NGUYỄN ĐỨC ĐẠT

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Thân tặng
anh Lê Phế Đô
Vĩnh Yên, 15-1-2006
Đức Đạt
Tác giả

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Lời nói đầu 5

Chương 1. **Số phức, trường số** 7

1.1. Số phức 7
1.2. Nhóm, vành, trường 12
Đáp số và hướng dẫn 16

Chương 2. **Đa thức** 29

2.1. Các phép tính trên đa thức, thuật chia tìm ước chung lớn nhất 29
2.2. Nghiệm đa thức, đa thức bất khả qui 32
Đáp số và hướng dẫn 35

Chương 3. **Không gian véc tơ, không gian Euclid** 45

3.1. Không gian véc tơ 46
3.2. Không gian Euclid 55
Đáp số và hướng dẫn 57

Chương 4. **Ma trận và định thức** 69

4.1. Ma trận 69
4.2. Định thức 73
Đáp số và hướng dẫn 83

Chương 5. **Hệ phương trình tuyến tính** 97

5.1. Phương pháp Cramer và phương pháp Gauss 97
5.2. Định lý Kronecker – Capelli 102
5.3. Áp dụng 103
Đáp số và hướng dẫn 106

Chương 6. **Ánh xạ tuyến tính** 117

6.1. Ánh xạ tuyến tính 117
6.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính 122
Đáp số và hướng dẫn 125

Chương 7. **Phép biến đổi tuyến tính** 135

7.1. Ma trận chuyển cơ sở 135
7.2. Giá trị riêng, véc tơ riêng 138
7.3. Các phép biến đổi tuyến tính trên không gian Euclid 141
Đáp số và hướng dẫn 145

Chương 8. **Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương** 157

8.1. Dạng song tuyến tính 157
8.2. Dạng toàn phương 159
Đáp số và hướng dẫn 163

Chương 9. **Hình học giải tích** 171

9.1. Các phép tính trên véc tơ - Đường thẳng và mặt phẳng 171
9.2. Đường bậc hai 175
9.3. Mặt bậc hai 177
Đáp số và hướng dẫn 179

Tài liệu tham khảo 188

Lời nói đầu

Cuốn sách bài tập này kết hợp với các giáo trình về Đại số tuyến tính, Đại số cao cấp và Hình học giải tích đang được sử dụng tại Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Đại học Quốc gia Hà Nội, là một tài liệu tham khảo hữu ích cho những sinh viên đang học tập các môn học này.

Trừ một số bài tập đặc biệt được lấy từ các tài liệu tham khảo, đây là một hệ thống các bài tập do tác giả biên soạn trong suốt quá trình công tác tại Khoa Toán - Cơ - Tin học.

Trong nhiều năm trở lại đây, do yêu cầu giáo dục và đào tạo toàn diện, sinh viên năm thứ nhất các ngành khoa học tự nhiên thường không có nhiều thời gian dành cho các môn toán, vốn phải học tập một cách đầy đủ, hệ thống và nhất là tự học. Từ lâu các sinh viên học môn Đại số mong muốn có một quyển bài tập "cầm tay" vừa sát chương trình vừa thuận tiện khi sử dụng. Cuốn sách này nhằm đáp ứng phần nào nguyện vọng của sinh viên, cung cấp những nội dung cần thiết nhất, phù hợp với yêu cầu đào tạo, đồng thời cũng trang bị những phương pháp, những kỹ thuật tính toán cơ bản của Đại số.

Đối với những sinh viên thuộc ngành Toán học, Cơ học và Toán - Tin học ứng dụng cần bổ sung bằng những bài tập cuối chương trong các giáo trình lý thuyết mà tác giả đã không lặp lại trong cuốn sách này. Còn các sinh viên thuộc các ngành phi toán có thể đi ngay vào nội dung chính của chương trình dưới sự hướng dẫn của các giảng viên để luyện tập về phương pháp, kỹ năng và áp dụng chúng.

Một số bài tập về lý thuyết được đưa vào những vị trí thích hợp để củng cố hoặc mở rộng khái niệm, đôi chỗ để dẫn dắt vào một phương pháp mới. Cuối mỗi nội dung thường có những bài tập áp dụng hoặc để chốt lại vấn đề. Số lượng bài tập đều nhiều hơn so với yêu cầu để bạn đọc lựa chọn.

Phần đáp số và hướng dẫn đặc biệt quan trọng cho những sinh viên không có nhiều thời gian, vì đôi khi từ sự giải đáp hoặc sự gợi ý mà nắm được vấn đề. Một số lời giải thường là dành cho các bài đặc biệt, hoặc để giới thiệu phương pháp, rất cần thiết cho những người tự học. Tuy nhiên, tốt nhất vẫn là nắm vững phần lý thuyết trước khi vào bài tập, ít nhất cũng nên đối chiếu từng phần lý thuyết - bài tập.

Tác giả chân thành cảm ơn các đồng nghiệp đã nhiệt tình giúp đỡ và rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các bạn đọc.

Tác giả

Chương 1

Số phức, trường số

1.1. Số phức

Một số tập hợp số hay được sử dụng:

N - tập hợp các số tự nhiên.

Z - tập hợp các số nguyên.

Q - tập hợp các số hữu tỷ.

R - tập hợp các số thực.

C - tập hợp các số phức.

Chú ý về tập hợp **C**: Mỗi số phức thuộc **C** được viết dưới dạng a+bi, trong đó a, b $\in$ **R** và i là một "số" sao cho $i^2 = -1$, phép cộng và phép nhân các số phức được định nghĩa như sau:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \,.\, (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Tập hợp **C** với phép cộng và nhân lập thành một trường, được gọi là trường số phức.

Yêu cầu của chương này là: tính toán thuần thục trên số phức và biết vận dụng các tính chất khác với tính chất số hữu tỷ và số thực như số phức liên hợp, số phức dưới dạng lượng giác, tính căn được của số phức.

1.1. a) Tính: $-3(7-5i)$, $(3,75+1,25i)4$;

b) Giải phương trình với x, y thực: $x(2+3i)+y(-3+2i)=8-i$.

1.2. Tính:

a) $(4-3i)(2+i)$, $(-2+5i)(5-2i)$;

b) $(2-3i)^3(2+3i)^3$, $(3+5i)^2(5+3i)^2$;

c) $\left(\sqrt{17}+i\sqrt{13}\right)^3\left(-\sqrt{17}+i\sqrt{13}\right)^2$;

d) i^{4k} , i^{4k+1} , i^{4k+2} , i^{4k+3} với $k \in \mathbf{Z}$;

e) $(1+2i)^5$, $(2+i)^6$, $(1+i\sqrt{2})^4$;

f) $(1+i)^{25}$, $(1+i\sqrt{3})^{10}$.

1.3. Tính:

a) $\dfrac{3-i}{4+5i}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-2i}{2+i\sqrt{3}}$;

c) $\left(\dfrac{2+i}{1-2i}\right)^{25}$; d) $\dfrac{(1+i)^9}{\left(i\sqrt{2}\right)^8}$.

1.4. Tính: a) $\dfrac{(5+i)(1-3i)^2}{8-14i}$;

b) $\dfrac{(1+i^{19})^2-(3+i)^2}{(1-i)^8}$.

1.5. Giải hệ phương trình với x, y phức:

a) $\begin{cases}(1+i)x+(3+i)y=1\ ,\\(1+2i)x+(1-i)y=-1\ ;\end{cases}$

b) $\begin{cases}(2+i)x+(1-5i)y=1+i\ ,\\(2-i)x+(1+5i)y=1-i\ .\end{cases}$

1.6. Tính căn bậc 2 của các số phức:

a) $-3+4i$, $3-4i$

b) $-5+12i$, $2i$;

c) $-1-2\sqrt{2}\,i$, $-1+2\sqrt{2}\,i$.

1.7. Tính căn bậc 4 của:

a) 1; b) -1;

c) $-7-24i$; d) $-7+4\sqrt{2}\,i$.

1.8. Giải các phương trình bậc 2:

a) $x^2+x+1-i=0$;

b) $x^2+(2+i)x+1+i=0$;

c) $x^2+2(3-2i)x+6(1-2i)=0$;

d) $x^2-(2-i)x-1-7i=0$;

e) $x^2-(3+i)x+8-i=0$;

f) $(1+i)x^2-(3+3i)x+4-2i=0$;

g) $x^2+2(2+i)x+3(1+i)=0$;

h) $(1-i)x^2+\sqrt{3}(1+i)x+(1+i)=0$.

1.9. Đưa về dạng lượng giác các số phức sau:

a) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $-\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$;

c) $-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

1.10. Đưa về dạng lượng giác các số phức sau:

a) $3i$, -2;

b) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$;

c) $1+i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$;

d) $2-\left(2\sqrt{3}\right)i$, $2\sqrt{3}+2i$;

e) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$;

f) $2+i\sqrt{3}$.

1.11. Biểu diễn qua luỹ thừa của cosx và sinx:

a) cos2x, sin2x;

b) cos3x, sin3x;

c) cos4x , sin4x .

1.12. Biểu diễn qua các hàm lượng giác các góc bội của x:

a) $\cos^4 x$; b) $\sin^5 x$.

1.13. Chứng minh công thức:

a) $(\cos x - i\sin x)^n = \cos nx - i\sin nx$;

b) $(\cos x + i\sin x)^{-n} = \cos nx - i\sin nx$.

1.14. Áp dụng dạng lượng giác để tính:

a) $(1-i)^{20}$; b) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^n$;

c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$; d) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{100}$;

e) $\left[1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]^{24}$; f) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{21}$.

1.15. Tính căn bậc n ($n \geq 2$) của các số phức sau:

a) -1 ; b) $2i$;

c) $1+i$; d) $1+i\sqrt{3}$.

1.16. Tính căn bậc 4 của các số phức sau:

a) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{i}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}$; d) $\dfrac{i}{1-i}$

1.17. Tính lần lượt căn bậc 2, 3, 4, 5, 6 của số phức 1, biểu diễn các giá trị căn đó trên đường tròn lượng giác .

1.18. Các giá trị căn bậc n ($n \geq 2$) của 1 là:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0,1,\ldots,n-1$$

a) Tính tổng $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}$;

b) Chứng minh rằng z_k và z_{n-k} $(k = 1,\ldots,n-1)$ là cặp các số phức liên hợp nhau và là nghịch đảo của nhau;

c) Tính $\dfrac{1}{z_k} + \dfrac{1}{z_{n-k}}$ $(k = 1,\ldots,n-1)$;

d) Tính $\dfrac{1}{1-z_k} + \dfrac{1}{1-z_{n-k}}$ $(k = 1,\ldots,n-1)$.

1.19. Xác định các điểm trên mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức α

a) $\|\alpha\| + \alpha = 2 + 3i$;

b) $\|\alpha\|.\alpha = \overline{\alpha}$;

c) $\|\alpha - (1+2i)\| \leq 1$;

d) $\|\alpha + 2i\| < 2$.

1.20. Tìm các số phức z sao cho:

a) $\dfrac{\overline{z}}{z} = bi \quad (b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$;

b) $\dfrac{\overline{z}}{z} = z$, $\dfrac{\overline{z}}{z} = z^2$, $\dfrac{\overline{z}}{z} = z^n \quad (n \geq 3)$.

1.21. Cho $\alpha = \cos x + i\sin x$, hãy tính:

a) $\alpha \pm \alpha^{-1}$, $\alpha^n \pm \alpha^{-n}$, $\alpha^{2n} \pm 1$;

b) $S = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$,

$T = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$.

1.22. Giả sử α là căn bậc n của 1. Ta nói α là căn nguyên thuỷ bậc n nếu α không là căn bậc k của 1 với mọi k bé hơn n.

a) Chứng minh rằng: α là căn nguyên thuỷ bậc n của 1 khi và chỉ khi $\{\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^n\}$ là tập hợp tất cả các giá trị căn bậc n của 1;

b) Tìm các giá trị căn nguyên thuỷ bậc 2, 3, 4, 5, 6 của 1.

1.23. a)Chứng minh rằng: số phức $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ với $1 \leq k < n$ là căn nguyên thuỷ bậc n của 1 khi và chỉ khi $(k,n) = 1$.

b) Tính lần lượt tổng các giá trị căn nguyên thuỷ bậc 10 và bậc 12 của 1.

1.2. Nhóm, vành, trường

Nhóm, vành, trường là những khái niệm trừu tượng, thường là khó đối với sinh viên năm thứ nhất, bạn đọc có thể bổ sung dần trong quá trình học tập. Cũng vì lý do đó, phần này được xếp xuống cuối chương. Đối với một số ngành kỹ thuật, bạn đọc chỉ cần quan tâm tới phần trường số.

Trước hết, ta đi từ các trường số, vì ít nhiều chúng đã được biết tới, chẳng hạn như trường **Q**, trường **R**. Mỗi tập hợp số K (hiểu là tập con của **C**) với phép cộng và nhân đã biết mà là một trường thì được gọi là trường số. Ta biết rằng, các tính chất kết hợp, giao hoán của phép cộng và nhân, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng luôn đúng trên các số. Vậy để kiểm tra một tập hợp số K là trường ta chỉ cần chứng tỏ rằng:

1) K chứa các số 0 và 1.

2) K đóng đối với phép cộng và nhân ($a, b \in K$ kéo theo $a + b \in K$ và $a.b \in K$).

3) K đóng đối với phép lấy phần tử đối và phép lấy phần tử nghịch đảo ($a \in K$ kéo theo $-a \in K$ và nếu $a \neq 0$ kéo theo $a^{-1} \in K$).

Nếu K, K' là các trường số và $K \subseteq K'$ thì ta nói K là trường con của K'. Chẳng hạn, ta đã có các trường lồng nhau $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.

Trong toán học, còn có những trường không phải là trường số. Trên mỗi trường ta luôn luôn thực hiện được các phép tính hữu tỷ: cộng, trừ, nhân, chia. Vì thế, trường thường được chọn làm miền cơ sở để trên đó, ta nghiên cứu đa thức, ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, không gian véctơ v.v... Trong giáo trình này ta chỉ xét các trường số, thường là các trường **Q**, **R**, **C**.

Nhóm và vành là những khái niệm mới, bạn đọc hãy công nhận các hệ tiên đề xác định chúng và minh hoạ bằng nhiều ví dụ. Trong giáo trình này ta mới chỉ sử dụng nhóm và vành để xem xét tính chất đại số của một số tập hợp các đối tượng, như vành các đa thức, vành các ma trận, nhóm các ma trận trực giao v.v...

1.24. a) Giả sử p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tập hợp $\left\{a+b\sqrt{p} \mid a,b \in \mathbf{Q}\right\}$ là một trường (được gọi là trường số sinh bởi $\sqrt{p}$ và được ký hiệu là $\mathbf{Q}\left(\sqrt{p}\right)$).

b) Giải phương trình $x^2-2=0$ trên $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

1.25. a) Chứng minh rằng tập hợp $\left\{a+bi \mid a,b \in \mathbf{Q}\right\}$ là một trường (được gọi là trường số sinh bởi i và ký hiệu là $\mathbf{Q}(i)$).

b) Giải phương trình $x^2+1=0$ trên $\mathbf{Q}(i)$.

1.26. a) Chứng minh rằng giao của hai trường số là một trường số.

b) Tìm $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbf{Q}(i)$.

c) Chứng minh rằng mọi trường số đều chứa trường $\mathbf{Q}$.

1.27. Cho các ánh xạ f, g từ trường $\mathbf{C}$ vào chính nó, $f(a+bi)=a-bi$, $g(a+bi) = b+ai$, $\forall a+bi \in \mathbf{C}$. Chứng minh rằng f là phép đẳng cấu còn g thì không.

1.28. a) Viết lại hệ tiên đề xác định nhóm lần lượt theo phép cộng và nhân.

b) Chứng minh rằng $\mathbf{Z}$ là nhóm đối với phép cộng còn $\mathbf{N}$ thì không.

c) Chứng minh rằng $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ là nhóm đối với phép nhân còn $\mathbf{Q}$ thì không.

1.29. Giả sử T là một trường (không nhất thiết là trường số) và n là một số tự nhiên, chứng minh rằng tập nghiệm của phương trình $x^n = 1$ là một nhóm đối với phép nhân. Tìm nhóm đó khi $T = \mathbf{C}$.

1.30. Cho phương trình $ax + by + cz = 0$ với $a,b,c \in \mathbf{R}$, nghiệm của phương trình được viết thành bộ các số (x, y, z). Chứng minh rằng, tập nghiệm N_0 của phương trình là một nhóm đối với phép cộng các nghiệm theo thành phần.

1.31. Chứng minh rằng tập các hàm số y = ax + b trên **R** là một nhóm Abel đối với phép cộng (trên các hàm số).

1.32. Chứng minh rằng các tập hợp số sau là các vành đối với phép cộng và nhân thông thường: O = {0}, **Z**, 2**Z** (tập các số chẵn), 5**Z** (tập các số bội của 5). Đối với mỗi vành trên chỉ ra nó là vành con của vành nào.

1.33. Chứng minh rằng:

a) Nếu K là vành số có đơn vị thì K chứa **Z** ;

b) Nếu K là vành số có đơn vị thì $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in K\right\}$ cũng là vành có đơn vị.

1.34. Trên tập $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ta định nghĩa phép cộng và nhân theo thành phần: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)(c,d)=(ac,bd)$. Chứng minh rằng $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ là vành giao hoán, có đơn vị .

1.35. Trên tập hợp $\mathbf{Z}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân:

$k\oplus h=r$, với $(k+h)\equiv r \pmod n$, $0\le r<n$.

$k\circ h=s$, với $(k\cdot h)\equiv s \pmod n$, $0\le s<n$.

Chứng minh rằng:

a) $\mathbf{Z}_n$ với phép $\oplus$ lập thành một nhóm Abel.

b) $\mathbf{Z}_n$ với phép $\oplus$ và phép $\circ$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị.

1.36. Chứng minh rằng:

a) $k\in\mathbf{Z}_n$ là phần tử khả nghịch khi và chỉ khi $(k,n)=1$.

b) $\mathbf{Z}_p$ là 1 trường khi và chỉ khi p là số nguyên tố.

1.37. Chứng minh rằng tập hợp các giá trị căn bậc n của 1 (trên trường **C**) lập thành 1 nhóm Abel đối với phép nhân và nhóm này đẳng cấu với nhóm $\mathbf{Z}_n$ (với phép $\oplus$).

1.38. Chứng minh rằng tập hợp các phần tử khả nghịch của một vành có đơn vị là một nhóm đối với phép nhân. Tìm nhóm các phần tử khả nghịch của $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_{12}$.

Đáp số và hướng dẫn

1.1. a) $-21 + 15i$, $15 + 5i$; b) $x = 1$, $y = -2$.

1.2. a) $11 - 2i$ và $29i$; b) 13^3 và -34^2 ;

c) $900\left(\sqrt{17} + i\sqrt{13}\right)$ (chẳng hạn,

tính $\left(\sqrt{17} + i\sqrt{13}\right)\left(-\sqrt{17} + i\sqrt{13}\right)$ trước);

d) 1 , i , -1, $-i$;

e) $41 - 38i$, $-117 + 44i$, $-7 - \left(4\sqrt{2}\right)i$;

f) $2^{12}(1 + i)$ (chẳng hạn, tính $(1+i)^2$) ,

$-2^9\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ (chẳng hạn, tính $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$) .

1.3. a) $\dfrac{7-19i}{41}$; b) $-i$; c) i ; d) $1 + i$.

1.4. a) $1 - 3i$; b) $\dfrac{-1-i}{2}$.

1.5. a) $x = \dfrac{2}{25} + \dfrac{14}{25}i$, $y = \dfrac{19-17i}{50}$;

b) $x = \dfrac{6}{11}$, $y = -\dfrac{1}{11}$.

1.6. a) $\pm(1+2i)$, $\pm(2-i)$;

b) $\pm(2+3i)$, $\pm(1+i)$;

c) $\pm(1-i\sqrt{2})$, $\pm(1+i\sqrt{2})$.

Hướng dẫn. a) Đặt $(x + yi)^2 = -3 + 4i$, qui về hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ xy = 2 \quad (x \neq 0, y \neq 0). \end{cases}$$

Để tính căn bậc 2 của $3 - 4i\ (= -(-3 + 4i))$, có thể lấy $\pm i(1 + 2i)$, tức là lấy các giá trị căn bậc 2 của -1 nhân với một trong các giá trị căn bậc 2 của $-3 + 4i$.

c) Chẳng hạn, $-1 - 2i\sqrt{2} = 1 - 2i\sqrt{2} - 2 = \left(1 - i\sqrt{2}\right)^2$ và chú ý rằng $-1 + 2i\sqrt{2}$ là số phức liên hợp của $-1 - 2i\sqrt{2}$.

1.7. a) ± 1 , $\pm i$;

b) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$;

c) $\pm(2 - i)$, $\pm(1 + 2i)$;

d) $\pm(\sqrt{2} + i)$, $\pm(1 - i\sqrt{2})$.

Hướng dẫn. Hạ bậc. Chẳng hạn, để tính căn bậc 4 của $-7 + (4\sqrt{2})i$, trước hết ta tính căn bậc 2 của nó được $\pm\left[1 + (2\sqrt{2})i\right]$, sau đó lại tính căn bậc 2 của các giá trị vừa tìm được.

1.8. a) *Hướng dẫn.* $\Delta = 1 - 4(1 - i) = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$, suy ra

$x_1 = \frac{-1 + 1 + 2i}{2} = i$, $x_2 = \frac{-1 - 1 - 2i}{2} = -1 - i$;

b) $x_1 = -1$, $x_2 = -1 - i$;

c) $x_1 = -3 + 3i$, $x_2 = -3 + i$;

d) $x_1 = 3 + i$, $x_2 = -1 - 2i$;

e) $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 1 - 2i$;

f) $x_1 = 3 + i$, $x_2 = -i$;

g) $x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)i$, $x_2 = -\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$;

h) *Hướng dẫn.* Quy về phương trình $x^2 + i\sqrt{3}x + i = 0$, tính được $\Delta = -3 - 4i = (1-2i)^2$ và $x_1 = \dfrac{1-(2+\sqrt{3})i}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+(2-\sqrt{3})i}{2}$

1.9. a) $3\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$;

b) $\cos\dfrac{3\pi}{5} + i\sin\dfrac{3\pi}{5}$;

c) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

1.10. a) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

b) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$,

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

c) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$;

d) $4\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

e) $\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$;

f) $\sqrt{7}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1.11. *Hướng dẫn.* Áp dụng công thức Moivre và tam giác Pascal cho $(\cos x + i\sin x)^n$.

1.12. *Hướng dẫn.* Đặt $z = \cos x + i\sin x$, ta có $z^{-1} = \cos x - i\sin x$ và do đó :

$$\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

a) $$\cos^4 x = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}\left[(z^4 + z^{-4}) + 4(z^2 + z^{-2}) + 6\right]$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$$

b) $$\sin^5 x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^5$$
$$= \frac{1}{32i}\left[(z^5 - z^{-5}) + 5(-z^3 + z^{-3}) + 10(z - z^{-1})\right]$$
$$= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x).$$

1.13. *Hướng dẫn.* Sử dụng

$$(\cos x - i\sin x)^n = \frac{1}{(\cos x + i\sin x)^n}$$

$$(\cos x + i\sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + i\sin x)^n}$$ và công thức Moivre.

1.14. a) -2^{10}; b) $2^n\left(\cos\frac{5n\pi}{3} + i\sin\frac{5n\pi}{3}\right)$;

c) $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$; d) $2^{99}(1 + i\sqrt{3})$;

e) $-2^{24}\cos^{24}\frac{\pi}{8}$; f) $-i$.

Hướng dẫn. c) Chẳng hạn, tính được

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

1.15. a) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k=0,\ldots,n-1$;

b) $2^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$, $k=0,\ldots,n-1$;

c) $2^{\frac{1}{2n}}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+i\sin\frac{(8k+1)\pi}{4n}\right]$, $k=0,\ldots,n-1$;

d) $2^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{(6k+1)\pi}{3n}+i\sin\frac{(6k+1)\pi}{3n}\right]$, $k=0,\ldots,n-1$.

1.16. a) $\left[\cos\frac{(24k+1)\pi}{48}+i\sin\frac{(24k+1)\pi}{48}\right]$, $k=0,\ldots,3$;

b) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(12k+11)\pi}{24}+i\sin\frac{(12k+11)\pi}{24}\right]$, $k=0,\ldots,3$;

c) $2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{(3k+2)\pi}{6}+i\sin\frac{(3k+2)\pi}{6}\right]$, $k=0,\ldots,3$;

d) $2^{-\frac{1}{8}}\left[\cos\frac{(8k+3)\pi}{16}+i\sin\frac{(8k+3)\pi}{16}\right]$, $k=0,\ldots,3$.

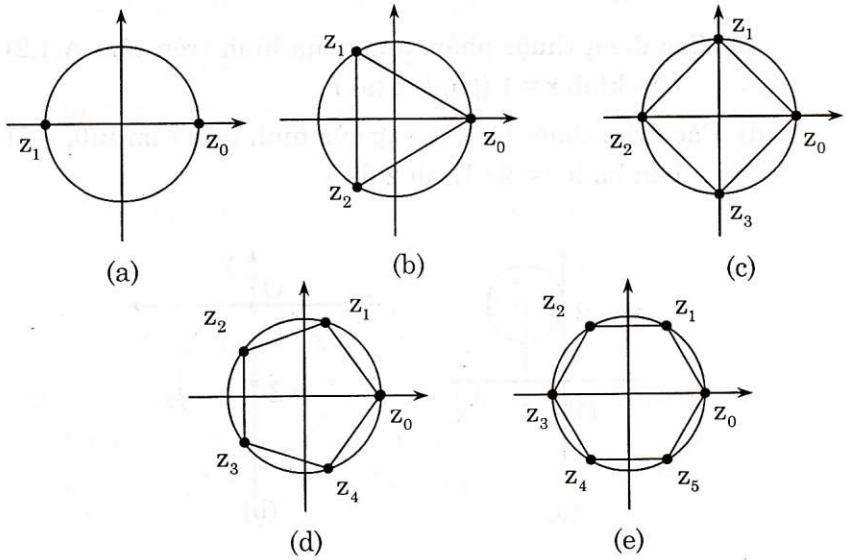
1.17. a) $z_0=1$, $z_1=-1$ (Hình 1 (a)) ;

b) $z_0=1$, $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (Hình 1 (b));

c) $z_0=1$, $z_1=i$, $z_2=-1$, $z_3=-i$ (Hình 1 (c)) ;

d) $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ với $k=0,\ldots,4$ (Hình 1 (d));

e) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}$ với k = 0,..., 5 (Hình 1 (e)) .



Hình 1

1.18. a) $z_0 + ... + z_{n-1} = 0$.

Hướng dẫn. $z_0,...,z_{n-1}$ lập thành cấp số nhân với công bội bằng z_1 .

b) *Hướng dẫn.* $z_k.\overline{z}_k = 1 = z_k.z_{n-k}$ $(k = 1,...,n-1)$.

c) $2\cos\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1,...,n-1)$. *Hướng dẫn.* Quy đồng mẫu số và áp dụng câu b) .

d) 1 .

1.19. a) Điểm $\left(-\frac{5}{4}, 3\right)$.

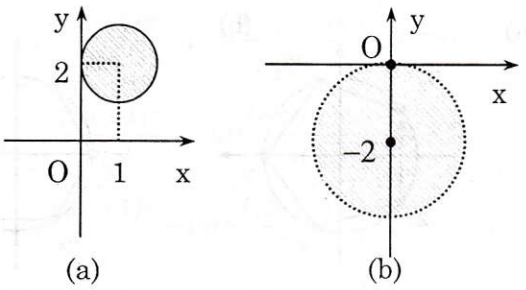
Hướng dẫn. Đặt $\alpha = x + yi$ và sử dụng $\|\alpha\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Các điểm (0,0), (1,0), (– 1,0).

Hướng dẫn. Suy ra $\|\alpha\|.\alpha^2 = \overline{\alpha}.\alpha = \|\alpha\|^2$ hay $\alpha^2 = \|\alpha\|$, đặt $\alpha = x + yi$.

c) Các điểm thuộc phần trong của hình tròn tâm A(1,2), bán kính r = 1 (Hình 2 (a)).

d) Các điểm thuộc phần trong của hình tròn tâm B(0, – 2), bán kính r = 2 (Hình 2 (b)).



Hình 2

1.20. a) *Hướng dẫn.* Đặt $z = x + yi$ $(x^2 + y^2 > 0)$, suy ra:

1) $b \neq 1$ hoặc $b \neq -1$: không tồn tại z ;

2) $b = 1 : z = k(1 - i)$ $k \neq 0$;

3) $b = -1 : z = k(1 + i)$, $k \neq 0$;

b) *Hướng dẫn.* Xét cho trường hợp $\frac{\overline{z}}{z} = z^n$, chứng minh rằng $\|z\| = 1$ và $z^{n+2} = 1$, suy ra z là các giá trị căn bậc n + 2 của 1 .

1.21. a) $\alpha + \alpha^{-1} = 2\cos x, \alpha - \alpha^{-1} = 2i\sin x$,

$\alpha^n + \alpha^{-n} = 2\cos nx, \alpha^n - \alpha^{-n} = 2i\sin nx$,

$$\alpha^{2n}+1=2\cos nx(\cos nx+i\sin nx),$$
$$\alpha^{2n}-1=2i\sin nx(\cos nx+i\sin nx).$$

Hướng dẫn. Đặt $\alpha^{2n}\pm 1=\alpha^n\left(\alpha^n\pm\alpha^{-n}\right)$.

b) $S=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}.\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$, $\quad T=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}.\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

Hướng dẫn. Đặt $\alpha=\cos x+i\sin x$, xét tổng

$$S+iT=\alpha+\alpha^2+...+\alpha^n=\alpha.\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}.$$

Áp dụng a) để tính α^n-1 và $\alpha-1$.

1.22. *Hướng dẫn.* a) Điều kiện cần: Chỉ cần chứng tỏ $\alpha,\alpha^2,...,\alpha^n$ khác nhau từng đôi một. Giả sử $\alpha^k=\alpha^h$ với $1\le k<h\le n$, suy ra $\alpha^{h-k}=1$, tức α là căn bậc $h-k<n$, điều này trái với giả thiết.

Điều kiện đủ: Với $1\le k<n$, ta có $\alpha^k\ne\alpha^n=1$, điều phải chứng minh.

b) Các giá trị căn nguyên thuỷ lần lượt là:

$n=2:\ z_1=-1$;

$n=3:\ z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

$n=4: z_1=i$ và $z_3=-i$;

$n=5:\ z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$, $k=1,...,4$;

$n=6:\ z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.23. *Hướng dẫn.* a) Điều kiện cần: Giả sử z_k là căn nguyên thuỷ bậc n của 1. Bằng phản chứng, giả sử $(k,n)=d\ne 1$. Khi đó k = ud, n = vd với 1< v < n. Suy ra

$z_k^v = z_1^{kv} = z_1^{uvd} = (z_1^{dv})^u = 1$. Điều này mâu thuẫn với $z_k^v \neq 1$.

Điều kiện đủ: Giả sử (k, n) = 1, cần chỉ ra $z_k^h \neq 1$ với mọi $1 \leq h < n$. Thật vậy, nếu $z_k^h = 1$ suy ra $z_1^{kh} = 1$ tức kh chia hết cho n, đó là điều không xảy ra.

b) Ta đặt tổng các giá trị căn nguyên thuỷ bậc 10 là A, tổng các giá trị căn còn lại là $B + z_5$, trong đó :

$$z_5 = -1,$$
$$B = 1 + z_2 + z_4 + z_6 + z_8.$$

Chú ý: cách xác định căn không nguyên thuỷ dựa vào phần a) và ta nhận thấy $z_5^2 = 1$ nên $z_5 = -1$.

Ta có: $B = 1 + z_1^2 + z_1^4 + z_1^6 + z_1^8$ (cấp số nhân với công bội bằng z_1^2), suy ra B = 0. Theo bài 1.18, ta có A + B + z_5 = 0, vậy A = 1.

