn $[0, 2]$.

Câu 2. *(2 điểm).* Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ $\quad$ (m, n là các số nguyên).

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\text{th}x)^x.$ $\quad$ *(Gợi ý: áp dụng định lí L'Hospital).*

Câu 3. *(3 điểm).*

1. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong tham số:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t); y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

2. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt được tạo nên khi quay đường cong cycloit $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$; và đường $y = 0$,

   (a) quay quanh trục Ox.

   (b) quay quanh trục Oy.

Câu 4. *(1 điểm).* Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng: $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x.\sqrt[3]{x^\alpha + 1}}.$

Câu 5. *(2 điểm).*

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2.\sqrt{3^{n-1}}}.$

2. Khai triển hàm $f(x) = x$ trên đoạn $[0, \pi]$ thành chuỗi Fourier theo các hàm $\sin$.

Đáp án Đề số 1

Câu 1. *(2 điểm).* $f(x) = x^n \sin\dfrac{1}{x}\ \ (x \neq 0)$ và $f(0) = 0$.

a) $f(\pm 0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} x^n \sin\dfrac{1}{x}$.

Giới hạn tồn tại và bằng 0 chỉ khi $n > 0$. Vậy hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi $n > 0$.

b) $f'_{\pm}(0) = \lim\limits_{\Delta x\to\pm 0} \dfrac{(\Delta x)^n \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to\pm 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\dfrac{1}{\Delta x}$.

Giới hạn tồn tại (và bằng 0) chỉ khi $n > 1$.

c) $f'(x) = nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x} - x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}\quad (x \neq 0)$.

Để hàm $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$, cần và đủ là $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = f'(0)$. Khi $x \to \pm 0$ các giới hạn $f'_{-}(0)$ và $f'_{+}(0)$ tồn tại chỉ khi $n - 2 > 0$ và bằng 0. Đồng thời $f'(0) = 0$ khi $n > 1$ (câu b.). Vậy đạo hàm $f'(x)$ liên tục tại 0 khi $n > 2$.

Câu 2. *(2 điểm).*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^{\mu} x}{x^2} = \lim \dfrac{[1 + (\cos x - 1)]^{\mu} - 1}{-x^2} = \lim \dfrac{\mu(\cos x - 1)}{-x^2} =$
   $= \mu.\lim \dfrac{x^2/2}{x^2} = \boxed{\dfrac{\mu}{2}}$.

   (Hoặc L'Hospital: $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\mu\cos^{\mu-1} x(-\sin x)}{2x} = \dfrac{\mu}{2}\lim \cos^{\mu-1} x.\lim\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\mu}{2}$).

2. Dạng 0^0. $\lim\limits_{x\to +0} x^{(x^x)-1} = \lim e^{(x^x-1)\ln x} = e^{\lim(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^{\lim x\ln^2 x} = \boxed{e^0 = 1}$.

Câu 3. *(3 điểm).*

1. $\dfrac{S}{3} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/6} \dfrac{a^2\sin^2 3\varphi}{2} d\varphi = \dfrac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}(1 - \cos 6\varphi)d\varphi = \dfrac{\pi a^2}{12}$. Vậy $\boxed{S = \dfrac{\pi a^2}{4}}$.

2. Do điều kiện $0 < \rho < a$ ta được $0 < e^{m\varphi} < 1 \Leftrightarrow -\infty < \varphi < 0$.
   $\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = a^2 e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi} = a^2e^{2m\varphi}.(1 + m^2)$;

$$L = a\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{0} e^{m\varphi}d\varphi = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}\Big|_{-\infty}^{0} = \boxed{\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}}.$$

Câu 4. *(1 điểm).* Khi $x \to +\infty, f(x) = \dfrac{\text{arctg}x}{x^n.\sqrt{x+100}} = o\left(\dfrac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}}\right)$. Vậy tích phân hội tụ nếu $n + \dfrac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \boxed{n > \dfrac{1}{2}}$.

Câu 5. *(2 điểm).*

1. $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4x+3} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x-3} = -2\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}} =$

$= -2(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) + \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{3^2} + \cdots + \dfrac{x^n}{3^n} + \cdots\right) =$

$= \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-2 + \dfrac{1}{3^{k+1}}\right)x^k}.$ **Miền hội tụ:** $(-1;1) \cap (-3;3) = (-1;1)$.

2. Thác triển chẵn trên đoạn $(-\pi, \pi)$. Hàm đã thác triển có thỏa mãn các điều kiện của định lí Dirichlet.

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= -\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2} - (-1)^n\frac{1}{\pi n^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n^2} & k \text{ lẻ} \\ 0 & k \text{ chẵn} \end{cases}$$

Từ đó $$\boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)}. \qquad \forall x \in (0, \pi)$$

Đáp án Đề số 2

Câu 1. *(2 điểm).* Theo giả thiết ĐL Lagrange, cần khảo sát sự khả vi của $f(x)$ tại $x = 1$.

