

ĐỀ SỐ 1

Môn thi: Đại số tuyến tính

Số tín chỉ: 4

Hệ đào tạo: Chính quy.

Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu 1. Giả sử V_1, V_2 là các không gian vec tơ con của V .

Chứng minh rằng: Nếu $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$ thì $V_1 \cap V_2$ chứa ít nhất 1 vec tơ khác 0.

Câu 2. Chứng minh rằng đồng cấu $f: V \rightarrow W$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu và chỉ nếu $\text{rank}(f) = \dim W$.

Câu 3. Tìm dạng chính tắc của dạng toàn phương sau:

$$X^2 + 4Y^2 + 5Z^2 + 4XZ - 4YZ.$$

Chỉ rõ ma trận chuyển cơ sở hiện tại về cơ sở trong đó dạng toàn phương trên có dạng chính tắc.

Câu 4. Tự đồng cấu f của không gian vec tơ V trên trường R có ma trận trong một cơ sở nào đó của V là:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng f là chéo hóa được.

Câu 5. Gọi U, V là các không gian con của R^3 với tích vô hướng chính tắc, xác định như sau:

$$U = \{ (x, y, z) \mid (x, y, z) \in R^3, x+y-z = 0, x-y+z = 0 \},$$

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y, z) \in R^3, y+z=0 \}.$$

Tìm cơ sở và số chiều của U, V . Chứng minh rằng $U \perp V$.

Chú ý: Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu, điện thoại và tất cả các loại máy tính.