Một cách tương tự, tổng các giá trị căn nguyên thuỷ bậc 12 là A, tổng các giá trị còn lại là B + C với :

$$B = 1 + z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10},$$
$$C = z_3 + z_9.$$

Tính được B = C = 0 và do đó A = 0.

1.24. a) *Hướng dẫn.* Kiểm chứng các tiên đề xác định trường hoặc chứng minh rằng $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ là trường con của trường **R** bằng các điều kiện sau:

1) $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ chứa 0, 1

2) $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ đóng đối với phép cộng và nhân .

3) $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ đóng đối với phép lấy phần tử đối và phần tử nghịch đảo (của các phần tử khác 0).

b) $x = \pm\sqrt{2}$.

1.25. Xem hướng dẫn của Bài 1.24.

1.26. *Hướng dẫn.* a) Kiểm tra đó là trường con của $\mathbf{C}$;

b) $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbf{Q}(i) \Leftrightarrow \alpha = a + b\sqrt{2}$ và $\alpha = c + di$,

với $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, suy ra $b = d = 0$;

c) Giả sử T là trường số. Từ $1 \in T$ suy ra $-1 \in T$, do đó $\mathbf{Z} \subseteq T$ và cuối cùng $\mathbf{Q} \subseteq T$.

1.27. *Hướng dẫn.* Áp dụng tính chất của số phức liên hợp, chứng minh được f bảo toàn phép cộng, phép nhân và hơn nữa f là song ánh. Đối với g, chẳng hạn xét $g(1) = i$ và $g(1) = g(1.1) = g(1).g(1) = i.i = -1$, mâu thuẫn .

1.29. *Hướng dẫn.* Ta ký hiệu tập nghiệm của phương trình đã cho là A. Giả sử $a, b \in A$ bất kỳ, ta có $(a.b)^n = a^n.b^n = 1.1 = 1$, suy ra $a.b \in A$. Vậy "." là phép toán trên A. Bây giờ ta kiểm chứng các tiên đề xác định nhóm:

(1) $\forall a, b, c \in A : (a.b).c = a.(b.c)$, vì a, b, c cũng thuộc T;

(2) $1 \in A$ vì $1^n = 1$ và hơn nữa $a.1 = 1.a = a$, vì a cũng thuộc T;

(3) $\forall a \in A$: vì $a \neq 0$ nên $\exists a^{-1} \in T$ và vì $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1$ nên suy ra $a^{-1} \in A$, hơn nữa $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ (trong T).

(*Chú ý:* có thể chứng minh A là nhóm con của nhóm T^*).

Xét trường $\mathbf{C}$. Nếu $n = 0$, $A = \mathbf{C}^*$; nếu $n = 1$, $A = \{1\}$ (nhóm đơn vị); nếu $n \geq 2$, A là nhóm các giá trị căn bậc n của 1.

1.30. *Hướng dẫn.* Với mọi $\alpha = (x_1, y_1, z_1)$, $\beta = (x_2, y_2, z_2)$ thuộc N_0, ta có $\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in N_0$ (thoả mãn phương

trình đã cho). Kiểm tra tính chất kết hợp, giao hoán của phép "+" trước, sau đó xét $\theta = (0,0,0) \in N_0, -\alpha = (-x_1, -y_1, -z_1) \in N_0$ và chứng tỏ rằng $\alpha + \theta = \alpha$, $\alpha + (-\alpha) = \theta$ (không cần xét $\theta + \alpha$ và $(-\alpha) + \alpha$).

1.32. *Hướng dẫn.* Chẳng hạn ta chứng tỏ các tập số đã cho lập thành vành con của vành **R**.

1.33. *Hướng dẫn.* a) Từ $1 \in K$ suy ra $N \subseteq K$ và do đó $\mathbf{Z} \subseteq K$;

b) Kiểm tra tập đã cho là vành con của vành **C**.

1.34. *Hướng dẫn.* Các bước chứng minh được thực hiện trên các thành phần của các phần tử trong $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, phần tử không là $\theta = (0,0)$, phần tử đơn vị là $e = (1,1)$.

1.35. *Hướng dẫn.* Sử dụng định lý: "Nếu $m, n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$ thì tồn tại duy nhất các số $q, r \in \mathbf{Z}$ sao cho $m = nq + r$, trong đó $0 \le r < n$", và chú ý rằng: $k, h \in \mathbf{Z}_n$ thì

$$k \oplus h = r, \text{ với } k + h = nq + r \quad , \quad (0 \le r < n);$$

$$k_0 h = s, \text{ với } k + h = np + s \quad , \quad (0 \le s < n).$$

Chẳng hạn, để chứng minh $(k \oplus h) \oplus l = k \oplus (h \oplus l)$ với $k, h, l \in \mathbf{Z}_n$ ta chứng tỏ vế phải, vế trái đều bằng r (duy nhất) với $k + h + l = nq + r$ $(0 \le r < n)$. Hơn nữa, nếu $k \in \mathbf{Z}_n$ thì $k \oplus (n-k) = (n-k) \oplus k = 0$, suy ra $n - k$ $(\in \mathbf{Z}_n)$ đóng vai trò phần tử đối của k (cần phân biệt $-k$ chỉ là ký hiệu của phần tử $n - k$).

1.36. *Hướng dẫn.* Sử dụng định lý: "$m,n \in \mathbf{Z}, m \neq 0, n \neq 0$ thì $(m,n) = 1 \Leftrightarrow \exists u,v \in \mathbf{Z}$, $mu + nv = 1$".

1.37. *Hướng dẫn.* Xét tập $A = \{z_0,\ldots,z_{n-1}\}$ với

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \ k = 0,\ldots,n-1.$$

Kiểm tra trực tiếp A là nhóm nhân hoặc áp dụng Bài 1.29. Đặt ánh xạ $f : \mathbf{Z}_n \to A$, $f(k) = z_k$, $k = 0, \ldots, n - 1$, chứng minh f là phép đẳng cấu.

1.38. Nhóm các phần tử khả nghịch của $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_{12}$ lần lượt là $\mathbf{Q}^*$, $\{1,-1\}$, $\{1,5,7,11\}$.

Chương 2
Đa thức

Ở phổ thông, chúng ta đã làm quen với hai kiểu phương trình đại số, đó là phương trình đa thức và phương trình tuyến tính. Giáo trình Đại số cao cấp tiếp tục phát triển hai hướng đó. Tuy nhiên, chương trình hiện nay của môn học này chỉ nhằm giới thiệu về đa thức một ẩn trên trường số trong đó nhấn mạnh hai ý chính: đại số đa thức và vấn đề tồn tại nghiệm của đa thức.

Bạn đọc cần chú ý tới thuật chia Euclid tìm ước chung lớn nhất (UCLN) của các đa thức (chưa gặp ở phổ thông) và sự phân tích thành tích các đa thức bất khả quy của các đa thức thực và phức (để áp dụng sau này). Khi không nói gì thêm, các đa thức đã cho được xét trên trường số K mà chúng thoả mãn.

2.1. Các phép tính trên đa thức, thuật chia tìm ước chung lớn nhất

2.1. Kiểm tra xem các tập đa thức sau có là một vành đối với phép cộng và nhân đa thức, nêu các tính chất của các vành đó:

$\mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{Q}[x]$, $\mathbf{R}[x]$, $\mathbf{C}[x]$.

2.2. Xét xem $A = \{a_0 + a_1x^2 + \cdots a_kx^{2k} \mid a_i \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}\}$ có là vành con của vành $\mathbf{R}[x]$ không ?

2.3. Chứng minh rằng :

a) Nếu K' là vành con của K thì $K'[x]$ là vành con của $K[x]$.

b) $K_n[x] = \{a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_0, \cdots, a_{n-1} \in K\}$ ($n \geq 1$ cho trước) là một nhóm Abel đối với phép cộng .

2.4. Tìm nhóm các phần tử khả nghịch của vành $\mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{R}[x]$.

2.5. Hãy tính :

a) $(x^2 - ix + 1)(2ix - i) + (x^2 + ix + 1)(-2ix + i)$;

b) $(x^2 + ix + 1 + 2i)(2ix + i) - (2ix^3 + ix^2 - 5x - 3 + i)$.

2.6. Tìm a, b, c, d, e :

a) $(x^3 - x^2 + 2)(ax + b) + (x^2 + 2)(cx^2 + dx + e) = 10x^2 - 2x$;

b) $(x^3 - x + 2)a + (x^2 + 2)(bx + c) = 10x^2 - 2x$;

c) $(x^3 + 1)(ax + b) + (x^2 + x + 1)(cx^2 + dx + e) = 3x - 1$.

2.7. Chia đa thức :

a) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 11x + 15 \quad : \quad x - 4$;

b) $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \quad : \quad x - 2$;

c) $3x^5 - x^4 - 5x^3 - x \quad : \quad x + 1$;

d) $-5x^5 + 2x^3 - 8x^2 + x - 86 \quad : \quad x + 3$.

2.8. Chia đa thức :

a) $x^4 + (1 - 2i)x^3 + (1 - 3i)x^2 - 9ix + 7 \quad : x - (1 + 2i)$;

b) $x^5 + (1 + 2i)x^4 + 2x^3 + (1 + 3i)x^2 + (1 - 2i)x + 5 : x - i$;

c) $x^5 - (1 - i)x^4 + (1 + i)x^2 - (2 - 3i)x - 3(1 + i) \quad : [x - (1 - i)]^2$.

2.9. Tìm a, b để $9x^4 - 18x^3 + 2x^2 - 4ax + b$ chia hết cho $(x - 2)(x - 3)$.

Tìm ước chung lớn nhất d(x) của f(x), g(x); tìm các đa thức u(x), v(x) sao cho $f(x).u(x) + g(x).v(x) = d(x)$ (Các Bài 2.10, 2.11, 2.12) :

2.10.

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2 - x + 1$;

c) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x + 1$, $g(x) = x^2 + x - 1$.

2.11.

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 5$, $g(x) = x^3 + x - 3$;

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$;

c) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 + x + 2$;

d) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$, $g(x) = x^3 - x - 1$.

2.12.

a) $f(x) = x^5 - 2$, $g(x) = x^2 + x - 1$;

b) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 3$, $g(x) = x^3 + x^2 + 1$;

c) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 4$, $g(x) = x^2 + x + 2$;

d) $f(x) = x^3 + x + 8$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

2.13. Tìm UCLN của f(x), g(x) :

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$;

b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$;

c) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 1$, $g(x) = x^3 - 1$;

d) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 2$;

e) $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 2$.

2.14. Tìm UCLN của f(x), g(x), h(x) :

a) $\begin{cases} f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1 , \\ g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 , \\ h(x) = x^4 + 2x^3 + 1 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = 3x^7 + 4x^5 + 2x^4 + 3x^2 + x + 3 , \\ g(x) = x^3 - 6x^2 - 5x + 2 , \\ h(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2 . \end{cases}$

2.15. Chứng minh rằng :

a) Trong biểu diễn $f(x).u(x) + g(x).v(x) = d(x)$ với $d(x) = (f(x), g(x))$ thì có thể chọn $u(x)$, $v(x)$ sao cho $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$;

b) Nếu $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ và có biểu diễn $f(x) . u(x) + g(x) . v(x) = 1$ thì $(f(x), g(x)) = 1$.

2.16. Áp dụng Bài 2.15 để tìm $u(x)$, $v(x)$ và $d(x)$:

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 1$;

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;

c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x$, $g(x) = x^2 - x - 1$.

2.2. Nghiệm đa thức, đa thức bất khả qui

2.17. Tìm UCLN bằng cách tính nghiệm :

a) $\begin{cases} f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 \\ g(x) = x^2 - 7x + 6 \\ h(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + x + 2 \\ g(x) = x^2 + x - 1 \\ h(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = x^4 + (1+i)x^3 + x^2 + (1+i)x + 1 , \\ g(x) = x^3 - ix^2 + x - i , \\ h(x) = x^2 + 1 ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2, \\ g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5; \end{cases}$

e) $\begin{cases} f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2, \\ g(x) = x^3 - x^2 - x - 2. \end{cases}$

2.18. Chứng minh rằng $x^n - 1$ và $x^m - 1$ $(n, m \geq 1)$ có UCLN là $x^k - 1$ với $k = (n, m)$.

2.19. Xét xem các đa thức sau đây có chia hết cho $f(x) = x^2 - x + 1$:

a) $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

b) $h(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.20. Điều kiện để đa thức $g(x) = 3x^5 + 3x^4 + ax^3 - 4x^2 - 4x + b$ chia hết cho đa thức $f(x) = x^2 + x + 1$.

2.21. Viết đa thức f(x) bậc n thành đa thức biến $x - x_0$, tính $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$;

c) $f(x) = x^5 + 3$, $x_0 = -1$.

2.22. Ta nói f(x) có x_0 là nghiệm bội $k \geq 1$ nếu $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ sao cho $g(x_0) \neq 0$. Chứng minh rằng f(x) có x_0 là nghiệm bội k khi và chỉ khi $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

2.23. Giả sử x_0 là một nghiệm của đa thức f(x). Chứng minh rằng: x_0 là nghiệm bội $k > 1$ của f(x) khi và chỉ khi x_0 là nghiệm bội $k - 1$ của $f'(x)$.

2.24. Cho đa thức f(x) bậc $n \geq 1$. Chứng minh rằng: $f(x) \vdots f'(x) \Leftrightarrow f(x) = a(x + x_0)^n$.

2.25. Tìm nghiệm của f(x) và số bội của nó:

a) $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6$;

b) $x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$;

c) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$.

2.26. Phân tích thành tích các đa thức bất khả quy trên **R** và **C**:

$x^2 - 1$, $x^3 - 1$, $x^4 - 1$, $x^5 - 1$, $x^6 - 1$.

2.27. Phân tích thành tích các đa thức bất khả quy trên **R**:

a) $x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2$;

b) $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 12x + 24$;

c) $x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 15x + 5$.

2.28. Phân tích thành tích các đa thức bất khả quy trên **C**:

a) $ix^2 - 2(2+i)x + 4 - 3i$;

b) $x^2 + 2(2+3i)x + 3(1+2i)$;

c) $(3+i)x^2 + 4(-2+i)x + 5 - 5i$;

d) $x^3 + (1+i)x^2 + x + 1 + i$;

e) $x^3 + x^2 + (1+i)x + 1 + i$.

2.29. Phân tích thành tích các đa thức bất khả quy trên **C**:

a) $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$;

b) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5$;

c) $x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 12x^2 + 16$.

2.30. Phân tích thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbf{Z}_5$ (ở đây các dấu "$\oplus$", "0" được thay bằng các dấu "+", "." thông thường):

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$;

b) $f(x) = x^3 + 1$;

c) $f(x) = x^4 + 2x + 1$.

2.31. Tìm UCLN của f(x), g(x) trên $\mathbf{Z}_3$:

a) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + 1$;

b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x^3 + 1$.

2.32. Phân tích thành tổng các phân thức đơn giản :

a) $\dfrac{x}{(x-1)^5}$; b) $\dfrac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)^5}$;

c) $\dfrac{x-1}{x^4 + 3x^2 + 2}$; d) $\dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$;

e) $\dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$; f) $\dfrac{1}{x^6 - 1}$.

Đáp số và hướng dẫn

2.1. Đều là các vành giao hoán, có đơn vị, không có ước của 0 .

2.2. Có .

2.4. $\{-1,1\}$ và $\mathbf{R}^*$.

2.5. a) $4x^2 - 2x$;

b) $-2x^2 + 2ix + 1$.

2.6. a) $a = -2$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 3$;

b)Không tồn tại ;

c) $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{3}{2}$, $d = 2$, $e = -\dfrac{1}{2}$.

2.7. a) $q(x) = x^3 + x^2 + 10x + 29$, $r(x) = 131$;

b) $q(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$, $r(x) = 5$;

c) $q(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 + x - 2$, $r(x) = 2$;

d) $q(x) = -5x^4 + 15x^3 - 43x^2 + 121x - 362$, $r(x) = 1000$.

2.8. a) $q(x) = x^3 + 2x^2 + (3+i)x + 1 - 2i$, $r(x) = 12$;

b) $q(x) = x^4 + (1+3i)x^3 - (1-i)x^2 + 2ix - (1+2i)$, $r(x) = 7 - i$;

c) $q(x) = x^3 + (1-i)x^2 - 2ix - (1+i)$, $r(x) = (-2+3i).(x-1+i)$

Hướng dẫn. Có thể sử dụng sơ đồ Horne, phần c) chia liên tiếp 2 lần.

2.9. $a = 63,25$, $b = 498$ (có thể sử dụng sơ đồ Horne) .

2.10. a) *Hướng dẫn.* Bằng thuật chia Euclid, ta có (ở đây, để ngắn gọn, tạm thời không viết biến x của các đa thức) :

(1) $f = gq_1 + r_1$,

(2) $g = r_1q_2 + r_2$,

(3) $r_1 = r_2q_3$.

Trong đó $q_1 = x + 2$, $q_2 = x - 1$, $r_2 = 1$.

Từ (3) ta thấy r_1 chia hết cho r_2 tức r_2 là đa thức dư cuối cùng, vậy ước chung lớn nhất là $d = r_2 = 1$. Từ (2) suy ra $d = g - r_1q_2$, thay $r_1 = f - gq_1$ từ (1) ta có :

$$d = f.(-q_2) + g(1 + q_1q_2)$$

Vậy $d(x) = 1$,

$u(x) = -x + 1$,

$v(x) = x^2 + x - 1$.

b) $d(x) = 1$, $u(x) = x - 1$, $v(x) = -x^3 + x + 1$;

c) $d(x) = 1$, $u(x) = -x + 1$, $v(x) = 2x^3 - x^2$.

2.11. a) *Hướng dẫn.* Bằng thuật chia Euclid, ta có bảng chia:

(1) $f = gq_1 + r_1$,

(2) $g = r_1q_2 + r_2$,

(3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$,

(4) $r_2 = r_3q_4$,

Trong đó $q_1 = 2$, $q_2 = x - 1$, $q_3 = x + 3$, $r_3 = 7$.

Từ (3), (2), (1) (lần lượt) ta có

$$r_3 = f.(1 + q_2q_3) + g.(-q_1 - q_3 - q_1q_2q_3)$$

$$7 = f(x).(x^2 + 2x - 2) + g(x).(-2x^2 - 5x + 1)$$

$$1 = f(x).\frac{1}{7}(x^2 + 2x - 2) + g(x).\frac{1}{7}(-2x^2 - 5x + 1)$$

Vậy:

a) $d(x) = 1, u(x) = \frac{1}{7}(x^2 + 2x - 2), v(x) = -\frac{1}{7}(2x^2 + 5x - 1)$;

b) $d(x) = 1,\ u(x) = -\frac{1}{3}(x + 2),\ v(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1)$;

c) $d(x) = 1,\ u(x) = -\frac{1}{11}(2x + 3),\ v(x) = \frac{1}{11}(4x^2 + 4x + 1)$;

d) $d(x) = 1, u(x) = -\frac{1}{5}(x^2 + 2x - 2), v(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - x - 5)$.

2.12. a) *Hướng dẫn*. Chia f(x) cho g(x) được $q_1 = x^3 - x^2 + 2x - 3$, $r_1(x) = 5x - 5$. Chia g(x) cho $\frac{1}{5}r_1(x) = x - 1$ được $q_2(x) = x + 2, r_2(x) = 1$. Vậy ta có:

$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$,

$g(x) = \frac{1}{5}r_1(x)q_2(x) + 1$.

Kết quả là

$$d(x) = 1,$$

$$u(x) = -\frac{1}{5}q_2(x) = -\frac{1}{5}(x + 2),$$

$$v(x) = 1 + \frac{1}{5}q_1(x).q_2(x) = \frac{1}{5}(x^4 + x^3 + x - 1).$$

b) $d(x) = 1$, $u(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$, $v(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)$;

c) $d(x) = 1$, $u(x) = -\frac{1}{8}(x+2)$, $v(x) = \frac{1}{8}(2x^2 + 3x)$;

d) $d(x) = 1$, $u(x) = \frac{1}{12}(x+1)$, $v(x) = -\frac{1}{12}(x^2 - x + 4)$.

2.13. a) $d(x) = x + 1$; b) $d(x) = x + \frac{1}{2}$;

c) $d(x) = x - 1$; d) $d(x) = x + 1$;

e) $d(x) = x - \frac{1}{2}$.

2.14. a) $d(x) = x + 1$; b) $d(x) = x + 1$;

Hướng dẫn. Chẳng hạn, tìm được UCLN của 2 đa thức cuối là x + 1, và chỉ ra x + 1 cũng là ước của đa thức thứ nhất.

2.15. *Hướng dẫn.* a) Giả sử $f(x).u(x) + g(x).v(x) = d(x)$. Nếu $deg\, u(x) < deg\, g(x)$ thì không phải nói gì thêm, còn nếu không như thế, bằng phép chia có dư, ta có $u(x) = g(x).q(x) + r(x)$ với $deg\, r(x) < deg\, g(x)$. Suy ra $f(x).r(x) + g(x).[f(x).q(x) + v(x)] = d(x)$. Bằng cách xét bậc của 2 vế và để ý rằng $deg\, r(x) < deg\, g(x)$ suy ra $deg\,(f(x).q(x) + v(x)) < deg f(x)$. Đặt $u_1(x) = r(x)$, $v_1(x) = f(x).q(x) + v(x)$ ta có điều phải chứng minh.

b) Trước hết, 1 luôn là ước chung của f(x), g(x). Giả sử d(x) cũng là ước chung của f(x), g(x) tức $f(x) = d(x)f_1(x)$, $g(x) = d(x)g_1(x)$, suy ra $d(x)[f_1(x)u(x) + g_1(x)v(x)] = 1$ hay d(x) là ước của 1. Vậy 1 là UCLN của f(x), g(x).

2.16. a) $d(x) = 1$, $u(x) = x$, $v(x) = -x^2 - 1$;

b) $d(x) = 1$, $u(x) = -x + 1$, $v(x) = x^2 + x - 1$;

c) $d(x) = 1$, $u(x) = -x + 2$, $v(x) = 3x^2 - 5x - 1$.

Hướng dẫn. c) Đặt $u(x) = ax + b$ (bậc nhỏ hơn bậc của g(x)) và $v(x) = cx^2 + dx + k$ (bậc nhỏ hơn bậc của f(x)). Đặt $(3x^3 - 2x^2 - 3x)(ax + b) + (x^2 - x - 1)(cx^2 + dx + k) = 1$, khai triển và đồng nhất hệ số ở 2 vế, ta có :

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ -2a + 3b + d - c = 0 \\ -3a - 2b + k - d - c = 0 \\ -3b - k - d = 0 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ c = -3a \\ 3b + d = 1 \\ -2a - c + 1 = 0 \\ -3a - 2b + k - d - c = 0. \end{cases}$$

Suy ra $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = -5$, $k = -1$.

2.17. a) $d(x) = 1$: b) $d(x) = 1$; c) $d(x) = 1$;

d) $d(x) = x + 1$; e) $d(x) = x - 2$.

Hướng dẫn. a) $h(x) = (x - 1)(x + 1)$, nhưng $f(1) \neq 0$, $g(-1) \neq 0$, suy ra $x - 1$ không là ước của f(x) và x + 1 không là ước của g(x) .

2.18. *Hướng dẫn.* Mỗi x_0 là nghiệm của $x^k - 1$ thì cũng là nghiệm chung của $x^n - 1$ và $x^m - 1$. Ngược lại, vì $k = nu + mv$, với $u, v \in \mathbf{Z}$, ta suy ra mỗi nghiệm chung x_0 của $x^n - 1$, $x^m - 1$ cũng là nghiệm của $x^k - 1$. Thật vậy, $x_0^k = x_0^{nu+mv} = x_0^{nu}.x_0^{mv} = 1$.

2.19. *Hướng dẫn.* Giả sử x_0 là nghiệm của f(x), ta có $x_0^2 - x_0 = -1$ và $x_0^2 = x_0 - 1$, do đó $x_0^3 = x_0^2 - x_0 = -1$. Suy ra :

a) $g(x_0) = 1 \neq 0$ tức f(x) không chia hết g(x) ;

b) $h(x_0) = 0$ tức f(x) chia hết h(x).

2.20. *Hướng dẫn.* Nếu x_0 là nghiệm của f(x) thì $x_0^3 = 1$, suy ra điều kiện là $a + b + 1 = 0$.

2.21. a) *Hướng dẫn.* Bằng sơ đồ Horne, chia f(x) cho x − 1 được $q(x) = 3x^2 + x + 5$ dư 4, lại tiếp tục chia q(x) cho x − 1 được 3x + 4 dư 9, v.v... Cuối cùng, ta được bảng chia:

3	-	4	-
↓	3	1	5
3	1	5	4
↓	3	4	
3	4	9	
↓	3		
3	7		
↓			
3			

Suy ra $f(x) = 3(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 9(x-1) + 4$ với các hệ số 3, 7, 9, 4 lấy trên cạnh huyền của "tam giác".

Mặt khác

$f(x) = \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f'(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + f(1)$, do đó :

$f(1) = 4$, $f'(1) = 9$, $f''(1) = 7.2! = 14$, $f'''(1) = 3.3! = 18$.

Chú ý: Có thể tính $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$ trước rồi viết khai triển Taylor của f(x).

b) $f(x) = (x-2)^4 + 7(x-2)^3 + 19(x-2)^2 + 25(x-2) + 15$,

$f(2) = 15$, $f'(2) = 25$, $f''(2) = 38$, $f'''(2) = 42$, $f^{(4)}(2) = 24$.

c) $f(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 10(x+1)^3 - 10(x+1)^2 + 5(x+1) + 2$,

Các giá trị cần tìm lần lượt là:

2, 5, -20, 60, -120, 120.

2.22. *Hướng dẫn.* a) Điều kiện cần: Chứng minh bằng quy nạp theo k.

Với k = 1, dễ dàng kiểm tra được điều phải chứng minh . Giả sử k > 1 và $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$ với $g(x_0) \neq 0$. Đạo hàm 2 vế ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x - x_0)^{k-1} g(x) + (x - x_0)^k g'(x) \\ &= (x - x_0)^{k-1}\left[kg(x) + (x - x_0)g'(x)\right] . \end{aligned}$$

Đặt $h(x) = kg(x) + (x - x_0)g'(x)$, ta có $h(x_0) = kg(x_0) \neq 0$. Vậy x_0 là nghiệm bội $k - 1$ của $f'(x)$. Bằng giả thiết quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

b) Điều kiện đủ: Vì $f(x_0) = 0$, suy ra x_0 là nghiệm, số bội của x_0 là $h \geq 1$. Theo chứng minh ở phần a) và theo giả thiết, ta có h = k .

2.23. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 2.22.

2.24. *Hướng dẫn.* Chỉ cần xét điều kiện cần. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Với n = 1, dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh. Giả sử n > 1 và f(x) chia hết cho $f'(x)$, ta có $f(x) = f'(x).\frac{1}{n}(x + c)$. Đạo hàm 2 vế, ta được $f'(x) = f''(x).\frac{1}{n}(x + c) + \frac{1}{n}f'(x)$, suy ra $f'(x)$ chia hết cho $f''(x)$. Theo giả thiết quy nạp ta có $f'(x) = b(x + x_0)^{n-1}$. Vậy:

$$f(x) = \frac{b}{n}(x + x_0)^{n-1}(x + c) .$$

Đạo hàm 2 vế và thay $b(x + x_0)^{n-1}$ vào vế trái, suy ra $c = x_0$. Đặt $a = \frac{b}{n}$, ta có điều phải chứng minh.

2.25. a) $(x - 1)^3.(x - 2).(x + 3)$; b) $(x - 1)^4.(x + 1)^4$;

c) $(x+1)^2.(x+2)^2$.

2.26. a) $x^2-1=(x-1).(x+1)$;

b) $x^3-1=(x-1).(x^2+x+1)$

$$=(x-1).(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i).(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

c) $x^4-1=(x+1).(x-1).(x^2+1)=(x+1).(x-1).(x+i).(x-i)$;

d) $x^5-1=(x-1).(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1).(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1)$

$=(x-1).(x-\alpha).(x-\overline{\alpha}).(x-\beta).(x-\overline{\beta})$, với

$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\beta=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$;

e) $x^6=(x-1).(x+1).(x^2+x+1).(x^2-x+1)$

$=(x-1).(x+1).(x-\alpha).(x-\overline{\alpha}).(x-\beta).(x-\overline{\beta})$,

với $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chú ý: Có 2 cách tiến hành. Cách 1: giải trên trường thực trước (hạ bậc); Cách 2: giải trên trường phức trước, sau qui $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ về đa thức thực bất khả qui bậc 2.

2.27. a) $(x-1)^3.(x^2-2x+2)$;

b) $(x-2)^2.(x+2).(x^2+3)$;

c) $(x+1)^3.(x^2+5)$.

2.28. a) $i(x-1+2i)^2$;

b) $(x+1).(x+3+6i)$;

c) $(3+i).(x-1).(x-1+2i)$;

d) $(x+i).(x-i).(x+1+i)$;

e) $(x+1).(x-\alpha).(x-\beta)$, với

$$\alpha=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right),\ \beta=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}\right).$$

2.29. a) $(x+1).(x+1+2i).(x+1-2i)$;

b) $(x+i).(x-i).(x+2+i).(x+2-i)$;

c) $(x-\alpha).(x-\overline{\alpha}).(x-\beta).(x-\overline{\beta})$, với $\alpha=\sqrt{3}+2+i$ và $\beta=\sqrt{3}-2+i$,

Hướng dẫn. c) Biến đổi thành $[x(x-2\sqrt{3})]^2-16i^2$, quy về việc giải các phương trình bậc 2: $x^2-2x\sqrt{3}+4i=0$ và $x^2-2x\sqrt{3}-4i=0$.

2.30. a) *Hướng dẫn.* Chứng tỏ x^3+2x+1 vô nghiệm trên $\mathbf{Z}_5$ bằng cách thay lần lượt các giá trị 0, 1, 2, 3, 4 vào đa thức, suy ra nó là bất khả quy ;

b) $(x+1).(x^2+4x+1)$;

c) $(x+1).(x^3+4x^2+x+1)$.

2.31. a) $d(x)=x^2+2x+1$; b) $d(x)=2x+1$ (dạng chuẩn là $x+2$). *Hướng dẫn.* Dùng thuật chia Euclid tìm UCLN hoặc phân tích các đa thức đã cho thành tích các đa thức bất khả quy.

2.32. a) $\dfrac{1}{(x-1)^5}+\dfrac{1}{(x-1)^4}$;

b) $\dfrac{12}{(x-1)^5}+\dfrac{10}{(x-1)^4}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$;

c) $\dfrac{x-1}{x^2+1}+\dfrac{-x+1}{x^2+2}$;

d) $\dfrac{-x+1}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$;

e) $\dfrac{2x-1}{2(x^2-x+1)}-\dfrac{2x+1}{2(x^2+x+1)}$;

f) $\dfrac{1}{6(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+1)}+\dfrac{x-2}{6(x^2-x+1)}-\dfrac{x+2}{6(x^2+x+1)}$.

Chương 3

Không gian véc tơ, không gian Euclid

Bạn đọc thường gặp khó khăn khi bước vào phần không gian véc tơ. Vậy hãy giải các bài tập ngay từ đầu chương một cách kiên trì và tuần tự, nhất là kiểm tra cấu trúc không gian véc tơ (và cả không gian con) trên các tập hợp khác nhau trong các bài đã cho, có nhiều bài như thế để minh hoạ cho một khái niệm mà bạn đọc cho là trừu tượng. Mỗi khái niệm mới thường được bắt đầu bằng những bài tập dễ, một số bài về lý thuyết cũng được nêu lại để hiểu rõ khái niệm và áp dụng sau đó. Các phương pháp và kỹ thuật tính toán ở chương này rất quan trọng, mang tính đặc thù của lý thuyết không gian véc tơ, bạn đọc cần luyện tập và nắm vững. Hệ phương trình tuyến tính có xuất hiện ở một vài bài nhưng ở mức độ đơn giản.