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{3-(1+\Delta x)^2}{2} - 1\right) = -1;$$
$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{1+\Delta x} - 1\right) = -1.$$

Hàm $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0, 2]$. Áp dụng công thức số gia hữu hạn đối với $f(x)$ trên $[0, 2]$ ta có:

$$f(2) - f(0) = 2f'(c); \qquad 0 < c < 2.$$
$$\text{Vì} \qquad f(2) = 1/2,\ f(0) = 3/2,$$
$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } 0 < x \le 1; \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } 1 < x < 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 = \begin{cases} -2c & \text{khi } 0 < c \le 1; \\ -\dfrac{2}{c^2} & \text{khi } 1 < c < 2. \end{cases}$$

Từ đó $\quad c_1 = \dfrac{1}{2},\ c_2 = \sqrt{2}.$

Câu 2. *(2 điểm).*

1. Sử dụng các vô cùng bé tương đương: $(1+\alpha(x))^m - 1 \sim m.\alpha(x)$ khi $\alpha(x) \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} =$$
$$\lim \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1\right) + \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} =$$
$$\lim \sqrt[n]{1+\beta x}.\lim \frac{\alpha x}{mx} + \lim \frac{\beta x}{nx} = \boxed{\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}}.$$

2. L'Hospital 3 lần.

$$L = \lim_{x\to+\infty} (\text{th}x)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} v(u-1)}, \text{ ở đây } \lim_{x\to+\infty} v(u-1) = \lim x(\text{th}x - 1) =$$
$$= \lim \frac{\dfrac{1}{\text{ch}^2 x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim \frac{-2x}{2\text{sh}x\text{ch}x} = \lim \frac{-2x}{\text{sh}2x} = \lim \frac{-2}{2\text{ch}2x} = 0. \text{ Vậy } L = \boxed{e^0 = 1}.$$

Câu 3. *(3 điểm).*

1. Hình được giới hạn bởi đường cong kín (do $x(0) = x(2\pi);\ y(0) = y(2\pi)$), vì vậy:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt = a^2 \int_0^{2\pi} (3 - 3\cos t)dt = \boxed{6\pi a^2}.$$

2. (a) $V_x = \pi \int\limits_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt = \pi a^3 \left[2\pi + 3\pi - \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t d(\sin t)\right] = \boxed{5\pi^2 a^3}$.

(b) $V_y = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} xy(x)dx = 2\pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t)(1-\cos t)^2 dt =$
$= 2\pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}t - 2t\cos t + \frac{t}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}\sin t + \sin 2t - \frac{\sin t \cos 2t}{2}\right) dt =$
$= 2\pi a^3 \frac{3}{2}.\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \boxed{6\pi^3 a^3}$.

Câu 4. *(1 điểm).* Khi $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x.\sqrt[3]{x^\alpha + 1}} = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha}{3}+1}}\right)$, vì vậy tích phân hội tụ với $\dfrac{\alpha}{3} + 1 > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 0}$.

Câu 5. *(2 điểm).*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \left|\dfrac{2^n x^n}{(2n+1)^2.\sqrt{3^n}} \dfrac{(2n-1)^2.\sqrt{3^{n-1}}}{2^{n-1}x^{n-1}}\right| = \dfrac{2|x|}{\sqrt{3}} < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2} = R.$

   • Tại $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, chuỗi lũy thừa đã cho trở thành chuỗi số:

$$1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

   Đây là chuỗi đan dấu hội tụ theo Leibniz.

   • Tại $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta được chuỗi số dương:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

   Chuỗi này hội tụ (chuỗi con của chuỗi điều hòa cấp 2). Từ đó miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là: $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2. Thác triển lẻ trên đoạn $[-\pi, \pi]$, khi đó: $a_o = 0, a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \cos nx dx\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$x \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right) = S(x).$$

   $S(x) = x$ khi $x \in [0, \pi)$, $S(\pi) = 0$.

ĐH QUỐC GIA HN
ĐH CÔNG NGHỆ

Đề thi môn: **GIẢI TÍCH I**
Lớp học lại

Thời gian: 120 phút không kể thời gian phát đề.

(Đề số 1)

Câu 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin 2x}{(\text{arctg } 5x)^2}$.
2. $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$.

Câu 2.

1. Tìm các điểm gián đoạn (nếu có), phân loại điểm gián đoạn và bước nhảy tại các điểm gián đoạn của hàm số sau. Vẽ dạng đồ thị hàm số đó.

$$f_6(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{khi} \quad x \le 2 \\ x & \text{khi} \quad x > 2 \end{cases}.$$

2. Cho hàm số: $s = \text{arc tg } 2x$; tính $s"(-1)$.

Câu 3.

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cacdioit $\rho = a(1+\cos\theta)$.
2. Tính độ dài một nhịp cung cycloid $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$.

Câu 4.

1. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}.$$

2. Khai triển thành chuỗi MacLaurin hàm số sau: $f(x) = \sin^2 x$.

Chú thích: Sinh viên các lớp tại chức có thể không làm câu 4 phần 2. Các câu còn lại là bắt buộc.

ĐH QUỐC GIA HN — *Đề thi môn:* **GIẢI TÍCH I**

ĐH CÔNG NGHỆ — **Lớp học lại**

Thời gian: 120 phút không kể thời gian phát đề.

(Đề số 2)

Câu 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.
2. $\lim\limits_{n\to -\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Câu 2.

1. Tìm các điểm gián đoạn (nếu có), phân loại điểm gián đoạn và bước nhảy tại các điểm gián đoạn của hàm số sau. Vẽ dạng đồ thị hàm số đó.

$$g(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi} \quad -\infty < x < -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{khi} \quad -1 \le x < +\infty \end{cases}$$

2. Cho hàm số: $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$; tính d^2y.

Câu 3.

1. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường cong sau: $\rho = \dfrac{4}{\cos(\theta - \frac{\pi}{6})}$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ và $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Tính độ dài đường cong $x = \dfrac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 + 2$, từ $t_1 = 0$ đến $t_2 = 3$.

Câu 4.

1. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}.$$

2. Khai triển hàm số: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ thành chuỗi MacLaurin.

Chú thích: Sinh viên các lớp tại chức có thể không làm câu 4 phần 2. Các câu còn lại là bắt buộc.