Phép nhân véc tơ với hệ số (hoặc vô hướng) được viết ngắn gọn là phép nhân hệ số. Chữ V thường để chỉ không gian véc tơ; trừ một số trường hợp đã rõ ràng (chẳng hạn $\mathbf{R}[x], \mathscr{C}\ldots$), các không gian véc tơ ở đây đều là hữu hạn chiều. Véc tơ "không" thường được ký hiệu bởi chữ θ, không gian chỉ chứa véc tơ θ được ký hiệu bởi chữ O. Các véc tơ n thành phần $(x_1, \ldots, x_n)$, nếu không nói gì thêm, được hiểu là trên trường số K (để định ý ta thường xét với $K = \mathbf{R}$), các véc tơ n thành phần được coi là cho trong cơ sở chính tắc của K^n, gồm:

$$e_1 = (1,0,...,0),$$
$$e_2 = (0,1,...,0),$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$e_n = (0,0,...,1).$$

Không gian con sinh bởi các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_k$ được viết là $\mathscr{L}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.

Một số bài về không gian véc tơ và không gian Euclid còn được bổ sung ở các chương sau.

3.1. Không gian véc tơ

3.1. Giả sử V là K-không gian véc tơ, chứng minh rằng:

a) $0v = \theta, \quad \forall v \in V$;

b) $\lambda\theta = \theta, \quad \forall \lambda \in K$;

c) Nếu $\lambda \in K$ và $v \in V$ thì: $\lambda v = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0$ hoặc $v = \theta$;

d) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v), \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V$;

e) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v, \ \forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$;

f) $\lambda \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda v_i, \ \forall \lambda \in K, \forall v_1, ..., v_n \in V$.

3.2. Hãy xét tập số V có là K- không gian véc tơ với phép cộng các số thuộc V và phép nhân hệ số thuộc K :

a) V = **R**, K = **R** hoặc K = **Q** ;

b) V = **C**, K = **C** hoặc K = **R** hoặc K = **Q** ;

c) $V = \mathbf{R}i = \{ai \mid a \in \mathbf{R}\}$ (các số thuần ảo), K = **R** hoặc K = **Q**;

d) $V = \mathbf{Q}i = \{qi \mid q \in \mathbf{Q}\}$, K = **Q**, K = **R** ;

e) $V = \mathbf{Z}i = \{ki \mid k \in \mathbf{Z}\}$, K = **Q** .

3.3. Chứng minh rằng nếu K là trường con của trường số K' thì K' có thể xem là K - không gian véc tơ còn K chưa chắc là K' - không gian véc tơ (với các phép toán thông thường).

3.4. Giả sử K là một trường số và V là tập các bộ số $v = (x_1,...,x_n)$, $x_i \in K$, $i = 1,...,n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Trên V ta định nghĩa phép cộng và phép nhân hệ số theo thành phần: $v = (x_1,...,x_n)$, $u = (y_1,...,y_n) \in V$, $\lambda \in K$ thì

$$v + u = (x_1 + y_1,...,x_n + y_n),$$
$$\lambda v = (\lambda x_1,...,\lambda x_n).$$

Chứng minh rằng: V là K - không gian véc tơ.

3.5. Cho tập các hàm số mũ $\mathscr{E} = \{a^x \mid a \in \mathbf{R}, a > 0\}$. Chứng minh rằng $\mathscr{E}$ là **R** - không gian véc tơ với các phép toán sau:

a) $a^x \oplus b^x = (ab)^x$, $\forall a^x, b^x \in \mathscr{E}$;

b) $\lambda \circ a^x = (a^\lambda)^x$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall a^x \in \mathscr{E}$.

3.6. Cho $\mathscr{C}$ là tập hợp các hàm số liên tục trên **R**. Chứng minh rằng $\mathscr{C}$ là **R** - không gian véc tơ đối với phép cộng các hàm số và phép nhân hệ số thuộc **R** .

3.7. Đặt $\mathbf{R}^+ = \{r \in \mathbf{R} \mid r > 0\}$. Chứng minh rằng $\mathbf{R}^+$ là **R** - không gian véc tơ với các phép toán sau:

a) $a \oplus b = a.b$, $\forall a, b \in \mathbf{R}^+$;

b) $\lambda \circ a = a^\lambda$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall a \in \mathbf{R}^+$.

3.8. Chứng minh rằng: Nếu K là trường số thì K[x] là K - không gian véc tơ với phép cộng đa thức và phép nhân hệ số thuộc K.

3.9. Giả sử K là một trường số và $K^n = \{(x_1,...,x_n) | x_i \in K, i = 1,...,n\}$. Trên K^n ta định nghĩa phép cộng và nhân hệ số theo thành phần (xem Bài 3.4). Chứng minh rằng K^n là K -

không gian véc tơ (được gọi là không gian các véc tơ n thành phần trên K).

3.10. Giả sử V là K - không gian véc tơ và $v \in V$. Hỏi các tập con A, B sau có là không gian véc tơ con (gọi vắn tắt là không gian con) của V.

a) $A = \{v\}$;

b) $B = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$.

3.11. Chứng minh rằng: Nếu $1 \le k \le n$ thì

a) $A = \left\{\overbrace{(x,\ldots,x)}^{n \text{ lần}} \mid x \in \mathbf{R}\right\}$ là không gian con của $\mathbf{R}^n$;

b) $B = \{(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,\ldots,k\}$ là không gian con của $\mathbf{R}^n$.

3.12. Cho hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ được viết thành các bộ số thực 3 thành phần. Chứng minh rằng tập nghiệm của hệ là không gian con của $\mathbf{R}^3$.

3.13. Cho $n \in \mathbf{N}$ và $\mathbf{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid \deg f(x) < n\}$. Chứng minh rằng $\mathbf{R}_n[x]$ là không gian con của $\mathbf{R}[x]$, và $\mathbf{R}_m[x]$ là không gian con của $\mathbf{R}_n[x]$ nếu $m \le n$.

3.14. a) $\mathbf{R}$ và $\mathbf{R}^+$ đều là $\mathbf{R}$ - không gian véc tơ (Bài 3.7), hỏi $\mathbf{R}^+$ có là không gian con của $\mathbf{R}$?

b) $\mathscr{C}$ và $\mathscr{E}$ đều là $\mathbf{R}$ - không gian véc tơ (Bài 3.5, 3.6), hỏi $\mathscr{E}$ có là không gian con của $\mathscr{C}$?

3.15. Giả sử X, Y là các không gian con của V. Chứng minh rằng:

a) $X \cap Y$ là không gian con của V;

b) $X + Y$ là không gian con của V;

c) $X \cup Y$ là không gian con của V khi và chỉ khi $X \subseteq Y$ hoặc $Y \subseteq X$.

3.16. a) Giả sử X, Y là các không gian con của V. Chứng minh rằng $V = X \oplus Y$ khi và chỉ khi mọi v thuộc V đều có biểu diễn duy nhất $v = v_1 + v_2$ với $v_1 \in X$, $v_2 \in Y$;

b) Chứng minh rằng $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i$.

3.17. Cho $V = \mathbf{R}^3$ và X là không gian con, hãy tìm không gian con Y sao cho $V = X \oplus Y$, biết:

a) $X = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbf{R}\}$;

b) $X = \{(a,0,c) \mid a,c \in \mathbf{R}\}$;

c) $X = O \ (= \{\theta\})$;

d) $X = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbf{R}\}$.

3.18. Cho các véc tơ thuộc $\mathbf{Q}^3$: $v_1 = (1,1,5)$, $v_2 = (1,2,8)$, $v_3 = (1,0,2)$, $v_4 = (-2,1,-1)$, hãy tính:

a) $3v_1 - 2v_2 + v_3 + v_4$;

b) $v_1 - v_2 + 2v_3 + v_4$;

c) $v_1 - v_2 + v_3 - v_4$.

3.19. Hãy tính trong $\mathbf{R}^+$ (Bài 3.7), với $a \in \mathbf{R}^+$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$v_1 = 3 \circ a \oplus 2 \circ (\sqrt{3}a) \oplus (-5) \circ a \oplus \frac{1}{3};$$

$$v_2 = \lambda \circ a \oplus \lambda \circ (a^{-1}).$$

Tìm cặp số thực (λ, δ) sao cho $\lambda \circ 2 \oplus \delta \circ 3 = \theta$.

3.20. Thực hiện trong không gian véc tơ $\mathbf{R}[x]$:

a) Viết x^5 thành tổ hợp tuyến tính của $1, x-1, \ldots, (x-1)^5$;

b) Viết $1 - x - 2x^2 + 3x^3 + x^4$ thành tổ hợp tuyến tính của $1, x-1, \ldots, (x-1)^4$;

c) Viết đa thức $6+5x+3x^2+2x^3$ thành tổ hợp tuyến tính của $f'''(x), f''(x), f'(x), f(x)$ với $f(x)=1-x-3x^2+2x^3$.

3.21. Giả sử $A=\{v_1,...,v_n\}$ là hệ các véc tơ của K - không gian véc tơ V. Đặt $\mathscr{L}(A)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K, i=1,...,n\right\}$. Chứng minh rằng $\mathscr{L}(A)$ là không gian con của V (được gọi là không gian con sinh bởi A).

3.22. Cho các hệ véc tơ trong V: $A=\{u_1,...,u_n\}$, $B=\{v_1,...,v_m\}$.

Chứng minh rằng:

a) Nếu $A \subseteq B$ thì $\mathscr{L}(A) \subseteq \mathscr{L}(B)$;

b) Nếu $A \sim B$ thì $\mathscr{L}(A)=\mathscr{L}(B)$;

c) $\mathscr{L}(A)+\mathscr{L}(B)=\mathscr{L}(A \cup B)$.

3.23. Tìm các không gian con $X \cap Y$, $X+Y$ trong $\mathbf{R}_4[x]$, biết:

a) $X=\mathscr{L}\{1,x\}$, $Y=\mathscr{L}\{x,x^2\}$;

b) $X=\mathscr{L}\{1,x,1+x\}$, $Y=\mathscr{L}\{1,x,x^2\}$;

c) $X=\mathscr{L}\{1,x^2\}$, $Y=\mathscr{L}\{x,x^3\}$.

3.24. a) Cho $X=\mathscr{L}\{x^2,x^3,x^4\}$, chứng minh rằng $\mathbf{R}_5[x]=\mathbf{R}_2[x] \oplus X$;

b) Cho $X=\mathscr{L}\{1,x^2,x^4\}$, $Y=\mathscr{L}\{x,x^3,x^5\}$, chứng minh rằng $\mathbf{R}_5[x]=X \oplus Y$.

3.25. Tìm phần bù trực tiếp của $\mathbf{R}_0[x]$ và $\mathbf{R}_1[x]$ trong $\mathbf{R}_5[x]$.

3.26. Giả sử $v \in V$ và $\lambda \in K$. Chứng minh rằng:

a) $\{v, \lambda v\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính;

b) $\{v\}$ là hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $v \neq \theta$.

3.27. Chứng minh rằng :

a) Hệ các véc tơ A là độc lập tuyến tính thì mọi hệ con khác rỗng của A cũng độc lập tuyến tính ;

b) Hệ các véc tơ A là phụ thuộc tuyến tính thì hệ chứa A cũng phụ thuộc tuyến tính ;

c) Hệ chứa véc tơ θ là phụ thuộc tuyến tính ;

d) Hệ có hai véc tơ bằng nhau (hoặc tỷ lệ) là phụ thuộc tuyến tính ;

e) Hệ n véc tơ độc lập tuyến tính có $2^n - 1$ hệ con độc lập tuyến tính .

3.28. Chứng minh rằng :

a) Hệ véc tơ $A = \{v_1, ..., v_n\}$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một véc tơ trong A biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại ;

b) Hệ véc tơ $A = \{v_1, ..., v_n\}$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi mọi véc tơ thuộc A không biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại ;

c) Nếu một véc tơ biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ độc lập tuyến tính thì biểu diễn đó là duy nhất . .

3.29. Xét **R**- không gian véc tơ **C** (Bài 3.2), chứng minh rằng:

a) Các hệ $\{1, i\}$, $\{1, 1+i\}$, $\{2+i, 3-4i\}$ là độc lập tuyến tính;

b) Hệ $\{2+i, 3-4i, -1+i\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

3.30. Xét trong $\mathbf{R}_n[x]$ $(n \geq 1)$, chứng minh rằng các hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính:

a) $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$;

b) $\{f_0(x), f_1(x), ..., f_{n-1}(x)\}$ với :

$$f_0(x) = x^{n-1} + \ldots + x + 1,$$
$$f_1(x) = x^{n-1} + \ldots + x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n-1}(x) = x^{n-1}.$$

3.31. Cho hệ véc tơ $A = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$. Chứng minh rằng :

a) Nếu A độc lập tuyến tính thì nó là cơ sở của $\mathscr{L}(A)$.

b) Nếu A độc lập tuyến tính và $1 \le h < k$ thì $\mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_h\} \oplus \mathscr{L}\{v_{h+1}, \ldots, v_k\} = \mathscr{L}(A)$.

3.32. Giả sử $\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong V. Tìm chiều và cơ sở của $\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$, $\mathscr{L}\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

3.33. Chứng minh rằng nếu $dim V = n$ $(n \ge 1)$ thì :

a) Mọi hệ n + 1 véc tơ trong V đều phụ thuộc tuyến tính ;

b) Mọi hệ n véc tơ độc lập tuyến tính trong V đều là cơ sở của V .

3.34. Giả sử $a \in \mathbf{R}, a \ne 0$. Chứng minh rằng $\{a, x, \ldots, x^n\}$, $\{a, x-a, \ldots, (x-a)^n\}$ đều là cơ sở của $\mathbf{R}_{n+1}[x]$, viết toạ độ của $f(x) = 1 + x + \ldots + x^n$ qua các cơ sở đó .

3.35. Xét trong **R** - không gian véc tơ $\mathscr{C}$ (Bài 3.6), chứng minh rằng X là không gian con của $\mathscr{C}$, tìm chiều và một cơ sở của X, biết :

a) $X = \{ax \mid a \in \mathbf{R}\}$;

b) $X = \{ax + b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

3.36. Tìm chiều và một cơ sở của **R** - không gian véc tơ $\mathbf{R}^+$ trong Bài 3.7 .

3.37. Hãy chứng tỏ rằng các hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính :

a) $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$;

b) $(0, 0, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(5, 2, -1)$;

c) $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5, 0)$, $(3, 4, 5, 0, 0)$.

3.38. Hãy chứng tỏ rằng các hệ véc tơ sau là cơ sở của $\mathbf{R}^3$:

a) $\begin{cases}(1, & 1, & 1)\,, \\ (2, & -1, & 4)\,, \\ (2, & 2, & 3)\,;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(1, & 2, & -1)\,, \\ (2, & 5, & -1)\,, \\ (-3, & -5, & 7)\,;\end{cases}$

c) $\begin{cases}(3, & 2, & 1)\,, \\ (7, & 5, & 2)\,, \\ (5, & 6, & -2)\,;\end{cases}$ d) $\begin{cases}(3, & 5, & 4)\,, \\ (2, & 1, & -3)\,, \\ (4, & -2, & 3)\,.\end{cases}$

3.39. Chứng tỏ rằng các hệ véc tơ sau là độc lập tuyến tính:

a) $\begin{cases}(1, & -1, & 0, & 1)\,, \\ (1, & 0, & 1, & 2)\,, \\ (1, & 1, & 3, & 2)\,;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(7, & 8, & 2, & 1)\,, \\ (2, & 5, & -1, & -1)\,, \\ (6, & -2, & 1, & 0)\,;\end{cases}$

c) $\begin{cases}(2, & 3, & 4, & 3)\,, \\ (2, & 4, & 1, & 2a)\,, \\ (2, & 5, & a, & a^2)\,.\end{cases}$

3.40. Tìm hạng của mỗi hệ véc tơ sau:

a) $\begin{cases}(3, & -1, & 2)\,, \\ (3, & 0, & 5)\,, \\ (3, & 2, & 11)\,;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(1, & 2, & 3)\,, \\ (5, & 3, & 1)\,, \\ (-2, & -6, & a)\,;\end{cases}$

c) $\begin{cases}(2, & 3, & 1)\,, \\ (5, & 2, & 1)\,, \\ (2, & a, & -1)\,;\end{cases}$ d) $\begin{cases}(5, & 3, & 1)\,, \\ (3, & 5, & 2)\,, \\ (11, & -3, & -2)\,;\end{cases}$

e) $\begin{cases}(1,\ 2,\ 3,\ 4)\ , \\ (1,\ 3,\ 4,\ 5)\ , \\ (1,\ 4,\ 5,\ 6)\ ;\end{cases}$ f) $\begin{cases}(1,\ 2,\ 3,\ 4)\ , \\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)\ , \\ (3,\ 4,\ 5,\ 6)\ , \\ (4,\ 5,\ 6,\ 7)\ .\end{cases}$

3.41. Tìm chiều và một cơ sở của $\mathscr{L}(A)$, $\mathscr{L}(B)$, $\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(B)$ với:

a) $A = \{(1,2,3),\ (3,4,5),\ (5,6,7)\}$,

$B = \{(1,1,2),\ (1,-1,0)\}$;

b) $A = \{(1,1,1,-1),\ (1,2,-1,1),\ (1,3,0,2)\}$,

$B = \{(1,0,1,-1),\ (2,3,0,2)\}$

3.42. Tìm chiều và một cơ sở của $\mathscr{L}(A) \cap \mathscr{L}(B)$, biết:

a) $A = \{(1,1,-1),\ (1,2,0),\ (3,4,-2)\}$,

$B = \{(1,0,1),\ (2,3,-1),\ (4,3,1)\}$;

b) $A = \{(1,-1,-2),\ (2,1,-1),\ (-1,4,5)\}$,

$B = \{(2,1,-1),\ (3,0,1),\ (1,5,0)\}$;

c) $A = \{(1,0,-1),\ (2,-1,-1),\ (4,-3,-1)\}$,

$B = \{(2,3,1),\ (1,1,0),\ (4,7,3)\}$.

3.43. Chứng minh rằng $V = X \oplus Y$ với :

a) $V = \mathbf{R}^3$, X sinh bởi (3,0,2), Y sinh bởi (3,2,5) và (0,2,1) ;

b) $V = \mathbf{R}^4$, X sinh bởi (1,-1,-1,1) và (1,1,-1,-1), Y sinh bởi (1,1,1,-1) và (1,1,1,1).

3.44. Tìm phần bù trực tiếp của không gian con trong $\mathbf{R}^3$, sinh bởi:

a) (1, 1, 1) ;

b) (1, 1, 1) , (1, 2, 3) ;

c) (1, 1, 1) , (2, 3, 3) , (3, 4, 4) .

3.2. Không gian Euclid

Hãy kiểm tra xem $\mathbf{R}^3$ có là không gian Euclid với phép nhân dưới đây, trong đó, $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ là bất kỳ trong $\mathbf{R}^3$:

a) $\langle u, v \rangle = 0$;

b) $\langle u, v \rangle = x_1 y_1$;

c) $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

3.46. **R** và **C** đều là **R** - không gian véc tơ, chứng minh rằng với phép nhân thông thường trên các số thì **R** là không gian Euclid còn **C** thì không.

3.47. a) Chứng minh rằng **C** là không gian Euclid với phép nhân:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = ac + bd, \quad \forall \alpha = a + bi, \quad \beta = c + di.$$

b) Giả sử $\alpha = 1 + i$, hãy thêm β để $\{\alpha, \beta\}$ là cơ sở trực giao của **C**;

c) Chứng tỏ rằng $\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}} + \frac{7}{\sqrt{58}} i$ và $\beta = \frac{7}{\sqrt{58}} - \frac{3}{\sqrt{58}} i$ lập thành cơ sở trực chuẩn của **C**.

3.48. Hỏi $\mathbf{R}^2$ có là không gian Euclid với phép nhân:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1, \text{ với } u = (x_1, x_2),\ v = (y_1, y_2)\ ?$$

3.49. Giả sử $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ và $a \neq 1$. Chứng minh rằng $\mathbf{R}^+$ (Bài 3.7) là không gian Euclid với phép nhân $\langle r, s \rangle = \log_a r . \log_a s$, $\forall r, s \in \mathbf{R}^+$.

3.50. Hãy định nghĩa phép nhân vô hướng trên $\mathbf{R}^2$ để nó là không gian Euclid nhận $\{u_1 = (1,1), u_2 = (2,3)\}$ làm cơ sở trực chuẩn. Hãy tính $\langle e_1, e_1 \rangle$, $\langle e_2, e_1 \rangle$, $\langle e_1, e_2 \rangle$, $\langle e_2, e_2 \rangle$ và viết công thức tính $\langle v_1, v_2 \rangle$ với $v_1 = (x_1, x_2)$, $v_2 = (y_1, y_2)$.

Chú ý. *Từ đây, chữ E được hiểu là không gian Euclid (chỉ cần phân biệt với E là ma trận đơn vị ở các chương khác). Tích vô hướng của các véc tơ* $u, v \in E$ *được viết là u.v, độ dài của véc tơ u được viết là* $\|u\|$, *nếu u, v vuông góc với nhau, ta viết* $u \perp v$.

$\mathbf{R}^n$ *được hiểu là không gian Euclid với phép nhân vô hướng nhận* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *làm cơ sở trực chuẩn.*

3.51. Giả sử E là không gian Euclid:

a) Chứng minh rằng $\forall u, v \in E$ luôn có phân tích $u = \lambda v + h$ với $h \in E$ sao cho $h \perp v$, hơn nữa, nếu $v \neq \theta$ thì biểu diễn đó là duy nhất ;

b) áp dụng để chứng minh $|u.v| \leq \|u\|.\|v\|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\{u, v\}$ phụ thuộc tuyến tính ;

c) Tìm h với $E = \mathbf{R}^4$, $u = (1,1,1,-2)$, $v = (2,1,1,0)$.

3.52. Kiểm tra tính trực giao của u_1, u_2, u_3, sau đó lập cơ sở trực chuẩn :

$$u_1 = (2,-1,2), \quad u_2 = (2,2,-1), \quad u_3 = (-1,2,2).$$

3.53. Hãy trực giao hoá các hệ véc tơ sau:

a) $(1,1,1)$, $(2,3,1)$, $(3,2,4)$, $(1,3,-1)$;

b) $(1,1,1)$, $(1,0,2)$, $(-1,1,1)$, $(0,1,3)$;

c) $(1,1,-1,1)$, $(3,0,-2,3)$, $(1,-4,2,1)$;

d) $(2,3,-1,2)$, $(4,7,3,-4)$, $(1,0,-8,13)$;

e) $(1,2,0,2)$, $(-1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$.

3.54. Tìm cơ sở trực chuẩn của $\mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$:

a) $v_1 = (3,2,1,3)$, $v_2 = (3,5,3,8)$, $v_3 = (0,4,3,4)$;

b) $v_1 = (1,2,3,1)$, $v_2 = (1,2,1,1)$, $v_3 = (0,4,1,2)$.

3.55. Tìm hạng của hệ véc tơ bằng phương pháp trực giao hoá:

a) $(1,1,-1)$, $(0,1,0)$, $(-1,2,1)$;

b) $(1,1,1)$, $(2,1,0)$, $(1,-1,1)$;

c) $(1,1,-1)$, $(-1,0,2)$, $(1,2,0)$, $(3,1,1)$.

3.56. Chứng minh rằng nếu $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là cơ sở trực giao của E và $1 \le k < n$ thì $\mathscr{L}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ là phần bù trực giao của $\mathscr{L}\{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$.

3.57. Tìm phần bù trực giao của không gian con sinh bởi:

a) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$;

b) $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (-1,1,1)$;

c) $v_1 = (1,1,-2)$, $v_2 = (0,2,1)$.

3.58. Chứng minh rằng phần bù trực giao thì cũng là phần bù trực tiếp. Chỉ ra một ví dụ về phần bù trực tiếp mà không là phần bù trực giao .

3.59. a) Chứng minh rằng nếu X là không gian con của E thì $Y = \{v \in E \mid v \perp X\}$ cũng là không gian con của E và $X \cap Y = O$.

b) Chứng minh rằng mọi không gian con của E đều có phần bù trực giao.

3.60. Chứng minh rằng phần bù trực giao của mỗi không gian con của không gian Euclid E là duy nhất.

Đáp số và hướng dẫn

3.2. a) **R** là **R** – không gian véc tơ và **Q** – không gian véc tơ;

b) **C** là **C** – không gian véc tơ, **R** – không gian véc tơ và **Q** – không gian véc tơ ;

c) **Ri** là **R** – không gian véc tơ và **Q** – không gian véc tơ ;

d) **Qi** là **Q** – không gian véc tơ, không là **R** – không gian véc tơ;

e) **Zi** không là **Q** – không gian véc tơ .

3.3. *Hướng dẫn.* Nếu $K \neq K'$, $\exists k \in K' \setminus K$, $k.1 \notin K$.

3.5. *Hướng dẫn.* Cần kiểm tra tập $\mathscr{E}$ với các phép toán đã cho thoả mãn 8 tiên đề xác định không gian véc tơ.

Giả sử $a^x, b^x, c^x \in \mathscr{E}$, $\lambda, \delta \in \mathbf{R}$ và chú ý rằng $(a^\lambda)^x = a^{\lambda x}$ ta có:

(1) $(a^x \oplus b^x) \oplus c^x = (ab)^x \oplus c^x = (a^x b^x)c^x = a^x(b^x c^x) =$
$= a^x(bc)^x = a^x \oplus (b^x \oplus c^x)$;

(2) $a^x \oplus b^x = (ab)^x = (ba)^x = b^x \oplus a^x$;

(3) $\exists \theta = 1 \in \mathscr{E} : a^x \oplus \theta = (a.1)^x = a^x$;

(4) Ứng với a^x có $(a^{-1})^x \in \mathscr{E}$

(để ý rằng $a > 0, \exists a^{-1} > 0$): $a^x \oplus (a^{-1})^x = (aa^{-1})^x = \theta$.

(5) $\lambda \circ (a^x \oplus b^x) = \lambda \circ (ab)^x = (ab)^{\lambda x} = a^{\lambda x}.b^{\lambda x}$
$= \lambda \circ a^x \oplus \lambda \circ b^x$;

(6) $(\lambda + \delta) \circ a^x = a^{(\lambda+\delta)x} = a^{\lambda x} a^{\delta x} = \lambda \circ a^x \oplus \delta \circ a^x$;

(7) $(\lambda\delta) \circ a^x = a^{\lambda\delta x} = a^{\delta\lambda x} = \lambda \circ (a^{\delta x}) = \lambda \circ (\delta \circ a^x)$;

(8) $1 \circ a^x = (a^1)^x = a^x$.

3.7. *Hướng dẫn.* Xem hướng dẫn Bài 3.5 .

3.10. a) A là không gian con nếu $v = \theta$;

b) *Hướng dẫn.* Cần kiểm tra tập B thoả mãn các điều kiện "là không gian con". Ta có :

(1) $B \neq \varnothing$ vì $v \in B$ (với $\lambda = 1$),

(2) $\lambda v, \delta v \in B$ suy ra $\lambda v + \delta v = (\lambda + \delta)v \in B$,

(3) $\delta \in K, \lambda v \in B$ suy ra $\delta(\lambda v) = (\delta\lambda)v \in B$.

3.12. *Hướng dẫn.* Giả sử A là tập nghiệm của hệ phương trình đã cho, ta có:

1) $A \neq \varnothing$ vì $(0,0,0) \in A$.

2) Giả sử $u, v \in A$, $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ và $\lambda, \delta \in \mathbf{R}$, suy ra $\lambda u + \delta v = (\lambda x_1 + \delta y_1, \lambda x_2 + \delta y_2, \lambda x_3 + \delta y_3)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i(\lambda x_i + \delta y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + \delta \sum_{i=1}^{3} a_i y_i = \lambda 0 + \delta 0 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i(\lambda x_i + \delta y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + \delta \sum_{i=1}^{3} b_i y_i = \lambda 0 + \delta 0 = 0.$$

Vậy $\lambda u + \delta v \in A$.

3.13. *Hướng dẫn.* áp dụng:

$$deg(f(x) + g(x)) \le Max\{deg f(x), deg g(x)\},$$

$$deg(\lambda f(x)) \le deg f(x) \quad (\text{với } \lambda \in \mathbf{R}).$$

Chú ý rằng $\mathbf{R}_0[x] = O$.

3.14. Không, vì các phép toán trên R và $\mathbf{R}^+$ (trên $\mathscr{C}$ và $\mathscr{D}$) khác nhau.

3.15. c) *Hướng dẫn.* Giả sử $X \not\subset Y$, tức là $\exists x \in X, x \notin Y$. Cần chỉ ra $Y \subseteq X$. Xét $y \in Y$ bất kỳ, ta có $x + y \in X \cup Y$. Vì $x \notin Y$ nên $x + y \notin Y$. Vậy $x + y \in X$, suy ra $x + y = x'$ với $x' \in X$. Tóm lại, $y = x' - x \in X$, điều phải chứng minh.

3.17. a) Chẳng hạn $Y = \{(a,b,0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$;

b) Chẳng hạn $Y = \{(0,b,0) \mid b \in \mathbf{R}\}$;

c) $Y = \mathbf{R}^3$;

d) Chẳng hạn $Y = \{(0,b,c) \mid b, c \in \mathbf{R}\}$.

Hướng dẫn. Kiểm tra $X + Y = \mathbf{R}^3$ và $X \cap Y = O$. Chẳng hạn, xét phần d):

1) Giả sử $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, đặt $u = (a,a,a) + (0,b,c)$ suy ra $a = x_1$, $b = x_2 - x_1$, $c = x_3 - x_1$. Vậy $\mathbf{R}^3 = X + Y$.

2) Giả sử $u = (x_1, x_2, x_3) \in X \cap Y$, vì $u \in Y$ nên $x_1 = 0$ và vì $u \in X$ nên $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Vậy $X \cap Y = O$.

3.18. a) θ; b) θ; c) $(3, -2, 0)$.

3.19. $v_1 = \theta$; $v_2 = \theta$, cặp số $(\lambda, -\lambda \log_3 2)$ với $\lambda \in \mathbf{R}$.

3.20. a) $1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$.

b) $2 + 8(x-1) + 13(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + (x-1)^4$.

c) $f'''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x)$.

Hướng dẫn: a) Chẳng hạn, đặt $x^5 = [1 + (x-1)]^5$;

b) Dùng sơ đồ Horne (xem hướng dẫn Bài 2.21) hoặc khai triển Taylor của đa thức.

c) Đặt $6 + 5x + 3x^2 + 2x^3 = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f'(x) + \lambda_3 f''(x) + \lambda_4 f'''(x)$, suy ra:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 6\lambda_3 + 12\lambda_4 & = 6, \\ -\lambda_1 - 6\lambda_2 + 12\lambda_3 & = 5, \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_2 & = 3, \\ 2\lambda_1 & = 2. \end{cases}$$

3.23. a) $X \cap Y = \mathscr{L}\{x\}$, $X + Y = \mathbf{R}_3[x]$.

Hướng dẫn. 1) $v \in X \cap Y$ thì $v = a + bx = cx + dx^2$ (với $a, b, c, d \in \mathbf{R}$), vậy $a = d = 0$.

2) $v \in X + Y$ thì $v = (a + bx) + (cx + dx^2) = a + (b + c)x + dx^2$ (với $a, b, c, d \in \mathbf{R}$);

b) $X \cap Y = \mathbf{R}_2[x]$, $X + Y = \mathbf{R}_3[x]$.

c) $X \cap Y = O$, $X + Y = \mathbf{R}_4[x]$.

3.25. $\mathbf{R}_5[x]$ và $\mathscr{L}\{x, x^2, x^3, x^4\}$.

3.26. *Hướng dẫn.* a) Nếu $\lambda \neq 0$, ta có $\lambda v + (-1)(\lambda v) = \theta$, còn nếu $\lambda = 0$ ta có $0v + 1(\lambda v) = \theta$;

b) áp dụng tính chất $\alpha v = \theta \Leftrightarrow \alpha = 0$ hoặc $v = \theta$ (Bài 3.1).

3.29. a) *Hướng dẫn.* Chẳng hạn xét $v_1 = 2 + i$, $v_2 = 3 - 4i$, giả sử $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ tức $x_1(2+i) + x_2(3-4i) = 0$, suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \ , \\ x_1 - 4x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

b) *Hướng dẫn.* Đặt $x_1(2+i) + x_2(3-4i) + x_3(-1+i) = 0$, suy ra hệ phương trình ẩn x_1, x_2, x_3, có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 11$.

3.30. b) *Hướng dẫn.* Đặt $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1} = 0$, ta có:

$$\lambda_0(x^{n-1} + \ldots + x + 1) + \lambda_1(x^{n-1} + \ldots + x) + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0.$$

Suy ra :

$$(\lambda_0 + \ldots + \lambda_{n-1})x^{n-1} + (\lambda_0 + \ldots + \lambda_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (\lambda_0 + \lambda_1)x + \lambda_0 = 0,$$

suy ra:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Vậy $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

3.32. *Hướng dẫn.* Hãy chỉ ra rằng $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\} \sim \{v_1, v_2\}$ và $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\} \sim \{v_1, v_2, v_3\}$.

3.34. $\left(\frac{1}{a}, 1, 1, \ldots, 1\right)$ và $\left(\frac{f(a)}{a}, \frac{f'(a)}{1!}, \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)$.

3.35. a) *dim* X =1, cơ sở $\{x\}$;

b) *dim* X = 2, cơ sở $\{1, x\}$.

3.36. *dim* $\mathbf{R}^+ = 1$, mỗi $a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1$ cho một cơ sở .

3.37. a) *Hướng dẫn.* Giả sử

$$x_1(1,2,1) + x_2(0,1,2) + x_3(0,0,1) = \theta ,$$

ta có :

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 . \end{cases}$$

3.38. *Hướng dẫn.* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hệ véc tơ, áp dụng Bài 3.37 và Bài 3.33. Chẳng hạn, xét phần a) và c):

a) Nhân véc tơ thứ nhất với (–2) rồi cộng lần lượt vào các véc tơ thứ 2, thứ 3:

$$\begin{cases} (1, & 1, & 1) \\ (2, & -1, & 4) \\ (2, & 2, & 3) \end{cases} \sim \begin{cases} (1, & 1, & 1) \\ (0, & -3, & 2) \\ (0, & 0, & 1) \end{cases} .$$

c) Bước 1: cộng véc tơ thứ 2 vào véc tơ thứ 3, nhân véc tơ thứ nhất với (–2) rồi cộng vào véc tơ thứ 2. Bước 2: áp dụng cho hệ vừa thu được, nhân véc tơ thứ 2 với (–11) rồi cộng vào véc tơ thứ 3:

$$\begin{cases} (3, & 2, & 1) \\ (7, & 5, & 2) \\ (5, & 6, & -2) \end{cases} \sim \begin{cases} (3, & 2, & 1) \\ (1, & 1, & 0) \\ (12, & 11, & 0) \end{cases} \sim \begin{cases} (3, & 2, & 1) \\ (1, & 1, & 0) \\ (1, & 0, & 0) \end{cases} .$$

3.39. *Hướng dẫn.* Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hệ các véc tơ. Chẳng hạn, xét phần c) :

$$\begin{cases}(2, & 3, & 4, & 3)\\(2, & 4, & 1, & 2a)\\(2, & 5, & a, & a^2)\end{cases} \sim \begin{cases}(2, & 3, & 4, & 3)\\(0, & 1, & -3, & 2a-3)\\(0, & 1, & a-1, & a^2-2a)\end{cases}$$

$$\sim \begin{cases}(2, & 3, & 4, & 3)\\(0, & 1, & -3, & 2a-3)\\(0, & 0, & a+2, & a^2-4a+3)\end{cases}.$$

Chú ý rằng, nếu $a+2=0$ thì $a^2-4a+3\neq 0$ nên 3 véc tơ cuối cùng lập thành hệ độc lập tuyến tính.

3.40. a) $r = 2$;

b) $r = 2$ nếu $a = -10$, $r = 3$ nếu $a \neq -10$;

c) $r = 2$ nếu $a = \dfrac{-13}{3}$, $r = 3$ nếu $a \neq \dfrac{-13}{3}$;

d) $r = 2$; e) $r = 2$; f) $r = 2$.

3.41. *Hướng dẫn.* 1) Xét hệ A, ta có:

$$A = \begin{cases}(1, & 2, & 3)\\(3, & 4, & 5)\\(5, & 6, & 7)\end{cases} \sim \begin{cases}(1, & 2, & 3)\\(2, & 2, & 2)\\(2, & 2, & 2)\end{cases}$$

$$\sim \begin{cases}(1, & 2, & 3)\\(0, & -2, & -4)\\(0, & 0, & 0)\end{cases} \sim \begin{cases}(1, & 2, & 3)\\(0, & 1, & 2)\end{cases}.$$

Vậy $\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ tức $dim\,\mathscr{L}(A) = 2$, cơ sở là $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ (hoặc có thể làm như sau: $dim\,\mathscr{L}(A) = r(A) = 2$ (hạng của hệ véc tơ A), cơ sở gồm 2 véc tơ độc lập tuyến tính bất kỳ thuộc A).

2) Hệ B độc lập tuyến tính, vậy $dim\,\mathscr{L}(B) = 2$, cơ sở là B.

3) $\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(B)$ sinh bởi $B \cup \{(1,2,3),(0,1,2)\}$ (xem Bài 3.22), hệ này có hạng $r = 3$.

Vậy $dim\big(\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(B)\big) = 3$ hay $\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(B) = \mathbf{R}^3$.

b) $dim\ \mathscr{L}(A) = 3$, cơ sở là A, $dim\ \mathscr{L}(B) = 2$, cơ sở là B, $\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(B) = \mathbf{R}^4$.

3.42. Đặt $L_1 = \mathscr{L}(A)$, $L_2 = \mathscr{L}(B)$.

a) $dim\ (L_1 \cap L_2) = 1$, cơ sở, chẳng hạn là $\{(2,3,-1)\}$.

Hướng dẫn. Trước hết tính được $dimL_1 = dimL_2 = 2$, $dim(L_1 + L_2) = 3$. áp dụng định lý về số chiều của giao và tổng hai không gian con, ta có :

$$dim(L_1 \cap L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 + L_2) = 1.$$

Để tìm cơ sở của $L_1 \cap L_2$ ta chỉ cần tìm một véc tơ khác θ thuộc $L_1 \cap L_2$. Lấy một cơ sở của L_1, chẳng hạn $\{(1,1,-1),(1,2,0)\}$ (rút từ hệ A) và một véc tơ thuộc L_2, chẳng hạn $v = (2,3,-1)$ (rút từ B), gộp chúng thành hệ :

$$X = \begin{cases} (1,\ 1,\ -1) \\ (1,\ 2,\ 0) \\ (2,\ 3,\ -1) \end{cases}.$$

Tính được $r(X) = 2$ suy ra v được biểu diễn tuyến tính qua cơ sở của L_1 tức $v \in L_1$. Vậy $v \in L_1 \cap L_2$ và nó là véc tơ cần tìm.

b) $L_1 \cap L_2 = L_1$. *Hướng dẫn.* Tính được $dimL_2 = 3$ suy ra $L_2 = \mathbf{R}^3$ và do đó $L_1 \subseteq L_2$.

c) $dim\left(L_1 \cap L_2\right) = 1$, cơ sở là $\{(1,0,-1)\}$.

3.43. *Hướng dẫn.* Tính $\dim(X+Y)$, $\dim(X \cap Y)$ hoặc áp dụng Bài 3.31.

3.44. a) Chẳng hạn $L\ \{e_2, e_3\}$;

b) Chẳng hạn $L\ \{e_3\}$;

c) Chẳng hạn $L\ \{e_3\}$.

Hướng dẫn. Áp dụng Bài 3.31.

3.45. a) Không ; b) Không ; c) Có .

3.47. b) $\beta = a - ai$ với $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

c) *Hướng dẫn.* Kiểm tra $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$ và $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

3.48. Không. *Hướng dẫn.* Xét $u = (1,0)$ và $\langle u, u \rangle$.

3.50. *Hướng dẫn.* Đặt $B = \{u_1, u_2\}$, ta định nghĩa tích vô hướng của $u = (x_1, x_2)_B$, $v = (y_1, y_2)_B$:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Tính được $e_1 = (3,-1)_B$, $e_2 = (-2,1)_B$ suy ra: $\langle e_1, e_1 \rangle = 10$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 5$, $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = -7$, $\langle v_1, v_2 \rangle = 10x_1y_1 + 5x_2y_2 - 7(x_1y_2 + x_2y_1)$.

3.51. *Hướng dẫn.* a) Nếu $v = \theta$ thì λ tuỳ ý, $h = u$, còn nếu $v \neq \theta$ thì $\lambda = \dfrac{u.v}{v.v}$, $h = u - \lambda v$, λ là duy nhất và do đó h cũng duy nhất .

b) Theo phần a) ta có $u = \lambda v + h$ với $v.h = 0$,

suy ra $u.u = \lambda^2 v.v + h.h$, vậy $u.u \geq \lambda^2 v.v$.

Mặt khác, $u.v = (\lambda v + h).v = \lambda v.v$, suy ra $(u.v)^2 = \lambda^2 (v.v)^2 = (\lambda^2 v.v)(v.v) \leq (u.u)(v.v)$, vậy: $|u.v| \leq \|u\|.\|v\|$.

Ta có: $\{u, v\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi trong biểu diễn $u = \lambda v + h$ thì $h = \theta$, tức $u.u \geq \lambda^2 v.v$ trở thành đẳng thức và do đó $|u.v| = \|u\|.\|v\|$.

c) $\lambda = \dfrac{2}{3}$, $h = \dfrac{1}{3}(-1,1,1,-6)$.

3.53. a) $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$;

b) $(1,1,1)$, $(0,-1,1)$, $(-2,1,1)$;

c) $(1,1,-1,1)$, $(1,-2,0,1)$, $(1,1,3,1)$;

d) $(2,3,-1,2)$, $(1,2,2,-3)$;

e) $(1,2,0,2)$, $(4,-1,0,-1)$, $(0,-1,2,1)$.

Hướng dẫn. a) Ta có $v_1=(1,1,1), v_2=(2,3,1), v_3=(3,2,4)$, $v_4=(1,3,-1)$.

1) Đặt $u_1=v_1$.

2) Đặt $u_2=\lambda u_1+v_2$ với điều kiện $u_2.u_1=0$, suy ra $\lambda=\dfrac{-v_2u_1}{u_1.u_1}=-2$.

Vậy $u_2=-2u_1+v_2=(0,1,-1)$.

3) Đặt $u_3=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+v_3$ với điều kiện $u_3.u_1=u_3.u_2=0$, suy ra $\lambda_1=\dfrac{-v_3.u_1}{u_1.u_1}=-3$, $\lambda_2=\dfrac{-v_3.u_2}{u_2.u_2}=1$.

Vậy $u_3=-3u_1+u_2+v_3=\theta$.

4) Đặt $u_4=\delta_1u_1+\delta_2u_2+v_4$ với điều kiện $u_4.u_1=u_4.u_2=0$, suy ra $\delta_1=\dfrac{-v_4.u_1}{u_1.u_1}=-1$, $\delta_2=\dfrac{-v_4.u_2}{u_2.u_2}=-2$.

Vậy $u_4=-u_1-2u_2+v_4=\theta$.

Kết quả là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\sim\{(1,1,1),(0,1,-1)\}$.

c) Ta có $v_1=(1,1,-1,1)$, $v_2=(3,0,-2,3)$, $v_3=(1,-4,2,1)$.

1) Đặt $u_1=v_1$.

2) Đặt $u_2=\lambda u_1+v_2$ với điều kiện $u_2.u_1=0$, suy ra $\lambda=-2$

Vậy $u_2=-2u_1+v_2=(1,-2,0,1)$.

3) Đặt $u_3=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+v_3$ với điều kiện $u_3.u_1=u_3.u_2=0$, suy ra $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\dfrac{5}{3}$.

Vậy $u_3=u_1-\dfrac{5}{3}u_2+v_3=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Để ngắn gọn ta lấy $3u_3=(1,1,3,1)$ thay cho u_3.

Kết quả là $\{v_1, v_2, v_3\} \sim \{(1,1,-1,1),(1,-2,0,1),(1,1,3,1)\}$.

3.54. a) $\frac{1}{\sqrt{23}}(3,2,1,3)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(-3,1,1,2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,-1)$;

b) $\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3,1)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,1)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(-5,2,0,1)$.

3.55. a) $r = 2$, $\{(1,1,-1), (1,-2,-1), \theta\}$;

b) $r = 3$, $\{(1,1,1), (1,0,-1), (1,-2,1)\}$;

c) $r = 3$, $\{(1,1,-1), (0,1,1), \theta, (2,-1,1)\}$.

3.57. a) *Hướng dẫn.* Ta nhận thấy hệ véc tơ đã cho là hệ trực giao, áp dụng Bài 3.56 ta cần bổ sung vào hệ đó một hệ véc tơ để được cơ sở trực giao. Giả sử $v = (x_1, x_2, x_3)$ và $v_1.v = v_2.v = 0$, suy ra

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Kết quả là $\mathscr{L}\{(-2,1,1)\}$;

b) L $\{(1,0,1)\}$;

c) L $\{(5,-1,2)\}$.

3.58. *Hướng dẫn.* Giả sử A là không gian con của E và $A^{\perp}$ là phần bù trực giao. Ta có $A + A^{\perp} = E$. Cần chỉ ra $A \cap A^{\perp} = O$. Giả sử $v \in A \cap A^{\perp}$ suy ra $v.v = 0$ vậy $v = \theta$.

3.60. *Hướng dẫn.* Giả sử A là không gian con của E và B, C đều là phần bù trực giao của A.

Xét $b \in B$, ta có $b = a + c$ với $a \in A, c \in C$ (vì $A + C = E$), suy ra $a.b = a.a + a.c$ hay $a.a = 0$ (vì $a \perp b, a \perp c$). Vậy $a = \theta$ tức $b = c \in C$. Vì $b \in B$ là bất kỳ nên ta có $B \subseteq C$. Một cách tương tự, ta cũng có $C \subseteq B$. Vậy $B = C$.

Chương 4

Ma trận và định thức

Nội dung chương này được trình bày độc lập với các chương khác, bạn đọc có thể tự điều chỉnh để giải trước hoặc sau. Một đôi chỗ có sử dụng hệ phương trình tuyến tính, nhưng điều đó là tự nhiên và dễ hiểu. Phần ma trận còn được đề cập tới ở các chương sau, ở đây chỉ mới trình bày về đại số ma trận thông qua nhóm, vành và không gian véc tơ, trong đó nhấn mạnh về phép nhân ma trận. Định thức được bắt đầu bằng quan niệm đơn giản nhất để phục vụ số đông bạn đọc. Số lượng bài tập được đưa ra một cách hệ thống và phong phú nhằm giới thiệu hết các dạng bài và nhất là để bạn đọc áp dụng. Bước đầu, bạn đọc hãy lựa chọn một số bài trong mỗi nội dung.

Tập hợp các ma trận cỡ $n \times m$ trên trường (hoặc vành) K được ký hiệu bởi $M(n \times m, K)$ hoặc $M(n, K)$ nếu $n = m$.

4.1. Ma trận

4.1. Chứng minh rằng :

a) $M(1 \times n, \mathbf{Z})$ là nhóm Abel đối với phép cộng.

b) $M(n \times 1, \mathbf{Q})$ là $\mathbf{Q}$ - không gian véc tơ đối với phép cộng và phép nhân hệ số thuộc $\mathbf{Q}$.

4.2. Chứng minh rằng $M = M(2 \times 3, \mathbf{R})$ là $\mathbf{R}$ - không gian véc tơ đối với phép cộng và nhân hệ số thuộc $\mathbf{R}$.

Cho M_1 là tập hợp các ma trận thuộc M có dạng $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ chứng minh rằng M_1 là không gian con của M.

4.3. Chứng minh rằng $M = M(n, \mathbf{R})$ và $M_1 = M(n, \mathbf{Z})$ là các vành với phép cộng và nhân ma trận. Hỏi M_1 có là vành con của vành M không ?

4.4. Cho $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$, chứng minh rằng M_1 là vành con của vành $M = M(2, \mathbf{R})$.

4.5. a) Thực hiện phép nhân các ma trận:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

b) Tính (A B) C và A(B C) với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Cho A, B, tính AB và BA:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.7. Tính luỹ thừa bậc $n \geq 1$ của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

4.8. Tính :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.9. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tính $\left(2A^2 - 4A + 3E\right)^2$.

4.10. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tìm ma trận X sao cho:

$$A^2 - (a+d)A + X = O.$$

4.11. Giải các phương trình ma trận sau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.12. Tìm các ma trận nghịch đảo của:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.13. a) Chứng minh rằng: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ và $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ $(n \geq 1)$.

b) Tính: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n\right)^{-1}$.

4.14. Giải các phương trình ma trận :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ i & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ i & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.15. Cho **R** - không gian véc tơ $M(2, \mathbf{R})$ và

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh rằng: $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ là cơ sở .

b) Chứng minh rằng: $\{A, A^2, A^3\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính và $\{A, A^t, A^{-1}\}$ là hệ độc lập tuyến tính .

4.16. Chứng minh rằng tập các ma trận thực X sao cho XA = AX với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ lập thành không gian con của $M(2, \mathbf{R})$, tìm số chiều và 1 cơ sở của nó .

4.2. Định thức

Tính các định thức sau bằng cách hạ cấp:

4.17. a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

4.18. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & -a \\ b & -b & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & -\sin x \\ 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

4.19. a) $\begin{vmatrix} a & 3 & 7 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & z & t & 0 \\ 4 & 5 & 3 & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4.20. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Áp dụng các tính chất của định thức, hãy tính:

4.21. a) $\begin{vmatrix} 3,5 & 6,5 \\ 4,4 & 5,6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3,9 & 10 \\ 4,2 & 80 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 109 & 9 \\ 21 & -79 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3+4i & 3-4i \\ 3-4i & 3+4i \end{vmatrix}$.

4.22. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 23 \\ 12 & 13 & 25 \\ -3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 5 & 2\sqrt{5} & \sqrt{10} \end{vmatrix}$.

4.23. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

4.24. Tính các định thức sau :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 7 & 10 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -9 & 7 & -5 & -6 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 & -8 \\ 3 & -2 & -4 & 6 \\ -2 & 5 & 7 & -5 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$.

4.25. Giải phương trình :

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & -1 & x \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 3 & -1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$.

4.26. Chứng minh rằng :

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

4.27. Chứng minh rằng :

a) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+1 & 2x+2 \\ 2x+2 & x+1 & 3x+2 \\ 2x+1 & x+2 & 3x+1 \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} x_1+y_1-z_1 & x_2+y_2-z_2 & x_3+y_3-z_3 \\ x_1+z_1 & x_2+z_2 & x_3+z_3 \\ -x_1+y_1 & -x_2+y_2 & -x_3+y_3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

4.28. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a & a & a-1 \\ a & a & a+1 & a \\ a & a-2 & a & a \\ a+2 & a & a & a \end{vmatrix}$.

4.29. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ 1+i & 3+i & 1-i \\ 1-i & 2 & 1-i \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1+3i & -1-3i & 2 \\ 1+i & 1-3i & 1 \\ 2+2i & -2i & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 4+2i & 1-2i & -3i \\ 1-2i & 1-i & 3 \\ -3i & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.30. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1+3i & 1-2i & 1+i \\ 1+i & 1+3i & 1-2i \\ 1-2i & 1+i & 1+3i \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+i & -(3+i) & 2+i \\ -(3+i) & 2+i & -(1+i) \\ 2+i & -(1+i) & 3+i \end{vmatrix}$.

4.31. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & i & i & i \\ 1 & 1 & i & i \\ 1 & 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 25 & 2 & 2+i & 3i \\ 15 & i & 1 & 1+i \\ 11 & 1 & 2 & 2i \\ 13 & 1 & i & i \end{vmatrix}$.

4.32. Cho $z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, k = 0, 1, ..., 4. Hãy tính:

a) $\begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_0 \\ z_3 & z_4 & z_0 & z_1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_1 \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

Định thức Vandermondt:

4.33. Tính: $W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, $W_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$.

4.34. Chứng minh rằng :

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} W_n .$$

4.35. Tính:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} z_0 & z_0 & z_0 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ z_0 & z_2 & z_1 \end{vmatrix}$ với $z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, k = 0, 1, 2 ;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} & 6\sqrt{6} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

4.36. Tính :

$$\begin{vmatrix} z_0 & z_0 & z_0 & z_0 & z_0 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_0 & z_2 & z_4 & z_1 & z_3 \\ z_0 & z_3 & z_1 & z_4 & z_2 \\ z_0 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{vmatrix} \quad \text{với} \quad z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

4.37. Giải phương trình ẩn x, trong đó a, b, c khác nhau từng đôi một :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 \end{vmatrix} = 0$.

Tính các định thức cấp n:

4.38. a) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_{21} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_{31} & a_{32} & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

4.39. a) $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

4.40. a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$.

4.41. a) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & \cdots & a & b \\ a & \cdots & b & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \cdots & a & a \end{vmatrix}$.

4.42. a) $\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1}+x & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+x & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

4.43. a) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

4.44. a) $\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x_n \end{vmatrix}$

4.45. a) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ x & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$.

4.46. a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & x_n & \ldots & a_n \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_2y_1 & \cdots & 1+x_ny_1 \\ 1+x_1y_2 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_ny_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_1y_n & 1+x_2y_n & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

4.47. $\begin{vmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_5) \\ f_2(t_1) & \cdots & f_2(t_5) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_5(t_1) & \cdots & f_5(t_5) \end{vmatrix}$ với $\begin{cases} f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f_5(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3. \end{cases}$

4.48. a) $\begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y \end{vmatrix}$.

Phép nhân định thức:

4.49. Tính A.B và $|A.B|$ với $A=\begin{pmatrix}3+2i & 3-2i\\ 1-i & 1+i\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1+i & -3+2i\\ -1+i & 3+2i\end{pmatrix}$.

4.50. a) Tính $A.A^t$ và $|A^{2n}|$ với $A=\begin{pmatrix}1 & \cos x & -\sin x\\ 1 & \sin x & \cos x\\ 1 & -\cos x & \sin x\end{pmatrix}$;

b) Tính $A.A^t$ và $|A|^2$ với $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

4.51. Tính D^2 rồi suy ra D :

a) $D=\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$; b) $D=\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$.

4.52. Phân tích thành tích 2 định thức rồi tính :

a) $\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3\\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3\end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix}\cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \cos(x_1-y_3)\\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \cos(x_2-y_3)\\ \cos(x_3-y_1) & \cos(x_3-y_2) & \cos(x_3-y_3)\end{vmatrix}$.

Định lý Laplace:

4.53. Áp dụng khai triển Laplace cho dòng cuối cùng để tính định thức sau :

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\\ a & b & c & d\end{vmatrix} \text{ với } \begin{cases}a=(x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1),\\ b=(x_4-x_2)(x_3-x_2)(x_2-x_1),\\ c=(x_4-x_3)(x_3-x_2)(x_3-x_1),\\ d=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1).\end{cases}$$

4.54. Áp dụng khai triển Laplace :

a) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & a & b \\ z & t & c & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ x & a & y & b \\ z & c & t & d \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & k & n \\ p & q & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 & 0 \\ z & t & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

Áp dụng của định thức:

4.55. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.56. Tính hạng của ma trận bằng định thức con:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 10 & -5 \\ 4 & 11 & 9 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 8 & -2 & 2 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & a & 2a \end{pmatrix}$.

Đáp số và hướng dẫn

4.2. *Hướng dẫn.* Chú ý rằng, để nhận dạng ma trận $X = (x_{ij})_{2\cdot 3} \in M_1$ ta luôn có $x_{12} = x_{21} = x_{23} = 0$.

4.3. M_1 là vành con của M.

Hướng dẫn. Một cách tổng quát, nếu H là vành con của K thì $M(n,H)$ là vành con của $M(n,K)$.

4.5. a) $\begin{pmatrix} a & a-b & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & a-b & b \\ c & c-d & d \end{pmatrix}$;

b) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4.6. a) $AB = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$;

b) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 \\ 5 & -6 & 7 \\ 11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.7. a) $A^{2k} = E$, $A^{2k+1} = A$;

b) $B^n = 2^{n-1}B$, $C^{2k} = 2^{2k-1}B$, $C^{2k+1} = 2^{2k}C$;

c) $D_k^n = D_k$, $k = 1,2,3,4$;

d) Áp dụng $F^4 = E$ và viết $n = 4k + r$ với $r = 0,1,2,3$, suy ra F^n bằng: E nếu $r = 0$, F nếu $r = 1$, $-E$ nếu $r = 2$, $-F$ nếu $r = 3$;

e) $G^{2k} = E$, $G^{2k+1} = G$, $K^n = c^{n-1}K$.

4.8. $A = B = C = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}$, $\qquad D = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 4a & 5a & 6a \end{pmatrix}$.

4.9. E.

4.10. $(ad - bc)E$.

4.11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hướng dẫn. Chẳng hạn, ta tính $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Áp dụng Bài 4.11, ta tìm x, y, z, t, sao cho:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta suy ra hệ phương trình xác định x, y và hệ khác xác định z, t. Gộp 2 hệ với nhau và biến đổi các dòng ta có:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Vậy $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. a) *Hướng dẫn.* Xét $(A.A^{-1})^t = E$ và xét $A^n.(A^{-1})^n = E$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.14. a) *Hướng dẫn*. Cách 1: ta có:

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-10\\1&7\end{pmatrix}$$

Cách 2: Nhận xét về cỡ ma trận, suy ra X là ma trận cấp 2. Vậy, ta có:

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\5&1\end{pmatrix}.$$

Giải các hệ phương trình (xem lại hướng dẫn Bài 4.12), ta có:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\2&3&5&1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\\ \cdot\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(2)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-10\\0&1&1&7\end{array}\right)$$

b) $\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}$,

c) $\dfrac{1}{-6+i}\begin{pmatrix}2-i&-8\\6-3i&-4i\end{pmatrix}$.

4.15. *Hướng dẫn*. a) Chứng tỏ rằng hệ đã cho độc lập tuyến tính và chỉ ra $dim\,M(2,\mathbf{R})=4$ (xem Bài 3.33), hoặc chỉ ra rằng mỗi $A\in M(2,\mathbf{R})$ đều biểu diễn tuyến tính duy nhất qua $E_1,\dots,E_4$.

b) Đặt $\lambda_1A+\lambda_2A^2+\lambda_3A^3=O$, suy ra nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=1$.

Đặt $\lambda_1A+\lambda_2A^t+\lambda_3A^{-1}=O$, suy ra $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

4.16. *Hướng dẫn*. Đặt $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$, từ $AX=XA$ giải được:

$$X=\begin{pmatrix}k+h&0\\k&h\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ với } k,h\in\mathbf{R}.$$

Vậy tập hợp đã cho lập thành không gian con 2 chiều với cơ sở gồm các véc tơ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.17. a) 5; b) $-2ab$; c) 0 .

4.18. a) $-4ab$ (chú ý dòng 1);

b) $5a - 2b + c$ (chú ý dòng 1);

c) 2 (chú ý cột 1) .

4.19. a) $ab(xt - yz)$; b) $aehj$; c) $dgij$.

Hướng dẫn. Hạ cấp dần dần.

4.20. a) 0 ; b) 0 ; c) 6 .

Hướng dẫn. Chú ý tới các dòng hoặc cột có số 0 .

4.21. a) -9 (chẳng hạn, cộng cột 2 vào cột 1) ;

b) 270 (rút 10 ở cột 2, nhân 10 vào cột 1) ;

c) -8.800 (nhân cột 2 với (-1) rồi cộng vào cột 1) ;

d) $48i$ (cộng cột 2 vào cột 1) .

4.22. a) 0 ; b) 0 ; c) 40 ;

d) -58 ; e) -2 ; f) 0 ;

g) -16 ; h) -10 ; i) $2\sqrt{15}(\sqrt{5}-1)$.

Hướng dẫn. Bằng cách áp dụng các tính chất của định thức, ta biến đổi các dòng hoặc cột để hạ cấp hoặc đưa định thức về dạng tam giác (đây là những thao tác cơ bản để tính các định thức bằng số, cần luyện tập) .

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) & \times(-3) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(1) \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} \times(-2) \quad \times(-7)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix};$$

h) $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 23 \\ 12 & 13 & 25 \\ -3 & 4 & 11 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 23 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 11 \end{vmatrix} \times(3) \quad \times(-11)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 10 \end{vmatrix};$$

i) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 5 & 2\sqrt{5} & \sqrt{10} \end{vmatrix} = \sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

$$= 2\sqrt{15}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{5} & 2 & 1 \end{vmatrix} \times(-1) \quad \times(-1) = 2\sqrt{15}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{5}-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(ở định thức cuối cùng, bạn đọc chú ý tới đường chéo phụ, hoặc đổi chỗ cột 1 với cột 3)

4.23. a) 16 (cộng các cột vào cột 1) ;

b) 0 (nhân dòng 2 với (– 1) cộng vào dòng 3, nhân dòng 1 với (– 1) cộng vào dòng 2) ;

c) 6 (nhân dòng 2 với (– 1) cộng vào dòng 1, biến đổi tiếp) .

4.24. a) – 16 ; b) – 74 ; c) – 5;

d) 24 ; e) – 9 ; f) 18 .

Hướng dẫn. Chú ý các dòng, các cột đặc biệt (dễ khử) để hạ cấp các định thức đã cho, chẳng hạn :

a) Để ý tới cột 1, trừ dòng trên vào dòng dưới, tiến hành từ dưới lên :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

c) Để ý tới cột 3, dùng dòng 3 cộng lần lượt vào các dòng khác:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

f) Cộng dòng 2 vào dòng 1, biến đổi tiếp .

4.25. a) $x = 3,\ x = -5$; b) $x = -2,\ x = 1 + 2i,\ x = 1 - 2i$.

4.26. *Hướng dẫn.* a) Nhân a, b, c lần lượt vào các dòng 1, 2, 3 rồi rút abc ở cột cuối, sau đó đổi chỗ các cột ;

b) Nhân a, b, c lần lượt vào các cột 1, 2, 3 .

4.27. *Hướng dẫn.*

a) Chẳng hạn cộng cột 2 vào cột 1, sau đó cộng cột 3 vào cột 2;

b) Biến đổi các dòng .

4.28. a) $-x(x^2 + x + 1)$; b) 4;

4.29. a) – 2.

b) $-2+10i$. *Hướng dẫn.* Cộng, trừ để xuất hiện các số 0, chẳng hạn, dùng dòng 2 khử dòng 3, sau đó dùng dòng 1 khử dòng 2 .

c) $-6+2i$. *Hướng dẫn.* Chú ý cột cuối .

d) $-6(3+5i)$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1 hoặc chú ý cột cuối .

4.30. a) $-19(3+2i)$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1 .

b) $-9(2+i)$. *Hướng dẫn.* Cách 1: Cộng cột 2 vào cột 3, sau đó cộng cột 1 vào cột 2; cách 2: rút (-1) ở dòng 2 cột 2, sau đó cộng các cột vào cột 1.

4.31. a) $(1-i)^3$; b) $-5+2i$.

4.32. a) 0 . *Hướng dẫn.* Chú ý rằng $z_k.z_h = z_{k+h}$, rút Z_1 ở dòng 2, suy ra 2 dòng đầu tỷ lệ với nhau .

b) $z_1(1-z_1)^3$. *Hướng dẫn.* Nhân $(-z_1)$ vào dòng k rồi cộng vào dòng k + 1, tiến hành lần lượt theo thứ tự k = 3, 2, 1. .

4.33. a) $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$; b) $\prod_{1\le j<i\le 4}(x_i-x_j)$.

4.34. *Hướng dẫn.* Định thức thứ nhất bằng chuyển vị của định thức thứ 2. Ta chỉ cần quy định thức thứ 2 về định thức Vandermondt: Chuyển cột cuối cùng với lần lượt các cột trước để đưa lên vị trí thứ nhất, như vậy mất n − 1 bước; đối với định thức thu được lại chuyển cột cuối cùng bằng n − 2 bước lên vị trí thứ 2 v.v.... Cuối cùng ta được W_n với $(n-1)+...+2+1$ bước chuyển .

4.35. *Hướng dẫn.* áp dụng công thức tính định thức Vandermondt :

a) $3(a+1)(2-a)$; b) $-(3\sqrt{3})i$;

c) $-16i$; d) $8\sqrt{6}(1-\sqrt{2})$.

4.36. *Hướng dẫn.* Kiểm tra đó là định thức Vandermondt .

4.37. *Hướng dẫn.* a) Bằng định thức Vandermondt, ta có:

$W(x,a,b,c) = (a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b) = 0$, suy ra $x = a$, $x = b$, $x = c$.

b) Đặt:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x & z \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 & z^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 & z^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & x^4 & z^4 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức D_1 theo cột cuối ta có :

$$D_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 .$$

Nhận xét rằng $a_3 = (-1)^{4+5} D = -D$.

Mặt khác, tính định thức D_1 ta có :

$$D_1 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-x).W(a,b,c,x) .$$

Trong D_1, số hạng chứa z^3 là :

$$(-a-b-c-x).W(a,b,c,x)z^3 = -Dz^3 .$$

Vậy, $D = (x+a+b+c).W(a,b,c,x)$, suy ra :

$$x = -(a+b+c), \ x = a, \ x = b, \ x = c .$$

4.38. a) $x^n + (-1)^{n+1} y^n$. *Hướng dẫn.* Khai triển theo cột 1, quy về 2 định thức tam giác .

b) $x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - a_{k+1\,k})$. *Hướng dẫn.* Nhân dòng (k + 1) với (– 1) rồi cộng vào dòng k, tiến hành lần lượt từ dòng 2, quy về định thức tam giác .

4.39. a) $a(x_1 - a)(x_3 - a)...(x_n - a)$. *Hướng dẫn.* Chú ý dòng 2 hoặc cột 2 ;

b) $6(n-3)!$. *Hướng dẫn.* Chú ý dòng 3 hoặc cột 3 .

4.40. a) $a_1\prod_{k=2}^{n}(1-a_k)$. *Hướng dẫn.* Dùng dòng 1 khử các dòng sau;

b) $x^{n-1}\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1, rút nhân tử chung .

4.41. a) $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1, rút nhân tử chung ;

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$. *Hướng dẫn.* Quy về định thức ở phần a) .

4.42. a) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.a_nx^{n-1}$. *Hướng dẫn.* Để ý dòng 1 hoặc cột n .

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1, rút nhân tử chung, sau đó dùng dòng k, khử dòng k + 1, tiến hành từ dưới lên quy về định thức cấp n – 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-n & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.43. a) $\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$. *Hướng dẫn.* Cách 1: quy về định thức tam giác (cộng tất cả các cột vào cột 1). Cách 2: tách cột cuối và dùng phương pháp truy hồi. Cách 3: dùng phương pháp đa thức như sau, coi định thức là đa thức f(x) biến x, bậc n + 1, hệ số cao nhất bằng 1, nhận xét rằng $f(a_i)=0$, $i=1,\dots,n$ và $f\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=0$.

b) $\left(x+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)+(a_0-x)\left(x+\sum_{k=2}^{n}a_k\right)\prod_{k=2}^{n}(x-a_k)$.

Hướng dẫn. Đặt $a_0=(a_0-x)+x$, tách cột 1 và áp dụng phần a).

4.44. a) $\left[1+\frac{a}{x_1-a}+...+\frac{a}{x_n-a}\right]\prod_{k=1}^{n}(x_k-a)$. *Hướng dẫn.* Tách cột cuối, truy hồi.

b) $\left[1+\frac{a_1}{x_1}+...+\frac{a_n}{x_n}\right]\prod_{k=1}^{n}x_k$. *Hướng dẫn.* Chẳng hạn, rút a_i ở cột i, $i=1,...,n$.

4.45. a) 1. *Hướng dẫn.* Nhân dòng 1 với (– 1) rồi cộng vào dòng 2, trên định thức vừa thu được lại nhân dòng 2 với (– 1) rồi cộng vào dòng 3 ...

b) $(-1)^{n-1}.x^{n-1}.\sum_{k=1}^{n}a_k$. *Hướng dẫn.* Cộng các cột vào cột 1, sau đó lại cộng các cột sau cột 2 vào cột 2, ... , cuối cùng được định thức tam giác.

4.46. a) $\prod_{k=1}^{n}(a_k-x_k)-\prod_{k=1}^{n}a_k$. *Hướng dẫn.* Đặt 0 = 1 – 1 (ở dòng 1, cột 1), sau đó tách dòng 1.

b) D = 0 nếu $n\geq 3$, $D=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$ nếu n = 2. *Hướng dẫn.* Chẳng hạn tách cột 1.

4.47. D = 0. *Hướng dẫn.* Tách tất cả các cột được 4^5 định thức, các định thức này đều bằng 0 vì chúng được lập bởi 5 cột trong số 4 cột sau :

$$\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\...\\e_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\...\\e_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\...\\e_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\...\\e_3\end{pmatrix}.$$

Chú ý: Có thể phân tích thành tích 2 định thức (xem Bài 4.52 sau này) :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & x \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \\ x^3 & x^3 & x^3 & x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.48. *Hướng dẫn.* Dùng phương pháp truy hồi .

a) Ký hiệu định thức đã cho bởi D_n, bằng cách hạ bậc ta có $D_n = 2xD_{n-1} - x^2D_{n-2}$ suy ra $D_n - xD_{n-1} = x(D_{n-1} - xD_{n-2})$. Tiếp tục quá trình ta có $D_n - xD_{n-1} = x^{n-2}(D_2 - xD_1)$. Vì $D_2 - xD_1 = x^2$ nên :

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + x^n \\ &= x^2D_{n-2} + 2x^n \quad (\text{thay } D_{n-1} = xD_{n-2} + x^{n-1}) \\ &= x^3D_{n-3} + 3x^n \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ &= x^{n-1}D_1 + (n-1)x^n \\ &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

b) Hạ cấp (theo cột 1) ta được $D_n = (x+y)D_{n-1} - xyD_{n-2}$. Suy ra :

(1) $D_n - xD_{n-1} = y(D_{n-1} - xD_{n-2}) = \ldots = y^{n-2}(D_2 - xD_1)$,

(2) $D_n - yD_{n-1} = x(D_{n-1} - yD_{n-2}) = \ldots = x^{n-2}(D_2 - yD_1)$.

Nhân y vào 2 vế của (1), nhân x vào 2 vế của (2) suy ra :

$$D_n = \frac{x^{n-1}(D_2 - yD_1) - y^{n-1}(D_2 - xD_1)}{x - y}$$

Thay D_2, D_1 vào vế phải, suy ra $D_n = \dfrac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$.

4.49. $AB = \begin{pmatrix} 10i & 0 \\ 0 & 10i \end{pmatrix}$, $|AB| = -100$.

4.50. a) 4^n. *Hướng dẫn.*

$$|A.A^t| = 4, |A^2| = |A|^2 = |A||A^t| = |A.A^t| = 4.$$

b) $AA^t = 4E, |A|^2 = 2^8$.

4.51. a) $D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. *Hướng dẫn.* áp dụng $D^2 = D.D^t$, ta có

$$D^2 = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix} \text{với } x = a^2 + b^2 + c^2, \quad y = ab + ac + bc.$$

Suy ra $D^2 = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2$. Xét dấu của a^3 trong D suy ra

$$D = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

b) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

4.52. *Hướng dẫn.* Phân tích thành tích 2 định thức :

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

b) $D = \begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 & 0 \\ \cos x_2 & \sin x_2 & 0 \\ \cos x_3 & \sin x_3 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos y_1 & \cos y_2 & \cos y_3 \\ \sin y_1 & \sin y_2 & \sin y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

4.53. $D = -W_4 + W_4 - W_4 + W_4 = 0$.

4.54. *Hướng dẫn.*

a) Khai triển theo 2 dòng đầu, ta có :

$$D = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2.$$

b) Khai triển theo 2 dòng đầu, ta có :

$$D = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2 .$$

c) Khai triển theo 2 dòng đầu, các định thức con cấp 3 lấy trên 3 dòng cuối đều bằng 0, vậy $D = 0$.

d) Khai triển theo dòng 3 và dòng 4 ta có :

$$D = (-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \ldots = (a^2 - b^2)^3 .$$

4.55. a) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.56. a) $r = 2$;

b) $r = 3$;

c) $r = 2$ nếu $a = -1$, $r = 3$ nếu $a \neq -1$;

d) $r = 2$ nếu $7 - 4a = 0$, $r = 3$ nếu $7 - 4a \neq 0$;

e) $r = 3$ nếu $a \neq 2, a \neq -1$; $r = 2$ nếu $a = 2$; $r = 1$ nếu $a = -1$.

f) $r = 2$ nếu $a = 10$; $r = 3$ nếu $a \neq 10$.

Hướng dẫn. a) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, suy ra hạng $r \geq 2$. Xét các định thức con cấp 3 chứa D_1, ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 11 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Vậy $r = 2$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (2-a)\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2$,

suy ra hạng r theo a .

f) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, suy ra hạng $r \geq 2$. Xét tiếp :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 2a \end{vmatrix},$$

ta có $D_2 = D_3 = 0$ nếu a = 10, suy ra hạng r theo a.

Chương 5

Hệ phương trình tuyến tính

Trong chương này, ta thấy sự liên hệ chặt chẽ giữa ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính và không gian véc tơ . Về cách giải, cách lấy nghiệm và biểu diễn nghiệm của hệ phương trình tuyến tính, ngoài việc tham khảo phần lý thuyết, bạn đọc có thể xem đáp số và hướng dẫn một số bài (chẳng hạn, Bài 5.8, 5.9, 5.10, 5.11); bằng cách đó ta thấy cấu trúc tập nghiệm, hệ nghiệm cơ bản, nghiệm riêng, nghiệm tổng quát ...

Cuối chương là một số bài điển hình về việc áp dụng hệ phương trình tuyến tính cho không gian véc tơ.

5.1. Phương pháp Cramer và phương pháp Gauss

Giải các hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer:

5.1. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.2. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

5.3. a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

5.4. a) $\begin{cases} x_1 + ix_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + (1-i)x_3 = -i, \\ x_1 + x_2 - x_3 = i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + ix_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + ix_2 - ix_3 = 1, \\ 2x_1 + (1+i)x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

5.5. a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

5.6. a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Giải các hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss:

5.7. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.8. a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$

5.9. a) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

5.10. a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 13x_3 = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

5.11. *Giải các hệ phương trình tuyến tính và so sánh tập nghiệm của chúng:*

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 17; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

Giải các hệ phương trình tuyến tính:

5.12. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

5.13. a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

5.14. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.15. a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

5.16. a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x_1 + ix_2 - ix_3 = 1 + 2i, \\ (1+i)x_1 - x_2 + (1-i)x_3 = -1 + 2i, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1 + ix_2 - ix_3 = 1+i, \\ (1+i)x_1 + (1-i)x_3 = 1+i, \\ -ix_1 + x_2 + (1-2i)x_3 = 1-i. \end{cases}$

5.2. Định lý Kronecker - Capelli

Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau:

5.19. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ a^2x_1 + b^2x_2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = c, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b, \\ x_1 + 2x_3 = a. \end{cases}$

5.20. a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = a, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + ax_4 = a. \end{cases}$

5.21. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = a+2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3a+3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3a+6. \end{cases}$

5.22. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = b; \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a. \end{cases}$

5.23. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + a^2x_3 = 1. \end{cases}$

5.24. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1, \\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ax_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

5.3. Áp dụng

5.25. Tìm ma trận nghịch đảo của :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$.

5.26. Giải bằng cách tìm ma trận nghịch đảo.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

5.27. Giả sử $A = (a_{ij})$ và $|A| \neq 0$, Chứng minh công thức :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij} $(i, j = 1,\ldots,n)$.

5.28. Cho các véc tơ $v_1 = (a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,v_n = (a_{n1},\ldots,a_{nn})$. Chứng minh rằng $\{v_1,\ldots,v_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi định thức $|a_{ij}| \neq 0$.

5.29. Chứng minh rằng v_1, v_2, v_3 lập thành cơ sở của C^3, tìm toạ độ của v đối với cơ sở đó:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2i \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$;

b) $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2i \\ 4+2i \\ 2 \end{pmatrix}$;

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5.30. Chứng minh rằng hệ các véc tơ sau là phụ thuộc tuyến tính, biểu diền mỗi véc tơ qua các véc tơ còn lại:

a) $\begin{cases} (3,\ 2,\ -3), \\ (2,\ 1,\ 2), \\ (3,\ 1,\ 9); \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2,\ 1,\ 0,\ 3), \\ (2,\ -2,\ 2,\ 1), \\ (2,\ 4,\ -2,\ 5). \end{cases}$

5.31. Hãy xác định a để véc tơ v biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2, v_3 :

a) $v = (a,1,1)$, $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,-4,3)$;

b) $v = (1,1,1)$, $v_1 = (2,3,5)$, $v_2 = (2,1,4)$, $v_3 = (7,a,a)$.

5.32. Chứng minh rằng $L_1 \oplus L_2 = \mathbf{R}^3$ với $L_1 = \mathscr{L}\{(1,2,2),(2,1,3)\}$, $L_2 = \mathscr{L}\{(3,2,-1)\}$. Phân tích $(-1,3,11) = u_1 + u_2$ với $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$.

5.33. Tìm phần bù trực giao $L^{\perp}$ của L và phân tích $v = u_1 + u_2$ với $u_1 \in L$, $u_2 \in L^{\perp}$:

a) $L = \mathscr{L}\{(1,-2,3)\}$ và $v = (1,-3,-7)$;

b) $L = \mathscr{L}\{(1,1,1,-2), (1,2,-1,1), (1,0,3,-5)\}$ và $v = (4,2,1,0)$;

c) $L = \mathscr{L}\{(1,2,1,1), (0,1,2,3), (0,2,2,1)\}$ và $v = (4,-7,2,-6)$.

5.34. Tìm phần bù trực giao của không gian con L sinh bởi v_1, v_2, v_3 theo tham số a với: $v_1 = (1,a,1,3)$, $v_2 = (-1,1,a,-2)$, $v_3 = (2,-5,1,7)$.

5.35. Cho các véc tơ V_1, V_2, V_3 và v. Hãy phân tích v thành tổng u + h, trong đó $u \in L = \mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$ và $h \perp L$. Biết:

a) $\begin{cases} v_1 = (1, & 0, & 1, & -2), \\ v_2 = (1, & 2, & -3, & 2), \\ v_3 = (3, & 2, & -5, & -2), \\ v = (3, & 5, & -2, & -5); \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 = (3, & 1, & 3, & 2), \\ v_2 = (3, & 3, & 8, & 5), \\ v_3 = (0, & 3, & 4, & 4), \\ v = (2, & -8, & 3, & 8). \end{cases}$

5.36. Giả sử N_0 là không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn với ma trận A và $r(A) = k$. Chứng minh rằng $dim\, N_0 = n - k$.

5.37. Cho không gian con $L = \mathscr{L}\{v_1, v_2, v_3\}$ với $v_1 = (1,1,-1,-2)$, $v_2 = (1,2,0,1)$, $v_3 = (5,8,-2,-1)$. Hãy viết hệ phương trình tuyến tính thuần nhất xác định L (tức hệ có không gian nghiệm $N_0 = L$).

5.38. Tìm chiều và một cơ sở của không gian con $\mathscr{L}(X) \cap \mathscr{L}(Y)$, biết :

a) $X = \{(1,3,2),(0,-1,1),(1,2,3)\}$,

$Y = \{(1,1,0),(1,-3,-2),(0,2,1)\}$;

b) $X = \{(1,1,1,-1),(1,2,-1,1),(1,3,0,2)\}$,

$Y = \{(1,0,1,-1),(1,3,-1,3)\}$.

Đáp số và hướng dẫn

*Trừ những trường hợp đã rõ ràng, các hệ phương trình được xét trên trường số K mà chúng thoả mãn, ở đây, để định ý, ta giải trên trường **R** là trường hợp phổ biến nhất.*

5.1. a) $(5,-5,1)$ (hay $x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 1$) ;

b) $(0,0,0)$.

5.2. a) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$; b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

5.3. a) $\frac{1}{18}(-5,1,7)$; b) $(0,1,1)$.

5.4. a) $(1,-1,-i)$; b) $\left(\frac{2+i}{5}, \frac{-1-i}{2}, \frac{-1-3i}{10}\right)$.

5.5. a) Hệ vô nghiệm. *Hướng dẫn*. $D = 0, D_1 \neq 0$.

b) $(-1,8,-5,-9)$.

5.6. *Hướng dẫn.* a) $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, hệ vô định. Ta nhận thấy định thức con cấp 2 của D ở góc trên, bên trái, khác 0, suy ra :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 + 2x_3, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 - 5x_3. \end{cases}$$

Đặt $x_3 = k$, bằng quy tắc Cramer, ta có $x_1 = -1 + 16k$, $x_2 = 2 - 23k$.

Vậy $(x_1, x_2, x_3) = (-1 + 16k, 2 - 23k, k) = (-1, 2, 0) + k(16, -23, 1)$ với k tuỳ ý thuộc **R**.

b) $D = D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$, quy về hệ Cramer ẩn x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} 3x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 3 - x_1, \\ 2x_2 & & +x_4 & = 1, \\ -4x_2 & +6x_3 & +x_4 & = 1 - 2x_1. \end{cases}$$

Nghiệm là $(0,0,0,1) + k(3,1,0,-2)$, $k \in \mathbf{R}$.

5.7. a) $(8, -1, -6)$; b) Hệ vô nghiệm .

5.8. a) $k(1,-1,-1)$, $k \in \mathbf{R}$. Hướng dẫn. Từ hệ phương trình đã cho, ta rút ra ma trận mở rộng và biến đổi sơ cấp trên ma trận đó :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \quad \times(-4) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(3) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Từ ma trận cuối cùng ta có :

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0, \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Đặt $x_3 = -k\ (\in \mathbf{R})$ suy ra $x_1 = k$, $x_2 = -k$. Vậy :

$$(x_1, x_2, x_3) = (k, -k, -k) = k(1, -1, -1) \text{ với } k \in \mathbf{R}.$$

b) $(3,1,0) + k(-2,1,1),\ k \in \mathbf{R}$. Hướng dẫn. Lập ma trận mở rộng của hệ phương trình và biến đổi sơ cấp trên ma trận đó :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 - 4x_3, \\ x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Đặt $x_3 = k\ (\in \mathbf{R})$ suy ra $x_2 = 1 + k$, $x_1 = 3 - 2k$. Vậy :

$$(x_1, x_2, x_3) = (3 - 2k, 1 + k, k) = (3,1,0) + k(-2,1,1),$$
$$k \in \mathbf{R}.$$

5.9. a) $x_1 = \dfrac{2 - 34k}{11}$, $x_2 = \dfrac{1 + 5k}{11}$, $x_3 = k$

$$\text{hay } (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{11}, \frac{1}{11}, 0\right) + k(-34,5,11) \text{ với } k \in \mathbf{R};$$

b) $(2,2,-1)$.

5.10. a) $(0,1,0) + k(4,-5,1)$ với $k \in \mathbf{R}$;

b) $k(-5,3,1,0) + h(0,-1,0,1)$ với $k, h \in \mathbf{R}$.

5.11. a) *Hướng dẫn*. Cách 1: Giải hệ thuần nhất trước, được tập nghiệm là $A = \{k(1,6,-4) \mid k \in \mathbf{R}\}$ (không gian con 1 chiều của $\mathbf{R}^3$). Giải hệ thứ 2, lấy một nghiệm riêng, chẳng hạn $u_0 = \left(\dfrac{7}{2}, -2, 0\right)$. Suy ra tập nghiệm của hệ thứ hai là $B = u_0 + A$ (đa tạp tuyến tính xác định bởi không gian con A và véc tơ u_0).

Chú ý: Nghiệm tổng quát của hệ 2 là

$$u = \left(\frac{7}{2}, -2, 0\right) + k(1,6,-4), k \in \mathbf{R}.$$

Ta biến đổi

$$u = \left(\frac{7}{2}, -2, 0\right) + \frac{1}{2}(1,6,-4) + \left(k - \frac{1}{2}\right)(1,6,-4)$$

$$= (4,1,-2) + h(1,6,-4) \text{ với } h \in \mathbf{R}.$$

Vậy ta cũng có $B = v_0 + A$ với $v_0 = (4,1,-2)$ (toạ độ chẵn).

Điều này cho thấy u_0 không phải là duy nhất.

Cách 2: Giải hệ không thuần nhất trước, quy về hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ \qquad\ \ 2x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Đặt $x_1 = k \in \mathbf{R}$, suy ra $x_2 = 6k - 23$, $x_3 = 14 - 4k$. Suy ra nghiệm là $(k, 6k-23, 14-4k) = (0,-23,14) + k(1,6,-4)$, $k \in \mathbf{R}$. Vậy ta có :

Nghiệm của hệ thứ nhất là $A = \{k(1,6,-4) \mid k \in \mathbf{R}\}$

Nghiệm của hệ thứ hai là $B = u_0 + A$ với $u_0 = (0,-23,14)$.

b) $A = \{\theta\}$; $B = (1,-3,3) + A$.

5.12. a) $k(-3,2,1,0) + h(5,-3,0,1)$, $k, h \in \mathbf{R}$;

b) $(1,0,0,0) + k(-3,2,1,0) + h(5,-3,0,1)$, $k, h \in \mathbf{R}$.

5.13. a) $(2,-1,0,0) + k(1,0,-1,0) + h(-2,1,0,1)$, $k, h \in \mathbf{R}$;

b) $k(2,-2,-5,0) + h(2,3,0,-5)$, $k, h \in \mathbf{R}$.

5.14. a) Hệ vô nghiệm ;

b) $(2,-1,0,0) + k(-3,1,2,0) + h(-2,1,0,1)$, $k, h \in \mathbf{R}$.

5.15. a) (2,0,0,0) (áp dụng quy tắc Cramer) ;

b) (0,0,0,0) .

5.16. a) $\frac{1}{6}(1,0,-1) + k(1,6,5)$, $k \in \mathbf{R}$; b) Hệ vô nghiệm .

5.17. $(1,1,-1)$.

5.18. $(1,1,0)$.

5.19. a) $a \neq \pm b$: hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{b^2-1}{b^2-a^2}, \dfrac{1-a^2}{b^2-a^2}\right)$,

$a = b = 0$: hệ vô nghiệm ,

$a = \pm b, a^2 \neq 1$: hệ vô nghiệm ,

$a = \pm b, a^2 = 1$: hệ có nghiệm $(1,0)+k(1,-1)$, $k \in \mathbf{R}$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = -a-10b+4c$, $x_2 = 3b-c$, $x_3 = a+5b-2c$

5.20. a) $a \neq 1$: hệ vô nghiệm ; $a = 1$ hệ có nghiệm :

$$(1,0,0)+k(5,-1,-3),\ k \in \mathbf{R}.$$

b) $a = -1$: hệ vô nghiệm ; $a \neq -1$ hệ có nghiệm :

$$\frac{1}{a+1}(3-a,0,a-1,a-1)+k(5,1,-3,0),\ k \in \mathbf{R}.$$

5.21. a) $a \neq 0, a \neq -2$: hệ có nghiệm duy nhất $\dfrac{1}{a}(a-4,2,2)$;

$a = 0$: hệ vô nghiệm ;

$a = 2$: hệ có nghiệm $(-1,2,0)+k(0,-1,1)$, $k \in \mathbf{R}$.

b) $a = 1$: hệ có nghiệm $(0,4,1)+k(1,-1,0)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a \neq 1$: hệ có nghiệm duy nhất $(1,a+2,a)$.

5.22. a) $b \neq 1$: hệ có nghiệm duy nhất $(a-4,4-a,1)$;

$b = 1$: hệ có nghiệm $(-1,2,0)+k(a-3,2-a,1)$, $k \in \mathbf{R}$.

b) $a \neq -2, a \neq 1$: hệ có nghiệm duy nhất $\dfrac{a}{a+2}(1,1,1)$;

$a = -2$: hệ vô nghiệm ;

$a = 1$: hệ có nghiệm $(1,0,0)+k(1,-1,0)+h(1,0,-1)$, $k, h \in \mathbf{R}$.

5.23. a) a, b, c khác nhau từng đôi một, hệ có nghiệm duy nhất :

$$x_1 = \frac{(b-1)(c-1)}{(b-a)(c-a)}, \quad x_2 = \frac{(1-a)(c-1)}{(b-a)(c-b)}, \quad x_3 = \frac{(a-1)(b-1)}{(c-b)(c-a)};$$

$a = b = c \neq 1$: hệ vô nghiệm ;

$a = b = c = 1$: hệ có nghiệm $(1,0,0) + k(1,-1,0) + h(1,0,-1)$, $k, h \in \mathbf{R}$;

$a = b \neq c$, $a \neq 1$, $c \neq 1$: hệ vô nghiệm ;

$a = b \neq c$, $a = 1$: hệ có nghiệm $(1,0,0) + k(1,-1,0)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a = b \neq c$, $c = 1$: hệ có nghiệm $(0,0,1) + k(1,-1,0)$, $k \in \mathbf{R}$.

b) $a \neq 2$, $a \neq -1$: hệ có nghiệm duy nhất : $(0,1,0)$;

$a = 2$: hệ có nghiệm $(0,1,0) + k(1,0,-1)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a = -1$: hệ có nghiệm $(0,1,0) + k(0,1,-1)$, $k \in \mathbf{R}$.

5.24. a) $a \neq 1$, $a \neq -3$: hệ có nghiệm duy nhất : $\frac{1}{a+3}(1,1,1,1)$;

$a = -3$: hệ vô nghiệm ;

$a = 1$: hệ có nghiệm

$(1,0,0,0) + k(1,-1,0,0) + h(0,1,-1,0) + t(0,0,1,-1)$, $k, h, t \in \mathbf{R}$.

b) $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$, $a \neq -6$: hệ có nghiệm duy nhất: $\frac{1}{a+6}(1,1,1,1)$;

$a = 1$: hệ có nghiệm $(1,0,0,0) + k(-6,1,1,1)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a = 2$: hệ có nghiệm $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right) + k(5,5,-3,-3)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a = 3$: hệ có nghiệm $\left(0,0,0,\frac{1}{3}\right) + k(1,1,1,-2)$, $k \in \mathbf{R}$;

$a = -6$: hệ vô nghiệm .

5.25. *Hướng dẫn*. Quy về việc giải các hệ phương trình tuyến tính và xem hướng dẫn Bài 4.12.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -2-i & i & 1 \\ 2i & 1 & -i \\ -1-2i & -1 & 1+i \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i & 1-i \end{pmatrix}$.

5.26. a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.27. *Hướng dẫn*. Giả sử $A = (a_{ij})$, $A^{-1} = (x_{ij})$. Để tính cột 1 của A^{-1} ta có:

$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ phương trình tuyến tính xác định cột 1 của A^{-1} có ma trận là :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}\right).$$

Bằng quy tắc Cramer ta có $x_{i1} = \frac{A_{1i}}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$.

Một cách tổng quát, ta có $x_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

5.28. *Hướng dẫn*. Lập hệ phương trình tuyến tính với định thức của nó là $|a_{ij}|^t$, và áp dụng $|a_{ij}| = |a_{ij}|^t$.

5.29. a) $(1+i,-1-i,-2i)$. *Hướng dẫn*. Đặt $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=v$ suy ra hệ phương trình được xác định bởi ma trận :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 2i \\ -1 & 0 & i & 1-i \\ 0 & i & -1 & 1+i \end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-i)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 2i \\ 0 & i & i & 3-i \\ 0 & i & -1 & 1+i \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} i & -1 & 0 & 2i \\ 0 & i & i & 3-i \\ 0 & 0 & -1-i & -2+2i \end{array}\right)$$

Từ ma trận cuối cùng ta suy ra x_1, x_2, x_3, đồng thời cho thấy định thức gồm 3 cột ở bên trái gạch dọc khác không, suy ra $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính (và do đó nó là cơ sở).

b) $(2+2i,1+i,1+i)$.

c) $(1,1,-2)$.

5.30. a) Chẳng hạn, ta có $v_1-3v_2+v_3=\theta$, suy ra $v_1=3v_2-v_3$, $v_2=\frac{1}{3}v_1+\frac{1}{3}v_3$, $v_3=-v_1+3v_2$;

b) $2v_1-v_2-v_3=\theta$.

5.31. a) $a=0,8$; b) $a\neq 24,5$.

5.32. $u_1=(5,7,9)$; $u_2=(-6,-4,2)$.

5.33. a) Chẳng hạn $L^{\perp}=\mathscr{L}\{v_1,v_2\}$ với $v_1=(2,1,0)$, $v_2=(3,0,-1)$, $u_1=(-1,2,-3)$, $u_2=(2,-5,-4)$.

(Chú ý rằng cơ sở của $L^{\perp}$ có thể chọn khác đi, nhưng u_1,u_2 luôn luôn là duy nhất) ;

b) $L^{\perp}=\mathscr{L}\{(1,0,3,2),(-3,2,1,0)\}$,

$u_1=(2,3,0,-1)$, $u_2=(2,-1,1,1)$.

c) $L^{\perp}=\mathscr{L}\{(5,-4,5,-2)\}$,

$u_1=-(1,3,3,4)$, $u_2=(5,-4,5,-2)$.

5.34. *Hướng dẫn.* Giả sử $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thuộc phần bù trực giao, suy ra $v.v_1 = v.v_2 = v.v_3 = 0$, do đó có hệ phương trình xác định bởi ma trận :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & -5-2a & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 3a+6 & a+2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nếu $a \neq -2$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(-7a-3, 1, -3, 2a+2), k \in \mathbf{R}$. Vậy $L^{\perp} = \mathscr{L}\{(-7a-3, 1, -3, 2a+2)\}$.

Nếu a= -2: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(3, 1, -1, 0) + h(-1, 1, 0, 1), k, h \in \mathbf{R}$. Vậy $L^{\perp} = \mathscr{L}\{(3, 1, -1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$.

5.35. a) *Hướng dẫn.* Cách 1: áp dụng Bài 5.33. Cách 2: Đặt $u = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ và đặt $v = u + h$ với điều kiện h trực giao với v_1, v_2, v_3. Nhân lần lượt v_1, v_2, v_3 vào phía trái 2 vế của $u + h = v$ ta có hệ phương trình đối với x_1, x_2, x_3 là:

$$\begin{cases} (v_1.v_1)x_1 + (v_1.v_2)x_2 + (v_1.v_3)x_3 = v_1.v, \\ (v_2.v_1)x_1 + (v_2.v_2)x_2 + (v_2.v_3)x_3 = v_2.v, \\ (v_3.v_1)x_1 + (v_3.v_2)x_2 + (v_3.v_3)x_3 = v_3.v, \end{cases}$$

Thay số và giải, ta được $x_1 = 3, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = \frac{1}{4}$

suy ra $u = (5, 3, -2, -4)$ và do đó $h = v - u = (-2, 2, 0, -1)$.

b) $u = (3, 0, 4, 1)$, $h = (-1, -8, -1, 7)$. Chú ý: Khi tìm được phần bù trực giao $L^{\perp}$ sinh bởi $w = (1, 8, 1, -7)$, ta có thể tìm h như sau: đặt $h = \lambda w$, từ $u = v - \lambda w$ và $u.v = 0$ suy ra $\lambda = \frac{v.w}{w.w} = -1$. Vậy $h = (-1, -8, -1, 7)$ và do đó $u = (3, 0, 4, 1)$.

5.36. *Hướng dẫn*. Hệ phương trình đã cho được rút gọn còn k phương trình cho bởi k véc tơ (n thành phần) độc lập tuyến tính :

$$\begin{cases} v_1 = (a_{11},...,a_{1n}), \\ \quad ... \ ... \ ... \ ... \\ v_k = (a_{k1},...,a_{kn}). \end{cases}$$

Giả sử $L = \mathscr{L}\{v_1, ..., v_k\}$ và $dim N_0 = h$.

Vì $L \cap N_0 = O$ nên $dim(L + N_0) = k + h$ và vì $L + N_0 \subseteq \mathbf{R}^n$ nên $k + h \le n$ hay $h \le n - k$.

Mặt khác, vì trong N_0 luôn tìm được n - k véc tơ độc lập tuyến tính nên $h \ge n - k$.

Vậy h = n - k.

Chú ý. Có thể áp dụng $dim L^{\perp} = n - k$ và $N_0 \subseteq L^{\perp}$ với $dim N_0 \ge n - k$.

5.37. *Hướng dẫn*. Phần bù trực giao của L là $L^{\perp} = \mathscr{L}\{(5,-3,0,1),(2,-1,1,0)\}$. Vì L lại là phần bù trực giao của $L^{\perp}$ nên L là không gian nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \quad + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 \quad + x_3 = 0. \end{cases}$$

5.38. a) $\mathscr{L}\{(3,11,4)\}$. Hướng dẫn. Cách 1: Áp dụng Bài 5.37, ta có các phương trình tuyến tính xác định lần lượt $\mathscr{L}(X)$ và $\mathscr{L}(Y)$ là $5x_1 - x_2 - x_3 = 0$ và $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Vậy giao của 2 không gian con đó là nghiệm của hệ hai phương trình trên .

Cách 2: $\mathscr{L}(X)$ có cơ sở là $\{u_1 = (1,3,2), u_2 = (0,-1,1)\}$, $\mathscr{L}(Y)$ có cơ sở là $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,2,1)\}$. Giả sử $v \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{L}(Y)$, suy ra $v = x_1u_1 + x_2u_2 = y_1v_1 + y_2v_2$. Vậy ta có hệ phương trình tuyến tính ẩn x_1, x_2, y_1, y_2 là :

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-y_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-y_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Giải được, chẳng hạn $y_1 = 3k$, $y_2 = 4k$, suy ra $v = k(3,11,4)$ với $k \in \mathbf{R}$.

b) $\mathscr{L}\{(1,6,-3,7)\}$.

Chương 6

Ánh xạ tuyến tính

Chương này hội tụ nhiều nội dung quan trọng của đại số tuyến tính, các kỹ thuật tính toán cũng phong phú và hay. Một số bài toán có nhiều cách giải khác nhau, chẳng hạn việc xác định ma trận và việc tìm ảnh, tìm nhân của một ánh xạ tuyến tính. Tuy nhiên, các bài về nội dung này được nâng cấp dần dần, tuỳ theo những phương pháp được trang bị, cần tập trung giải các bài tập một cách kỹ lưỡng và trình tự.

6.1. Ánh xạ tuyến tính

6.1. Giả sử V, V' là các K- không gian véc tơ và $f : V \to V'$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ và $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, $\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$;

b) $f(\lambda u + \delta v) = \lambda f(u) + \delta f(v)$, $\forall \lambda, \delta \in K, \forall u, v \in V$.

6.2. Chứng minh rằng, nếu $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính thì:

a) $f(\theta) = \theta$;

b) $f(-v) = -f(v), \forall v \in V$;

c) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i), \forall \lambda_i \in K, \forall v_i \in V, i = 1,\ldots,n$;

d) Nếu $\{v_1,...,v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính thì $\{f(v_1),...,f(v_n)\}$ phụ thuộc tuyến tính ;

e) Nếu $\{f(v_1),...,f(v_n)\}$ độc lập tuyến tính thì $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính.

6.3. Kiểm tra xem các ánh xạ sau đây có là ánh xạ tuyến tính:

a) $id_V : V \to V, id_V(u) = u, \forall u \in V$;

b) $\theta : V \to V', \theta(u) = \theta, \forall u \in V$ (được gọi là ánh xạ tuyến tính tầm thường và do đó cũng được kí hiệu bởi θ).

6.4. Kiểm tra xem các ánh xạ sau có là tuyến tính (chú ý rằng nếu $v = (x_1,...,x_n)$ thì thay cho $f((x_1,...,x_n))$ ta viết $f(x_1,...,x_n)$) :

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2)$ (ta hiểu (x_1, x_2, x_3) là "biến" và không viết $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$) ;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,0)$;

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1,x_2) = (x_1,x_2,0)$;

d) $\varphi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$, $\varphi(p(x)) = p'(x)$ (phép lấy đạo hàm) .

6.5. Chứng tỏ các ánh xạ sau là tuyến tính:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, f(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,x_2+x_3)$;

c) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_1+x_2,x_2+2x_3)$;

d) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2+x_3,x_1+x_2-x_3,2x_1)$.

6.6. Kiểm tra xem các ánh xạ sau có là tuyến tính không ?

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2,x_2,x_3)$;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3+1)$;

c) $\varphi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$, $\varphi(p(x)) = a + p(x)$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ cho trước).

6.7. Cho các không gian véc tơ $V = M(2x3, \mathbf{R})$, $V' = M(3x2, \mathbf{R})$.

Chứng tỏ các ánh xạ sau là tuyến tính:

a) $f : V \to V', f(X) = X'$, $\forall X \in V$;

b) $f : V \to V, f(X) = AX$, $\forall X \in V$, trong đó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận thực cho trước .

6.8. Giả sử $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) Nếu U là không gian con của V thì f(U) là không gian con của V';

b) Nếu U_1, U_2 là các không gian con của V và $U_1 \subseteq U_2$ thì $f(U_1)$ là không gian con của $f(U_2)$;

c) Nếu S là tập con của V thì $f(\mathscr{L}(S)) = \mathscr{L}(f(S))$;

d) Nếu U là không gian con của V' thì $f^{-1}(U) = \{v \in V | f(v) \in U\}$ là không gian con của V .

6.9. Tìm ảnh và nhân của:

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$;

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2)$;

6.10. Tìm điều kiện đối với véc tơ $v = (a, b, c)$ để $v \in \operatorname{Im} f$ với $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 + x_3)$;

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 6x_3)$.

6.11. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4).$$

Tìm tập các véc tơ v sao cho $f(v) = (1, 2, 3)$.

6.12. Chứng minh rằng, nếu $\{v_1,...,v_n\}$ là cơ sở của V thì $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{f(v_1),...,f(v_n)\}$. Tìm Imf, Kerf của các ánh xạ tuyến tính f trong Bài 6.5.

6.13. Hãy thiết lập ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ khi cho n "giá trị" $f(v_1),...,f(v_n)$ thuộc V' trong đó $\{v_1,...,v_n\}$ là cơ sở của V.

6.14. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ tuyến tính f sao cho $f(u_i) = v_i$, tìm Imf, Kerf :

a) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,2)$, $u_3 = (1,2,3)$,
$v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (2,3,4)$;

b) $u_1 = (2,3,4)$, $u_2 = (1,-2,3)$, $u_3 = (-3,2,9)$,
$v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,1)$, $v_3 = (3,1)$.

6.15. Có tồn tại hay không ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sao cho $f(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$. Trong trường hợp nào f là khả nghịch?

a) $\begin{cases} u_1 = (1,2,3), \\ u_2 = (2,-1,3), \\ u_3 = (0,1,1), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (1,2,0), \\ v_2 = (0,1,2), \\ v_3 = (2,0,1); \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = (1,1,-1), \\ u_2 = (-1,1,1), \\ u_3 = (1,-1,1), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (1,2,-1), \\ v_2 = (1,-1,0), \\ v_3 = (2,1,-1); \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = (1,1,1), \\ u_2 = (0,-1,1), \\ u_3 = (1,0,2), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (1,0,1), \\ v_2 = (0,1,1), \\ v_3 = (0,0,1); \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = (1,1,1), \\ u_2 = (0,-1,1), \\ u_3 = (1,0,2), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (1,0,1), \\ v_2 = (0,1,1), \\ v_3 = (1,1,2). \end{cases}$

6.16. Chứng minh rằng nếu f là ánh xạ tuyến tính thì 3 điều kiện sau tương đương :

a) f là đơn cấu;

b) $\mathrm{Ker} f = \{\theta\}$;

c) f biến mỗi hệ véc tơ độc lập tuyến tính thành hệ độc lập tuyến tính.

6.17. Giả sử $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính và $dim V = dim V' = n$. Chứng minh rằng 3 điều kiện sau tương đương:

a) f là đơn cấu;

b) f là đẳng cấu;

c) f là toàn cấu.

6.18. Chứng minh rằng :

a) Tích 2 đơn cấu là một đơn cấu;

b) Tích 2 toàn cấu là một toàn cấu;

c) Mọi K- không gian véc tơ n chiều đều đẳng cấu với K^n.

6.19. Đặt $H = \mathrm{Hom}_K(V, V')$ (Tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào V'). Chứng minh rằng H là K- không gian véc tơ đối với phép cộng ánh xạ tuyến tính và phép nhân hệ số thuộc K.

6.20. Cho R^n với $n \geq 2$ và $1 \leq k < n$. Cho các ánh xạ p,q: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $p(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$, $q(x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0,x_{k+1},\ldots,x_n)$.

Tính p + q, p – q, p.q và q.p, tìm ảnh và nhân của chúng.

6.21. Cho $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x], \varphi(p(x)) = p'(x)$. Tìm $\mathrm{Im}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

6.22. Chứng minh rằng:

a) $\mathrm{Ker} f \subseteq \mathrm{Ker}(g \,.\, f)$;

b) $\mathrm{Im}(g \,.\, f) \subseteq \mathrm{Im} g$.

6.23. Hạng và số khuyết của ánh xạ f được ký hiệu lần lượt là *rank* f, *defect* f. Tính *rank* f, *defect* f với :

a) f = p hoặc f = q (Bài 6.20);

b) f = φ (Bài 6.21);

c) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 + 7x_3)$.

6.24. Chứng minh rằng:

a) $rank(g \,.\, f) \leq \text{Min}\{rank\ f, rank\ g\}$;

b) $rank(g + f) \leq rank\ f + rank\ g$;

c) $rank(\lambda f) \leq rank\ f \ (\lambda \in K)$.

6.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

6.25. a) Viết ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 3x_2)$ trong cặp cơ sở chính tắc, tính f(1,1), f(1,-1) bằng ma trận đó ;

b) Viết ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ trong cặp cơ sở chính tắc biết $f(e_1) = (1,2)$, $f(e_2) = (3,1)$, $f(e_3) = (2,-1)$. Tìm ảnh của véc tơ $u = (1,-2,3)$ và tập nghịch ảnh của véc tơ $v = (1,1)$.

6.26. Viết ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở chính tắc, tìm Imf, Kerf :

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(1,2) = (1,-2), f(2,1) = (-1,2)$.

6.27. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(1,1) = (1,-2)$, $f(-1,1) = (3,4)$, viết ma trận của f trong:

a) Cơ sở chính tắc ;

b) Cơ sở $\{(1,1),(1,-1)\}$.

6.28. Viết ma trận của ánh xạ tuyến tính f (khi không nói gì thêm, ta hiểu các không gian véc tơ là $\mathbf{R}^n$, cơ sở là cơ sở chính tắc), biết $f(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$:

a) $\begin{cases} u_1 = (1,1,1), \\ u_2 = (0,1,1), \\ u_3 = (0,0,1), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (3,1), \\ v_2 = (2,3), \\ v_3 = (3,1); \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = (1,1,-1), \\ u_2 = (1,2,0), \\ u_3 = (0,1,2), \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = (2,3,1), \\ v_2 = (1,3,3), \\ v_3 = (0,-3,5). \end{cases}$

6.29. Xét không gian véc tơ K^n và các cơ sở: $B_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$, với $u_i = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$, $i = 1, \dots, n$.

a) Hãy lập ma trận A của phép biến đổi id trong cặp cơ sở B_1 và B_0.

b) Bằng ma trận A hãy lập công thức về mối quan hệ giữa toạ độ của mỗi véc tơ $v \in K^n$ đối với B_0 và B_1.

6.30. Giả sử $\{u_1,\dots,u_n\}$ là cơ sở của K^n và A là ma trận với các véc tơ cột là $u_1,\dots,u_n$; Giả sử $\{v_1,\dots,v_n\}$ là họ véc tơ bất kỳ của K^m và B là ma trận với các véc tơ cột là $v_1,\dots,v_n$. Giả sử $f : K^n \to K^m$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $f(u_i) = v_i$. Chứng minh rằng ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc là $X = BA^{-1}$.

6.31. Áp dụng Bài 6.30 để tính ma trận của các ánh xạ tuyến tính trong Bài 6.28.

6.32. Tìm ảnh và nhân của các ánh xạ tuyến tính cho bởi các ma trận sau :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} i & 0 & 1-i \\ 1 & -i & 2+i \\ 0 & i & -2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$.

6.33. Cho các ánh xạ tuyến tính $f,g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sao cho: $f(1,1) = (1,2)$, $f(1,2) = (1,3)$, $g(1,-1) = (2,2)$, $g(1,1) = (-2,2)$. Tính ma trận A của f + g, ma trận B của 2f - g, ma trận C của f.g, ma trận D của g.f, ma trận F của 2f.3g.

6.34. Cho các ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ với:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3);$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3);$$
$$h(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2).$$

Tìm ma trận của f + g và h.f + h.g .

6.35. Tìm *dim* Imf, *dim* Img, *dim* Im(f + g), *dim* (Imf $\cap$ Img) với :

a) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.36. Tính *rank*(f.g) và *rank*(g.f) biết:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.37. Tìm f^{-1} biết ma trận của f là: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.38. Chứng minh rằng, tập hợp các phép đẳng cấu từ K- không gian véc tơ V n chiều vào chính nó lập thành một nhóm đối với phép nhân ánh xạ. Hơn nữa, nhóm này đẳng cấu với nhóm nhân các ma trận trên K, cấp n, khả nghịch .

Đáp số và hướng dẫn

6.2. *Hướng dẫn.* c) Chứng minh bằng quy nạp theo n ;

d) Giả sử $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \theta$ với $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,n$, không cùng bằng 0, tác động f vào 2 vế, ta có $\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = \theta$, vì $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ không cùng bằng 0 suy ra $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ phụ thuộc tuyến tính ;

e) Áp dụng phần d) .

6.4. Đều là các ánh xạ tuyến tính .

6.5. a) *Hướng dẫn.* Giả sử $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, thuộc R^2 và $\lambda \in \mathbf{R}$, ta có :

$$\begin{aligned} (1) \quad f(u+v) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\ &= (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) \\ &= f(u) + f(v) ; \\ (2) \quad f(\lambda u) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_1 + \lambda x_2) \\ &= \lambda(x_1, x_2, x_1 + x_2) = \lambda f(u) . \end{aligned}$$

6.6. Đều không là ánh xạ tuyến tính .

Hướng dẫn. a) Giả sử $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ và $\lambda \in \mathbf{R}$:

$f(\lambda u) = (\lambda^2 x_1 x_2, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda(\lambda x_1 x_2, x_2, x_3)$, dễ dàng chỉ ra λ và u để $f(\lambda u) \neq \lambda f(u)$ (chẳng hạn $\lambda = -1$, $u = (1,-1,0)$) .

6.7. *Hướng dẫn.* Từ lý thuyết ma trận, ta có:

a) $f(X+Y) = (X+Y)^t = X^t + Y^t = f(X) + f(Y)$ và

$f(\lambda X) = (\lambda X)^t = \lambda X^t = \lambda f(X)$, $\forall X, Y \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R}$;

b) $f(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f(X) + f(Y)$ và

$f(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda f(X)$, $\forall X, Y \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

6.9. a) *Hướng dẫn.* Giả sử $u = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$, lấy $v = (y_1, 0, y_2) \in \mathbf{R}^3$, ta có f(v) = u. Vậy f là toàn ánh hay $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$.

Giả sử $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$; $u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = \theta \Leftrightarrow (x_1, x_3) = \theta$ $\Leftrightarrow u = (0, x_2, 0)$. Vậy $\operatorname{Ker} f = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbf{R}\} = \mathscr{L}\{e_2\}$.

b) $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{e_2, e_3\}$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{e_1\}$.

c) $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{e_2, e_3\}$, $\operatorname{Ker} f = O$.

6.10. a) $2a - b - c = 0$. *Hướng dẫn.* Quy về việc giải hệ phương trình tuyến tính với ma trận là: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 3 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$;

b) $a, b, c \in \mathbf{R}$.

6.11. $(2, -1, 0, 0) + k(1, 0, 1, -2)$, $k \in \mathbf{R}$. *Hướng dẫn.* Xem hướng dẫn Bài 6.10 (chính là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất).

6.12. a) *Hướng dẫn.* $f(e_1) = f(1,0) = (1,0,1)$, $f(e_2) = f(0,1) = (0,1,1)$. Vậy $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{f(e_1), f(e_2)\} = \mathscr{L}\{(1,0,1), (0,1,1)\}$.

Mặt khác, $u = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = \theta$ $\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (0,0,0)$. Vậy $\operatorname{Ker} f = O$.

Chú ý. Vì $dim \operatorname{Ker} f + dim \operatorname{Im} f = dim \mathrm{R}^2$ với $dim \operatorname{Im} f = 2$ ta cũng suy ra $\operatorname{Ker} f = O$.

b) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(1, -1, 1)\}$.

c) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Ker} f = O$.

d) $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{(1,1,2),(1,-1,0)\}$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(0,1,1)\}$.

6.13. *Hướng dẫn.* Với mỗi $v \in V, v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, đặt $f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i)$, và chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính.

6.14. a) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Ker} f = O$. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 6.13. Để tìm $\operatorname{Im} f$ ta xét hệ sinh của nó là $\{v_1, v_2, v_3\}$, hệ này độc lập tuyến tính, suy ra $dim \operatorname{Im} f = 3$ và do đó $dim \operatorname{Ker} f = 0$.

b) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(7,-3,1)\}$.

Hướng dẫn. Giả sử $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ và $f(u) = \theta$ suy ra $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = \theta$, giải được $(x_1, x_2, x_3) = (k, 2k, -k)$ với $k \in \mathbf{R}$. Vậy $u = k(u_1 + 2u_2 - u_3) = k(7,-3,1)$.

6.15. a) Có, f khả nghịch (vì $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính);

b) Có, f không khả nghịch (vì $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính) ;

c) Không (vì $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính trong khi $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính) ;

d) Có, mặc dù $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính. *Hướng dẫn.* Vì $u_1 + u_2 = u_3$, $v_1 + v_2 = v_3$, đặt ánh xạ f sao cho $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$, và chẳng hạn $f(e_3) = e_3$ (bổ sung e_3 vào $\{u_1, u_2\}$ để được cơ sở của $\mathbf{R}^3$; ánh xạ này vẫn đảm bảo $f(u_3) = v_3$).

6.17. *Hướng dẫn.* Để luyện tập, bạn đọc có thể chứng minh bất kỳ 2 trong số 3 điều kiện đã cho là tương đương. Ở đây, chứng minh bằng 3 bước:

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

1) Giả sử f là đơn cấu và $\{v_1, \dots, v_n\}$ là cơ sở của V. Theo Bài 6.16 $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ độc lập tuyến tính trong V', do đó là cơ sở của V', suy ra f là đẳng cấu.

2) f là đẳng cấu thì đương nhiên là toàn cấu.

3) f là toàn cấu thì $dim\,\mathrm{Im}\,f = dim\,V' = n$. Vậy $dim\,\mathrm{Ker}\,f = dim\,V' - dim\,\mathrm{Im}\,f = 0$, suy ra $\mathrm{Ker}\,f = O$ hay f là đơn cấu.

6.18. c) *Hướng dẫn.* Giả sử V là K - không gian véc tơ với *dim* V = n và $\{u_1, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của nó. Xét ánh xạ $f : V \to K^n$ xác định bởi $f(u_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$ (hoặc $f(u) = (x_1, \dots, x_n)$, $\forall u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \in V$).

6.20. $p + q = id$; $(p - q)(v) = (x_1, \dots, x_k, -x_{k+1}, \dots, -x_n)$, $\forall v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$; $p.q = q.p = \theta$.

6.21. $n = 0$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi = O$, $n \geq 1$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbf{R}_{n-1}[x]$, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbf{R}$.

6.23. a) *rank* p = k, *defect* p = n - k, *rank* q = n - k, *defect* q = k.

b) *rank* $\varphi = n - 1$, *defect* $\varphi = 1$ với $n \geq 1$, *rank* φ = *defect* φ = 0 với n = 0.

c) *rank* f = 2, *defect* f = 1.

6.24. a) *Hướng dẫn.* Ta sử dụng kết quả sau: Nếu $\varphi : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính và A, B, $A \subseteq B$ là các không gian con của X thì :

(1) $dim\varphi(A) \leq dim A$,

(2) $dim\varphi(A) \leq dim\varphi(B)$.

Giả sử $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ là các ánh xạ tuyến tính. Ta có $\mathrm{Im}(g.f) = (gf)(V) = g(f(V))$. Suy ra :

(1) $dim\,g(f(V)) \leq dim\,f(V) = rank\,f$,

(2) $dim g(f(V)) \le dim g(V') = rank\, g$ (vì $f(V) \subseteq V'$).

b) Giả sử $f, g : V \to V'$ là các ánh xạ tuyến tính và $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V. Khi đó :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathscr{L}\{f(v_1)+g(v_1), \ldots, f(v_n)+g(v_n)\}$$
$$\subseteq \mathscr{L}\{f(v_1)+\ldots+f(v_1)\} + \mathscr{L}\{g(v_1)+\ldots+g(v_1)\}.$$

c) Xét các trường hợp $\lambda = 0; f = \theta; \lambda \ne 0$ và $f \ne \theta$.

6.25. a) *Hướng dẫn.* Cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$ là $\{e_1, e_2\}$, của $\mathbf{R}^3$ là $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Cần biểu diễn $f(e_1) = t_{11}e'_1 + t_{21}e'_2 + t_{31}e'_3$ và $f(e_2) = t_{12}e'_1 + t_{22}e'_2 + t_{32}e'_3$. Ta có:

$$f(e_1) = f(1,0) = (2,1,1) = 2e'_1 + e'_2 + e'_3,$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,3) = e'_1 - e'_2 + 3e'_3.$$

Vậy ma trận của f trong cặp cơ sở đã cho là:

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ảnh $f(u)$, $u = (1,1)$ được viết dưới dạng cột là :

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) *Hướng dẫn.* Cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ là $\{e_1, e_2, e_3\}$, của $\mathbf{R}^2$ là $\{e'_1, e'_2\}$. Từ giả thiết ta có :

$$f(e_1) = e'_1 + 2e'_2,\ f(e_2) = 3e'_1 + e'_2,\ f(e_3) = 2e'_1 - e'_2.$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

và $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Giả sử $u = (x_1, x_2, x_3) \in f^{-1}\{(1,1)\}$, ta có :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{hay} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Suy ra $f^{-1}\{(1,1)\} = \frac{1}{5}(2,1,0) + \{k(1,-1,1) \mid k \in \mathbf{R}\}$.

6.26. a) *Hướng dẫn.* Để tìm ma trận của f ta có 2 cách.

Cách 1: tính $f(e_1), f(e_2)$ (xem hướng dẫn Bài 6.25).

Cách 2: viết ảnh $f(x_1, x_2)$ theo cột ta có:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra ma trận của f (trong cặp cơ sở chính tắc) là: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Để tìm ảnh và nhân của f ta có 2 cách. Cách 1: tính Imf trước, nó sinh bởi các véc tơ $(1,1), (2,-1)$ (rút từ 2 cột của A); vì chúng độc lập tuyến tính suy ra $dim\,\mathrm{Im}f = 2$ tức $\mathrm{Im}f = \mathbf{R}^2$ và do đó $\mathrm{Ker}f = O$. Cách 2: tìm Kerf trước, đó là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Giải được $\mathrm{Ker}f = O$, suy ra $\mathrm{Im}f = \mathbf{R}^2$.

b) Tính được : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Số chiều của Imf chính bằng số véc tơ cột độc lập tuyến tính hay chính bằng hạng của ma trận A (vì vậy có thể tính hạng bằng hàng của ma trận), suy ra

$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}$. Tính Kerf bằng hệ phương trình hoặc lấy $f(e_1) - f(e_2) = \theta$ (cột 1 trừ đi cột 2) và $f(e_1) - f(e_3) = \theta$ (cột 1 trừ đi cột 3), suy ra $e_1 - e_2 = (1,-1,0)$ và $e_1 - e_3 = (1,0,-1)$ lập thành cơ sở của Kerf (biết trước $dim \operatorname{Ker} f = 3 - dim \operatorname{Im} f = 2$).

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{(1,-2)\}$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(1,1)\}$.

6.27. a) *Hướng dẫn.* Đặt $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (-1,1)$,

$$v_1 = (1,-2), \quad v_2 = (3,4).$$

Cách 1: Biểu diễn e_i qua u_1, u_2 và do đó tính được $f(e_i)$, $i = 1, 2$. Giải được :

$$e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \Rightarrow f(e_1) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = (-1,-3),$$

$$e_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \Rightarrow f(e_2) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = (2,1).$$

$$\text{Vậy } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cách 2: $f(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$

hay $f(2e_2) = v_1 + v_2 \Rightarrow f(e_2) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = (2,1)$;

$$f(u_1 - e_2) = v_1 - f(e_2) \Rightarrow f(e_1) = (1,-2) - (2,1) = (-1,-3).$$

Quá trình này được viết bằng ma trận như sau :

$$\begin{cases} f: u_1 \mapsto v_1 \\ f: u_2 \mapsto v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,1) & \mapsto (1,-2) \\ (-1,1) & \mapsto (3,4) \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Ma trận cuối cùng này có nghĩa là

$$f(e_1) = (-1,-3),\ f(e_2) = (2,1)\ .$$

b) *Hướng dẫn*. Biểu diễn $f(1,1)$ và $f(-1,1)$ qua $\{(1,1),(-1,1)\}$, suy ra :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.28. a) *Hướng dẫn*. Lập ma trận M và biến đổi sơ cấp theo dòng của M :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ x(-1) \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ x(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Vậy ta có $f(e_1) = (1,-2), f(e_2) = (-1,2), f(e_3) = (3,1)$, suy ra ma trận cần tìm là $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.29. *Hướng dẫn*. a) $id(u_i) = u_i = a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ni}e_n, i = 1,\ldots,n$. Suy ra $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

b) Giả sử $v \in K^n$, khi đó $v = (x_1,\ldots,x_n)_{B_0}$ (toạ độ cũ), mặt khác $v = (y_1,\ldots,y_n)_B$ (toạ độ mới). Bằng ánh xạ tuyến tính ta có :

$$id(v) = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

6.30. *Hướng dẫn.* Xét các cơ sở (I):$\{e_1,...,e_n\}$, (II):$\{u_1,...,u_n\}$ của K^n và (I'):$\{e'_1,...,e'_m\}$ của K^m. Theo đề bài, B chính là ma trận của f trong cặp cơ sở (II), (I').

Giả sử $v \in K^n$, $v = (x_1,...,x_n)_I = (x'_1,...,x'_n)_{II}$, theo Bài 6.29, ta có :

$$(1) \qquad A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Bằng ánh xạ tuyến tính ta có :

$$(2) \quad f(v) = B\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{II} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{I'},$$

$$(3) \quad f(v) = X\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{I} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{I'}.$$

Thay (1) vào (2) :

$$(4) \quad f(v) = BA^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{I} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{I'}.$$

Vì ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở (cố định) là duy nhất, từ (3) và (4) suy ra $X = BA^{-1}$.

6.31. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 6.30.

6.32. a) $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}\{(1,3,2),(-1,2,1)\}$, $\operatorname{Ker} f = O$;

b) $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(1,1,-1)\}$;

c) $dim \operatorname{Im} f = 2$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(5,6,-9,0),(0,0,0,1)\}$;

d) $dim \operatorname{Im} f = 2$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}\{(1,1,-2)\}$;

e) $dim \operatorname{Im} f = 3$, $\operatorname{Ker} f = O$.

6.33. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$D = 2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = 12\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.34. $2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.35. a) $dim\,\mathrm{Im}\,f = 2$, $dim\,\mathrm{Im}\,g = 3$,

$dim\,\mathrm{Im}(f+g) = 2$, $dim\,(\mathrm{Im}\,f \cap \mathrm{Im}\,g) = 2$.

b) $dim\,\mathrm{Im}\,f = 2$, $dim\,\mathrm{Im}\,g = 2$,

$dim\,\mathrm{Im}(f+g) = 2$, $dim\,(\mathrm{Im}\,f \cap \mathrm{Im}\,g) = 1$.

6.36. $rank\,(f.g) = 0$, $rank\,(g.f) = 1$.

6.37. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.38. *Hướng dẫn.* Xét một cơ sở cố định của V. Với mỗi phép đẳng cấu f trên V ta cho tương ứng ma trận A_f của f đối với cơ sở đã cho, phép ứng này là đẳng cấu nhóm cần tìm .

Chương 7

Phép biến đổi tuyến tính

Phép chuyển cơ sở, thực chất là phép biến đổi tuyến tính không suy biến, vì vậy phần ma trận chuyển cơ sở được xếp vào chương này. Tuy nhiên, nó vẫn được trình bày một cách độc lập để bạn đọc có thể chuyển lên trên (chẳng hạn chương 3, chương 5) nếu muốn áp dụng sớm hơn.

Nội dung chính của chương này là việc qui một phép biến đổi tuyến tính về dạng đơn giản hơn để thuận tiện cho việc tính toán và áp dụng sau này. Cách thứ nhất là chéo hoá phép biến đổi tuyến tính, cách thứ 2 là "chia nhỏ" phép biến đổi tuyến tính trên các không gian con bất biến.

7.1. Ma trận chuyển cơ sở

7.1. Chứng minh rằng, nếu T là ma trận chuyển cơ sở (I) sang cơ sở (II) và S là ma trận chuyển cơ sở (II) sang cơ sở (III) thì

a) TS chuyển cơ sở (I) sang cơ sở (III) ;

b) T^{-1} chuyển cơ sở (II) sang cơ sở (I).

7.2. Viết ma trận chuyển cơ sở (I) sang cơ sở (II) và ma trận chuyển ngược lại :

a) (I) : $\{(1,-1),(1,1)\}$, (II) : $\{(3,1),(0,-2)\}$;

b) (I) : $\{(2,5),(3,7)\}$, (II) : $\{(4,5),(3,4)\}$.

7.3. Chứng minh rằng, nếu ma trận A chuyển cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$ sang cơ sở $\{u_1,...,u_n\}$ và ma trận B chuyển cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$ sang cơ sở $\{v_1,...,v_n\}$ thì $A^{-1}B$ chuyển cơ sở $\{u_1,...,u_n\}$ sang cơ sở $\{v_1,...,v_n\}$.

7.4. Cho các cơ sở (I) và (II). Viết lần lượt các ma trận chuyển cơ sở chính tắc sang (I), (II) và ma trận chuyển (I) sang (II)

a) (I) : $\{(1,5),(2,9)\}$, (II) : $\{(2,3),(1,7)\}$;

b) (I) : $\{(3,4),(7,9)\}$, (II) : $\{(2,-5),(-3,7)\}$.

7.5. Cho các cơ sở :

(I) : $\{(2,1),(3,2)\}$; (II) : $\{(5,3),(1,1)\}$; (III) : $\{(11,7),(6,4)\}$.

Viết ma trận chuyển (I) sang (II), (II) sang (III), (I) sang (III), viết toạ độ của véc tơ v = (1, 0) lần lượt đối với (I), (II), (III).

Hãy viết ma trận chuyển cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai (các Bài 7.6, 7.7, 7.8):

7.6.

a) (I) : $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$,

(II) : $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$;

b) (I) : $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

(II) : $\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$;

c) (I) : $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$,

(II) : $\{(0,0,1,1),(0,1,3,2),(1,3,5,3),(3,5,7,4)\}$.

7.7. (I) : $\{1,x,x^2,x^3\}$, (II) : $\{f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)\}$ trong đó $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ (trong $\mathbf{R}_4[x]$).

7.8.

$$\text{(I)} \quad : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{(II)} \quad : \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(trong M(2, R)).

7.9. Giả sử $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính; ma trận của f trong cặp cơ sở (I), (II) là A, trong cặp cơ sở (I'), (II') là B. Giả sử ma trận chuyển (I) sang (I') là T, ma trận chuyển (II) sang (II') là S. Chứng minh rằng $B = S^{-1}AT$.

7.10. Cho ánh xạ tuyến tính f với ma trận A trong cặp cơ sở chính tắc. Tìm ma trận B của f trong cặp cơ sở (I), (II) :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (I) $: \{(1,1,-1),(1,-1,1),(1,0,1)\}$, (II) $: \{(1,1),(1,2)\}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (I) $: \{(1,1),(1,2)\}$, (II) $: \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

7.11. Viết ma trận B của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở (I) biết ma trận A của nó trong cơ sở chính tắc:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (I) $: \{(4,-5),(-3,4)\}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (I) $: \{(1,0,0),(2,1,0),(3,2,1)\}$.

7.2. Giá trị riêng, véc tơ riêng

7.12. Chứng minh rằng nếu các giá trị riêng $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ của phép biến đổi tuyến tính f khác nhau từng đôi một thì hệ các véc tơ riêng tương ứng $\{v_1,\ldots,v_k\}$ độc lập tuyến tính .

7.13. Chứng minh rằng các giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính f không phụ thuộc vào ma trận của f (trong các cơ sở khác nhau).

7.14. Chứng minh rằng nếu giá trị riêng λ_0 của phép biến đổi tuyến tính f là nghiệm bội $k \geq 1$ của đa thức $|A-\lambda E|$ thì ứng với nó có không quá k véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

7.15. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên không gian véc tơ thực:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

7.16. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên không gian véc tơ phức:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.17. Tìm các không gian con riêng ứng với mỗi giá trị riêng λ của phép biến đổi tuyến tính f, biết :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7.18. Chứng minh rằng:

a) Không gian con O và V là bất biến đối với mọi phép biến đổi tuyến tính trên V ;

b) Imf, Kerf là bất biến đối với phép biến đổi tuyến tính f ;

7.19. Phép biến đổi tuyến tính f trên K- không gian véc tơ V được gọi là đồng dạng nếu $\exists k \in K, f(v) = kv, \forall v \in V$ (k được gọi là hệ số đồng dạng).

Chứng minh rằng phép biến đổi tuyến tính f trên V là đồng dạng khi và chỉ khi mọi không gian con của V đều là bất biến đối với f.

7.20. Cho $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x], \varphi(f(x)) = f'(x)$. Tìm tất cả các không gian con của $\mathbf{R}_n[x]$ là bất biến đối với φ.

7.21. Cho phép biến đổi tuyến tính f trên $\mathbf{R}^4$ với ma trận trong cơ sở $\{u_1, ..., u_4\}$ là

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng $\mathscr{L}\{u_1, u_2\}, \mathscr{L}\{u_3, u_4\}$ là bất biến đối với f.

7.22. Giả sử f là phép biến đổi tuyến tính trên K – không gian véc tơ n chiều với ma trận trong cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng các không gian con $\mathscr{L}\{u_1,...,u_k\}, 1 \le k \le n$, là bất biến đối với f.

b) Hỏi không gian con $\mathscr{L}\{u_1 + ... + u_n\}$ có bất biến đối với f không ?

7.23. Chứng minh rằng:

a) Nếu λ_0 là nghiệm bội k của đa thức $|A - \lambda E|$ thì không gian con riêng $P(\lambda_0)$ là bất biến đối với f và $dim\, P(\lambda_0) \le k$;

b) Nếu $\{u_1,...,u_k\}$ là hệ các véc tơ riêng của f thì $\mathscr{L}\{u_1,...,u_k\}$ bất biến đối với f ;

c) Nếu $\{u_1,...,u_k\}$ là hệ các véc tơ riêng độc lập tuyến tính của f thì có thể lập được 2^k không gian con bất biến đối với f .

7.24. Tìm các không gian con bất biến bằng các véc tơ riêng:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.25. Hãy chéo hoá các ma trận sau trên R hoặc C nếu có thể:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 4 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

7.3. Các phép biến đổi tuyến tính trên không gian Euclid

7.26. Hãy kiểm tra các ánh xạ tuyến tính sau có là ánh xạ tuyến tính trực giao:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$;

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$.

7.27. Cho không gian Euclid **C** (Bài 3.47) và ánh xạ $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 i$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng f là phép đẳng cấu trực giao.

7.28. Chứng minh rằng:

a) Mỗi ánh xạ tuyến tính trực giao là đơn ánh ;

b) Tích 2 ánh xạ tuyến tính trực giao là trực giao ;

c) Nếu *dim* $E = n$ $(n \geq 1)$ thì E đẳng cấu trực giao với $\mathbf{R}^n$;

d) Mỗi phép biến đổi tuyến tính trực giao trên không gian Euclid là phép tự đẳng cấu trực giao.

7.29. Giả sử f là phép biến đổi tuyến tính trên không gian Euclid E. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương:

a) f là biến đổi tuyến tính trực giao ;

b) $\|u\| = \|f(u)\|, \forall u \in E$;

c) f biến mỗi cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.

7.30. Chứng minh rằng các phép biến đổi trực giao trên mỗi không gian Euclid lập thành một nhóm đối với phép nhân ánh xạ.

7.31. Ma trận A thực, cấp n được gọi là ma trận trực giao nếu các cột của nó lập thành cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^n$. Chứng minh rằng phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbf{R}^n$ là trực giao khi và chỉ khi ma trận A của f trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

7.32. Chứng minh rằng:

a) Nếu A là ma trận thực, cấp n thì : A là trực giao $\Leftrightarrow$ A^t là trực giao.

b) Tập hợp các ma trận trực giao cấp n lập thành một nhóm đối với phép nhân.

7.33. Cho f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.

a) Chứng minh rằng f là trực giao ;

b) Xác định các ma trận A, B của f lần lượt trong các cơ sở $\{e_1, e_2\}$ và $\{(1,2),(2,2)\}$.

7.34. Xét không gian Euclid **C** (Bài 3.47) và ánh xạ $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, f(\alpha) = \overline{\alpha}$.

a) Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính trực giao;

b) Viết ma trận của f trong cơ sở $\{2+3i, 2-3i\}$.

7.35. Xét phép biến đổi tuyến tính trực giao f trên $\mathbf{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Viết các ma trận A, B của f lần lượt trong các cơ sở :

$$\{e_1, e_2\} \text{ và } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

7.36. a) Chứng minh rằng nếu f là biến đổi tuyến tính trực giao và λ là giá trị riêng của f thì $\lambda = \pm 1$;

b) Kiểm tra các ma trận sau là trực giao, tìm các giá trị riêng:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.37. Tìm các giá trị riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

7.38. Cho phép biến đổi tuyến tính trực giao f. Chứng minh rằng:

a) Nếu U là không gian con bất biến đối với f thì phần bù trực giao $U^{\perp}$ cũng bất biến đối với f ;

b) Nếu λ_1, λ_2 là các giá trị riêng khác nhau của f thì các véc tơ riêng tương ứng trực giao với nhau ;

c) Nếu λ_0 là nghiệm bội $k \geq 1$ của $|A - \lambda E|$ thì có k véc tơ riêng độc lập tuyến tính ứng với λ_0 .

7.39. Tìm các không gian con bất biến một chiều hoặc 2 chiều của phép biến đổi tuyến tính f với:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.40. Hãy chứng tỏ các phép biến đổi tuyến tính trên không gian đã cho là đối xứng :

a) Phép biến đổi tầm thường : $\theta(v) = \theta, \forall v \in E$;

b) Phép biến đổi đồng nhất : $id(v) = v, \forall v \in E$;

c) Phép biến đổi đồng dạng: $f(v) = \lambda v, \forall v \in E$ ($\lambda \in \mathbf{R}$ cho trước);

d) Phép chiếu lên k thành phần đầu tiên trên không gian $\mathbf{R}^n$:

$p(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_k,0,...,0)$, $\forall(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$ (với $1 \le k < n$).

7.41. Chứng minh rằng tập hợp các phép biến đổi đối xứng trên không gian Euclid E là **R** – không gian véc tơ đối với phép cộng và nhân hệ số thuộc **R**.

7.42. Giả sử f là phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbf{R}^n$. Chứng minh rằng, f là đối xứng khi và chỉ khi trong cơ sở trực chuẩn, ma trận của f là ma trận đối xứng.

7.43. Cho phép biến đổi tuyến tính f trên $\mathbf{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$

a) Chứng tỏ rằng f là đối xứng ;

b) Viết ma trận của f lần lượt trong các cơ sở sau: $\{e_1,e_2\}$, $\{(1,1),(2,1)\}$, $\{(1,1),(1,2)\}$.

7.44. Chứng minh rằng các phép biến đổi đối xứng trên không gian Euclid $E \neq O$ luôn luôn có giá trị riêng và véc tơ riêng.

7.45. Chứng minh rằng nếu f là phép biến đổi đối xứng và U là không gian con bất biến đối với f thì phần bù trực giao $U^{\perp}$ cũng bất biến đối với f.

7.46. Chứng minh rằng, mọi phép biến đổi đối xứng trên không gian Euclid chiều $n > 0$ đều có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính, do đó mọi ma trận thực, đối xứng đều đồng dạng với một ma trận đường chéo.

7.47. Hãy chéo hoá các ma trận sau :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.48. Chứng minh rằng nếu f là phép biến đổi đối xứng và λ_1, λ_2 là các giá trị riêng sao cho $\lambda_1 \neq \lambda_2$ thì các véc tơ riêng tương ứng v_1, v_2 trực giao với nhau.

7.49. Chứng minh rằng nếu A là ma trận thực, đối xứng thì có thể tìm được ma trận Q không suy biến sao cho Q^tAQ có dạng đường chéo.

7.50. Tìm ma trận B dạng đường chéo và ma trận Q sao cho $Q^tAQ = B$:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Đáp số và hướng dẫn

7.1. *Hướng dẫn.* Giả sử (I):$\{u_1,...,u_n\}$, (II):$\{v_1,...,v_n\}$, (III):$\{w_1,...,w_n\}$. Bằng ma trận ta có:

(1) $(v_1 ... v_n) = (u_1 ... u_n)T$,

(2) $(w_1 ... w_n) = (v_1 ... v_n)S$.

a) Thay (1) vào (2), ta có $(w_1 ... w_n) = (u_1 ... u_n)TS$ hay TS là ma trận chuyển $\{u_1,...,u_n\}$ sang $\{w_1,...,w_n\}$.

b) Từ (1) ta có $(u_1 \dots u_n) = (v_1 \dots v_n)T^{-1}$ hay T^{-1} chuyển $\{v_1, \dots, v_n\}$ sang $\{u_1, \dots, u_n\}$.

7.2. a) *Hướng dẫn.* Đặt $u_1 = (1,-1)$, $u_2 = (1,1)$; $v_1 = (3,1)$, $v_2 = (0,-2)$. Tính toán ta được $v_1 = u_1 + 2u_2$, $v_2 = u_1 - u_2$, vậy :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $$T = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

7.3. *Hướng dẫn.* Ta có :

(1) $(e_1 \dots e_n)A = (u_1 \dots u_n)$,

(2) $(e_1 \dots e_n)B = (v_1 \dots v_n)$.

Từ (1) ta có $(e_1 \dots e_n) = (u_1 \dots u_n)A^{-1}$, thay vào (2) được:

$$(u_1 \dots u_n)A^{-1}B = (v_1 \dots v_n).$$

Ta có điều phải chứng minh .

7.4. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 7.3.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -53 & 76 \\ 23 & -33 \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$(2,-1)_I$, $\frac{1}{2}(1,-3)_{II}$, $\frac{1}{2}(4,-7)_{III}$.

7.6. a) *Hướng dẫn.* Cần biểu diễn mỗi véc tơ thuộc cơ sở (II) qua các véc tơ thuộc cơ sở (I), ta lập các hệ phương trình tuyến tính và dùng phương pháp khử Gauss (chú ý rằng các cột của ma trận lần lượt là các véc tơ của (I) và (II)) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.9. *Hướng dẫn.* Giả sử $dim U = n$, $dim V = m$. Theo giả thiết, ta có các công thức biến đổi toạ độ (cũ qua mới) và cách tính ảnh $f(v)$, $v \in U$ như sau :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_I = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{I'}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{II} = S \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}_{II'},$$

$$(2) \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_I = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_I = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{II},$$

$$(3)\quad f\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{I'} = B\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{I'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}_{II'}.$$

Thay (1) vào (2), ta có :

$$(4)\quad S^{-1}AT\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{I'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}_{II'}.$$

Vì ma trận của ánh xạ tuyến tính là duy nhất (trong 1 cặp cơ sở), từ (3) và (4) suy ra $S^{-1}AT = B$.

7.10. *Hướng dẫn.* áp dụng Bài 7.9.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.11. a) $\begin{pmatrix} 83 & -65 \\ 106 & -83 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

7.12. *Hướng dẫn.* Chứng minh bằng quy nạp theo k.

7.13. *Hướng dẫn.* Giả sử A, B là các ma trận của phép biến đổi tuyến tính f và $T^{-1}AT = B$. Khi đó $|B - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda E| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| = |A - \lambda E|$.

7.14. *Hướng dẫn.* Giả sử λ_0 có h véc tơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, \ldots, v_h$ $(h < n = dim\,V)$. Bổ sung các véc tơ $v_{h+1}, \ldots, v_n$ để được cơ sở của V. Trong cơ sở này, f có ma trận là B, suy ra $|B - \lambda E| = (\lambda - \lambda_0)^h q(x)$ (vì $f(v_i) = \lambda_0 v_i$, $i = 1, \ldots, h$). áp dụng Bài 7.13, suy ra $(\lambda - \lambda_0)^h$ là ước của $|A - \lambda E|$. Vậy $h \le k$.

7.15. a) *Hướng dẫn.* Trước hết, tìm các giá trị riêng:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 .$$

Đa thức $p(\lambda)$ có nghiệm $\lambda = 2$, suy ra 2 là giá trị riêng của f.

Để tìm véc tơ riêng, ta có hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Vậy các véc tơ riêng tương ứng là : $k(1,-1)$, $k \neq 0$.

b) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = t(1,1,1)$, $t \neq 0$,

$\lambda_2 = -3$, $v_2 = t(5,3,7)$, $t \neq 0$,

$\lambda_3 = 0$, $v_3 = t(2,0,1)$, $t \neq 0$.

7.16. a) $\lambda_1 = 1+2i, v_1 = (1+2i,-1)$ (ta hiểu: đương nhiên $kv_1, k \neq 0$ cũng là véc tơ riêng ứng với λ_1, vậy ta chỉ liệt kê các véc tơ riêng độc lập tuyến tính),

$\lambda_2 = 1-2i, v_2 = (1-2i,-1)$.

b) $\lambda_1 = 3$, $v_1 = (10,8,3)$,

$\lambda_2 = i$, $v_2 = (0,1+i,-1)$,

$\lambda_3 = -i$, $v_3 = (0,1-i,-1)$.

7.17. a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4, P(1) = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}, P(-4) = \mathscr{L}\{(1,-4,1)\}$.

b) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$ (nghiệm bội 2), $P(5) = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}$, $P(-2) = \mathscr{L}\{(1,-1,0),(1,0,-3)\}$.

c) $\lambda = 2$ (nghiệm bội 3), $P(2) = \mathscr{L}\{(0,0,1)\}$.

d) $\lambda = 2$ (nghiệm bội 3), $P(2) = \mathscr{L}\{(1,0,2),(0,1,0)\}$.

7.19. *Hướng dẫn.* Giả sử mọi không gian con của V đều bất biến đối với f. Ta có nhận xét rằng: $\forall u \in V, f(u) = \lambda u, (\exists \lambda \in K)$ vì $\mathscr{L}\{u\}$ bất biến.

Giả sử $v \in V$, $v \neq \theta$, $f(v) = \lambda_0 v$. Ta chứng minh λ_0 là hệ số đồng dạng. Xét $u \in V$ bất kỳ, nếu $\{u, v\}$ phụ thuộc tuyến tính thì dễ dàng suy ra $f(u) = \lambda_0 u$, còn nếu $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính, ta có $f(u+v) = h(u+v)$ và $f(u) = ku$, từ đó suy ra $k = \lambda_0$ hay $f(u) = \lambda_0 u$.

7.20. $\mathbf{R}_m[x], 0 \leq m \leq n$. *Hướng dẫn.* Giả sử $U \neq O$ là một không gian con bất biến đối với φ, giả sử $f(x) \in U$ là đa thức có bậc lớn nhất và bậc đó bằng k. Vì U là bất biến, lần lượt suy ra $f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ thuộc U. Lại từ $f^{(k)}(x), \ldots, f'(x), f(x)$ thuộc U, lần lượt suy ra $1, x, \ldots, x^k$ thuộc U.

Vậy $U = \mathscr{L}\{1, x, \ldots, x^k\}$.

7.22. b) $\mathscr{L}\{u_1 + \ldots + u_n\}$ là không gian con bất biến đối với f nếu $a_{ij} = 0$ với $1 \leq i < j \leq n$ tức A là ma trận đơn vị.

7.23. Hướng dẫn.

a) Áp dụng Bài 7.14 ;

b) Giả sử $u_1, \ldots, u_k$ là các véc tơ riêng ứng với $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, khi đó, $\forall v = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i$, ta có $f(v) = \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i u_i \in \mathscr{L}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

c) Chú ý rằng $\{u_1, \ldots, u_k\}$ có 2^k tập con, kể cả $\varnothing$ ($\mathscr{L}(\varnothing) = O$).

7.24. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 7.23. Ở đây chỉ liệt kê các véc tơ riêng tìm được.

a) $(1,1,2), (2,-1,1)$;

b) $(-3,3,1), (0,4,1), (0,0,1)$;

c) $(1,1,1), (2,-1,-1), (0,1,-1)$;

d) $(1,1,1), (1,-1,0), (0,1,1)$.

7.25. a) *Hướng dẫn.* Cần tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT = B$ dạng chéo (xem lại Bài 7.9).

Trước hết giải tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f, được:

$$\lambda_1 = 4, \qquad v_1 = (1,1),$$
$$\lambda_2 = -1, \qquad v_2 = (2,-3).$$

Áp dụng kết quả trên: vì hệ $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính, ta chọn nó làm cơ sở (mới), trong cơ sở này $f(v_1) = 4v_1$, $f(v_2) = -v_2$, suy ra ma trận B của f là :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển cơ sở ban đầu $\{e_1, e_2\}$ sang cơ sở $\{v_1, v_2\}$ lập từ các cột toạ độ của v_1, v_2:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vậy $T^{-1}AT = B$ (bạn đọc thử kiểm tra).

Chú ý: Ma trận B không duy nhất, chẳng hạn có thể thay đổi thứ tự các số trên đường chéo, kéo theo sự thay đổi các cột của ma trận T. Thông thường ta sắp xếp các số dương trước, âm sau, số 0 sau cùng.

b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, $T = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

d) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4,\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

e) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i,\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

f) Không chéo hoá được .

7.26. a) Có ; b) Không .

7.27. *Hướng dẫn.* Cần chỉ ra f vừa là đẳng cấu (đối với không gian véc tơ) vừa bảo toàn tích vô hướng .

7.29. *Hướng dẫn.* Ta chứng minh : f bảo toàn độ dài véc tơ thì f cũng bảo toàn tích vô hướng. Thật vậy, giả sử $u, v \in E$, ta có $\|u+v\| = \|f(u+v)\|$

hay $(u+v).(u+v) = f(u+v).f(u+v) = (f(u)+f(v)).(f(u)+f(v))$,

suy ra $u.u + 2(u.v) + v.v = f(u).f(u) + 2f(u).f(v) + f(v).f(v)$.

Vậy $u.v = f(u).f(v)$.

7.31. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 7.29.

7.32. *Hướng dẫn.* a) Áp dụng: A là trực giao $\Leftrightarrow A^tA = E$;

b) Kiểm tra trực tiếp hoặc áp dụng Bài 7.30 .

7.33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.34. a) *Hướng dẫn.* Chẳng hạn, kiểm tra $\|\alpha\| = \|f(\alpha)\|, \forall \alpha \in \mathbf{C}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.35. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

7.36. a) *Hướng dẫn.* Giả sử v là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ, ta có $v.v = f(v).f(v) = \lambda^2(v.v)$, suy ra $\lambda^2 = 1$.

b) A không có giá trị riêng, B có các giá trị riêng $\lambda = \pm 1$.

7.37. a) $\lambda = -1$;

b) $\lambda = 1$;

c) $\lambda = 1$ (nghiệm bội 2) và $\lambda = -1$;

d) $\lambda = 1$.

7.38. *Hướng dẫn.* a) Cần chứng minh: nếu $v \in U^{\perp}$, $u \in U$ thì $f(v).u = 0$. Vì U bất biến đối với f nên $f|_U$ là đẳng cấu trên U, suy ra $u = f(u'), \exists u' \in U$.

Vậy $f(v).u = f(v).f(u') = v.u' = 0$.

b) Cách 1: áp dụng phần a). Cách 2: Giả sử λ_1, λ_2 là các giá trị riêng khác nhau, suy ra $\lambda_1.\lambda_2 = -1$. Giả sử v_1, v_2 là các véc tơ riêng ứng với λ_1, λ_2, ta có

$$v_1.v_2 = f(v_1).f(v_2) = \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2 = \lambda_1\lambda_2 v_1.v_2 = -v_1.v_2,$$

vậy $v_1.v_2 = 0$.

c) Áp dụng phần a) và chứng minh bằng quy nạp theo k.

7.39. *Hướng dẫn.* f có giá trị riêng $\lambda = 1$, $P(1) = \mathscr{L}\{(1,1,1)\}$ là không gian con bất biến 1 chiều. Phần bù trực giao của P(1) là không gian con bất biến 2 chiều $\mathscr{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$.

7.43. a) *Hướng dẫn.* Kiểm tra bằng định nghĩa, hoặc áp dụng Bài 7.42.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

7.44. *Hướng dẫn.* Cần chứng minh: nếu A là ma trận thực, đối xứng thì $|A - \lambda E|$ luôn luôn có nghiệm thực.

Ta coi A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính trên không gian véc tơ phức. Vậy A có giá trị riêng λ (đa thức $|A-\lambda E|$ luôn có nghiệm trên C) và véc tơ riêng tương ứng là $v=(x_1,\ldots,x_n)$. Từ v ta lập các ma trận $B=(x_1 \ldots x_n), \overline{B}=(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n)$. Ảnh của v được viết bằng ma trận:

(1) $\qquad AB^t=\lambda B^t$.

Xét ma trận $\overline{B}AB^t$ (cấp 1) ta có :

(2) $\qquad \overline{B}AB^t=(\overline{B}AB^t)^t=BA\overline{B}^t$,

(3) $\qquad \overline{\overline{B}AB^t}=B\overline{A}\overline{B}^t=BA\overline{B}^t$.

Từ (2), (3) suy ra $\overline{\overline{B}AB^t}=\overline{B}AB^t$ hay $\overline{B}AB^t$ là ma trận thực, từ (1) suy ra $\overline{B}AB^t=\overline{B}\lambda B^t=\lambda\overline{B}.B^t$. Vì $\overline{B}B^t$ là ma trận thực nên λ phải là số thực.

7.45. *Hướng dẫn.* Giả sử $v\in U^{\perp}$ và $u\in U$, cần chứng minh $f(v).u=0$. Thật vậy, vì f là đối xứng và vì $f(u)\in U$ nên ta có $f(v).u=v.f(u)=0$.

7.46. *Hướng dẫn.* áp dụng Bài 7.44 và 7.45.

7.47. a) $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$;

b) $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

c) $T=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$;

d) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.48. *Hướng dẫn.* Từ $v_1.f(v_2) = f(v_1).v_2$ suy ra

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1.v_2) = 0,$$

do đó $v_1.v_2 = 0$.

7.49. *Hướng dẫn.* áp dụng Bài 7.44, 7.45, tìm được các véc tơ riêng $u_1,...,u_n$ ứng với các giá trị riêng lần lượt là $\lambda_1,...,\lambda_n$.

Vậy có cơ sở trực chuẩn

$$\left\{ w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1,..., w_n = \frac{1}{\|u_n\|}u_n \right\}.$$

Từ cơ sở này ta có ma trận trực giao Q sao cho:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vì $Q^{-1} = Q^t$, ta có điều phải chứng minh.

7.50. a) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Chương 8

Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Trước hết, bạn đọc nên chuẩn bị thật tốt phần dạng song tuyến tính để hiểu kỹ về dạng toàn phương. Ở đây trình bày 3 phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc. Phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi dành cho dạng toàn phương trên K- không gian véc tơ với K là trường số bất kỳ. Đối với phương pháp Jacobi, việc tìm cơ sở chính tắc cần lưu ý nên nó được giới thiệu lại trong phần Đáp số và Hướng dẫn. Phương pháp giá trị riêng, véc tơ riêng dành cho dạng toàn phương trên không gian Euclid mà cơ sở chính tắc tìm được là hệ các trục chính (được áp dụng để tìm hệ toạ độ vuông góc cho đường bậc 2 và mặt bậc 2 ở chương 9). Một nội dung quan trọng khác là phân loại các dạng toàn phương trên không gian véc tơ thực với một số lượng bài tập đủ lớn để bạn đọc luyện tập.

8.1. Dạng song tuyến tính

8.1. Giả sử V là K – không gian véc tơ chiều $n \geq 1$, chứng minh rằng :

a) n số bất kỳ $a_1,...,a_n$ thuộc K luôn xác định một dạng tuyến tính trên V;

b) Tập D các dạng tuyến tính trên V lập thành K – không gian véc tơ n chiều và do đó $D \cong V$;

c) $\forall f \in D, \dim \operatorname{Ker} f \geq n-1$. Tìm Kerf nếu f được xác định bởi các số $a_1 = \ldots = a_n = 1$.

8.2. Chứng tỏ ánh xạ f là dạng tuyến tính, viết ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc $\{e_1, \ldots, e_n\}$ và $\{e\}, (e = 1)$, tìm Kerf:

a) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$;

b) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^{n-1} x_n$.

8.3. Giả sử f, g là các dạng tuyến tính trên K – không gian véc tơ V. Chứng minh rằng :

a) Ánh xạ $F : V \times V \to K$, $F(u,v) = f(u).g(v), \forall u, v \in V$ là dạng song tuyến tính trên V ;

b) Ánh xạ $F : V \times V \to K$, $F(u,v) = f(u).f(v), \forall u, v \in V$ là dạng song tuyến tính đối xứng trên V và là xác định dương khi $K = \mathbf{R}$ và $f \neq \theta$.

8.4. Cho $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $F(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ với $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ thuộc $\mathbf{R}^n$. Chứng minh rằng F là dạng song tuyến tính đối xứng, xác định dương. Trong trường hợp n = 2, hãy viết ma trận A, B của F lần lượt đối với cơ sở $\{(1,1),(1,2)\}$ và $\{(2,-1),(2,2)\}$, tìm ma trận T sao cho $T^t A T = B$.

8.5. Xét dạng song tuyến tính trong Bài 8.4 với n = 3. Hãy viết ma trận B của F đối với cơ sở $\{u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)\}$, tính F(u,v) với $u = (2,-3,1)$, $v = (3,-1,2)$ bằng ma trận B. Viết ma trận T chuyển cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ sang cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ và tính $T^t.T$.

8.6. Cho các phép chiếu $p_1, p_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ và cho $F(u, v) = p_1(u).p_2(v)$, $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$. Hãy viết ma trận A, B của F lần lượt đối với cơ sở chính tắc và cơ sở $\{(1,-1),(1,1)\}$. Tìm ma trận T sao cho $B = T^t AT$.

8.7. Chứng minh rằng nếu dạng song tuyến tính F có ma trận A đối xứng đối với một cơ sở nào đó thì ma trận của F đối với một cơ sở bất kì cũng là ma trận đối xứng.

8.8. a) Dạng song tuyến tính F trên $\mathbf{R}^2$ có ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ đối với cơ sở $\{(1,-1),(1,1)\}$, tìm ma trận A của F đối với cơ sở $\{e_1, e_2\}$;

b) Dạng song tuyến tính F trên $\mathbf{C}^2$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ đối với cơ sở $\{e_1, e_2\}$, tìm ma trận B của F đối với cơ sở $\{(1,i),(1,-i)\}$.

8.9. Giả sử F là dạng song tuyến tính trên $\mathbf{R}^2$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm cơ sở để ma trận của F có dạng đường chéo.

8.10. Chứng minh rằng nếu dạng song tuyến tính F không đối xứng thì không có cơ sở nào để ma trận của F có dạng đường chéo.

8.2. Dạng toàn phương

Các dạng toàn phương sau được xét trên trường số K thích hợp, chú ý rằng các hệ số chính tắc và cơ sở chính tắc không duy nhất :

8.11. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, viết cơ sở chính tắc tương ứng:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$;

b) $3X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2$;

c) $-4x_1^2 + 4x_1x_2 + 0,5x_2^2$;

d) $x_1^2 + x_2^2 + 2ix_1x_2$.

8.12. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, viết công thức biến đổi toạ độ:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

b) $x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

e) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

8.13. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chuẩn tắc, viết ma trận chuyển cơ sở ban đầu về cơ sở của dạng chuẩn tắc đó :

a) $x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

b) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

c) $x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

8.14. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc :

a) x_1x_3 ;

b) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

d) $3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

8.15. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Jacobi, viết cơ sở chính tắc, biết ma trận của nó:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Dạng toàn phương trên không gian véc tơ thực:

8.16. Kiểm tra xem các dạng toàn phương sau có là xác định dương không ?

a) $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$;

b) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$;

c) $7x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 + 3x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

e) $6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

f) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 5x_2x_3$;

g) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$;

h) $\sum\limits_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j$.

8.17. Viết dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau bằng cách tính các định thức con chính, hỏi chúng có là xác định dương không ?

a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

b) $x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 14x_2x_3$;

c) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 16x_2x_3$.

8.18. Xác định a để các dạng toàn phương sau là xác định dương:

a) $2x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $x_1^2 + 3x_2^2 + ax_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3$;

c) $x_1^2 + 6x_2^2 + (a-1)x_3^2 + 4x_1x_2 + x_2x_3$;

d) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$.

8.19. Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận của dạng toàn phương xác định dương. Chứng minh rằng :

a) $a_{ii} > 0,\ i = 1,\dots,n$;

b) Tồn tại ma trận không suy biến C cấp n sao cho $A = C^t.C$.

8.20. Phân tích ma trận đối xứng A thành tích $C^t.C$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

8.21. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng áp dụng các giá trị riêng, véc tơ riêng, viết hệ các trục chính :

a) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 6\sqrt{2}x_1x_2$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2$;

c) $2(x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$;

d) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

8.22. Hãy xác định hạng *r* và chỉ số dương quán tính *p*, chỉ số âm quán tính *q* của các dạng toàn phương sau :

a) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

b) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $-x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$;

e) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

f) $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_ix_j$.

Đáp số và hướng dẫn

8.2. a) $A = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$, $\text{Ker} f = \mathscr{L}\{e_2, \dots, e_n\}$;

b) $A = (1 \quad -1 \quad 1 \quad \dots \quad (-1)^{n-1})$, *dim* Kerf = n − 1 , có thể chọn cơ sở là hệ gồm :

$v_1 = (1, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, \dots, 0, 0)$, ... , $v_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, 1)$.

8.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

8.5. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^t.T = B$, $F(u,v) = 11$.

Hướng dẫn. Trong cơ sở chính tắc, ma trận của F là ma trận đơn vị E do đó $B = T^tET = T^tT$, mặt khác, trong cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ các véc tơ u, v có toạ độ lần lượt là $(2, -5, 4)$, $(3, -4, 3)$, bằng ma trận B ta có:

$$(2 \quad -5 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (11).$$

8.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.7. *Hướng dẫn.* Áp dụng công thức $T^tAT = B$.

8.8. a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $B = i\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.9. $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-2, 1)$. *Hướng dẫn.* Từ ma trận A ta có biểu thức toạ độ của dạng song tuyến tính là $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$; biến đổi biểu thức thành $(x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2$ với :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Biểu diễn toạ độ cũ qua mới:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2, \\ x_2 = y_2 \end{cases} \text{ hay } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra ma trận chuyển cơ sở ban đầu $\{e_1, e_2\}$ sang cơ sở mới là:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.10. *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 8.7 .

8.11. a) $y_1^2 - 8y_2^2$, $\{v_1 = (1,0),\ v_2 = (-3,1)\}$;

b) $2y_1^2 + y_2^2$, $\{v_1 = (1,1),\ v_2 = (0,-1)\}$;

c) $-y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$, $\left\{v_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ v_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$;

d) $y_1^2 + 2y_2^2$, $\{v_1 = (1,0),\ v_2 = (-i,1)\}$.

8.12. a) $y_1^2 + y_2^2$ với $x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, x_2 = y_2 - y_3, x_3 = y_3$;

b) $y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{9}{2}y_3^2$ với $x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}y_3, x_2 = y_2 - \frac{3}{2}y_3, x_3 = y_3$;

c) $y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$ với $x_1 = y_1 - 2y_2 - \frac{1}{3}y_3, x_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3, x_3 = y_3$;

d) $y_1^2 - 3y_2^2 + 9y_3^2$ với $x_1 = y_1 + 2y_2 - 2y_3, x_2 = y_2 - 2y_3, x_3 = y_3$;

e) $-y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$ với $x_1 = y_1 + 2y_2 - \frac{2}{3}y_3, x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3, x_3 = y_3$.

8.13. a) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$;

c) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

8.14. a) $y_1^2 - y_2^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hướng dẫn. a) Đặt: $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_3, x_3 = y_1 - y_2$.

d) Trước hết, biến đổi biểu thức của dạng toàn phương, được:

$$(1) \qquad (y_1 - 3y_2 + y_3)^2 - 4y_2^2 + 4y_2y_3 \text{ , với}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 , \\ x_2 = y_1 - y_2 , \\ x_3 = y_3 , \end{cases} \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tiếp tục biến đổi (1), được:

(3) $\quad z_1^2 - 4z_2^2 + z_3^2$, với

$$(4)\quad \begin{cases} y_1 - 3y_2 + y_3 = z_1, \\ \quad y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 = z_2, \\ \qquad y_3 \quad = z_3, \end{cases} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có (3) là dạng chính tắc và $T = T_1.T_2$ là ma trận chuyển cơ sở .

Chú ý. Từ (2) và (4) có thể biểu diễn trực tiếp x_1, x_2, x_3 qua z_1, z_2, z_3, suy ra ma trận T .

Mặt khác trong (3) có thể thay đổi thứ tự các hệ số chính tắc bằng cách đổi biến (để đưa hệ số âm xuống dưới) .

8.15. a) *Hướng dẫn.* Các định thức con chính là $D_1 = 2, D_2 = 1, D_3 = -5$.

Vậy dạng chính tắc của dạng toàn phương là:

$$\frac{1}{D_1}y_1^2 + \frac{D_1}{D_2}y_2^2 + \frac{D_2}{D_3}y_3^2 = \frac{1}{2}y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{1}{5}y_3^2$$

Cơ sở chính tắc $\{u_1, u_2, u_3\}$ được tính như dưới đây, trong đó t_{ij} $(1 \le i \le j \le 3)$ là các ẩn số cần tìm :

$$u_1 = t_{11}e_1 ,$$
$$u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 ,$$
$$u_3 = t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + t_{33}e_3 .$$

Ta có :

1) $\quad 2t_{11} = 1 \qquad \Rightarrow t_{11} = \dfrac{1}{2}$,

2) $\quad \begin{cases} 2t_{12} + t_{22} = 0, \\ t_{12} \quad + t_{22} = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow t_{12} = -1, t_{22} = 2$,

3) $\begin{cases} 2t_{13} + t_{23} + t_{33} = 0, \\ t_{13} + t_{23} + 2t_{33} = 0, \\ t_{13} + 2t_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow t_{13} = -\frac{1}{5}, t_{23} = \frac{3}{5}, t_{33} = -\frac{1}{5}$

Vậy $u_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), u_2 = (-1, 2, 0), u_3 = \frac{1}{5}(-1, 3, -1)$.

b) $y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$,

$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$.

Chú ý. Phương pháp Jacobi: đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng các định thức con chính.

Xét dạng toàn phương cho bởi ma trận A trong cơ sở ban đầu $\{e_1, ..., e_n\}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng A được xác định bởi dạng song tuyến tính đối xứng F và $a_{ij} = F(e_i, e_j)$, $i, j = 1, ..., n$.

Giả sử $D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, k = 1, ..., n$.

Ta đặt :

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = t_{11}e_1, \\ u_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_k = t_{1k}e_1 + t_{2k}e_2 + \dots + t_{kk}e_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + t_{3n}e_3 + \dots + t_{nn}e_n. \end{cases}$$

và gán cho chúng các điều kiện:

(2) $F(u_k, e_1) = ... = F(u_k, e_{k-1}) = 0, F(u_k, e_k) = 1, k = 1, ..., n.$

Từ (2) suy ra:

(3) $F(u_k, u_1) = ... = F(u_k, u_{k-1}) = 0, F(u_k, u_k) = t_{kk}, k = 1, ..., n.$

Vậy trong cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$, ma trận của dạng toàn phương là:

$$\begin{pmatrix} F(u_1, u_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F(u_n, u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Việc còn lại là phải tính các ẩn số t_{ij} $(1 \le i \le j \le n)$.

Áp dụng điều kiện (2) cho dòng k của (1) ta có hệ phương trình tuyến tính xác định $t_{1k}, ..., t_{kk}$:

$$\begin{cases} a_{11}t_{1k} + ... + a_{1k}t_{kk} = 0 , \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \\ a_{k1}t_{1k} + ... + a_{kk}t_{kk} = 1 . \end{cases}$$

Theo giả thiết $D_k \neq 0$, ta có nghiệm duy nhất $(t_{1k}, ..., t_{kk})$ và bằng quy tắc Cramer ta có $t_{kk} = \dfrac{D_{k-1}}{D_k}$ $k = 2, ..., n$,

riêng $t_{11} = \dfrac{1}{D_1}$.

8.16. *Chú ý :* Có nhiều cách khác nhau, chẳng hạn biến đổi thành biểu thức xác định dương hoặc tính các hệ số chính tắc ...

a) Có ; b) Có ; c) Có ; d) Có ;

e) Không ; f) Có ; g) Không ; h) Có .

8.17. a) $D_1 = D_2 = D_3 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

b) $D_1 = D_2 = D_3 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

c) $D_1 = D_2 = D_3 = 3$, $\frac{1}{3}y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$;

d) $D_1 = 2,\ D_2 = 1,\ D_3 = 1$, $\frac{1}{2}y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$.

8.18. a) *Hướng dẫn.* Đưa về dạng chính tắc $y_1^2 + y_2^2 + (a-5)y_3^2$ hoặc tính các định thức con chính $D_1 = 2, D_2 = 1, D_3 = a - 5$ suy ra $a > 5$;

b) $a > 3$; c) $a > \frac{9}{8}$; d) $0 < a < 2$.

8.19. *Hướng dẫn.* a) Chú ý rằng $a_{ii} = \omega(e_i) > 0$ với $i = 1,2,\ldots,n$;

b) Chỉ ra rằng tồn tại cơ sở để ma trận của dạng toàn phương là ma trận đơn vị .

8.20. a) *Hướng dẫn.* Áp dụng Bài 8.19 đưa dạng toàn phương đã cho về dạng chuẩn tắc, xác định dương với ma trận chuyển cơ sở là T, suy ra $C = T^{-1}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.22. *Hướng dẫn.* Xem các bài 7.49, 7.50 chương 7.

a) $8y_1^2 - y_2^2$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2})$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},-1)$;

b) $3y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$, $v_1 = (0,0,1)$,

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$;

c) $y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$,

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$;

d) $2y_1^2 + 3y_2^2$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$,

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

8.22. a) $r = 3$, $p = 0$, $q = 3$;

b) $r = 3$, $p = 1$, $q = 2$;

c) $r = 2$, $p = 0$, $q = 2$;

d) $r = 3$, $p = 3$, $q = 0$;

e) $r = 3$, $p = 3$, $q = 0$;

f) $r = n$, $p = 1$, $q = n - 1$.

Chương 9

Hình học giải tích

Hình học giải tích đã được học ở phổ thông trung học, vì vậy bài tập chương này cô đọng, phù hợp với yêu cầu đã đề ra. Để thống nhất với chương trình ở phổ thông và để áp dụng Đại số tuyến tính, phần đầu điểm qua phép tính véc tơ, đường thẳng, mặt phẳng, phần sau là trọng tâm, dành cho đường bậc 2 và mặt bậc 2, trong đó áp dụng dạng toàn phương, phép biến đổi đối xứng, phép biến đổi trực giao. Để nhận dạng các đường, mặt bậc 2, đôi khi không cần xét trong hệ toạ độ vuông góc và cũng không nhất thiết phải xét trong hệ toạ độ thuận. Bạn đọc nên xem xét cả những dạng suy biến của đường, mặt bậc 2 .

9.1. Các phép tính trên véc tơ - Đường thẳng và mặt phẳng

9.1. Tìm góc φ của hai véc tơ:

a) $\vec{a}(1,1,2)$, $\vec{b}(2,-1,1)$;

b) $\vec{a}(\sqrt{5},-\sqrt{7},2\sqrt{3})$, $\vec{b}(\sqrt{7},\sqrt{5},-2\sqrt{3})$;

c) $\vec{a}(\sqrt{6},2\sqrt{3},\sqrt{2})$, $\vec{b}(5,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

9.2. Cho $\vec{a}(2,3,\sqrt{3})$, $\vec{b}(1,-1,-2)$, tính $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{a}\wedge(-\vec{b})$, $\vec{b}\wedge\vec{a}$.

9.3. Tính diện tích hình bình hành xác định bởi các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tìm góc φ của $\vec{a}$, $\vec{b}$:

a) $\vec{a}(2,3,\sqrt{3})$, $\vec{b}(-2,3,\sqrt{3})$;

b) $\vec{a}(1,2,-4)$, $\vec{b}(2,4,1)$.

9.4. Tính diện tích tam giác biết ba đỉnh A(1,2,0), B(3,4,1), C(3,–2,3).

9.5. Tính thể tích của hình hộp xác định bởi 3 véc tơ : $\vec{a}(3,4,7)$, $\vec{b}(5,-2,3)$, $\vec{c}(-7,9,-2)$. Tính $[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$, $[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]$, $[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$.

9.6. Hỏi các điểm sau có cùng nằm trong một mặt phẳng :

a) A(8, 2, 5), B(2, 1, 3), C(5, 4, 9), D(6, 0, 1) ;

b) A(1, 1, 1), B(2, 8, 4), C(9, –8, 3), D(1, 4, 2) .

9.7. Tính thể tích hình chóp biết 4 đỉnh của nó :

A(6, 2, –3), B(1, 1, 2), C(1, 4, 5), D(6, 0, 1).

9.8. Xác định x, y, z để các véc tơ sau trực giao nhau từng đôi một:

a) $\vec{a}(1,2,z)$, $\vec{b}(2,y,4)$, $\vec{c}(x,2,-1)$;

b) $\vec{a}(x,x-1,x+1)$, $\vec{b}(x+1,x,x-1)$, $\vec{c}(x-1,x+1,x)$.

9.9. Chứng minh rằng nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trực giao nhau từng đôi một thì hoặc chúng không đồng phẳng hoặc có ít nhất một véc tơ bằng $\vec{0}$.

9.10. Viết phương trình đường thẳng vuông góc chung của các đường thẳng AB, CD và đi qua A, biết:

A(1, –1, 2), B(3, 1, 5), C(2, 0, 1), D(3, 2, –1).

9.11. a) Chứng minh rằng nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trực giao nhau từng đôi một thì:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\|\vec{c}\|.$$

b) Tính thể tích hình hộp có đỉnh S và các cạnh SA, SB, SC với $S(1,1,1)$, $A(2,2,3)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,0)$.

9.12. Cho các điểm : $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$, $C(2,-2,3)$, $D(2,2,1)$. Tìm hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng đi qua A, B, C.

9.13. Viết phương trình toạ độ và phương trình tham số của mặt phẳng qua ba điểm $A(1,-2,2)$, $B(5,3,1)$, $C(3,-3,5)$.

9.14. Viết phương trình toạ độ của mặt phẳng qua $A(1,-2,1)$, $B(2,3,-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x+2y-3z+5=0$.

9.15. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1,1,2)$, $B(7,-1,6)$.

9.16. Viết phương trình tham số và phương trình toạ độ của đường thẳng qua 2 điểm $A(2,3,-1)$, $B(4,-1,5)$.

9.17. Xác định tham số λ sao cho 2 đường thẳng cắt nhau, tìm giao điểm đó :

a) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{\lambda}$ và $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z}{1}$;

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$ và $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+\lambda}{1}$.

9.18. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(1,1,2)$, $B(3,0,5)$ và song song với đường thẳng :

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

9.19. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(6,-2,7)$ và vuông góc với đường thẳng :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

9.20. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(2,3,2)$ và đường thẳng :

$$\begin{cases} x+2y-3z-4=0, \\ x-z+2=0. \end{cases}$$

9.21. Cho điểm $A(0,0,4)$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x+y+2z+1=0, \\ 2x+y+8=0. \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng qua A và d ;

b) Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d .

9.22. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (1), (2) và vuông góc với mặt phẳng (3) :

a) (1) $x+y+z-1=0$,

(2) $2x+3y+3z-1=0$,

(3) $x-y+2z+3=0$;

b) (1) $x+2y+5z-1=0$,

(2) $2x+3y+4z-2=0$,

(3) $2x+4y+9z-3=0$.

9.23. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau, tìm góc giữa chúng :

a) $\begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-2y+z-1=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ x+5y+z-2=0; \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$, $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

9.24. Viết phương trình mặt phẳng qua gốc toạ độ và vuông góc với đường thẳng:

$x = 3 + 5t, \qquad y = 4 - t, \qquad z = -2 + t.$

Tìm góc giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng $x + y - z + 5 = 0$.

9.25. Cho mặt phẳng P và đường thẳng d :

$P: \quad x + y + z - 6 = 0,$

$d: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t.$

a) Hãy tìm giao điểm A của d và P, tìm hình chiếu H trên P của B(1,1,1)

b) Tìm góc giữa d và P.

9.26. Tìm góc giữa mặt phẳng $2x + 2y + 4z - 1 = 0$ và đường thẳng

$$\begin{cases} x + y \quad -z = 0, \\ x + 3y \quad +z - 10 = 0. \end{cases}$$

9.2. Đường bậc hai

9.27. Lập phương trình đường ellipse có tâm là gốc toạ độ và đi qua $A\left(3, \frac{7}{4}\right)$, $B\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{7}{3}\right)$; tìm giao điểm của nó với đường tròn $x^2 + y^2 = 14$.

9.28. Lập phương trình đường hyperbol có tâm là điểm A(1,0), có một đỉnh là B(3,0) và một tiêu điểm là C(5,0) ; tìm giao điểm của nó với đường thẳng $y = x - 1$.

9.29. Các phương trình sau xác định đường gì ?

a) $4x^2 + 5y^2 + 4xy - 4 = 0$;

b) $3x^2 + y^2 + 6xy + 4y = 0$;

c) $4x^2 + 9y^2 - 12xy - 20x - 5 = 0$.

9.30. Tìm ý nghĩa hình học của các phương trình sau:

a) $3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5}y + 7 = 0$;

b) $4x^2 + y^2 + 4xy + 20x + 10y = 0$;

c) $3x^2 - 3y^2 + 8xy - 1 = 0$.

Hãy đưa các đường bậc 2 về dạng chính tắc, nhận dạng (các Bài 9.31, 9.32, 9.33, 9.34) *:*

9.31. a) $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 5y - 22,5 = 0$;

b) $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 8x + 8y - 12 = 0$;

c) $5x^2 + 3y^2 + 4\sqrt{2}xy + \sqrt{2}x + y + \dfrac{3}{28} = 0$;

d) $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 0,8 = 0$.

9.32. a) $4xy - 3y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

b) $7x^2 + y^2 + 8xy + 2x + 2y - 9 = 0$;

c) $2x^2 - y^2 + 4xy + \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y + \dfrac{5}{24} = 0$;

d) $6xy - 8x^2 + x + 3y + 2,5 = 0$.

9.33. a) $4x^2 + y^2 + 4xy - 10x + 20y = 0$;

b) $3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 11\sqrt{3}\,x + 5y + 12,25 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 2xy - 10x - 2y + 9 = 0$.

9.34. a) $4x^2 + y^2 + 4xy + 20x + 10y + 25 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$;

c) $x^2 + 9y^2 + 6xy + 20x + 60y + 110 = 0$.

9.3. Mặt bậc hai

9.35. Nhận dạng các mặt bậc 2, chỉ ra trục đối xứng nếu có:

a) $x^2 + (y-1)^2 = 1$; b) $y^2 + 4z^2 = 4$;

c) $x^2 - 4y^2 = 4$; d) $y^2 + 2x = 0$;

e) $y^2 + z^2 + 2z = 0$; f) $y^2 - z^2 + 2z = 0$.

9.36. Cho mặt nón bậc 2: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ và giao tuyến của mặt đó với mặt phẳng z = 3 là :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Hãy xác định c và giao tuyến của mặt đó với mặt phẳng z = 1.

9.37. Viết phương trình mặt nón bậc 2 có đỉnh A(0, -1,0) và đường chuẩn

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

9.38. Viết phương trình mặt paraboloid elliptic qua gốc toạ độ, nhận Oy làm trục đối xứng và đi qua các điểm $A(5,4,-3)$, $B(\sqrt{5},2,3)$.

9.39. Viết phương trình giao tuyến của mặt $x^2 + z^2 = 2y$ với các mặt phẳng:

a) z = 2 ; b) y = 0 ;

c) y = 4 ; d) y = z + 1 .

9.40. a) Viết phương trình mặt ellipsoid tròn xoay trục Oz tâm O và đi qua các điểm $A(0,2,0)$, $B(1,\sqrt{2},\frac{3}{2})$;

b) Viết phương trình giao tuyến của mặt $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{3}=1$ với các mặt phẳng $x=\sqrt{3}$; $y=2$; $z=1$.

9.41. Viết phương trình giao tuyến của mặt $2x^2+y^2-z^2=0$ với các mặt:

a) $x=1$; b) $y=2-z$;

c) $z=2$; d) $y=\sqrt{3}(z+1)$.

9.42. Ý nghĩa hình học của các phương trình sau :

a) $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz=0$;

b) $4x^2+y^2+z^2-4xy+4xz-2yz-4=0$;

c) $x^2+5y^2+3z^2+4xy-2yz-6=0$;

d) $3x^2+12y^2+12xy-14y+14=0$;

e) $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x+4y-2z-8=0$.

9.43. Đưa các mặt bậc 2 về dạng chính tắc, viết hệ toạ độ vuông góc:

a) $x^2+y^2-z^2-2xy+2xz+2yz-8=0$;

b) $x^2+2y^2+z^2+2xy+4xz+2yz=0$;

c) $2xz-1=0$.

9.44. Đưa các mặt bậc hai về dạng chính tắc:

a) $x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz=0$;

b) $5x^2+3y^2+4z^2-4xz+4yz-7=0$;

c) $8x^2-7y^2+8z^2+8xy-2xz+8yz-9=0$.

Đáp số và hướng dẫn

9.1. a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; b) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; c) $\varphi = \arccos\frac{4}{5}$.

9.2. $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\sqrt{3} - 6, 4 + \sqrt{3}, -5\right)$,

$\vec{a} \wedge (-\vec{b}) = \vec{b} \wedge \vec{a} = \left(6 - \sqrt{3}, -4 - \sqrt{3}, 5\right)$.

9.3. a) $S = 8\sqrt{3}$ đơn vị diện tích (đvdt), $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

b) $S = 9\sqrt{5}$ đvdt, $\varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

9.4. $S = 8$ đvdt .

9.5. $V = 104$ đơn vị thể tích (đvtt); 104; -104; -104 .

9.6. a) Có ; b) Không .

9.7. $V = 15$ đvtt .

9.8. a) $x = -11$, $y = 13$, $z = -7$;

b) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9.9. *Hướng dẫn.* Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng khác $\vec{0}$ thì chúng độc lập tuyến tính tức không đồng phẳng.

9.10. $x = 1 + 10t$, $y = -1 - 7t$, $z = 2 - 2t$.

9.11. b) $V = 6$ đvtt (chú ý rằng $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ trực giao nhau từng đôi một) .

9.12. H(1,2,2).

9.13. $x - y - z - 1 = 0$;

$x = 1 + 4t_1 + 2t_2$, $y = -2 + 5t_1 - t_2$, $z = 2 - t_1 + 3t_2$.

9.14. $11x + y + 8z - 17 = 0$.

9.15. $3x - y + 2z - 14 = 0$.

9.16. $x = 2 + t, \qquad y = 3 - 2t, \qquad z = -1 + 3t;$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

9.17. a) $\lambda = 0, \quad A(2,-2,1)$;

b) $\lambda = -1, \ A(3,-2,2)$.

9.18. $4x - y - 3z + 3 = 0$.

9.19. $2x - y + 3z - 35 = 0$.

9.20. $x + y - 2z - 1 = 0$.

9.21. a) $10x + y - 16z + 64 = 0$;

b) $2x - 4y + z - 4 = 0$.

9.22. a) $x - y - z - 3 = 0$;

b) $58x + 61y - 40z - 58 = 0$.

9.23. a) $d_1 : x = 1 + 3t,\ y = 2t,\ z = t,$

$d_2 : x = 1 + 2t,\ y = -t,\ z = 1 + 3t,$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$;

b) $d_1 : x = 1 + t,\ y = -1,\ z = 1 + t,$

$d_2 : x = -1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2t,$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$.

9.24. $5x - y + z = 0, \quad \varphi = \arccos\frac{1}{3}$.

9.25. a) $A(3,0,3), \qquad H(2,2,2)$;

b) $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

9.26. $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

9.27. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, có 4 giao điểm là $\left(\frac{4\sqrt{7}}{3}, \pm\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$, $\left(\frac{-4\sqrt{7}}{3}, \pm\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$.

9.28. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, có 2 giao điểm là $(1+\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $(1-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

9.29. a) *Hướng dẫn.* Ta có $4x^2 + 5y^2 + 4xy = 4$. Đưa dạng toàn phương ở vế trái về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange, ta được $X^2 + 4Y^2 = 4$ với $X = 2x + y$, $Y = y$. Vậy phương trình đã cho xác định đường ellipse :

$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$ với $X = 2x + y$, $Y = y$.

Chú ý. Nếu muốn tìm hệ toạ độ xác định đường ellipse trên thì từ $X = 2x + y$, $Y = y$ suy ra $x = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y$, $y = Y$ và do đó ta có ma trận chuyển cơ sở là:

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ toạ độ là $(O; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ với $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

b) *Hướng dẫn.* Trước hết ta đưa dạng toàn phương $3x^2 + y^2 + 6xy$ về dạng chính tắc $3x_1^2 - 2y_1^2$ với $x_1 = x + y$,

$y_1 = y$. Vậy ta có $3x_1^2 - 2y_1^2 + 4y_1 = 0$ hay $3x_1^2 - 2(y_1 - 1)^2 + 2 = 0$. Đặt $X = x_1$, $Y = y_1 - 1$ suy ra phương trình đường hyperbol :

$$Y^2 - \frac{3}{2}X^2 = 1 .$$

Chú ý. Hệ toạ độ xác định đường hyperbol trên là : $(O'; \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ với $O'(0,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0)$, $\vec{v}_2 = (-1,1)$.

c) Đường parabol $X^2 = 30Y$ với $X = 2x - 3y - 5$, $Y = y + 1$.

9.30. a) Đường tròn ảo $X^2 + Y^2 = -1$ với $X = \sqrt{3}x + 1$, $Y = y + \sqrt{5}$;

b) Cặp đường thẳng song song $X^2 = 25$ với $X = 2x + y + 5$;

c) Đường hyperbol $X^2 - Y^2 = 1$ với $X = 2x + y$, $Y = x - 2y$.

9.31. a) *Hướng dẫn.* Xét dạng toàn phương $3x^2 + 3y^2 + 4xy$ với ma trận là :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm được các giá trị riêng và véc tơ riêng của A là :

1) $\lambda = 1, \vec{u}_1 = (1,-1)$,

2) $\lambda = 5, \vec{u}_2 = (1,1)$.

Bằng $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ta lập cơ sở trực chuẩn

$$\left\{\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

suy ra ma trận chuyển cơ sở và công thức biến đổi toạ độ (cũ qua mới) :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Trong hệ toạ độ $(O;\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, ta có :

$$x_1^2 + 5y_1^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) + 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) - 22{,}5 = 0$$

$$x_1^2 + 5\left(y_1^2 + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2}\right) - 25 = 0$$

$$x_1^2 + 5\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 25 = 0$$

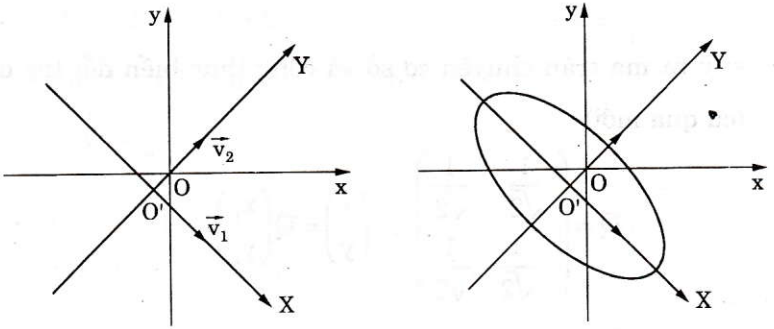
Đặt $x_1 = X$, $y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = Y$, ta có phương trình đường ellipse :

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{5} = 1 \quad \text{(Hình 1).}$$

Hệ toạ độ vuông góc là : $(O';\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ với :

$$O'\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Chú ý rằng toạ độ của O' lấy trong hệ $(O;\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ (trong hệ Oxy là $O'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.



Phép quay và phép tịnh tiến hệ trục

$$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{5}=1$$

Hình 1.

b) Đường ellipse $\dfrac{X^2}{8}+\dfrac{Y^2}{2}=1$;

c) Điểm gốc $X^2+7Y^2=0$;

d) Điểm gốc $X^2+5Y^2=0$.

9.32. a) *Hướng dẫn.* Tính được:

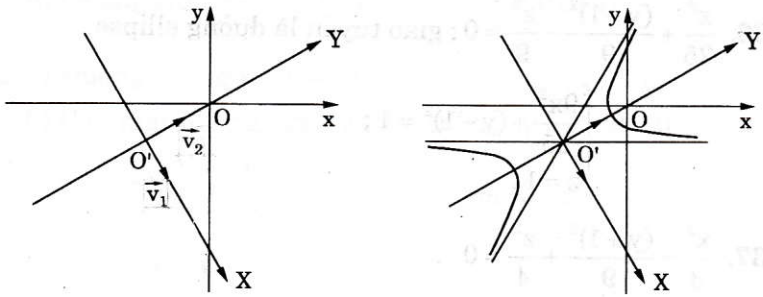
$$\lambda_1=1,\ \vec{u}_1=(2,1)\text{, chọn } \vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),$$

$$\lambda_2=-4,\ \vec{u}_2=(1,-2)\text{, chọn } \vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)\ .$$

Suy ra $x_1^2+\left(2\sqrt{5}\right)x_1-4y_1^2+1=0$. Đặt $X=x_1+\sqrt{5}$, $Y=y_1$, ta có phương trình đường hyperbol:

$$\frac{X^2}{4}-Y^2=1 \quad \text{(Hình 2)}.$$

Hệ toạ độ vuông góc là $(O';\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ với : $O'(-\sqrt{5},0)$ (trong Oxy là $O'(-2,-1)$).



Phép quay và phép tịnh tiến hệ trục $\frac{X^2}{4} - Y^2 = 1$

Hình 2.

b) Đường hyperbol $X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1$;

c) Cặp đường thẳng cắt nhau $3X^2 - 2Y^2 = 0$;

d) Cặp đường thẳng cắt nhau $X^2 - 9Y^2 = 0$.

9.33. a) Đường parabol $Y^2 = 2\sqrt{5}X$;

b) Đường parabol $Y^2 = 2\sqrt{3}X$;

c) Đường parabol $Y^2 = 2\sqrt{2}X$.

9.34. a) Cặp đường thẳng trùng nhau $Y^2 = 0$;

b) Cặp đường thẳng song song $Y^2 = 1$;

c) Cặp đường thẳng ảo $Y^2 = -1$.

9.35. a) Mặt trụ tròn, trục y = 1 ;

b) Mặt trụ ellipse, trục Ox ;

c) Mặt trụ hyperbol, trục Oz ;

d) Mặt trụ parabol ;

e) Mặt trụ tròn, trục z = -1 ;

f) Mặt trụ hyperbol, trục z =1 .

9.36. $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{z^2}{9}=0$; giao tuyến là đường ellipse :

$$\begin{cases}\frac{9x^2}{25}+(y-1)^2=1\,;\\ z=1\,.\end{cases}$$

9.37. $\frac{x^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{z^2}{4}=0$.

9.38. $\frac{x^2}{5}+\frac{z^2}{3}=2y$.

9.39. a) Đường parabol $x^2=2(y-2)$, $z=2$;

b) Gốc toạ độ $x^2+z^2=0$, $y=0$;

c) Đường tròn $x^2+z^2=8$, $y=4$;

d) Đường tròn $x^2+(z-1)^2=3$, $y=z+1$.

9.40. a) $\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;

b) Các giao tuyến là :

$$\begin{cases}\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1\,,\\ x=\sqrt{3}\,;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x^2}{3}+z^2=1\,,\\ y=2\,;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1\,,\\ z=1\,.\end{cases}$$

9.41. a) Đường hyperbol $\frac{z^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$, $x=1$;

b) Đường parabol $x^2=2(z-1)$, $y+z=2$;

c) Đường ellipse $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, $z=2$;

d) Đường tròn $x^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$, $y=\sqrt{3}(z+1)$.

9.42. a) Đường thẳng $x=y=z$;

b) Cặp mặt phẳng $(2x-y+z+2).(2x-y+z-2)=0$;

c) Mặt ellipsoid $\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{6}+\frac{Z^2}{3}=1$; với $X=x+2y$,

$Y=y-z$, $Z=z$;

d) Mặt trụ parabol $3X^2=14Y$; với $X=x+2y$, $Y=y-1$;

e) Cặp mặt phẳng $(x+2y-z+4)(x+2y-z-2)=0$.

9.43. a) Mặt hyperboloid 1 tầng $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}-\frac{Z^2}{4}=1$, hệ toạ độ vuông góc $(0;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ với $\vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\vec{v}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

b) Mặt nón $4X^2+Y^2-Z^2=0$, hệ toạ độ vuông góc $(0;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ với $\vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, $\vec{v}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

c) Mặt trụ heperbol $X^2-Y^2=1$, hệ toạ độ vuông góc $(0;\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ với $\vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\vec{v}_3=(0,1,0)$.

9.44. a) $X^2+Y^2=0$;

b) $X^2+4Y^2+7Z^2=7$;

c) $X^2+Y^2-Z^2=1$.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1999.
2. Trần Trọng Huệ, *Đại số và Hình học giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2000.
3. Trần Trọng Huệ, *Đại số tuyến tính và Hình học giải tích,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.
4. A.G. Kurosh, *Giáo trình Đại số cao cấp*, NXB Nauka, Moskova, 1977.
5. D.K. Fadeev, I.S. Sominski, *Tuyển tập các bài tập Đại số cao cấp,* NXB Fizmatgiz, Moskva, 1977.
6. I.V. Proskuryakov, *Tuyển tập các bài tập Đại số tuyến tính*, NXB Nauka, Moskova, 1978.